UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Identidades e Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados para a álgebra $M_n(K)$

Por

Andreza Katyusya Gomes de Moraes

Sob Orientação

Prof. Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo

CAMPINA GRANDE - PB
Agosto, 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Andreza Katyusya Gomes de Moraes

Identidades e Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados para a álgebra $M_n(K)$

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientado por Leomaques Francisco Silva Bernardo

CAMPINA GRANDE - PB
Curso de Matemática, modalidade Bacharelado

Dedico este trabalho à minha querida avó Maria da Guia (in memoriam).

Agradecimentos

Aos meus pais Rejane e Rivaldo que são a base da pessoa que sou hoje, todo esforço e dedicação durante toda minha vida.

À minha avó Maria da Guia (in memoriam), cuja presença foi essencial na minha vida e a pessoa que tinha mais orgulho, mais que meus pais, por me ver na graduação, era motivador ver o seu orgulho em dizer para qualquer pessoa *"minha neta estuda matemática"*.

Às minhas tias por sempre me acharem muito "sabida" e me deixar puxar o pé dos meus primos para melhorarem as notas em matemática.

Aos professores da UFCG pela minha formação, em especial aos professores Claudemir Fidelis, que foi o primeiro incentivador no curso do bacharelado e orientador em iniciação científica, e o professor Leomaques Bernardo pela orientação nesse final de curso.

Ao PET Matemática e Estatística pela contribuição na minha formação e experiências das quais pude adquirir durante o tempo em que participei, em especial ao então tutor professor José Lindomberg Barreiro pela compreensão.

Aos amigos dos quais pude conhecer durante todo o período de graduação que fizeram essa caminhada um pouco mais leve, diante de muitos obstáculos que passei até aqui, em especial aquelas que contribuíram também em minha vida pessoal Francielly, Mayara e Cássia.

Ao professor Antônio Pereira Brandão Júnior por ter aceito participar da banca avaliativa, a qual é de extrema importância e grande honra para mim.

A todos muito obrigada!

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre identidades e polinômios centrais para a álgebra das matrizes $M_n(K)$. Mais precisamente, apresentamos as descrições das identidades e polinômios centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados para a álgebra $M_n(K)$ (matrizes $n \times n$ sobre um corpo K), quando a característica de K é zero.

Abstract

In this work we study polynomial identities and central polynomials for matrix algebras. More precisely, we present the description of the identities and $\mathbb{Z}_n$-graded central polynomials for the algebra $M_n(K)$ (the $n \times n$ matrices over the field K) when the characteristic of K is zero.

Sumário

Introdução

Uma identidade polinomial de uma álgebra A é um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em variáveis não comutativas que se anula quando avaliado em quaisquer elementos de A. Dizemos que A é uma PI-álgebra quando existe um polinômio não nulo nestas condições. Podemos citar como exemplos de PI-álgebras as álgebras comutativas, as de dimensão finita e as nilpotentes. Uma vez que as identidades polinomiais dizem muito sobre a estrutura de uma álgebra, seu estudo passa a ser de grande relevância.

A teoria das álgebras com identidades polinomiais, ou PI-teoria, teve início com trabalhos de matemáticos como Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Dubnov e Ivanov (podemos citar como exemplos [32], [33], [42], [18]), que tratavam da estrutura de anéis (ou álgebras) que satisfazem uma identidade polinomial, e começou a se desenvolver mais intensamente por volta de 1950 quando foi provado o Teorema de Amitsur-Levitzki [16], o qual afirma que a álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K satisfaz a identidade "standard" de grau $2n$. Ao longo dos anos, a PI-teoria tem sido desenvolvida e exposta através de excelentes trabalhos (artigos e livros) de matemáticos como Nagata, Higman, Posner, Amitsur, Herstein, Procesi, Rowen, Shirshov, Drensky (podemos citar como exemplos [44], [31], [46], [2], [28], [29], [47], [52], [53], [54], [17]) entre outros.

Uma das questões centrais na PI-teoria está relacionada à descrição das identidades polinomiais de uma álgebra, isto é, a determinação de uma base para o T-ideal (ideal das identidades) desta álgebra. Em 1950, Specht levantou o seguinte questionamento: *"Toda álgebra associativa possui uma base finita para suas identidades polinomiais?"*. Esta pergunta ficou conhecida como Problema de Specht. Em 1987, Kemer, em seu importante trabalho ([35],[36]) sobre a estrutura dos T-ideiais em característica zero, deu uma resposta afirmativa para este problema. Contudo, Kemer não mostra como determinar uma tal base finita e portanto não resolve o problema da descrição das identidades de uma álgebra, problema este que continua em aberto até hoje, tendo sido resolvido apenas para algumas álgebras em particular.

As identidades da álgebra de Grassmann E foram descritas em característica zero por Latyshev [41] e por Krakowski e Regev [39] (veja também o artigo [26] para as identidades de E sobre corpos infinitos de característica diferente de 2). A descrição das identidades de $M_n(K)$ é conhecida apenas no caso $n = 2$ e foi dada por Razmyslov [50] e Drensky [16], em característica zero, e por Koshlukov [6], para corpos infinitos de característica diferente de 2. No caso de K ser um corpo finito as identidades de $M_n(K)$ foram descritas por Maltsev e Kuzmin [40] no caso $n = 2$ e por Genov e Siderov quando $n = 3$ ou 4 ([24] e [25]).

Uma das maiores ferramentas no trabalho de Kemer foi o uso de identidades graduadas. Este tipo de identidade é uma generalização das identidades ordinárias e tem uma estreita relação com elas. As álgebras E, $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ possuem $\mathbb{Z}_2$-graduações naturais e os geradores de suas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas já são conhecidos. As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(K)$ e de $M_{1,1}(E)$ foram descritas por Di Vincenzo [15], em característica zero, e por Koshlukov e Azevedo [6], para corpos infinitos de característica diferente de 2. No caso das álgebras $M_n(K)$, as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas e as $\mathbb{Z}_n$-graduadas foram descritas para n qualquer por Vasilovsky ([57] e [58]), em característica zero, e por Azevedo ([5] e [4]), para corpos infinitos.

Um outro conceito também de grande importância na PI-teoria é o de polinômio central. Um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dito central para uma álgebra A se resulta em um elemento do centro de A quando avaliado em quaisquer elementos desta álgebra. As identidade polinomiais são exemplos naturais de polinômios centrais, conhecidas por polinômios centrais triviais. Os polinômios constantes também são considerados polinômios centrais triviais. Em 1956, Kaplansky [34] propôs um problema sobre a existência de polinômio central não-trivial (isto é, não identidade e sem termo constante) para a álgebra das matrizes $M_n(K)$, onde $n > 2$, sendo que no caso $n = 2$ já se conhecia o polinômio de Hall $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_3, x_4][x_1, x_2]$. Este problema foi solucionado de maneira independente por Formanek (veja [19]) e por Razmyslov (veja [49]).

No caso das álgebras $M_n(K)$, geradores dos polinômios centrais são conhecidos apenas no caso $n = 2$, e foram determinados por Okhitin [45], quando $charK = 0$, e por Colombo e Koshlukov [14], quando K é infinito e de característica diferente de 2. Uma descrição detalhada da estrutura de módulo dos polinômios centrais para $M_2(K)$, quando $charK = 0$, pode ser vista em Formanek [20]. No caso da álgebra exterior, um estudo dos polinômios centrais é feito em [1].

A importância dos conceitos de identidades polinomiais e polinômios centrais graduados, e o fato de se saber pouco sobre as descrições das identidades e dos polinômios centrais da álgebra das matrizes sobre um corpo são motivações importantes para o estudo de tais polinômios. Neste trabalho, apresentaremos um estudo sobre a descrição das identidades e polinômios centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados para a álgebra $M_n(K)$, no caso de K ser um corpo de característica zero. No caso das álgebras $M_n(K)$, as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas foram descritas para n qualquer por Vasilovsky ([57] e [58]), em característica zero, e por Azevedo ([5] e [4]), para corpos infinitos. Já os polinômios centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados foram descritos por Brandão [10].

Esse trabalho está organizado em dois capítulos. No primeiro capítulo são apresentados conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento do trabalho. No segundo, apresentamos as descrições das identidades e polinômios centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados para a álgebra $M_n(K)$, onde K é um corpo de característica zero. Nestas descrições consideramos a graduação natural de $M_n(K)$ pelo grupo $\mathbb{Z}_n$.

1 Capítulo 1

1.1 Álgebras

Neste capítulo apresentaremos os conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho (podemos citar [11], [13], [21], [30], [22], [23], [27], [43]). No texto K denotará um corpo e, a menos de alguma menção em contrário, todas as álgebras e espaços vetoriais serão definidos sobre K.

Definição 1.1.1. *Uma K-álgebra (álgebra sobre K ou álgebra) é um par $(A, *)$, onde A é um espaço vetorial e $*$ é uma operação binária em A que é uma aplicação bilinear, ou seja, $* : A \times A \longrightarrow A$ satisfaz*
I) $(a + b) * c = a * c + b * c$
II) $a * (b + c) = a * b + a * c$
III) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$
para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Na definição acima, $*$ é chamado de produto ou multiplicação. Para simplicidade de notação, denotaremos uma K-álgebra $(A, *)$ por A e escreveremos ab ao invés de $a * b$, para $a, b, \in A$. Definimos $a_1a_2 \ldots a_na_{n+1}$ por $(a_1a_2 \ldots a_n)a_{n+1}$ para $a_i \in A$. Um subconjunto β será dita uma **base** da álgebra A se β for uma base de A como espaço vetorial. Neste caso, definimos a **dimensão** de A como sendo a dimensão do espaço vetorial A.

Definição 1.1.2. *Uma álgebra é dita ser:*

- *Associativa se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$;*
- *Comutativa se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$;*
- *Unitária se o produto possui elemento neutro, isto é, se existe um elemento $1_A \in A$ chamado de unidade de A tal que $1_Aa = a1_A = a$, para todo $a \in A$;*
- *Álgebra de Lie se para quaisquer $a, b, c \in A$ valem $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c+(bc)a+(ca)b = 0$ (identidade de Jacobi);*
- *Nilpotente se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que o produto de quaisquer $n + 1$ elementos de A com qualquer disposição de parenteses é igual a zero (se A é de Lie ou associativa, isto equivale a dizer que $a_1a_2 \ldots a_na_{n+1} = 0 \in A$). Neste caso, definimos o índice (ou classe) de nilpotência de A como sendo o menor n que satisfaz essa condição.*
- *Nil se para cada $a \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. O elemento a é chamado de nilpotente e o menor natural n com tal propriedade é denominado índice de Nilpotência de a. quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$ para todo $a \in A$, dizemos que A é nil de índice limitado.*

Ao longo desse trabalho A denotará uma álgebra associativa, a menos de menção contrária.

Definição 1.1.3. *O comutador de dois elementos $a, b \in A$ é definido por $[a,b] = ab - ba$.*

Observação 1.1.4. *Na identidade de Jacobi para todo $a, b, c \in A$, temos $[a,[b,c]] + [c,[a,b]] + [b,[c,a]] = 0$, onde $[\ ,\ ]$ é chamado comutador.*

Observação 1.1.5. *Se A é uma álgebra nilpotente, então é nil de índice limitado. Claramente uma álgebra nil não pode ter unidade.*

De fato, suponha que possui unidade, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1^n = 0$. Note que $1 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1}_{n-vezes} = 0 \Rightarrow 1 = 0$, um absurdo!

Observação 1.1.6. *Se A e B são espaços vetoriais, β uma base de A e $f : \beta \longrightarrow B$ é uma aplicação qualquer, então existe uma única aplicação linear $F : A \longrightarrow B$ estendendo f. Além disso, se $g : \beta \times \beta \longrightarrow A$ é uma aplicação bilinear $G : A \times A \longrightarrow A$ estendendo g. Assim, para definir uma estrutura de álgebra em A, basta definir o produto para os elementos de uma base. Uma vez definido o produto, verifica-se que A é uma álgebra associativa se, e somente se, $(v_1v_2)v_3 = v_1(v_2v_3)$ para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in \beta$. Isto deve-se ao fato de que a aplicação $h : A \times A \times A \longrightarrow A$, definida por $h(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$, sendo trilinear, é nula se, e somente se, é nula em $\beta \times \beta \times \beta$.*

Exemplo 1.1.7. *O espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K, munido da multiplicação usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade a qual é exatamente a matriz identidade I_n.*

Verificando para $n = 2$. Sejam $A, B, C \in M_2(K)$ onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$. Note que

$$\begin{aligned}
(AB)C &= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (ae+bg)i+(af+bh)k & (ae+bg)j+(af+bh)l \\ (ce+dg)i+(cf+dh)k & (ce+dg)j+(cf+dh)l \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
A(BC) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(ei+fk)+b(gi+hk) & a(ej+fl)+b(gj+hl) \\ c(ei+fk)+d(gi+hk) & c(ej+fl)+d(gj+hl) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Como a soma e a multiplicação usual são associativas, obtemos que $(AB)C = A(BC)$. Observe ainda que, sendo $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz identidade, temos

$$AI_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Portanto, I_2 é a unidade de $M_2(K)$.

Nesta álgebra é importante destacar as matrizes elementares E_{ij}, para $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. É fácil ver que elas formam uma base para $M_n(K)$ e portanto a dimensão desta álgebra é n^2. Mais geralmente, se A é uma álgebra, consideremos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A. O produto em $M_n(A)$ é análogo ao produto em $M_n(K)$. Temos que $M_n(A)$, munido deste produto, é uma álgebra.

Exemplo 1.1.8. *Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$. Definimos a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) de V, denotada por E, como sendo a álgebra com base*

$$\{1_E, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{ik} |\, i_1 < i_2 < \dots i_k, k \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pelas relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$.

Destacamos em E os seguintes subespaços vetoriais:

- E_0, gerado pelo conjunto $\{1_E, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m} |\, \text{m é par}\}$
- E_1, gerado pelo conjunto $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} |\, \text{k é ímpar}\}$.

Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. Desde que $e_ie_j = -e_je_i$, observe que trocando a posição de e_{j_1} tem-se

$$(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}) = (-1)^m e_{j_1}(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})(e_{j_2}\dots e_{j_k})$$

agora, trocando a posição de e_{j_2} tem-se

$$(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}) = (-1)^m(-1)^m e_{j_1}e_{j_2}(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})(e_{j_3}\dots e_{j_k})$$

continuando com esse processo obtemos que

$$(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k})(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})$$

para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$. Assim, podemos concluir que para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$ temos que $ax = xa$, e para quaisquer $b, c \in E_1$ temos que $bc = -cb$. É fácil ver que se $charK = 2$, então E é uma álgebra comutativa.

Considerando E' a álgebra com base $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{ik} |\, i_1 < i_2 < \dots i_k, k \geq 1\}$ temos que E' não tem unidade e é chamada de **álgebra exterior sem unidade**.

Se A é uma álgebra associativa e $a, b \in A$, definimos o comutador $[a, b] = ab - ba$ e $a \circ b = ab + ba$. Mais geralmente definimos o comutador de comprimento n como sendo

$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n]$, onde $a_i \in A$. A partir de um cálculo direto, podemos mostrar que

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \quad \text{para quaisquer } a, b, c \in A \tag{1}$$

De fato, veja que $[ab, c] = abc - cab$. Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} a[b, c] + [a, c]b &= a(bc - cb) + (ac - ca)b \\ &= abc - acb + acb - cab \\ &= abc - cab \end{aligned}$$

Portanto, $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$.

Se $a \in A$ e $T_a : A \longrightarrow A$ é tal que $T_a(x) = [x, a]$, então por (1) segue que T_a é uma derivação. Logo, usando indução sobre n pode-se mostrar que

$$[a_1 a_2 \ldots a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1 \ldots a_{i-1}[a_i, c]a_{i+1} \ldots a_n \tag{2}$$

Se A é uma álgebra , V e W subespaços vetoriais de A, definimos o produto VW como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{xy | \, x \in V, y \in W\}$.

Definição 1.1.9. *Um espaço vetorial B de uma álgebra A será denominado de* ***subálgebra*** *de A se $BB \subseteq B$ e $1 \in B$. Um subespaço vetorial I de A será denominado de* ***ideal*** *de A se $AI \subseteq I$ e $IA \subseteq I$, ou seja, se $ax, xa \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.*

Definição 1.1.10 (Subálgebra gerada)**.** *A subálgebra de A gerada por S, geralmente denotada por $K\langle S \rangle$, como sendo a interseção de todas as álgebras de A que contém $S \cup \{1\}$. Caso a álgebra não tenha unidade tira-se o 1 dessa definição.*

Exemplo 1.1.11. *Considere a álgebra exterior E. Dado $n \in \mathbb{N}$ consideremos o subespaço E_n de E gerado pelo conjunto*

$$\{1, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{ik} | \, i_1 < i_2 < \ldots i_k \leq n\}.$$

O subespaço E_n é uma subálgebra de E de dimensão 2^n e é a álgebra exterior do espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. É possível verificar esse fato através de uma relação biunívoca com o conjunto das partes $P(A)$.

Exemplo 1.1.12 (Centro de uma álgebra)**.** *Seja A uma álgebra. O conjunto $Z(A) = \{a \in A | \, ax = xa, \forall x \in A\}$ é uma subálgebra de A denominada* ***centro de*** *A. Um fato conhecido da Álgebra Linear elementar é que dado $n \in \mathbb{N}$ tem-se $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n \times n} | \, \lambda \in K\}$ (matrizes escalares). Se $A = E$ (álgebra exterior), então $Z(E) = E_0$ ($char K \neq 2$).*

Verificaremos para o caso de $n = 2$. Seja $\lambda \in K$, temos que $\lambda I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Considere $X \in M_2(K)$, onde $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Note que

$$\lambda I_{2\times 2} \cdot X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 \\ \lambda x_3 & \lambda x_4 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$X \cdot \lambda I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\lambda & x_2\lambda \\ x_3\lambda & x_4\lambda \end{pmatrix}.$$

Como a multiplicação usual é comutativa temos que $\lambda I_{2\times 2} \cdot X = X \cdot \lambda I_{2\times 2}$, para quaisquer $X \in M_2(K)$ e $\lambda \in K$.
Reciprocamente, tome $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Z(M_2(K))$. Note que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, temos que $y = z = 0$. Logo, $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$, se $x = w$ teremos

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = xI_{2\times 2} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = xI_{2\times 2}.$$

Segue que $Z(M_2(K)) \subseteq \{\lambda I_{2\times 2} |\, \lambda \in K\}$. E portanto, temos a igualdade $Z(M_2(K)) = \{\lambda I_{2\times 2} |\, \lambda \in K\}$.

Agora, suponha $charK \neq 2$. Considere $a \in Z(E)$, então $ax = xa, \forall x \in E$. Assim, $a \in E_0$ e consequentemente $Z(E) \subset E_0$. Considere agora $b \in E_1$, note que $bc = -cb, \forall c \in E_1$, sendo $charK \neq 2 \Rightarrow b \notin Z(E) \Rightarrow E_1 \nsubseteq Z(E)$. Porém, se $b \in E_0$, então $bc = cb$ para qualquer $c \in E_0$. Segue que $b \in Z(E)$ implicando que $E_0 \subset Z(E)$. Portanto, $Z(E) = E_0$.

Exemplo 1.1.13. *Sejam A uma álgebra e $\emptyset \neq S \subseteq A$. Consideremos o subespaço B_S de A gerado por $\{1, s_1 s_2 \dots s_k |\, k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. Temos que B_S é multiplicativamente fechado e $1 \in B_S$. Portanto, B_S é uma subálgebra de A, chamada de **subálgebra gerada por** S. Além disso, toda subálgebra de A que contém S deve conter B_S e assim B_S é a menor subálgebra de A contendo S.*

Definição 1.1.14. *Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um **homomorfismo** de álgebras se $\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$ e $\varphi(1_A) = 1_B$. Dizemos que φ é um **mergulho** (ou monomorfismo) se φ é um homomorfismo injetivo, **isomorfismo** se φ é bijetivo, **endomorfismo** se φ é um homomorfismo e $A = B$ e **automorfismo** se φ é um endomorfismo bijetivo (endomorfismo e isomorfismo ao mesmo tempo).*

Denotamos por $EndA$ e $AutA$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra A. Se existir um isomorfismo $\psi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Dado $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras, o conjunto $Ker\varphi = \{a \in A | \, \varphi(a) = 0\}$ é um ideal de A, chamado de **núcleo** de φ, e o conjunto $Im\varphi = \{\varphi(a) | \, a \in A\}$, chamado de **imagem** de φ, é uma subálgebra de B.

Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Consideremos no espaço vetorial quociente A/I o produto $(a+I)(b+I) = ab + I$ para $a, b, \in A$. Tal produto está bem definido, pois, independe da escolha dos representantes das classes laterais e torna o espaço vetorial A/I uma álgebra. A álgebra A/I é conhecida por **álgebra quociente de A por I**. Denotaremos $a + I$ por $\bar{a}$. Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Se I é um ideal de A e $I \subseteq Ker\varphi$, então a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : A/I &\longrightarrow B \\ \bar{a} &\longmapsto \bar{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a) \end{aligned}$$

é bem definida e é um homomorfismo de álgebras. Se $I = Ker\varphi$, então $\bar{\varphi}$ é injetora e consequentemente $A/Ker\varphi \simeq Im\varphi$.

A seguir mostraremos alguns exemplos de homomorfismos.

Exemplo 1.1.15. *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. A aplicação $\pi : A \longrightarrow A/I$, definida por $\pi(a) = \bar{a}$, é um homomorfismo de álgebras chamados de projeção canônica.*

De fato, sejam $a, b \in A$. Observe que

$$\pi(ab) = \overline{ab} = ab + I = (a+I)(b+I) = \bar{a} \cdot \bar{b} = \pi(a)\pi(b).$$

Além disso,

$$\pi(1_A) = \overline{1_A} = 1_A + I$$

onde $1_A + I$ é a unidade de A/I. Portanto, π é um homomorfismo de álgebras.

Exemplo 1.1.16. *Seja A uma álgebra. dizemos que um elemento $a \in A$ é* ***invertível*** *se existe $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Vamos denotar por $U(A)$ o conjunto dos elementos invertíveis de A. Se $r \in U(A)$, a aplicação $\xi_r : A \longrightarrow A$, definida por $\xi_r(x) = r^{-1}xr$, é um automorfismo de A, chamado de* ***automorfismo interno determinado por*** *r.*

Considere $a, b \in A$, note que

$$\xi_r(a)\xi_r(b) = r^{-1}ar \cdot r^{-1}br = r^{-1}a \cdot 1 \cdot br = r^{-1}abr = \xi_r(ab)$$

Além disso,

$$\xi_r(1) = r^{-1} \cdot 1 \cdot r = r^{-1}r = 1.$$

Logo, ξ_r é um homomorfismo.
Agora, observe que

$$Ker\xi_r = \{a \in A|\, \xi_r(a) = 0\} = \left\{a \in A|\, r^{-1}ar = 0\right\} = \{0\}.$$

Assim, ξ_r é injetiva e como ξ_r é definida $A \longrightarrow A$ tem-se a sobrejetividade. Portanto, ξ_r é um automorfismo.

Exemplo 1.1.17. *Seja A' uma álgebra sem unidade. Consideremos o espaço vetorial*

$$A = K \oplus A' = \{(\lambda, a)|\, \lambda \in K, a \in A'\}.$$

Definimos em A o seguinte produto

$$(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2).$$

*O conjunto A munido desse produto é uma álgebra associativa com unidade (o elemento $(1, 0)$). A aplicação $\Phi : A' \longrightarrow A$ definida por $\Phi(a) = (0, a)$ é um mergulho. Dizemos que A é obtida de A' por **adjunção da unidade**.*

Verificaremos primeiramente que A é uma álgebra. Sejam $(\lambda_1, a_1), (\lambda_2, a_2), (\lambda_3, a_3) \in A$ e $\lambda \in K$, observe que:
Distributividade:

$$\begin{aligned}
[(\lambda_1, a_1) + (\lambda_2, a_2)](\lambda_3, a_3) &= (\lambda_1 + \lambda_2, a_1 + a_2)(\lambda_3, a_3)\\
&= ((\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3, (\lambda_1 + \lambda_2)a_3 + \lambda_3(a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)a_3)\\
&= (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \lambda_1 a_3 + \lambda_2 a_3 + \lambda_3 a_1 + \lambda_3 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)\\
&= (\lambda_1\lambda_3, \lambda_1 a_3 + \lambda_3 a_1 + a_1 a_3) + (\lambda_2\lambda_3, \lambda_2 a_3 + \lambda_3 a_2 + a_2 a_3)\\
&= (\lambda_1, a_1)(\lambda_3, a_3) + (\lambda_2, a_2)(\lambda_3, a_3)
\end{aligned}$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned}
(\lambda_1, a_1)[(\lambda_2, a_2) + (\lambda_3, a_3)] &= (\lambda_1, a_1)(\lambda_2 + \lambda_3, a_2 + a_3)\\
&= (\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3), \lambda_1(a_2 + a_3) + (\lambda_2 + \lambda_3)a_1 + a_1(a_2 + a_3))\\
&= (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3, \lambda_1 a_2 + \lambda_1 a_3 + \lambda_2 a_1 + \lambda_3 a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_3)\\
&= (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2) + (\lambda_1\lambda_3, \lambda_1 a_3 + \lambda_3 a_1 + a_1 a_3)\\
&= (\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) + (\lambda_1, a_1)(\lambda_3, a_3)
\end{aligned}$$

Comutatividade com um escalar:

$$\begin{aligned}
[\lambda(\lambda_1, a_1)](\lambda_2, a_2) &= (\lambda\lambda_1, \lambda a_1)(\lambda_2, a_2)\\
&= (\lambda\lambda_1\lambda_2, \lambda\lambda_1 a_2 + \lambda_2\lambda a_1 + \lambda a_1 a_2)
\end{aligned}$$

Como λ comuta com qualquer elemento na multiplicação usual podemos concluir que

$$[\lambda(\lambda_1, a_1)](\lambda_2, a_2) = (\lambda_1, a_1)[\lambda(\lambda_2, a_2)] = \lambda(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2)$$

Associatividade:

$$\begin{aligned}
[(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2)](\lambda_3, a_3) =&(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2)(\lambda_3, a_3)\\
=&(\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_2 a_3 + \lambda_3(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2)+\\
&+ (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2)a_3)\\
=&(\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_2 a_3 + \lambda_3\lambda_1 a_2 + \lambda_3\lambda_2 a_1 + \lambda_3 a_1 a_2 + \lambda_1 a_2 a_3 + \lambda_2 a_1 a_3+\\
&+ a_1 a_2 a_3)\\
=&(\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_2 a_3 + \lambda_1\lambda_3 a_2 + \lambda_1 a_2 a_3 + \lambda_2\lambda_3 a_1 + a_1\lambda_2 a_3 + a_1\lambda_3 a_2+\\
&+ a_1 a_2 a_3)\\
=&(\lambda_1, a_1)[(\lambda_2, a_2)(\lambda_3, a_3)]
\end{aligned}$$

Verificando a unidade, tome $(\lambda, a), (\lambda_1, a_1) \in A$. Note que

$$(\lambda, a)(\lambda_1, a_1) = (\lambda\lambda_1, \lambda a_1 + \lambda_1 a + a a_1) = (\lambda_1, a_1) \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ e } a = 0.$$

Por outro lado,

$$(\lambda_1, a_1)(\lambda, a) = (\lambda_1\lambda, \lambda_1 a + \lambda a_1 + a_1 a) = (\lambda_1, a_1) \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ e } a = 0$$

Portanto, $(1, 0)$ é a unidade da álgebra A.
Agora, sejam $a, b \in A'$, observe que

$$\Phi(a) \cdot \Phi(b) = (0, a)(0, b) = (0 \cdot 0, 0 \cdot b + 0 \cdot a + ab) = (0, ab) = \Phi(ab).$$

Note também que,

$$Ker\Phi = \{a \in A' |\, \Phi(a) = (0, 0)\} = \{a \in A' |\, (0, a) = (0, 0)\} = \{(0, 0)\}.$$

Portanto, Φ é de fato um mergulho.

Exemplo 1.1.18. *As álgebras E (álgebra exterior) e $K \oplus E'$ são isomorfas, pois, $\psi : K \oplus E' \longrightarrow E$, definida por $\psi(\lambda, x) = \lambda + x$ é um isomorfismo.*

De fato, sejam $(\lambda, x), (\beta, y) \in K \oplus E'$, temos que

$$(\lambda, x)(\beta, y) = (\lambda\beta, \lambda y + \beta x + xy).$$

Note que

$$\psi(\lambda\beta, \lambda y + \beta x + xy) = \lambda\beta + \lambda y + \beta x + xy = (\lambda + x)(\beta + y) = \psi(\lambda, x)\psi(\beta, y).$$

Além disso, $\psi(1, 0) = 1 + 0 = 1$. Portanto, ψ é um homomorfismo.
Agora observe que,

$$Ker\psi = \{(\lambda, x) \in K \oplus E' |\, \psi(\lambda, x) = 0\} = \{(\lambda, x) \in K \oplus E' |\, \lambda + x = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Logo, ψ é injetiva.
Se $e \in E$, tem-se $e = \lambda + e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$, $k \geq 1$. Note que

$$\psi(\lambda, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}) = \lambda + e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}, k \geq 1.$$

Logo, ψ é sobrejetiva e portanto, $K \oplus E' \simeq E$.

Definição 1.1.19. *Dados A e B espaços vetoriais, definimos o* ***produto tensorial*** *de A e B, e denotamos por $A \otimes B$, como sendo o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{a \otimes b |\, a \in A, b \in B\}$ onde os elementos $a \otimes b$ são chamados de* ***tensores*** *e satisfazem*

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2) \otimes b &= (a_1 \otimes b) + (a_2 \otimes b)\\
a \otimes (b_1 + b_2) &= (a \otimes b_1) + (a \otimes b_2)\\
(\lambda a) \otimes b &= \lambda(a \otimes b)\\
a \otimes (\lambda b) &= \lambda(a \otimes b)
\end{aligned}$$

para quaisquer $a_1, a_2, a \in A$, $b_1, b_2, b \in B$ e $\lambda \in K$. Portanto, os elementos de $A \otimes B$ são da forma $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$, onde $a_i \in A$ e $b_i \in B$.

Não é difícil ver que se β_1 e β_2 são bases de A e B, respectivamente, então o conjunto $\beta = \{a \otimes b |\, a \in \beta_1, b \in \beta_2\}$ é uma base de $A \otimes B$. Sabe-se também que se V é um espaço vetorial e $f : A \times B \longrightarrow V$ é uma aplicação bilinear, então existe uma única transformação linear $\psi : A \otimes B \longrightarrow V$ satisfazendo $\psi(a \otimes b) = f(a, b)$. Tal propriedade é a conhecida **Propriedade Universal do Produto Tensorial**.

Demonstração. Dados A, B e V espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K e uma aplicação bilinear $f : A \times B \longrightarrow V$, devemos então provar a existência de um espaço $A \otimes B$ e de uma aplicação $h : A \times B \longrightarrow A \otimes B$, depois a existência, unicidade e linearidade da transformação $L : A \otimes B \longrightarrow V$, tal que $f(a, b) = L(a \otimes b)$.
Existência e unicidade:

Sejam A^* e B^* os espaços vetoriais duais de A e B, ou seja, os espaços dos funcionais lineares $A \longrightarrow K$ e $B \longrightarrow K$, respectivamente. Dados $a \in A$ e $b \in B$, definimos um funcional bilinear $a \otimes b$ em $A^* \times B^*$ como sendo:

$$\begin{aligned}
a \otimes b : A^* \times B^* &\longrightarrow K\\
(\phi, \varphi) &\longmapsto \phi(a)\varphi(b)
\end{aligned} \tag{3}$$

Sendo $L(A^*, B^*, K)$ o espaço de todos os funcionais bilineares em $A^* \times B^*$, seja $A \otimes B$ o subespaço desse conjunto, gerado por todos os $a \otimes b$. Sabemos que seus elementos são da forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \otimes b_i, \tag{4}$$

onde assumimos que $\alpha_i \neq 0, \forall i$.
Considerando uma aplicação $f : A \times B \longrightarrow V$ bilinear, afirmamos que, se existe uma aplicação linear $L : A \otimes B \longrightarrow V$ tal que $f(a, b) = L(a \otimes b)$, então, utilizando a linearidade de f, temos

que L deve ser dada por

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} L(\alpha_i a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i, b_i) \tag{5}$$

A unicidade de L segue da sua existência.

Agora mostraremos que L está bem definida. Tome $\alpha = 0$, ou seja, verificaremos que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i, b_i) = 0$. Note que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i a_i) \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes (\alpha_i b_i), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i, \alpha_i b_i). \tag{7}$$

Assim, podemos considerar que $\alpha_i = 1, \forall i$.

Utilizaremos indução em n. Ao considerarmos $n = 1$, de (4) teremos que $\alpha = a \otimes b$. Por hipótese $\alpha = 0$, ou seja, $a \otimes b = 0$. Com isso temos dois casos:

- Se $a = 0$ ou $b = 0$, então $L(\alpha) = f(a, b) = 0$.
- Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então existem elementos $\phi \in A^*$ e $\varphi \in B^*$ tais que $\phi(a) \neq 0$ e $\varphi \neq 0$. Entretanto,
$$0 = (a \otimes b)(\phi, \varphi) = \phi(a)\varphi(b) \neq 0$$
o que é um absurdo!

Logo, a prova é válida para $n = 1$.

A hipótese de indução é que se $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \otimes b_i = 0$, então $\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i, b_i) = 0$. O objetivo é mostrar que $L(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i, b_i) = 0$ considerando que $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \otimes b_i = 0$.

Observe que se algum a_i ou algum b_i forem iguais a zero, podemos eliminar os termos correspondentes das duas equações e assim supor que $a_i \neq 0$ e $b_i \neq 0, \forall i$. Em particular, podemos afirmar que existe um funcional $\varphi_0 \in B^*$ tal que $\varphi_0(b_n) \neq 0$. Agora de (3) temos que,

$$0 = \alpha(\phi, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{n} \phi(a_i)\varphi_0(b_i) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_0(b_i) a_i\right) \tag{8}$$

Como (8) vale para todo $\phi \in A^*$, teremos que

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_0(b_i) a_i = 0. \tag{9}$$

Além disso, como $\varphi_0(b_n) \neq 0$ podemos considerar

$$\gamma_i = \frac{\varphi_0(b_i)}{\varphi_0(b_n)}. \tag{10}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_0(b_n)a_n + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_0(b_i)a_i = 0 &\Rightarrow a_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi_0(b_i)a_i}{\varphi_0(b_n)} = 0 \\
&\Rightarrow a_n + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i a_i = 0 \\
&\Rightarrow a_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i a_i \qquad (11)
\end{aligned}$$

Logo, utilizando (11) temos,

$$\begin{aligned}
0 = \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \otimes b_i + a_n \otimes b_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \otimes b_i + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i a_i \right) \otimes b_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \otimes (b_i - \gamma_i b_n).
\end{aligned}$$

Utilizando (11) novamente podemos escrever:

$$\begin{aligned}
L(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i, b_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i, b_i) + f(a_n, b_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i, b_i) + f\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i a_i, b_n \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i, b_i - \gamma_i b_n),
\end{aligned}$$

como a aplicação $\otimes$ é bilinear. f também é bilinear. Pelo hipótese de indução,

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i, b_i - \gamma_i b_n) = 0.$$

Logo, $L(\alpha) = 0$. E da construção, claramente L é linear. $\square$

Usando a propriedade Universal do Produto Tensorial podemos definir uma estrutura de álgebra em $A \otimes B$. Considere duas bases β_1 e β_2 de A e B, respectivamente. Definimos

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1a_2 \otimes b_1b_2$$

temos que $A \otimes B$, munido deste produto, é uma álgebra associativa, chamada de produto tensorial das álgebras A e B. O elemento $1_A \otimes 1_B$ é a unidade desta álgebra. De fato, considere $a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3 \in A \otimes B$ e $\lambda \in K$, observe que:

- Condição (I):

$$\begin{aligned}
[(a_1 \otimes b_1) + (a_2 \otimes b_2)](a_3 \otimes b_3) &= [(a_1 + a_2) \otimes (b_1 + b_2)](a_3 \otimes b_3) \\
&= (a_1 + a_2)a_3 \otimes (b_1 + b_2)b_3 \\
&= (a_1a_3 + a_2a_3) \otimes (b_1b_3 + b_2b_3) \\
&= (a_1a_3 \otimes b_1b_3) + (a_2a_3 \otimes b_2b_3) \\
&= (a_1 \otimes b_1)({}_3 \otimes b_3) + (a_2 \otimes b_2)({}_3 \otimes b_3)
\end{aligned}$$

- Condição (II):

$$\begin{aligned}
(a_1 \otimes b_1)[(a_2 \otimes b_2) + (a_3 \otimes b_3)] &= (a_1 \otimes b_1)[(a_2 + a_3) \otimes (b_2 + b_3)] \\
&= a_1(a_2 + a_3) \otimes b_1(b_2 + b_3) \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3) \otimes (b_1b_2 + b_1b_3) \\
&= (a_1a_2 \otimes b_1b_2) + (a_1a_3 \otimes b_1b_3) \\
&= (a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) + (a_1 \otimes b_1)(a_3 \otimes b_3)
\end{aligned}$$

- Condição (III):

$$\begin{aligned}
[\lambda(a_1 \otimes b_1)](a_2 \otimes b_2) &= (\lambda a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) \\
&= \lambda a_1a_2 \otimes b_1b_2 \\
&= a_1\lambda a_2 \otimes b_1b_2 \\
&= (a_1 \otimes b_1)(\lambda a_2 \otimes b_2) \\
&= (a_1 \otimes b_1)[\lambda(a_2 \otimes b_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda[(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)] &= \lambda(a_1a_2 \otimes b_1b_2) \\
&= \lambda a_1a_2 \otimes b_1b_2 \\
&= a_1a_2 \otimes \lambda b_1b_2
\end{aligned}$$

Portanto, $A \otimes B$ é uma álgebra.
Agora verificando a associatividade:

$$\begin{aligned}
[(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)](a_3 \otimes b_3) &= (a_1a_2 \otimes b_1b_2)(a_3 \otimes b_3) \\
&= a_1a_2a_3 \otimes b_1b_2b_3 \\
&= (a_1 \otimes b_1)(a_2a_3 \otimes b_2b_3) \\
&= (a_1 \otimes b_1)[(a_2 \otimes b_2)(a_3 \otimes b_3)]
\end{aligned}$$

Concluímos que $A \otimes B$ é uma álgebra associativa.

Exemplo 1.1.20. *Seja A uma álgebra. Tem-se que $M_n(K) \otimes A \simeq M_n(A)$.*

De fato, considere a transformação linear $\varphi : M_n(K) \otimes A \longrightarrow M_n(A)$ tal que $\varphi(E_{ij} \otimes a) = aE_{ij}$, onde aE_{ij} é a matriz de $M_n(A)$ que tem a na entrada (i,j) e zero nas demais. φ é um isomorfismo de álgebras.
Primeiramente, observe que $\{aE_{ij} | \, 1 \leq i, j \leq n, a \in \beta\}$ onde β é uma base de A, é uma base de $M_n(A)$ como espaço vetorial. Note que,

$$(aE_{ij})(bE_{kl}) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } j \neq k \\ (ab)E_{il} & ,\text{se } j = k \end{cases}$$

Se $j \neq k$ e $aE_{ij}, bE_{kl} \in M_n(A)$ temos que

$$\varphi((E_{ij} \otimes a)(E_{kl} \otimes b)) = \varphi((E_{ij} \otimes a)\varphi(E_{kl} \otimes b)) = (aE_{ij})(bE_{kl}) = 0.$$

Se $j = k$, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi((E_{ij} \otimes a)(E_{kl} \otimes b)) &= \varphi(E_{ij}E_{kl} \otimes ab) \\ &= \varphi(E_{il} \otimes ab) = abE_{il} \\ &= (aE_{ij})(bE_{kl}) \\ &= \varphi((E_{ij} \otimes a)\varphi(E_{kl} \otimes b). \end{aligned}$$

Assim, φ é um homomorfismo de álgebras.
Agora, considere a transformação linear

$$\begin{aligned} \psi : M_n(A) &\longrightarrow M_n(K) \otimes A \\ aE_{ij} &\longmapsto \psi(aE_{ij}) = E_{ij} \otimes a \end{aligned}$$

Veja que

$$(\psi \circ \varphi)(E_{ij} \otimes a) = \psi(\varphi(E_{ij} \otimes a)) = \psi(aE_{ij}) = E_{ij} \otimes a$$

e

$$(\varphi \circ \psi)(aE_{ij}) = \varphi(\psi(aE_{ij})) = \varphi(E_{ij} \otimes a) = aE_{ij}.$$

Logo, $\psi = \varphi^{-1}$ e portanto φ é biunívoca. Concluímos que $M_n(K) \otimes A \simeq M_n(A)$.

1.2 Identidades Polinomiais

Definição 1.2.1. *Seja $\mathcal{V}$ uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra $F \in \mathcal{V}$ é uma* ***álgebra livre*** *de $\mathcal{V}$ se existe um subconjunto Y gerador de F tal que para toda álgebra $A \in \mathcal{V}$ e toda aplicação $h : Y \longrightarrow A$ existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : F \longrightarrow A$ estendendo h. F é então dita ser livremente gerada por Y e a cardinalidade $|Y|$ do conjunto Y é chamada de posto de F.*

A seguir construiremos uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias. Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto não-vazio e enumerável de *variáveis* não comutativas. Uma *palavra* em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ onde $n \in \mathbb{N}$ e diz-se que duas palavras $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots i_n = j_n$. Consideremos $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem como base o conjunto de todas as palavras em X. Dessa forma, os elementos de $K\langle X\rangle$, que chamaremos de *polinômios*, são somas (formais) de termos (ou monômios) que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X. Consideremos em $K\langle X\rangle$ a seguinte multiplicação

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}\cdots x_{j_n}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}, \text{ onde } x_{i_t}, x_{j_s} \in X.$$

O espaço vetorial $K\langle X\rangle$ munido deste produto é uma álgebra associativa (Obs. 1.1.6) com unidade, que é a palavra vazia a qual denota-se por 1. Observe que X gera $K\langle X\rangle$ como álgebra.

Proposição 1.2.2. *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade.*

Demonstração. Seja A uma álgebra e $h : X \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer tal que $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Da observação 1.1.6, existe uma única aplicação linear $\varphi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$. Daí, tem-se que φ_h é um homomorfismo de álgebras que satisfaz $\varphi_h|_X = h$. $\square$

Definição 1.2.3. *Seja A uma álgebra. Um polinômio $f(x_1\cdots x_n) \in K\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1\cdots x_n) = 0$) é dito ser uma **identidade polinomial** da álgebra A, se $f(x_1\cdots x_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$.*

Observemos que $f = f(x_1\cdots x_n)$ é uma identidade polinomial de A se, e somente, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X\rangle$ em A. Denotando por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A, dizemos que A é uma **álgebra com identidade polinomial** ou **PI-álgebra** se $T(A) \neq \{0\}$. Se A_1 e A_2 são álgebras tais que $T(A_1) = T(A_2)$, dizemos que A_1 e A_2 são **PI-equivalentes**.

A seguir alguns exemplos:

Exemplo 1.2.4. *Se A é uma álgebra comutativa, então o polinômio comutador $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial de A.*

Sejam $a_1, a_2 \in A$. Note que

$$f(a_1, a_2) = [a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1.$$

Como A é uma álgebra comutativa temos que

$$f(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_1a_2 = 0.$$

Portanto, o polinômio comutador é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 1.2.5. *A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois, o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial de E.*

Basta observar que, dados $a, b \in E$, tem-se $[a, b] \in E_0 = Z(E)$. E portanto,

$$[a, b, c] = [[a, b], c] = [0, c] = 0$$

para quaisquer $a, b, c \in E$.

Exemplo 1.2.6. *A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ conhecida como a* ***identidade de Hall****.*

De fato, seja

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Temos que, $p(x) = det(xId_2 - a)$. Daí,

$$\begin{aligned} p(x) = det \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{22} \end{vmatrix} &= (x - a_{11})(x - a_{22}) - a_{11}a_{12} \\ &= x^2 - x(a_{22} + a_{11}) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

Assim, o polinômio característico de a é

$$p(a) = a^2 - a \cdot Tr(a) + det(a)Id_2 = 0$$

Se $b_2, b_2 \in M_2(K)$ matrizes quaisquer e $a = [b_1, b_2]$ então $Tr(a) = 0$ e também $[b_1, b_2]^2 = det([b_1, b_2])Id_2 \in Z(M_2(K))$. Logo, para $b_3 \in M_2(K)$ temos $[[b_1, b_2]^2, b_3] = 0$.

Definição 1.2.7. *Fixado n denote por*

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

o ***polinômio standard de grau*** *n, onde S_n é o grupo simétrico de grau n e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ.*

Exemplo 1.2.8. *Toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra.*

De fato, Seja A uma álgebra de dimensão finita e $\beta = \{v_1, \cdots, v_m\}$ uma base para A. Suponha $m < n$ e tome $a_1, \cdots, a_n \in \beta$, tome

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} v_j.$$

Temos que

$$S_n(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_n=1}^{m} (\alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n}) S_n(v_{j_1}, \cdots, v_{j_n}) = 0,$$

ou seja, se uma álgebra tem dimensão finita, temos que o polinômio standard de grau n é uma identidade polinomial para esta álgebra. Em [3] foi provado que $s_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n}) \in T(Mn(K))$, fato conhecido por Teorema de **Amitsur-Levitzki**. Posteriormente, foram apresentadas outras demonstrações deste teorema (veja [38], [56], [50] e [51]).

Definição 1.2.9. *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é dito seu um T-ideal se $\phi(I) \subseteq I$ para todo $\phi \in EndK\langle X\rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1,\ldots,g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$ e $g_1,\ldots,g_n \in K\langle X\rangle$.*

Proposição 1.2.10. *O conjunto $T(A)$ das identidades de uma álgebra A é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então existe alguma álgebra B tal que $T(B) = I$.*

Demonstração. É fácil ver que $T(A)$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Sejam $f(x_1,\ldots,x_n) \in T(A)$ e $\varphi \in End(K\langle X\rangle)$, se $\psi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ é um homomorfismo qualquer, então

$$\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f) = 0,$$

pois, $\psi \circ \varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ é um homomorfismo de álgebras e $f \in T(A)$. Logo, $\varphi(f) \in Kerf(\psi)$ e portanto, $\varphi(f) \in T(A)$.
Reciprocamente, seja I um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Consideremos a álgebra quociente $B = \dfrac{K\langle X\rangle}{I}$ e a projeção canônica $\pi : K\langle X\rangle \longrightarrow \dfrac{K\langle X\rangle}{I}$. Se $f \in T(B)$, então $f \in Ker(\pi) = I$, assim temos, $T(B) \subseteq I$. por outro lado, se $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$ e $g_1,\ldots,g_n \in K\langle X\rangle$, então, $f(g_1,\ldots,g_n) \in I$ e daí $f(\overline{g_1},\ldots,\overline{g_n}) = \overline{f(g_1,\ldots,g_n)} = \overline{0}$. Segue que $f \in T(B)$. $\square$

Definição 1.2.11. *Seja S um subconjunto de $K\langle X\rangle$. Definimos o **T-ideal gerado por** S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a interseção de todos os T-ideais de $K\langle X\rangle$ que contém S. Dessa forma, $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal contendo S.*

Do ponto de vista prático, o T-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1,\ldots,g_n)h_2 |\, f \in S, h_1, h_2, g_1,\ldots,g_n \in K\langle X\rangle\}.$$

Se A é uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$ dizemos que S é uma **base das identidades** de A. Se um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n) \in \langle S\rangle^T$ dizemos que f segue de S, ou que f é uma consequência de S. Se existe S finito nessas condições, dizemos que A possui a **propriedade da base finita** ou **propriedade de Specht** (W. Specht). A questão da existência da base finita para as identidades das álgebras associativas é conhecida como **problema de Specht**.

Vejamos agora alguns exemplos, dos quais verificaremos mais a frente, de bases de identidades de algumas álgebras importantes.

Exemplo 1.2.12. *Se A é uma álgebra comutativa com unidade e K é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$. Dizemos então que todas as identidades de A seguem (ou são consequências) do polinômio $[x_1, x_2]$.*

Exemplo 1.2.13. *Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. No caso de K ser finito Stojanova-Venkova [55] descreveu as identidades da álgebra exterior não-unitária e de dimensão finita e Siderov [12] descreveu as identidades quando a dimensão é infinita. (Veja [26] e [42].)*

Exemplo 1.2.14. *Em 1973, Razmyslov [48] provou que $T(M_2(K))$ é finitamente gerado para $charK = 0$, determinando uma base com 9 identidades. Posteriormente, Drensky [16] mostrou que $T(M_2(K)) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3] \rangle^T$, também quando $charK = 0$. Em 2001, Koshlukov [37] generalizou este resultado de Drensky para K infinito de característica diferente de 2 e 3. Quando $charK = 3$, uma terceira identidade é necessária para gerar o T-ideal (veja [14]). Para $charK = 2$, o problema da descrição de $T(M_2(K))$ ainda está em aberto.*

1.3 Variedades e Álgebras Relativamente Livres

Definição 1.3.1. *Seja S um subconjunto de $K\langle X\rangle$. A classe B de todas as álgebras que têm todos os polinômios de S como identidades é chamada de **variedade** (de álgebras associativas) definida por S. A **variedade trivial** é a classe de álgebras que contém apenas a álgebra nula (isto é, é a variedade cujo conjunto de identidades que a definem é $K\langle X\rangle$).*

Se B é uma classe de álgebras, seja $T(B)$ a interseção de todos os T-ideais $T(A)$ com $A \in B$. A variedade de álgebras definida por $T(B)$ é chamada de **variedade de álgebras definida por** B e denotada por $varB$. Se $B = \{R\}$, então denotamos $varB$ simplesmente por $varR$. Observe que a variedade definida por S é igual a variedade definida por $\langle S \rangle^T$.

Teorema 1.3.2 (Birkhoff)**.** *Uma classe não-vazia de álgebras B é uma variedade se, e somente se, é fechada a produtos diretos e álgebras quocientes.*

Demonstração. Veja [17], página 24. □

Definição 1.3.3. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras para um conjunto fixo Y, a álgebra $F \in \mathcal{V}$ é uma **álgebra relativamente livre de** $\mathcal{V}$, se F é livre na classe $\mathcal{V}$ (livremente gerada por Y, definição 1.2.1) . A cardinalidade de Y é chamada o **posto de** F.*

Teorema 1.3.4. *Toda variedade $\mathcal{V}$ (não-trivial) possui alguma álgebra relativamente livre. Além disso, duas álgebras relativamente livres de mesmo posto em $\mathcal{V}$ são isomorfas.*

Demonstração. Seja $T(\mathcal{V}) = \bigcap_{R\in\mathcal{V}} T(R)$ e considere $\pi : K\langle X\rangle \longrightarrow \dfrac{K\langle X\rangle}{T(\mathcal{V})}$ a projeção canônica. Sejam $x_1, x_2 \in X$ distintos, tais que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Consideremos uma álgebra não-nula A de $\mathcal{V}$ e um elemento não nulo $a \in A$. Então existe um homomorfismo

$\psi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\psi(x_1) = a$ e $\psi(x_2) = 0$. Como $T(\mathcal{V}) \subseteq Ker\psi$, existe um homomorfismo $\phi : \dfrac{K\langle X\rangle}{T(\mathcal{V})} \longrightarrow A$ tal que $\phi\circ\pi = \psi$. Mas,

$$a = \psi(x_1) = (\phi\circ\pi)(x_1) = (\phi\circ\pi)(x_2) = \psi(x_2) = 0,$$

o que é uma contradição. Logo, $\pi|_X$ é injetora e portanto, $\pi(X)$ é enumerável.

A álgebra $\dfrac{K\langle X\rangle}{T(\mathcal{V})}$ é gerado pelo conjunto $\pi(X)$ e pertence a $\mathcal{V}$, pois, satisfaz todas as identidades de $T(\mathcal{V})$. Vamos mostrar que esta álgebra é livre em $\mathcal{V}$, com conjunto gerador livre $\pi(X)$. Sejam $A \in \mathcal{V}$ e σ uma aplicação de $\pi(X)$ em A. Como $K\langle X\rangle$ é a álgebra livre com conjunto gerador X, a aplicação $\sigma\circ\pi : X \longrightarrow A$ estende-se a um homomorfismo $\theta : K\langle X\rangle \longrightarrow A$. Existe um homomorfismo $\rho : \dfrac{K\langle X\rangle}{T(\mathcal{V})} \longrightarrow A$ para o qual $\rho\circ\pi = \theta$, pois, $T(\mathcal{V}) \subseteq Ker(\theta)$. Se $x \in X$, temos que

$$\rho(\pi(x)) = (\rho\circ\pi)(x) = \theta(x) = (\sigma\circ\pi)(x) = \sigma(\pi(x)),$$

ou seja, ρ estende σ. Portanto, $\dfrac{K\langle X\rangle}{T(\mathcal{V})}$ é uma álgebra livre na variedade $\mathcal{V}$.

Suponhamos agora F_1 e F_2 álgebras relativamente livres de mesmo posto em $\mathcal{V}$. Sendo F_1 e F_2 livremente geradas por Y_1 e Y_2, respectivamente, tomemos uma bijeção $g : Y_1 \longrightarrow Y_2$. Temos que existem homomorfismos de álgebras $\varphi_1 : F_1 \longrightarrow F_2$ e $\varphi_2 : F_2 \longrightarrow F_1$ estendendo g e g^{-1}, respectivamente. Logo, $(\varphi_2\circ\varphi_1)(y) = y$ e $(\varphi_1\circ\varphi_2)(z) = z$ para quaisquer $y \in Y_1$ e $z \in Y_2$. Segue que $\varphi_2\circ\varphi_1 = Id_{F_1}$ e $\varphi_1\circ\varphi_2 = Id_{F_2}$, e portanto φ_1 e φ_2 são isomorfismos. $\square$

1.4 Álgebras Envolventes

Seja A uma álgebra associativa e considere em A o novo produto $[a,b] = ab - ba$ para $a, b \in A$. Com este produto temos em A uma nova estrutura de álgebra, que denotaremos por $A^{(-)}$. Como $[a,a] = 0$ e $[a,b,c] + [b,c,a] + [c,a,b] = 0$ (identidade de Jacobi) para quaisquer $a, b, c \in A$, segue que $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie. Se uma álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que A é uma **álgebra envolvente de** L.

Exemplo 1.4.1. *Seja L uma álgebra de Lie com base $\{u,v\}$ tal que $u * v = v$. A álgebra $M_2(K)$ é uma álgebra envolvente de L, pois, o subespaço vetorial V de $M_2(K)$ gerado por $\{E_{11}, E_{12}\}$ é uma subálgebra de $M_2(K)^{(-)}$ e a aplicação linear $\varphi : L \longrightarrow V$ que satisfaz $\varphi(u) = E_{11}$ e $\varphi(v) = E_{12}$ é um isomorfismo de álgebras.*

Tome $a, b \in V$ tais que $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Note que

$$[a,b] = ab - ba = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - b_1a_1 & a_1b_2 - b_1a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V.$$

Logo, V é uma subálgebra de $M_2(K)^{(-)}$. Agora observe que,

$$\varphi(u)\varphi(v) = E_{11}E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} = \varphi(v) = \varphi(u * v).$$

Daí, φ é um homomorfismo. Considere o homomorfismo $\psi : V \longrightarrow L$ tal que $\psi(E_{11}) = u$ e $\psi(E_{12}) = v$. Veja que

$$(\varphi \circ \psi)(E_{11}) = \varphi(\psi(E_{11})) = \varphi(u) = E_{11}$$

e

$$(\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v)) = \psi(E_{12}) = v.$$

Segue então que $\varphi \circ \psi = Id_V$ e $\psi \circ \varphi = Id_L$, e portanto φ é isomorfismo de álgebras.

Definição 1.4.2. *Seja L uma álgebra de Lie. Diz-se que uma álgebra associativa U é uma **álgebra universal envolvente de** L, e denotamos por $U = U(L)$, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa R e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \longrightarrow R^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \longrightarrow R$ que estende φ, ou seja, tal que $\psi|_L = \varphi$.*

Os teoremas a seguir ajudarão a determinar uma base de $K\langle X \rangle$.

Teorema 1.4.3 (Poincaré, Birkoff, Witt)**.** *Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra universal envolvente $U(L)$. Se L tem uma base $\{e_i, i \in I\}$ onde o conjunto de índices I é ordenado, então $U(L)$ tem uma base dada por*

$$e_{i_1} \cdots e_{i_p}, i_1 \leq \cdots \leq i_p, i_k \in I, p = 0, 1, 2, \ldots$$

onde $p = 0$ nos dá a unidade de $U(L)$.

Demonstração. Veja [17], página 11. □

Sendo $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ consideremos

$$ComX = \left\{[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}] |\, k \geq 2, x_{i_j} \in X\right\}.$$

Sejam $B(X)$ a subálgebra (com unidade) de $K\langle X \rangle$ gerada por $ComX$ e $L(X)$ o subespaço vetorial de $K\langle X \rangle$ gerado por $X \cup ComX$. Os polinômios de $B(X)$ são chamados de **polinômios próprios**. Consideremos agora a álgebra de Lie $K\langle X \rangle^{(-)}$. Mostra-se que se $u, v \in X \cup ComX$, então $[u, v] \in L(X)$. Portanto, $L(X)$ é uma subálgebra de Lie de $K\langle X \rangle^{(-)}$.

Teorema 1.4.4 (Witt)**.** *$U(L(X)) = K\langle X \rangle$.*

Demonstração. Seja R uma álgebra associativa e $\varphi : L(X) \longrightarrow R^{(-)}$ um homomorfismo. A aplicação $\varphi_0 : X \longrightarrow R$ definida por $\varphi_0(x) = \varphi(x), x \in X$, induz um único homomorfismo $\psi : K\langle X \rangle \longrightarrow R$. Observe que $\psi|_{L(X)} = \varphi$. Logo, $U(L(X)) = K\langle X \rangle$. Se G é uma álgebra de Lie e R uma álgebra envolvente, então qualquer aplicação $X \longrightarrow G \subset R$ induz um homomorfismo $K\langle X \rangle \longrightarrow R$, a sua restrição em $L(X)$ é um homomorfismo de $L(X)$ para $R^{(-)}$ que leva os geradores de $L(X)$ para G. Portanto, a imagem de $L(X)$ está em G, e assim $L(X)$ é uma subálgebra de Lie. □

Pode ser demonstrado que a álgebra $L(X)$ é livre na classe das álgebras de Lie. Como segue, sejam L uma álgebra de Lie e $h : X \longrightarrow L$ uma aplicação qualquer. Por $K\langle X\rangle$ ser livremente gerada por X, existe um homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow U(L(X))$ estendendo h. Temos que $\varphi([x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}]) = [\varphi(x_{i_1}), \varphi(x_{i_2}), \ldots, \varphi(x_{i_k})]$ para $k \geq 2$, e assim, $\varphi(L(X)) \subseteq L$. Além disso, é imediato ver que se $f_1, f_2 \in L(X)$ então $\varphi([f_1, f_2]) = [\varphi(f_1), \varphi(f_2)]$. Logo, $\varphi|_{L(X)} : L(X) \longrightarrow L$ é um homomorfismo de álgebras de Lie que estende h. Dizemos então que $L(X)$ é uma **álgebra de Lie livre, livremente gerada por** X.

Consideremos agora uma base ordenada de $L(X)$ consistindo dos elementos

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \cdots x_{i_k}^{n_k} \mu_{j_1} \mu_{j_2} \cdots \mu_{j_q},\ \ k, q, n_i \geq 0, \tag{12}$$

onde $i_1 < i_2 \cdots < i_k$, $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k$. Note que os elementos com $k = 0$ formam uma base para $B(X)$ e que se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, então

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_a \alpha_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} g_a, \tag{13}$$

onde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \geq 0$, $\alpha_a \in K$ e $g_a \in B(X)$. Além disso, pela independência dos elementos em (12), temos esta maneira de se expressar f única.

1.5 Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Definição 1.5.1. *Sejam $m \in K\langle X\rangle$ um monômio e $x_i \in X$. Definimos o **grau** de x_i em m, denotado por $deg_{x_i}m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m. Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é dito **homogêneo** em x_i se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. f é dito **multi-homogêneo** quando é homogêneo em todas as variáveis e é **multilinear** se é multi-homogêneo e cada variável tem grau exatamente 1.*

Se $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é um monômio de $K\langle X\rangle$, o **multigrau** de m é a k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ onde $a_i = deg_{x_i}m$. A soma de todos os monômios de $f \in K\langle X\rangle$ com um dado multigrau, é dito ser uma **componente multi-homogênea** de f. Notemos ainda que $f \in K\langle X\rangle$ é multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea. Além disso, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é multilinear se é multi-homogêneo com multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$. Neste caso, f tem a forma

$$\sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)},\ \ a_\sigma \in K.$$

Os próximos resultados nos darão ferramentas para determinar geradores para T-ideais sobre determinados tipos de corpos.

Proposição 1.5.2. *Sejam I um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I$. Se K é infinito então cada componente multi-homogênea de f pertence a I. Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração. Seja, m o maior grau em x_1 de algum monômio de f. Para cada $i = 0, 1, \ldots, m$ consideremos $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ como sendo a soma de todos os monômios que têm grau i em x_1 (a componente de grau i em x_1). Temos claramente que $f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_m$. Como K é infinito, podemos escolher $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ todos distintos. Para cada $j = 0, 1, \ldots, m$. Temos

$$g_j = f(\alpha_j x_1, \ldots, x_k) = f_0 + \alpha_j f_1 + \alpha_j^2 f_2 + \cdots + \alpha_j^m f_m$$

e assim

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^m \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \cdots & \alpha_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

Note que $g_0, g_1, \cdots, g_m \in I$, pois, I é T-ideal. Além disso a primeira matriz da igualdade acima é uma matriz de Vandermonde que é invertível. Logo,

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^m \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \cdots & \alpha_m^m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

e assim cada f_j pode ser obtido como combinação linear dos $g_i's$ então devemos ter $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m \in I$.

Agora, para cada $i = 0, 1, \ldots, m$ e cada $t = 0, 1, 2, \ldots,$ consideremos f_{i_t} como sendo a componente homogênea em f_i de grau t em x_2. Usando os mesmos argumentos anteriores, concluímos que $f_{i_t} \in I$ e assim, repetindo o mesmo processo para cada variável temos a primeira afirmação. Observando agora que f é a soma de duas componentes multi-homogêneas, concluímos que I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos. □

Proposição 1.5.3. *Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e $charK = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração. Como $charK = 0$, temos que K é infinito e portanto, pela proposição 1.5.2, podemos assumir que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I$ é um polinômio multi-homogêneo.
Seja $n = deg_{x_1} f$. Tome $y_1, y_2 \in X$ distintos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ consideremos o polinômio $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n)$. Sendo $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_k)$ a componente homogênea de $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_k)$ de grau 1 em y_1, temos que $deg_{y_2} h_1 = n - 1$ e que $h_1(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_k) = nf(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Como $charK = 0$, segue que f é consequência de $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_k)$. Note que $deg_{y_2} h_1 = n - 1$, se necessário, continuamos esse processo para as variáveis $y_2, x_2, \ldots, x_k$ em h_1. Continuando esse processo (chamado de processo de linearização), concluímos que f é consequência de algum polinômio multilinear de I e assim segue o resultado. □

Proposição 1.5.4. *Se A é uma álgebra unitária sobre um corpo infinito, então todas as identidades polinomiais de A seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas em $T(A) \cap B(X)$). Se A é uma álgebra unitária sobre um corpo de característica 0, então todas as identidades polinomiais de A seguem das suas identidades próprias multilineares.*

Demonstração. Veja [7], página 18. $\square$

Visto isso podemos agora retornar ao exemplo 1.2.12:
Seja $I = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$. Considere A uma K-álgebra comutativa, onde K é um corpo infinito, e $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T(A)$ um polinômio multi-homogêneo com multigrau $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Claramente, $I \subseteq T(A)$. Além disso, existe $\lambda \in K$ tal que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \lambda x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \quad (modI)$$

e assim $\lambda x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \in T(A)$. Se A possui unidade, então devemos ter $\lambda = 0$ e consequentemente $f \in I$, donde concluímos que $T(A) = I$.

1.6 T-espaços e polinômios centrais

Definição 1.6.1. *Sejam A uma álgebra e $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X \rangle$. Dizemos que f é um **polinômio central** para A se f tem termo constante nulo e $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$.*

Conforme essa definição, dizer que f é um polinômio central para A significa dizer que $[f, g]$ é uma identidade de A para todo polinômio $g \in K\langle X \rangle$. Logo, se duas álgebras são PI-equivalentes, então elas têm os mesmos polinômios centrais.

Exemplo 1.6.2. *Sendo A uma álgebra, toda identidade de A é um polinômio central para A. As identidades são ditas **polinômios centrais triviais**.*

Exemplo 1.6.3. *O polinômio $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$ (polinômio de Hall) é um polinômio central para a álgebra $M_2(K)$. Okhitin [45] descreveu os polinômios centrais para a álgebra $M_2(K)$, no caso de $charK = 0$, e Colombo e Koshlukov [14] generalizaram esta descrição para o caso de K ser um corpo infinito de característica diferente de 2.*

Para verificar que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$ é um polinômio central para $M_2(K)$, do exemplo 1.1.12, basta tomarmos $x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z(M_2(K))$ que são matrizes escalares em $M_2(K)$. Assim, teremos que $[x_1, x_2]$ e $[x_3, x_4]$ são matrizes nula. Logo,

$$[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] = [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_3, x_4][x_1, x_2] = 0$$

e portanto um polinômio central.

Exemplo 1.6.4. *Seja E a álgebra exterior sobre K. Temos que $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é um polinômio central para E. Caso $charK = p$, segue que $g(x) = x^p$ é um polinômio central para E.*

Basta observar que, do exemplo 1.2.5, a álgebra exterior E é uma PI-álgebra e, pelo exemplo 1.6.2, f é um polinômio central trivial.

Definição 1.6.5. *Um subespaço V de $K\langle X\rangle$ é um T-espaço se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo $\varphi \in EndK\langle X\rangle$.*

Proposição 1.6.6. *Um subespaço V de $K\langle X\rangle$ é um T-espaço se, e somente se, $f(g_1, \cdots, g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$.*

Demonstração. Sabemos que dados um subconjunto $\{f_i | i \in \mathbb{N}\}$, existe um único endomorfismo φ de $K\langle X\rangle$ tal que $\varphi(x_i) = f_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Suponha V um T-espaço de $K\langle X\rangle$. Dados $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$, existe um endomorfismo φ de $K\langle X\rangle$ tal que $\varphi(x_i) = g_i$, com $i = 1, \ldots, n$, e $\varphi(x_i) = 0$ caso contrário. Logo, como V é um T-espaço, temos

$$\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = f(g_1, \ldots, g_n) \in V,$$

para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$. Reciprocamente, suponha que $f(g_1, \ldots, g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$. Se $\varphi \in EndK\langle X\rangle$ então

$$\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \in V$$

pois $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n) \in K\langle X\rangle$. □

A seguir veremos alguns exemplos de T-espaço.

Exemplo 1.6.7. *Todo T-ideal de $K\langle X\rangle$ é um T-espaço.*

Pela definição 1.2.9 um T-ideal I de $K\langle X\rangle$ é fechado por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$. Logo, é um T-espaço.

Exemplo 1.6.8. *Sejam A uma álgebra e W um subespaço de A. O conjunto*

$$\mathcal{L} = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle \,|\, f(a_1, \ldots, a_n) \in W \;\; e \;\; a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

é um T-espaço de $K\langle X\rangle$.

De fato, seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$ quaisquer tal que $f(g_1, \ldots, g_n) \in W$. Definimos a aplicação $h : X \longrightarrow K\langle X\rangle$ tal que $h(x_i) = g_i$ para $i = 1, \ldots, n$ e considere o homomorfismo $\phi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle$ que estende h, temos que $\phi_h \in EndK\langle X\rangle$ e

$$\phi_h(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi_h(x_1), \ldots, \phi_h(x_n)) = f(g_1, \ldots, g_n).$$

Portanto, $\mathcal{L}$ é um T-espaço.

Neste último exemplo destacamos o caso quando $W = Z(A)$. Daí, temos o T-espaço

$$\{f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle \,|\, f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A) \;\; e \;\; a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

que é conhecido por **espaço dos polinômios centrais** de A e denotado por $C(A)$. Por $Z(A)$ ser uma subálgebra de A, temos que $C(A)$ é multiplicativamente fechado, condição que nem todo T-espaço satisfaz como veremos em um exemplo mais adiante.

É importante observar que os elementos de $C(A)$ são da forma $h+c$ onde h é um polinômio central (de acordo coma a definição 1.6.1), e c é uma constante. Além disso, o conjunto dos polinômios centrais de uma álgebra pode não ser um T-espaço. De acordo com o exemplo 1.6.4, no caso $char K = p$, vimos que $g(x) = x^p$ é um polinômio central para E. Entretanto, $g(x+1) = x^p + 1$ tem termo constante não nulo e não é um polinômio central.

De modo análogo à soma e interseção de subespaços é possível ver que a interseção e a soma de uma família de T-espaços ainda são T-espaços. De maneira análoga à definição de T-ideal gerado por um conjunto, temos o de T-espaço gerado. Dado um subconjunto, S de $K\langle X\rangle$, definimos o **T-espaço gerado por** S como sendo a interseção de todos os T-espaços que contêm S, ou seja, o **menor T-espaço** de $K\langle X\rangle$ que contêm S. O próximo resultado nos dá uma importante caracterização do T-espaço gerado por um conjunto.

Proposição 1.6.9. *Se $S \subseteq K\langle X\rangle$ e V é o T-espaço de $K\langle X\rangle$ gerado por S, então V é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por*

$$\{f(g_1,\ldots,g_n) | f \in S, g_1,\ldots,g_n \in K\langle X\rangle\}.$$

Demonstração. Observe primeiramente que

$$\{f(g_1,\ldots,g_n) | f \in S, g_1,\ldots,g_n \in K\langle X\rangle\} = (End K\langle X\rangle)(S) = \{\varphi(f) | f \in S, \varphi \in End K\langle X\rangle\}.$$

Tome V_1 como sendo o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por $(End K\langle X\rangle)(S)$. Como $S \subseteq V$ e V é um T-espaço, temos que $\varphi(f) \in V$ para quaisquer $f \in S$ e $\varphi \in End K\langle X\rangle$, ou seja, $(End K\langle X\rangle)(S) \subseteq V$. Logo, $V_1 \subseteq V$.

Observe agora que $\psi(g) \in (End K\langle X\rangle)(S)$ para quaisquer $\psi \in End K\langle X\rangle$ e $g \in (End K\langle X\rangle)(S)$, concluímos que V_1 é um T-espaço de $K\langle X\rangle$. Além disso, $S \subseteq V_1$ e por V ser o T-espaço gerado por S, segue que $V \subseteq V_1$. Portanto, $V = V_1$. □

Observação 1.6.10. *De acordo com as proposições 1.5.2 e 1.5.3 todo T-ideal é gerado por seus polinômios multi-homogêneos caso o corpo base seja infinito e por seus polinômios multilineares quando o corpo base tem característica zero. Analogamente, mostra-se que todo T-espaço é gerado por seus polinômios multilineares no caso do corpo base ter característica zero e por seus polinômios multi-homogêneos no caso do corpo base ser infinito.*

A seguir veremos alguns exemplos importantes.

Exemplo 1.6.11. *Consideremos $M_2(K)$ a álgebra das matrizes de ordem 2 sobre K, onde K denota um corpo de característica diferente de 2. Seja*

$$V = \{f(x_1,\ldots,x_k) \in K\langle X\rangle \,|\, Tr(f(A_1,\cdots,A_k)) = 0 \text{ para } A_1,\ldots,A_k \in M_2(K)\}.$$

Notemos que V é um T-espaço de $K\langle X\rangle$ e que $V \cap C(M_2(K)) = T(M_2(K))$.

De fato, recorde que $T(M_2(K))$ é o conjunto de todas as identidades polinomiais de $M_2(K)$, que por sua vez é um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e todo T-ideal de $K\langle X\rangle$ é um T-espaço. Assim, temos que $T(M_2(K)) \subset V$ e $T(M_2(K)) \subset C(M_2(K))$. Logo, $T(M_2(K)) \subset V \cap C(M_2(K))$. Agora sejam $f(x_1,\ldots,x_k) \in V \cap C(M_2(K)$ e $A_1,\ldots,A_k \in M_2(K)$. Logo, $f(x_1,\ldots,x_k) \in V \cap C(M_2(K))$, temos

$$f(A_1,\ldots,A_k) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ onde } \lambda \in K.$$

Por outro lado, $f(x_1,\ldots,x_k) \in V$, isto é,

$$Tr(f(A_1,\ldots,A_k)) = 2\lambda = 0.$$

Mas, $char K \neq 2$, então $\lambda = 0$. Portanto, $f(x_1,\ldots,x_k) \in T(M_2(K))$. Daí, $V \cap C(M_2(K)) \subset T(M_2(K))$ o que segue a igualdade.

E observe que V não é multiplicativamente fechado, pois, $[x_1,x_2]^2 \notin V$. De fato, tome $x_1 = E_{12} - E_{21}$ e $x_2 = E_{22}$. Assim, temos

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ [x_1,x_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } [x_1,x_2]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí, $T([x_1,x_2]^2) = 2$. Logo, $[x_1,x_2]^2 \notin V$.

Exemplo 1.6.12. *Seja V o T-espaço de $K\langle X\rangle$ gerado por $[x_1,x_2]$ e $[x_1,x_2][x_3,x_4]$. Da igualdade (1) temos*

$$\begin{aligned}
[[x_1,x_2]x_4,x_3] &= [x_1,x_2][x_3,x_4] + [[x_1,x_2],x_3]x_4 \\
&= [x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_2,x_3]x_4
\end{aligned} \tag{14}$$

e

$$[x_1,x_2,x_3x_4] = x_3[x_1,x_2,x_4] + [x_1,x_2,x_3]x_4 \tag{15}$$

De (14) segue que $[x_1,x_2,x_3]x_4 \in V$ e a partir de (15) obtemos

$$x_3[x_1,x_2,x_4]x_5 = [x_1,x_2,x_3x_4]x_5 - [x_1,x_2,x_3]x_4x_5.$$

Assim, $x_3[x_1,x_2,x_4]x_5 \in V$ e portanto o T-ideal $\langle [x_1,x_2,x_3]\rangle^T \subseteq V$. Usando a igualdade (2) podemos concluir que $[[x_3,x_4]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}],x_2] \in \langle [x_1,x_2,x_3]\rangle^T$ para todo $n \geq 3$. Dessa forma, usando novamente a igualdade (1), como

$$[x_1[x_3,x_4]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}],x_2] = x_1[[x_3,x_4]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}],x_2] + [x_1,x_2][x_3,x_4]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}]$$

temos que $[x_1,x_2][x_3,x_4]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}] \in V$ e portanto V é multiplicativamente fechado. Mostraremos agora que, caso $Char K = 0$, $C(E) = V$, onde E é a álgebra de Grasmann. Como $[x_1,x_2]$ e $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ são polinômios centrais para E, temos que

$V \subseteq C(E)$. Além disso, temos que $T(E) \subseteq V$, pois, $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. Considere agora $f(x_1, \cdots, x_k) \in C(E)$ multilinear. Logo,

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)},\ a_\sigma \in K$$

para todo $\sigma \in S_k$, temos

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} = x_1 x_{\sigma(j+1)} \cdots x_{\sigma(k)} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i-1)} + [x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i-1)}, x_1 x_{\sigma(j+1)} \cdots x_{\sigma(k)}],$$

onde $\sigma(i) = 1$. Dessa forma, $f(x_1, \ldots, x_k) \equiv x_1 g(x_2, \cdots, x_k)\,(mod\, V)$, onde g é um polinômio multilinear. Logo, $x_1 g(x_2, \ldots, x_k) \in C(E)$, consequentemente $g(x_2, \ldots, x_k) \in C(E)$, quando $x_1 = 1$. Entretanto, para g e $x_1 g$ pertencer a $C(E)$ é necessário que g seja uma identidade para E. Assim, teríamos $x_1 g \in T(E)$ e portanto, $f(x_1, \cdots, x_k) \in V$.

Observação 1.6.13. *No caso de $char K = p > 0$ temos $V \neq C(E)$.*

De fato, consideremos a álgebra $U_2(K)$ (matrizes triangulares superiores) e o T-espaço

$$W = \{ f(x_1, \ldots, x_k) \in K \langle X \rangle \,|\, f(A_1, \ldots, A_k) \,\text{tem diagonal nula e os}\, A_i's \in U_2(K) \}.$$

Observe que $[x_1, x_2]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ pertencem a W, pois, sendo $x_1, x_2 \in U_2(K)$ teremos que $[x_1, x_2]$ é uma matriz nula e consequentemente $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ também será uma matriz nula. Assim, $V \subseteq W$. Considerando o polinômio $h(x) = x^p$ de $C(E)$, verificamos que $h \notin W$, pois, tomando $x_1 = E_{11}$, teremos que $x^p = E_{11}$ para qualquer $p > 0$. Portanto, $h(x) \in C(E) - V$.

No que foi tratado até agora sobre T-espaço e polinômios centrais , vimos que o conjunto $C(A)$ é sempre um T-espaço de $K \langle X \rangle$ qualquer que seja a álgebra A. Quando se fala em descrever os polinômios centrais de A, entende-se por determinar um subconjunto de $C(A)$ que possa gerá-lo como T-espaço. Existem T-espaços que não são multiplicativamente fechado (como visto no exemplo 1.6.11) e também T-espaços multiplicativamente fechados que não são espaços de polinômios centrais para nenhuma álgebra, conforme veremos a seguir.

Proposição 1.6.14. *Se $char K = p > 2$, então não existe álgebra tal que $C(A) = V$.*

Demonstração. Suponhamos que $C(A) = V$ para alguma álgebra associativa A. Então, $[x_1, x_2] \in C(A)$ e consequentemente $[x_1, x_2, x_3] \in T(A)$. Usando indução é possível mostrar que

$$[y, \underbrace{x, \ldots, x}_{n}] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^j y x^{n-j},\ \text{para}\ n \geq 1, \tag{16}$$

em toda álgebra associativa. Logo, para $n = p$, temos $[y, x, \ldots, x] = yx^p - x^p y = [y, x^p]$. Daí, concluímos que $[x_2, x_1^p] \in T(A)$ e portanto $x_1^p \in C(A)$, o que contradiz a hipótese de que $C(A) = V$ (veja a observação 1.6.13). $\square$

1.7 Identidades e Polinômios centrais graduados

Nesta seção será apresentado os conceitos de identidades e polinômios centrais para álgebras graduadas. Estas ideias serão fundamentais para o próximo capítulo. Em toda esta seção, G denotará um grupo abeliano com notação aditiva.

Definição 1.7.1. *Seja A uma álgebra. Uma **G-graduação** em A é uma família $\{A_g | g \in G\}$ de subespaços de A tais que*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad e \quad A_g A_h \subseteq A_{g+h}$$

*para quaisquer $g, h \in G$. Definimos uma **álgebra G-graduada** como sendo uma álgebra munida de uma G-graduação.*

Na definição acima, o subespaço A_g é chamado de **componente homogênea de grau** g e os seus elementos de **elementos homogêneos de grau** g.

A seguir apresentaremos alguns exemplos sobre álgebras graduadas:

Exemplo 1.7.2. *Toda álgebra A admite uma G-graduação.*

Basta considerar $A_0 = A$ e $A_g = \{0\}$ para todo $g \in G - \{0\}$. Esta graduação é chamada graduação trivial.

Exemplo 1.7.3. *A álgebra exterior E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural dada por $E = E_0 \oplus E_1$ onde E_0 e E_1 são os subespaços no exemplo 1.1.8.*

Exemplo 1.7.4. *Considere n um número inteiro positivo e $A = M_n(K)$. Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, tomemos o subespaço $M_\gamma = \left\langle E_{ij} |\, \overline{j-i} = \gamma \right\rangle$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ consideremos*

$$M_k = \begin{cases} \{0\} & , se\ |k| \geq n \\ \langle E_{ij} |\, j - i = k \rangle & , se\ |k| < n \end{cases}$$

observe que $M_{\overline{0}} = M_0$ é exatamente o conjunto das matrizes diagonais. Do fato do conjunto $\{E_{ij} |\, 1 \leq i, j \leq n\}$ ser uma base de A segue que

$$A = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} M_\gamma \quad e \quad A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k.$$

Agora para ver que estas decomposições definem uma $\mathbb{Z}_n$-graduação e uma $\mathbb{Z}$-graduação, respectivamente, em $M_n(K)$, basta notarmos que

$$E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} 0 & , se\ j \neq k \\ E_{il} & , se\ j = k \end{cases}$$

com $E_{ij} \in M_{\gamma_1}$ e $E_{kl} \in M_{\gamma_2}$. Assim, $\overline{j-i} = \gamma_1$ e $\overline{l-k} = \gamma_2$. Se $j = k$ teremos

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \overline{j-i} + \overline{l-k} = \overline{l-i}.$$

Logo, $E_{il} \in M_{\gamma_1+\gamma_2}$. Donde segue que $M_{\gamma_1} M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1+\gamma_2}$ para $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_n$ e $M_{k_1} M_{k_2} \subseteq M_{k_1+k_2}$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1.7.5. *Se A é uma álgebra G-graduada, então $1 \in A_0$.*

Demonstração. Temos que existe $g_1, \ldots, g_n \in G - \{0\}$ tais que

$$1 = a_0 + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n}$$

com $a_0 \in A_0$ e $a_{g_i} \in A_{g_i}$, para $i = 1, \ldots, n$. Tomando agora $h \in G$ e $a_h \in A_h$, arbitrários, temos

$$a_h = a_h a_0 + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n}.$$

Notando que $a_h a_0 \in A_{gh}$, $a_h a_{g_i} \in A_{h+g_i}$ e $h, h+g_1, \ldots, h+g_n$ são dois a dois distintos, concluímos que $a_h a_{g_i} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ e portanto $a_h = a_h a_0$. Multiplicando a primeira igualdade por a_0 obtemos

$$a_0 = a_0 a_0 + a_0 a_{g_1} + \cdots + a_0 a_{g_n}.$$

Usando o fato de que $a_h = a_h a_0$ temos

$$a_h a_0 = a_h a_0 + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n} \Rightarrow a_0 = a_0 + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n}$$

isto é, $a_{g_1} + \cdots + a_{g_n} = 0$. Portanto, $a_0 = 1$. $\square$

Definição 1.7.6. *Uma aplicação $\psi : A \longrightarrow B$ entre álgebras G-graduadas é chamada* ***homomorfismo G-graduado****, se ψ é um homomorfismo de álgebras que satisfaz $\psi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$.*

Agora iremos tratar de identidades e polinômios centrais G-graduados. Para esse estudo é necessário o conceito de álgebra associativa livre G-graduada. Para defini-lo, consideremos uma família $\{X_g | \, g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g\in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K\langle X \rangle$. Definimos agora

$$\omega(1) = 0 \quad \text{e} \quad \omega(x_1 x_2 \cdots x_n) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \cdots + \omega(x_n)$$

onde $\omega(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$. Sendo então m um monômio de $K\langle X \rangle$, dizemos que $\omega(m)$ é o G-grau de m. Tomando para cada $g \in G$

$$K\langle X \rangle_g = \langle m | \, m \text{ é monômio de } K\langle X \rangle, \omega(m) = g \rangle$$

temos

$$K\langle X \rangle = \bigoplus_{g\in G} K\langle X \rangle_g \quad \text{e} \quad K\langle X \rangle_g K\langle X \rangle_h \subseteq K\langle X \rangle_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$, e assim $K\langle X \rangle$ é chamada **álgebra associativa livre G-graduada**. Se $f \in K\langle X \rangle_g$, dizemos que f é homogêneo de G-grau g e usamos a notação $\omega_G(f) = g$.

Definição 1.7.7. *Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é*

- *Uma* ***identidade polinomial G-graduada*** *para A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\omega(x_i)}$ com $i = 1, \ldots, n$.*

- *Um* ***polinômio central G-graduado*** *para A, se $f(a_1,\dots,a_n)\in Z(A)$ para quaisquer $a_i\in A_{\omega(x_i)}$ com $i=1,\dots,n$.*

Exemplo 1.7.8. *Consideremos a álgebra exterior E com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Como $ab=-ba$ para quaisquer $a,b\in E_1$, temos que $f(x_1,x_2)=x_1\circ x_2$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de E, onde $K\langle X\rangle$ é a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, e $\omega(x_1)=\omega(x_2)=1$. Por $E_0=Z(E)$, temos que todo polinômio $f\in K\langle X\rangle_0$ é um polinômio central $\mathbb{Z}_2$-graduado para E.*

No caso das identidades e polinômios centrais, os conceitos de T-ideal e T-espaço são de extrema importância. Para o caso de identidades e polinômios centrais G-graduados temos conceitos análogos, a saber, T$_G$-ideal e T$_G$-espaço.

Definição 1.7.9. *Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada. Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é dito ser um T_G-ideal se $\varphi(I)\subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $K\langle X\rangle$. Um subespaço V de $K\langle X\rangle$ é dito ser um T_G-espaço se $\varphi(V)\subseteq V$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $K\langle X\rangle$.*

De acordo com esta definição, dizer que I é um T$_G$-ideal equivale a dizer que $f(g_1,\dots,g_n)\in I$ para quaisquer $f(x_1,\dots,x_n)\in I$ e $g_i\in K\langle X\rangle_{\omega(x_i)}$. Analogamente para T$_G$-espaço.

As ideias de T$_G$-ideal e T$_G$-espaço gerados por um subconjunto S de $K\langle X\rangle$ são análogas as ideias de T-ideal e T-espaço gerados. Denotamos por $\langle S\rangle^{T_G}$ o T$_G$-ideal gerado por S.

Se A é uma álgebra G-graduada, então o conjunto $T_G(A)$ das identidades G-graduadas de A é um T$_G$-ideal de $K\langle X\rangle$ e o conjunto $C_G(A)$ dos polinômios centrais G-graduados de A é um T$_G$-espaço de $K\langle X\rangle$. As proposições 1.5.2 e 1.5.3 também são válidas no caso de T$_G$-ideal e T$_G$-espaço.

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades ordinárias e graduadas.

Proposição 1.7.10. *Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G-graduações tais que $T_G(A)\subseteq T_G(B)$, então $T(A)\subseteq T(B)$. Ademais, se $T_G(A)=T_G(B)$, então $T(A)=T(B)$.*

Demonstração. Consideremos a álgebra associativa livre $K\langle Y\rangle$, onde $Y=\{y_1,y_2,\dots\}$ e seja $f(y_1,\dots,y_n)\in T(A)$. Dados $b_1,\dots,b_n\in B$, tomemos $b_{1_g},\dots,b_{n_g}\in B_g$ e $g\in G$, tais que $b_i=\sum_{g\in G}b_{i_g}$ para $i=1,\dots,n$ e cada $b_{i_g}\neq 0$, tomemos $x_{1_g},\dots,x_{n_g}\in X_g$ e consideremos o polinômio $f_1=f\left(\sum_{g\in G}x_{1_g},\dots,\sum_{g\in G}x_{n_g}\right)\in K\langle X\rangle$. Como $f\in T(A)$, temos que $f_1\in T_G(A)$ e assim $f_1\in T_G(B)$. Substituindo $x_{i_g}=b_{i_g}$, para $i=1,\dots,n$ temos

$$f(b_1,\dots,b_n)=f\left(\sum_{g\in G}b_{1_g},\dots,\sum_{g\in G}b_{n_g}\right)=0.$$

Logo, $f\in T(B)$.

Se $T_G(A)=T_G(B)$, tem-se que $T_G(A)\subseteq T_G(B)$ o que implica $T(A)\subseteq T(B)$ e $T_G(B)\subseteq T_G(A)$ e assim teremos $T(B)\subseteq T(A)$, o que segue a última afirmação. $\square$

É importante observar que não vale a recíproca do resultado acima. Considere na álgebra exterior E a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$ e a $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial $E = E \oplus \{0\}$. Temos que $f(y_1, y_2) = [y_1, y_2]$, com $\omega(y_1) = \omega(y_2) = 0$, é identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de E com respeito a primeira graduação, mas não é identidade graduada com respeito a graduação trivial.

2 Capítulo 2

2.1 Identidades e Polinômios Centrais Graduados para a Álgebra $M_n(K)$

Neste capítulo vamos apresentar as descrições das identidades e polinômios centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados para a álgebra $M_n(K)$, onde K é um corpo de característica zero. Nestas descrições estaremos considerando a graduação natural de $M_n(K)$ pelo grupo $\mathbb{Z}_n$, conforme definido na seção 1.7.

Vasilovsky ([58] e [57]) foi o primeiro a descrever as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas e $\mathbb{Z}$-graduadas de $M_n(K)$ em característica zero. posteriormente, Azevedo([4] e [5]) generalizou esta descrição para corpos infinitos quaisquer.

Algumas ideias usadas na descrição dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados encontra-se em [10], onde a descrição foi feita para corpos infinitos e com uso de matrizes genéricas. Aqui apresentaremos a descrição apenas no caso de K ser um corpo de característica zero, onde utilizamos ideias sobre monômios multilineares contidas em [58] e [57].

Os conceitos básicos necessários sobre álgebras graduadas podem ser encontradas na seção 1.7.

Em todo este capítulo K denotará um corpo de característica zero.

2.2 Identidades Polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas

Em toda esta seção $K\langle X\rangle$ denotará a álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_n$-graduada, onde $X = \bigcup_{\gamma\in\mathbb{Z}_n} X_\gamma$ e $M_n(K)$ a álgebra das matrizes com a $\mathbb{Z}_n$-graduação dada no exemplo 1.7.4. Vamos considerar as notações introduzidas na seção 1.7 e denotar $T_{\mathbb{Z}_n}$ simplesmente por T_n.

A seguir apresentaremos os resultados necessários para a demonstração de teorema que descreve as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas para a álgebra $M_n(K)$ (veja [58]).

Lema 2.2.1. *A álgebra $M_n(K)$ satisfaz as seguintes identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas*

$$x_1x_2 - x_2x_1 = 0,\ \ \omega(x_1) = \omega(x_2) = \bar{0} \tag{17}$$

$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 = 0,\ \ \omega(x_1) = \omega(x_3) = -\omega(x_2). \tag{18}$$

Demonstração. Primeiramente observe que se $A \in M_{\bar{0}}$, então A é uma matriz diagonal. Desde que duas matrizes diagonais comutam, temos que $M_n(K)$ satisfaz as identidades graduadas (17). Por outro lado, as identidades graduadas (18) são multilineares. Logo, precisamos mostrar que as identidades em (18) são satisfeitas para

$$x_1 = E_{i_1j_1},\, x_2 = E_{i_2j_2},\, x_3 = E_{i_3j_3},$$

onde, $E_{i_1j_1}, E_{i_3j_3} \in M_{\bar{t}}$ e $E_{i_2j_2} \in M_{\overline{n-t}}$ com $0 < t \le n-1$. Note que quando $t = 0$ as matrizes $E_{i_1j_1}, E_{i_2j_2}, E_{i_3j_3}$ são diagonais e portanto comutam entre si. Por $E_{i_1j_1}, E_{i_3j_3} \in M_{\bar{t}}$ e

$E_{i_2j_2} \in M_{\overline{n-t}}$ segue que

$$j_1 = \begin{cases} i_1 + t, & \text{se } i_1 + t \leq n \\ i_1 + t - n, & \text{se } i_1 + t > n \end{cases};$$

$$i_2 = \begin{cases} j_2 + t, & \text{se } j_2 + t \leq n \\ j_2 + t - n, & \text{se } j_2 + t > n \end{cases};$$

$$i_3 = \begin{cases} j_3 - t, & \text{se } j_3 - t \geq 1 \\ j_3 - t + n, & \text{se } j_3 - t < 1 \end{cases}.$$

Notemos que $E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}E_{i_3j_3} \neq 0$ se, e somente se, $j_1 = i_2$ e $j_2 = i_3$. Mostraremos nesse caso,

$$i_1 = j_2 = i_3 \text{ e } j_1 = i_2 = j_3.$$

Observemos que se $j_1 = i_1 + t$ e $i_2 = j_2 + t - n$, então por $j_1 = i_2$, segue que

$$i_1 + t = j_2 + t - n \Rightarrow i_1 = j_2 - n \Rightarrow j_2 - i_1 = n,$$

o que é um absurdo. Então as igualdades $j_1 = i_1 + t$ e $i_2 = j_2 + t - n$ não ocorrem ao mesmo tempo. Da mesma forma, as equações $j_2 = i_2 - t$ e $i_3 = j_3 - t + n$ não podem ocorrer ao mesmo tempo. Então quando $j_1 = i_1 + t$, devemos ter $i_2 = j_2 + t$ e $i_3 = j_3 - t$, o que nos dá

$$i_3 = j_2 = i_2 - t = j_1 - t = i_1 \tag{19}$$

Usando (19) obtemos que

$$i_2 = j_1 = i_1 + t = i_3 + t = j_3.$$

Analogamente, quando $j_1 = i_1 + t - n$, teremos $i_2 = j_2 + t - n$ e $i_3 = j_3 - t + n$, onde

$$i_3 = j_2 = i_2 - t + n = j_1 - t + n = i_1 \tag{20}$$

Usando (20) obtemos que

$$i_2 = j_1 = i_1 + t - n = i_3 + t - n = j_3.$$

Desse modo, $E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}E_{i_3j_3} \neq 0$ se, e somente se, $E_{i_3j_3}E_{i_2j_2}E_{i_1j_1} \neq 0$. Neste caso, $i_1 = j_2 = i_3$ e $j_1 = i_2 = j_3$. Assim,

$$E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}E_{i_3j_3} = E_{i_1j_2}E_{i_3j_3} = E_{i_1j_3}.$$

por outro lado,

$$E_{i_3j_3}E_{i_2j_2}E_{i_1j_1} = E_{i_3j_2}E_{i_1j_1} = E_{i_3j_1}$$

e daí

$$E_{i_1j_3} = E_{i_3j_1}.$$

Caso contrário,

$$E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}E_{i_3j_3} = 0 = E_{i_3j_3}E_{i_2j_2}E_{i_1j_1}$$

o que conclui a demonstração. □

Vamos denotar por $I_n \circ T_n$ ideal gerado pelas identidades graduadas (17) e (18). Pelo lema 2.2.1 temos $I_n \subseteq T_n(M_n(K))$. Para $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ e $\sigma \in S_k$, considere

$$m_\sigma = m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)}.$$

O monômio multilinear em $x_1, x_2, \ldots, x_k$ correspondente a permutação identidade será denotado por

$$m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1 x_2 \ldots x_k.$$

E teremos, $\omega(m) = \omega(m_\sigma) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \cdots + \omega(x_k)$. Sabe-se que cada polinômio graduado multilinear $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ pode ser escrito na forma

$$f = \sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma m_\sigma,$$

onde $a_\sigma \in K$.

Uma substituição $\mathcal{S}$ do tipo

$$x_1 = E_{i_1 j_1},\ x_2 = E_{i_2 j_2},\ \ldots,\ x_k = E_{i_k j_k}, \tag{21}$$

onde

$$\overline{j_s - i_s} = \omega(x_s),\ s = 1, 2, \ldots, k \tag{22}$$

é conhecida como **substituição Standard**. Note que $E_{i_s j_s} \in M_{\omega(x_s)}$, $s = 1, 2, \ldots k$. Para um polinômio graduado $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ e uma substituição $\mathcal{S}$, denotaremos por $f|_\mathcal{S}$ o valor de f correspondente a substituição $\mathcal{S}$. Claramente, se um polinômio graduado multilinear f é tal que $f|_\mathcal{S} = 0$ para cada substituição Standard $\mathcal{S}$, então f é uma identidade graduada de $M_n(K)$. Notemos que quando uma substituição $\mathcal{S}$ é feita, o valor do monômio $m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é diferente de zero, somente se

$$j_{\sigma(1)} = i_{\sigma(2)},\ j_{\sigma(2)} = i_{\sigma(3)},\ \ldots,\ j_{\sigma(k-1)} = i_{\sigma(k)}. \tag{23}$$

Neste caso, $m_\sigma|_\mathcal{S} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(k)}}$.

Para um monômio $m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\sigma \in S_k$, e dois inteiros $1 \leq p \leq q \leq k$, denotaremos por $m_\sigma^{[p,q]}$ a *subpalavra* obtida de m_σ descartando os $p-1$ primeiros e os últimos $k-q$ fatores, ou seja,

$$m_\sigma^{[p,q]} = x_{\sigma(p)} x_{\sigma(p+1)} \cdots x_{\sigma(q)}.$$

Lema 2.2.2. *Para cada $\sigma \in S_k$, existe uma substituição Standard $\mathcal{S}$ tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_\mathcal{S} \neq 0.$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre k. Para $k = 1$, temos

$$m_\sigma(x_1) = x_{\sigma(1)} = x_1.$$

Assim basta tomar $\mathcal{S}$ tal que $x_1 = E_{ij}$, com $\overline{j-i} = \omega(x_1)$. Logo, teremos

$$m_\sigma(x_1) = E_{ij} \neq 0.$$

Suponhamos que para qualquer monômio de comprimento k, $m_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_{l_1} x_{l_2} \cdots x_{l_k}$, onde $l_1, l_2, \ldots, l_k \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe uma substituição Standard $\mathcal{S}$ tal que

$$m_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0.$$

Seja $m_2(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) = x_{t_1} x_{t_2} \cdots x_{t_k} x_{t_{k+1}}$, onde

$$\{t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}\} = \{1, 2, \ldots, k, k+1\}.$$

Suponhamos que $\omega(x_{t_{k+1}}) = \bar{t}$, para algum $0 \leq t < n$. Para $x_{t_1} x_{t_2} \cdots x_{t_k}$, existe uma substituição Standard $\mathcal{S}'$

$$x_{t_1} = E_{i_1 j_1},\ x_{t_2} = E_{i_2 j_2},\ \ldots,\ x_{t_k} = E_{i_k j_k} \tag{24}$$

tal que

$$x_{t_1} x_{t_2} \cdots x_{t_k}|_{\mathcal{S}'} = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_k j_k} \tag{25}$$

Consideremos agora a substituição Standard $\mathcal{S}$ formada pelos elementos de (24) e $x_{t_{k+1}} = E_{i_{k+1} j_{k+1}}$, por (23), $x_{t_{k+1}} = E_{i_{k+1} j_{k+1}}$, onde

$$j_{k+1} = \begin{cases} j_k + t, & \text{se } j_k + t \leq n \\ j_k + t - n, & \text{se } j_k + t > n \end{cases}.$$

Logo, por (25)

$$m_2(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_k} E_{j_k j_{k+1}} = E_{i_1 j_{k+1}} \neq 0.$$

□

Nos resultados a seguir $\mathcal{S}$ denotará uma substituição Standard (conforme (21)).

Lema 2.2.3. *Se $m_\sigma|_{\mathcal{S}} \neq 0$, então para $1 \leq p \leq q \leq k$*

$$\omega(m_\sigma^{[p,q]}) = \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}$$

Demonstração. Por definição, temos

$$\omega(m_\sigma^{[p,q]}) = \omega(x_{\sigma(q)}) + \omega(x_{\sigma(q-1)}) + \cdots + \omega(x_{\sigma(p)}).$$

Por (22), teremos

$$\omega(m_\sigma^{[p,q]}) = \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q)}} + \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(q-1)}} + \cdots + \overline{j_{\sigma(p)} - i_{\sigma(p)}}.$$

Por (23) os termos intermediários irão se anular, assim obtemos

$$\omega(m_\sigma^{[p,q]}) = \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}.$$

□

Lema 2.2.4. *Se para uma permutação $\sigma \in S_k$, existir uma substituição Standard $\mathcal{S}$ tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv x_1 n(x_2, \ldots, x_k)\, (mod\, I_n),$$

para algum monômio $n(x_2, \ldots, x_k) = x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k}$ multilinear.

Demonstração. Caso $\sigma(1) = 1$, temos o resultado. Suponhamos $\sigma(1) \neq 1$. Logo, $1 \neq \sigma^{-1}(1)$, e assim $1 = \sigma^{-1}(\sigma(1)) < \sigma^{-1}(1)$. Além disso, existe um inteiro positivo u tal que $\sigma(1) = 1+u$. Daí,

$$1 = \sigma^{-1}(\sigma(1)) = \sigma^{-1}(1+u) < \sigma^{-1}(1).$$

Seja u_0 o menor inteiro positivo tal que $\sigma^{-1}(1+u_0) < \sigma^{-1}(1)$. Temos,

$$1 \leq \sigma^{-1}(1+u_0) < \sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(u_0). \tag{26}$$

Uma vez que $m_\sigma|_{\mathcal{S}} = m|_{\mathcal{S}} \neq 0$, temos

$$E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_k j_k} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} E_{i_{\sigma(2)} j_{\sigma(2)}} \cdots E_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} \neq 0,$$

Segue que, $i_1 = i_{\sigma(1)}$, $j_t = i_{t+1}$, $t = 1, \ldots, k-1$ e, para $s > 1$, $j_{s+1} = i_s$. Considerando $p = \sigma^{-1}(1+u_0)$, $q = \sigma^{-1}(1)$ e $r = \sigma^{-1}(u_0)$, por (26) teremos que $1 \leq p < q \leq r$ com $j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_1 = i_{\sigma(1)}$, $j_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)}$ e, quando $p > 1$, $j_{\sigma(p-1)} = i_{\sigma(p)}$. Primeiramente vamos considerar o caso quando $p > 1$, e neste caso teremos

$$i_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)} = j_{\sigma(p-1)} \text{ e } j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)}$$

o que implica que

$$j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(p)} - j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = t_0$$

para algum $t_0 \in \mathbb{Z}$. Pelo lema 2.2.3, temos

$$\begin{aligned}
\omega(m_\sigma^{[1,p-1]}) &= \overline{j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)}} = \overline{t_0};\\
\omega(m_\sigma^{[p,q-1]}) &= \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(p)}} = -\overline{t_0};\\
\omega(m_\sigma^{[q,r]}) &= \overline{j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)}} = \overline{t_0}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, usando (18) segue que

$$\begin{aligned}
m_\sigma &= m_\sigma^{[1,p-1]} \cdot m_\sigma^{[p,q-1]} \cdot m_\sigma^{[q,k]}\\
&= m_\sigma^{[1,p-1]} \cdot m_\sigma^{[p,q-1]} \cdot m_\sigma^{[q,r]} \cdot m_\sigma^{[r+1,k]}\\
&\equiv m_\sigma^{[q,r]} \cdot m_\sigma^{[p,q-1]} \cdot m_\sigma^{[1,p-1]} \cdot m_\sigma^{[r+1,k]}\\
&= x_{\sigma(q)} \cdot m_\sigma^{[q+1,r]} \cdot m_\sigma^{[p,q-1]} \cdot m_\sigma^{[1,p-1]} \cdot m_\sigma^{[r+1,k]}\\
&= x_{\sigma(q)} x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k}\\
&= x_1 x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k} \pmod{I_n}.
\end{aligned}$$

Agora considerando o caso $p = 1$. Neste caso $j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)} = j_{\sigma(r)}$, e pelo lema 2.2.3

$$\begin{aligned}
\omega(m_\sigma^{[1,q-1]}) &= \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(1)}} = \overline{0};\\
\omega(m_\sigma^{[q,r]}) &= \overline{j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)}} = \overline{0}.
\end{aligned}$$

Portanto, de (17) segue que

$$\begin{aligned}
m_\sigma &= m_\sigma^{[1,q-1]} \cdot m_\sigma^{[q,r]} \cdot m_\sigma^{[r+1,k]}\\
&\equiv m_\sigma^{[q,r]} \cdot m_\sigma^{[1,q-1]} \cdot m_\sigma^{[r+1,k]}\\
&= x_{\sigma(q)} x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k}\\
&= x_1 x_{l_2} x_{l_3} \cdots x_{l_k} \pmod{I_n}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.2.5. *Se para uma permutação $\sigma \in S_k$, existir uma substituição Standard $\mathcal{S}$ tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então $m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} \equiv m(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} \,(mod\, I_n)$.

Demonstração. Pelo lema 2.2.4 temos que

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv x_1 n(x_2, \ldots, x_k) \pmod{I_n}.$$

Seja r o maior inteiro positivo tal que

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv x_1 x_2, \ldots, x_r n(x_{r+1}, \ldots, x_k) \pmod{I_n}, \tag{27}$$

para algum monômio $n(x_{r+1}, \ldots, x_k)$ multilinear. Precisamos mostrar que $r = k$ para que possamos ter

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv x_1 x_2, \ldots, x_k \,(\mathrm{mod}\, I_n).$$

Suponhamos por contradição que $r < k$. Então, $r \leq k - 2$. Desde que $I_n \subseteq T_n(M_n(K))$, por (27) temos

$$x_1 x_2, \ldots, x_r n(x_{r+1}, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0.$$

Combinando a igualdade com

$$x_1 x_2, \ldots, x_r n|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_r j_r} \cdot n|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_r} \cdot n|_{\mathcal{S}}$$

e

$$m|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_r j_r} \left\{ x_{r+1} x_{r+2} \cdots x_k \right\} |_{\mathcal{S}},$$

temos que

$$n(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} = x_{r+1} x_{r+2} \cdots x_k|_{\mathcal{S}} = E_{i_{r+1} j_k}$$

como $i_{r+1} = j_r$, então

$$n(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} = x_{r+1} x_{r+2} \cdots x_k|_{\mathcal{S}} = E_{j_r j_k} \neq 0.$$

Pelo lema 2.2.4, existe um monômio $n'(x_{r+2}, \ldots, x_k)$ multilinear tal que

$$n(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k) \equiv x_{r+1} n'(x_{r+2}, \ldots, x_k) \,(\mathrm{mod}\, I_n).$$

Logo,

$$m_\sigma \equiv x_1, x_2, \ldots, x_r n(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k) \equiv x_1, x_2, \ldots, x_r n'(x_{r+2}, \ldots, x_k) \,(\mathrm{mod}\, I_n)$$

o que contradiz a escolha do número r. Portanto $r = k$. □

Corolário 2.2.6. *Se para duas permutações $\sigma, \tau \in S_k$, existir uma substituição Standard $\mathcal{S}$ tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então $m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv m_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_k) \,(\mathrm{mod}\, I_n)$.

Demonstração. Consideremos $x'_1 = x_{\tau(1)}, x'_2 = x_{\tau(2)}, \ldots, x'_k = x_{\tau(k)}$. Sendo assim,

$$m_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_k) = m(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k).$$

Consideremos agora $\mu = \tau^{-1} \circ \sigma$. Daí,

$$\begin{aligned} m_\mu(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) &= x'_{\mu(1)} x'_{\mu(2)} \cdots x'_{\mu(k)} \\ &= x_{\tau(\mu(1))} x_{\tau(\mu(2))} \cdots x_{\tau(\mu(k))} \\ &= x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} \\ &= m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

Por $m_\sigma|_{\mathcal{S}} = m_\tau|_{\mathcal{S}} \neq 0$, temos que

$$m_\mu(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) = m(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) \neq 0.$$

Pelo lema 2.2.5, segue que

$$m_\mu(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) \equiv m(x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) \pmod{I_n}.$$

Portanto,

$$m_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv m_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_k) \pmod{I_n}.$$

□

A seguir apresentaremos o resultado principal desta seção.

Teorema 2.2.7. *Todas as identidades polinomiais da álgebra $M_n(K)$ seguem de*

$$x_1x_2 - x_2x_1 = 0,\ \omega(x_1) = \omega(x_2) = \overline{0};$$
$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1,\ \omega(x_1) = \omega(x_3) = -\omega(x_2);$$

ou seja, $T_n(M_n(K)) = I_n$.

Demonstração. A demonstração desse teorema segue por anti simetria. A partir do lema 2.2.1 verificamos que $I_n \subseteq T_n(M_n(K))$. Precisamos mostrar que $T_n(M_n(K)) \subseteq I_n$. Como a característica do corpo base é zero, podemos supor $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial $\mathbb{Z}_n$-graduada e multilinear arbitrária. Seja r o menor inteiro não-negativo tal que f pode ser escrito, módulo I_n, como uma combinação linear de r monômios multilineares, isto é,

$$f \equiv \sum_{q=1}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \pmod{I_n} \tag{28}$$

onde $0 \neq a_{\sigma_q} \in K$ e $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \in S_k$. Mostraremos que $r = 0$, para termos $f \equiv 0 \pmod{I_n}$. Suponhamos, por contradição, que $r > 0$. Então pelo lema 2.2.2 existe uma substituição Standard $\mathcal{S}$ tal que $m_{\sigma_1}|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Por $I_n \subseteq T_n(M_n(K))$, temos que

$$f|_{\mathcal{S}} - \left(\sum_{q=1}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q}\right)\Bigg|_{\mathcal{S}} = \left(f - \sum_{q=1}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q}\right)\Bigg|_{\mathcal{S}} = 0.$$

Como $f|_{\mathcal{S}} = 0$, então

$$\left(\sum_{q=1}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q}\right)\Bigg|_{\mathcal{S}} = 0.$$

Daí,

$$a_{\sigma_1} m_{\sigma_1}|_{\mathcal{S}} = \sum_{q=2}^{r} (-a_{\sigma_q}) m_{\sigma_q}\Big|_{\mathcal{S}}.$$

Combinando esta última igualdade com o fato que

$$m_{\sigma_q}|_{\mathcal{S}} \in \{E_{ij} |\, i,j = 1,2,\ldots,k\} \cup \{0\}\,,\ q = 1,2,\ldots,r,$$

concluímos que existe um menor inteiro $p \in \{2,3,\ldots,r\}$ tal que $m_{\sigma_p}|_{\mathcal{S}} = m_{\sigma_1}|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Portanto, pelo corolário 2.2.6 $m_{\sigma_p} \equiv m_{\sigma_1} \pmod{I_n}$. Logo, por (28)

$$\begin{aligned} f &\equiv \sum_{q=1}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \equiv a_{\sigma_1} m_{\sigma_1} + a_{\sigma_p} m_{\sigma_p} + \sum_{q=2}^{p-1} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} + \sum_{q=p+1}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \\ &\equiv (a_{\sigma_1} + a_{\sigma_p}) m_{\sigma_1} + \sum_{q=2}^{p-1} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} + \sum_{q=p+1}^{r} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \pmod{I_n}, \end{aligned}$$

ou seja, f pode ser escrito, módulo I_n, como uma combinação de menos que r monômios multilineares, o que contradiz a escolha do $r > 0$. Segue que $f \equiv 0 \pmod{I_n}$ e assim $T_n(M_n(K)) = I_n$. □

2.3 Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados

Nesta seção apresentaremos a descrição do espaço dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados para a álgebra $M_n(K)$.

Vamos considerar $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_n$-graduada, onde $X = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}_n} X_\alpha$. Denotaremos $T_{\mathbb{Z}_n}$ e $C_{\mathbb{Z}_n}$ simplesmente por T_n e C_n, respectivamente.

Consideremos, para cada inteiro positivo m, o m-ciclo $\theta_m = (1\ 2\ \ldots\ m)$ do grupo simétrico S_m e o subgrupo cíclico $H_m = \langle\theta_m\rangle$ de S_m.

Apresentaremos a seguir um tipo importante de polinômios centrais não-triviais para a álgebra $M_n(K)$. Para isso, precisaremos do conceito de **sequência completa** em $\mathbb{Z}_n$.

Definição 2.3.1. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_n$. Dizemos que a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma sequência completa se $\{\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \ldots, \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\} = \mathbb{Z}_n$ e $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = \bar{0}$.*

Exemplo 2.3.2. *A sequência $(\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{2})$ é uma sequência completa em $\mathbb{Z}_4$. Dado $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, temos que $(\gamma,\gamma,\ldots,\gamma)$ é uma sequência completa se, e somente se, é um gerador do grupo $\mathbb{Z}_n$.*

Note que $\bar{1}+\bar{2}+\bar{3}+\bar{2} = \bar{0}$ em $\mathbb{Z}_4$ e ainda,

$$\begin{aligned} \{\bar{1},\ \bar{1}+\bar{2},\ \bar{1}+\bar{2}+\bar{3},\ \bar{1}+\bar{2}+\bar{3}+\bar{2}\} &= \{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{0}\} \\ &= \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\} \\ &= \mathbb{Z}_4 \end{aligned}$$

Logo, $(\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{2})$ é uma sequência completa em $\mathbb{Z}_4$.
Suponha que $(\gamma,\gamma,\ldots,\gamma)$ é uma sequência completa, temos que

$$\left\{\gamma,\ \gamma+\gamma,\ \gamma+\gamma+\gamma,\ \ldots,\underbrace{\gamma+\cdots+\gamma}_{n-vezes}\right\} = \{\gamma,\gamma^2,\gamma^3,\ldots,\gamma^n\} = \langle\gamma\rangle\,.$$

Como $\gamma \in \mathbb{Z}_n$ então $\gamma^n = \underbrace{\gamma + \cdots + \gamma}_{n-vezes} = \bar{0}$. Portanto, γ é um gerador de $\mathbb{Z}_n$.

Supondo agora que $\gamma \in \mathbb{Z}_n$ é um gerador de $\mathbb{Z}_n$, então

$$\mathbb{Z}_n = \langle \gamma \rangle = \{\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \ldots, \gamma^n\} = \left\{ \gamma,\, \gamma + \gamma,\, \gamma + \gamma + \gamma,\, \ldots, \underbrace{\gamma + \cdots + \gamma}_{n-vezes} \right\}$$

e ainda $\underbrace{\gamma + \cdots + \gamma}_{n-vezes} = \bar{0}$. Portanto, $(\gamma, \gamma, \ldots, \gamma)$ é uma sequência completa em $\mathbb{Z}_n$.

Lema 2.3.3. *Seja $m(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_k$ um monômio multilinear de $k\langle X \rangle$ com $\omega(m) = \bar{0}$. Se uma substituição Standard $\mathcal{S}$ (conforme (21))*

$$x_1 = E_{i_1 j_1},\, x_2 = E_{i_2 j_2}, \ldots, x_k = E_{i_k j_k}$$

é tal que $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$, então $m_\sigma|_{\mathcal{S}} \neq 0$ para todo $\sigma \in H_k$.

Demonstração. Sendo $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$, temos que $j_1 = i_2$, $j_2 = i_3, \ldots, j_{k-1} = i_k$. Como $m|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_k}$ e $\omega(m) = \bar{0}$ então $j_k = i_1$. Observe que

$$\begin{aligned} m_{\theta_k}|_{\mathcal{S}} &= E_{i_{\theta(1)} j_{\theta(1)}} E_{i_{\theta(2)} j_{\theta(2)}} \cdots E_{i_{\theta(k-1)} j_{\theta(k-1)}} E_{i_{\theta(k)} j_{\theta(k)}} \\ &= E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} \cdots E_{i_k j_k} E_{i_1 j_1} \\ &= E_{i_2 j_k} E_{i_1 j_1} \\ &= E_{i_2 j_1}, \end{aligned}$$

como $j_1 = i_2$, logo, $m_{\theta_k}|_{\mathcal{S}} = E_{i_2 i_2} \neq 0$.
Note ainda que

$$\begin{aligned} m_{\theta_k^2}|_{\mathcal{S}} &= E_{i_{\theta(1)} j_{\theta(1)}} E_{i_{\theta(2)} j_{\theta(2)}} \cdots E_{i_{\theta(k-1)} j_{\theta(k-1)}} E_{i_{\theta(k)} j_{\theta(k)}} \\ &= E_{i_3 j_3} E_{i_4 j_4} \cdots E_{i_k j_k} E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \\ &= E_{i_3 j_1} E_{i_2 j_2} \\ &= E_{i_3 j_2}, \end{aligned}$$

como $j_2 = i_3$ então $m_{\theta_k^2}|_{\mathcal{S}} = E_{i_3 i_3} \neq 0$.
O resultado segue indutivamente para cada $d \in \{1, 2, \ldots k\}$ em $m_{\theta_k^d}|_{\mathcal{S}}$. □

Proposição 2.3.4. *O polinômio multilinear*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

onde $(\omega(x_1), \omega(x_2), \ldots, \omega(x_n))$ é uma sequência completa em $\mathbb{Z}_n$, é um polinômio central $\mathbb{Z}_n$-graduado, que não é identidade para a álgebra $M_n(K)$.

Demonstração. Como f é multilinear, basta mostrar que $f|_{\mathcal{S}} \in Z(M_n(K))$. Observemos primeiramente que $\omega(x_1x_2\cdots x_n) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \cdots + \omega(x_n) = \bar{0}$. Consideremos $m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$. Pelo lema 2.3.3, se $m|_{\mathcal{S}} = 0$ então $m_\sigma|_{\mathcal{S}} = 0$ para todo $\sigma \in H_k$, assim $f|_{\mathcal{S}} = 0$, onde teríamos f uma identidade.

Suponhamos então $\mathcal{S}$ uma substituição Standard

$$x_1 = E_{i_1j_1},\, x_2 = E_{i_2j_2}, \ldots, x_n = E_{i_nj_n}$$

tal que $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Logo, devemos ter $j_1 = i_2$, $j_2 = i_3, \ldots, j_{n-1} = i_n$ e também $j_n = i_1$, pois, $\omega(m) = \omega(x_1) + \cdots + \omega(x_n) = \bar{0}$. Daí,

$$\begin{aligned} f|_{\mathcal{S}} &= x_1x_2\cdots x_n + x_2x_3\cdots x_nx_1 + x_3x_4\cdots x_nx_1x_2 + \cdots + x_n\cdots x_1|_{\mathcal{S}} \\ &= E_{i_1j_n} + E_{i_2j_1} + E_{i_3j_2} + \cdots + E_{i_nj_1} \\ &= E_{i_1i_1} + E_{i_2i_2} + E_{i_3i_3} + \cdots + E_{i_ni_n}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \omega(x_1) &= \overline{j_1 - i_1} = \overline{i_2 - i_1}, \\ \omega(x_2) &= \overline{j_2 - i_2} = \overline{i_3 - i_2}, \\ &\vdots \\ \omega(x_{n-1}) &= \overline{j_{n-1} - i_{n-1}} = \overline{i_n - i_{n-1}}, \\ \omega(x_n) &= \overline{j_n - i_n} = \overline{i_1 - i_n}. \end{aligned}$$

Teremos assim,

$$\begin{aligned} \omega(x_1) + \omega(x_2) &= \overline{i_2 - i_1} + \overline{i_3 - i_2} = \overline{i_3 - i_1}, \\ \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) &= \overline{i_3 - i_1} + \overline{i_4 - i_3} = \overline{i_4 - i_1}, \\ &\vdots \\ \omega(x_1) + \cdots + \omega(x_{n-1}) &= \overline{i_n - i_1}. \end{aligned}$$

Como $(\omega(x_1), \omega(x_2), \ldots, \omega(x_n))$ é uma sequência completa devemos ter $\overline{i_2 - i_1}, \overline{i_3 - i_1}, \ldots, \overline{i_n - i_1}$ não nulos e dois a dois distintos, assim, segue que $i_1, i_2, \ldots, i_n$ são incôngruos módulo n. Mas, $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo, temos a igualdade desses dois conjuntos e portanto $f|_{\mathcal{S}} = I_n \in Z(M_n(K))$. $\square$

Sejam I_n o T_n-ideal das identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$ e $C_n(M_n(K))$ o T_n-espaço dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_n$-graduados de $M_n(K)$. Claramente, temos que $I_n \subseteq C_n(M_n(K))$. Consideremos agora V como sendo o T_n-espaço gerado pelos polinômios

$$\begin{gathered} z_1[x_1, x_2]z_2,\ \omega(x_1) = \omega(x_2) = \bar{0}; \\ z_1(x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1),\ \omega(x_1) = \omega(x_3) = -\omega(x_2); \\ \sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)},\ (\omega(x_1), \omega(x_2), \ldots, \omega(x_n)) \text{ sequência completa} \end{gathered} \tag{29}$$

onde z_1 e z_2 são variáveis em X.

Do fato de todos os polinômios em (29) serem centrais segue que $V_n \subseteq C_n(M_n(K))$. E observando que o T_n-espaço gerado pelos dois primeiros polinômios em (29) é exatamente I_n, concluímos que $I_n \subseteq V$.

Lema 2.3.5. *Se o polinômio multilinear*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \lambda_1 m_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \cdots + \lambda_n m_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) \ (k \geq n)$$

é tal que existe uma substituição Standard $\mathcal{S}$ tal que $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, para algum $0 \neq \lambda \in K$, então $f \in V$.

Demonstração. Como $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$ devemos ter $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ e $\omega(m_i) = \bar{0}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Suponhamos $m_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_k$. Seja $\mathcal{S}$ uma substituição Standard

$$x_1 = E_{i_1 j_1},\ x_2 = E_{i_2 j_2}, \ldots, x_k = E_{i_k j_k}$$

satisfazendo as hipóteses do lema. Por $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ existe $j = \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $m_j|_{\mathcal{S}} = E_{ii}$. Logo existem $1 = l_1 < l_2 < \cdots < l_n$ de modo que $\{i_{l_1}, i_{l_2}, \ldots, i_{l_n}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim,

$$m_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \overbrace{x_{l_1} \cdots x_{l_2 - 1}}^{t_1} \overbrace{x_{l_2} \cdots x_{l_3 - 1}}^{t_2} \cdots \overbrace{x_{l_n} \cdots x_{l_k}}^{t_n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \omega(t_1) &= \overline{j_{l_2-1} - i_{l_1}} = \overline{i_{l_2} - i_{l_1}}, \\ \omega(t_2) &= \overline{j_{l_3-1} - i_{l_2}} = \overline{i_{l_3} - i_{l_2}}, \\ &\vdots \\ \omega(t_{n-1}) &= \overline{j_{l_{n-1}} - i_{l_{n-1}}} = \overline{i_{l_n} - i_{l_{n-1}}}, \\ \omega(t_n) &= \overline{j_{l_k} - i_{l_n}} = \overline{i_{l_1} - i_{l_n}}. \end{aligned}$$

Afirmamos que $(\omega(t_1), \omega(t_2), \ldots, \omega(t_n))$ é uma sequência completa em $\mathbb{Z}_n$. De fato,

$$\omega(t_1) + \omega(t_2) + \cdots + \omega(t_n) = \overline{i_{l_2} - i_{l_1}} + \overline{i_{l_3} - i_{l_2}} + \cdots + \overline{i_{l_1} - i_{l_n}} = \bar{0}.$$

Além disso

$$\begin{aligned} \omega(t_1) &= \overline{i_{l_2} - i_{l_1}}, \\ \omega(t_1) + \omega(t_2) &= \overline{i_{l_2} - i_{l_1}} + \overline{i_{l_3} - i_{l_2}} = \overline{i_{l_3} - i_{l_1}}, \\ &\vdots \\ \omega(t_1) + \omega(t_2) + \cdots + \omega(t_{n-1}) &= \overline{i_{l_n} - i_{l_1}}. \end{aligned}$$

Daí, sendo $\{i_{l_1}, i_{l_2}, \ldots, i_{l_n}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ devemos ter $\overline{i_{l_2} - i_{l_1}}, \overline{i_{l_3} - i_{l_1}}, \ldots, \overline{i_{l_n} - i_{l_1}}$ não nulos e dois a dois distintos. Consideremos agora o monômio

$$\overbrace{x_{l_1} \cdots x_{l_2-1}}^{t_1} \overbrace{x_{l_2} \cdots x_{l_3-1}}^{t_2} \cdots \overbrace{x_{l_n} \cdots x_{l_k}}^{t_n}$$

e observemos que

$$t_2 \cdots t_n t_1|_{\mathcal{S}} = E_{i_{l_2} j_{l_2-1}} = E_{i_{l_2} i_{l_2}}.$$

Por $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, existe algum $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $m_q|_{\mathcal{S}} = t_2 \cdots t_n t_1|_{\mathcal{S}} = E_{i_{l_2} i_{l_2}}$ e pelo corolário 2.2.6 concluímos que

$$m_q \equiv t_2 \cdots t_n t_1 \pmod{I_n}.$$

Como $\left\{t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \cdots t_{\sigma(n)}|_{\mathcal{S}};\, \sigma \in H_n\right\} = \{E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}\}$ continuamos com este raciocínio, usando novamente o corolário 2.2.6 e concluímos que

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_k) &= \lambda(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) \\ &\equiv \lambda \sum_{\sigma \in H_n} t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \cdots t_{\sigma(n)} \pmod{I_n}, \end{aligned}$$

e daí

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv \lambda \sum_{\sigma \in H_n} t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \cdots t_{\sigma(n)} \pmod{V},$$

pois, $I_n \subseteq V$. Além disso $\sum_{\sigma \in H_n} t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \cdots t_{\sigma(n)} \in V$ e portanto, $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in V$. $\square$

Teorema 2.3.6. *Seja K um corpo de característica zero. Então $C_n(M_n(K)) = V$.*

Demonstração. Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in C_n(M_n(K))$. Podemos supor f multilinear. Suponhamos ainda que f não é identidade polinomial $\mathbb{Z}_n$-graduada para $M_n(K)$. Assim, podemos escrever f na forma

$$f = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_l m_l$$

onde $m_1, \ldots, m_l$ são monômios multilineares em $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Por f não ser identidade $\mathbb{Z}_n$-graduada para $M_n(K)$, existe uma substituição Standard $\mathcal{S}$ tal que $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, para algum $0 \neq \lambda \in K$. Logo, $l \geq n$. Note ainda que para cada $i = 1, \ldots, l$, temos $m_i|_{\mathcal{S}} = 0$ ou $m_i|_{\mathcal{S}} \neq E_{jj}$. Temos ainda que para cada $i = 1, \ldots, n$ vai existir um $j_i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $m_{j_i}|_{\mathcal{S}} = E_{ii}$. Daí, juntando os termos $m'_{j_i}s$ tais que $m_{j_i}|_{\mathcal{S}} = E_{ii}$ e usando o corolário 2.2.6, concluímos que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv \alpha_1 m_{j_1} + \alpha_2 m_{j_2} + \cdots + \alpha_n m_{j_n} + \beta_1 m_{t_1} + \beta_2 m_{t_2} + \cdots + \beta_r m_{t_r} \pmod{V}$$

onde $r < l$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in K$. Pelo lema 2.3.5 temos que

$$\alpha_1 m_{j_1} + \alpha_2 m_{j_2} + \cdots + \alpha_n m_{j_n} \in V.$$

Assim, segue que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv \beta_1 m_{t_1} + \beta_2 m_{t_2} + \cdots + \beta_r m_{t_r} \pmod{V}.$$

Por $f \in C_n(M_n(K))$, temos que $\beta_1 m_{t_1} + \beta_2 m_{t_2} + \cdots + \beta_r m_{t_r} \in C_n(M_n(K))$. Se $r < n$, então $\beta_1 m_{t_1} + \beta_2 m_{t_2} + \cdots + \beta_r m_{t_r} \in I_n \subseteq V$. Caso contrário, repetimos os mesmos argumentos iniciais. $\square$

Referências

[1] E. Alves, A. Brandão, P. Koshlukov, A. Krasilnikov, *The central polynomials for the Grassmann algebra*, Israel J. Math. a aparecer.

[2] S. A. Amitsur, *A note on Pi-rings*, Israel J. Math. 10, 210-211 (1971).

[3] S. A. Amitsur, J. Levitski, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 1, 449-463 (1950).

[4] S. S. Azevedo, *Graded identities for the matriz algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra 30 (12), 5849-5860 (2002).

[5] S. S. Azevedo, *A basis for $\mathbb{Z}$-graded identities of matrices over infinite fields*, Serdica Math. Journal 29 (2), 149-158 (2003).

[6] S. S. Azevedo, P. Koshlukov, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. 128, 157-176 (2002).

[7] L. F. S. Bernardo, *Identidades e Polinômios Centrais para Álgebras de Matrizes*, Programa de Pós-Graduação em Matemática Curso de Mestrado em Matemática. UFCG, Campina Grande, 92, 5-40 (2009).

[8] L. F. S. Bernardo, *Identidades e Polinômios Centrais Graduados para as Álgebras $M_{p,q}(E)$ e seus produtos tensoriais*, Tese de doutorado. UNICAMP, Campinas, 75, 5-41 (2018).

[9] A. P. Brandão Júnior, *Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas*, Tese de doutorado. UNICAMP, Campinas, 2006.

[10] A. Brandão, *Graded central polynomials for the algebra $M_n(K)$*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 57, 265-278 (2008).

[11] H. P. Bueno, *Álgebra Linear: Um Segundo Curso*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[12] P. Zh. Chiripov, P. N. Siderov, *On bases for identities of some varieties of associative algebras*, Pliska Studia Mathematica Bulgarica 2, 103-115 (1981).

[13] F. U. Coelho, M. L. Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*. 2ª ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

[14] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. 377, 53-67 (2004).

[15] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel J. Math. 80 (3), 323-335 (1992).

[16] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic 20 (3), 188-194 (1981).

[17] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag PTE.LTD, 1999.

[18] J. Dubnov, V. Ivanov, *Sur l'abaissement du degré des polynômes en afineurs*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR 41, 96-98 (1943).

[19] E. Formanek, *Central polynomials for matrix rings*, J. Algebra 23, 129–132, (1972).

[20] E. Formanek, *Invariants and the ring of generic matrices*, J. Algebra 89, 178-223 (1984).

[21] J. B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, Sixth Edition, New York: Addison Wesley, 2000.

[22] A. Garcia, Y. Lequain, *Álgebra: Um Curso de Introdução*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1988.

[23] A. Garcia, Y. Lequain, *Elementos de álgebra*. 1 ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2002.

[24] G. K. Genov, *Basis for identities of a third order matrix algebra over a finite field*, Algebra and Logic 20, 241-257 (1981).

[25] G. K. Genov, P. N. Siderov, *A basis for identities of the algebra of fourth-order matrices over a finite field*, Serdica 8, 313-323, 351-366 (1982).

[26] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic* $p > 0$, Israel J. Math. 122, 305-316 (2001).

[27] A. Gonçalves, *Introdução à Álgebra*. 5 ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1999.

[28] I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, Carus Math. Monographs 15, Wiley and Sons, Inc., New York, 1968.

[29] I. N. Herstein, *Notes from a Ring Theory Conference*, CBMS Regional Conference Series in Math. Amer. Math. Soc. 9 (1971).

[30] I. N. Herstein, *Tópicos de Álgebra*. Second Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1975.

[31] G. Higman, *On a conjecture of Nagata*, Proc. Camb. Philos. Soc. 52, 1-4 (1956).

[32] N. Jacobson, *Structure theory of algebraic algebras of bounded degree*, Annals of Math. 46, 695-707 (1945).

[33] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 575-580 (1948).

[34] I. Kaplansky, *Problems in the theory of rings*, Report of a Conference on Linear Algebras, June, 1956, in National Acad. of Sci. - National Research Council, Washington, Publ. 502, 1–3, (1957).

[35] A. Kemer, *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Math. USSR, Izv. 25, 359-374 (1985).

[36] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic. 26, 362-397 (1987).

[37] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$*, J. Algebra 241, 410-434 (2001).

[38] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitski and cohomology theory*, J. Math. Mech. 7, 237-264 (1958).

[39] D. Krakowski, A. Regev, *The polinomial identities of the Grassmann algebra*, Transactions of the American mathematical Society 181, 429-438 (1973).

[40] E. N. Kuzmin, Yu. N. Maltsev, *A basis for identities of the algebra of second order matrices over a finite field*, Algebra and Logic 17, 17-21 (1978).

[41] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a T-ideal* (Russo), Sibirskii Matematicheskii Zhurnal 4 (5), 1122-1126 (1962).

[42] J. Levitski, *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc. 52, 1033-1035 (1946).

[43] E. L. Lima, *Álgebra Linear.* 7ª ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[44] M. Nagata, *On the nilpotency of nil algebras*, J. Math. Soc. Japan 4, 296-301 (1953).

[45] S. Okhitin, *Central polynomials of the algebra of second order matrices*, Moscow Univ. Math. Bull. 43 (4), 49-51 (1988).

[46] E. C. Posner, *Prime rings satisfying a polinomial identity*, Proc. Amer. Math. Soc. 11, 180-183 (1960).

[47] C. Procesi, *Rings with polynomial identities*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[48] Yu. P. Rasmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic 12, 47-63 (1973).

[49] Yu. P. Razmyslov, *On a problem of Kaplansky*, Math. USSR Izv. 7, 479–496, 1973.

[50] Yu. P. Razmyslov, *Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero*, Math. USSR, Izv. 8, 727-760 (1974).

[51] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitski identity*, Israel J. Math. 23, 187-188 (1976).

[52] L. H. Rowen, *Some results on the center of a ring with polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 79, 219-223 (1973).

[53] L. H. Rowen, *Polynomial identities of ring theory*, Acad. Press (1980).

[54] A. I. Shirshov, *On rings with identity relations (Russian)*, Mat. Sb. 41, 277-283 (1957).

[55] A. H. Stojanova-Venkova, *Bases of identities of Grassmann algebras*, Serdica 6, 63-72 (1980).

[56] R. G. Swan, *An application of graph theory to algebra*, Proc. Amer. Math. Soc 14, 367-373 (1963). Correção: 21, 379-380 (1969).

[57] S. Yu. Vasilovsky, $\mathbb{Z}$-*graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Commun. Algebra 26 (2), 601-612 (1998).

[58] S. Yu. Vasilovsky, $\mathbb{Z}_n$-*graded polynomial identities of the full matrix algebra of order* n, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (12), 3517-3524 (1999).