Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Uma abordagem da Derivada: dos conceitos de Newton e Leibniz até os conceitos modernos de derivada

por

Rodrigo Marques Faustino da Silva [†]

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

S586a Silva, Rodrigo Marques Faustino da.

Uma abordagem da Derivada: dos conceitos de Newton e Leibniz até os conceitos modernos de derivada / Rodrigo Marques Faustino da Silva. – Campina Grande, 2023.

64 f. : il. color.

Monografia (Bacharelado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega".

Referências.

1. Análise Matemática. 2. Derivada – Conceitos de Newton e Leibniz. 3. Derivada a Gâteaux e a Fréchet. 4. Newton, Isaac, 1643-1727. 5. Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646-1716. I. Nóbrega, Alânnio Barbosa. II. Título.

CDU 517(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Uma abordagem da Derivada: dos conceitos de Newton e Leibniz até os conceitos modernos de derivada

por

Rodrigo Marques Faustino da Silva

Trabalho de conclusão de curso defendido e aprovado 29 de junho de 2023, pela Comissão Examinadora constituída pelos examinadores:

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Pedro Fellype da Silva Pontes

Prof. Ms. Pedro Fellype da Silva Pontes - UFCG

Alânnio B. Nóbrega

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega - UFCG

Orientador

Nota: 9,5

Junho/2023

Dedicatória

Ao Espírito Santo, à minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

"Mesmo que eu tivesse o dom da profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência; mesmo que tivesse toda a fé, a ponto de transportar montanhas, se não tiver amor, eu nada seria."I Coríntios, 13

Por isso, agradeço, ao meu amigo Espírito Santo. Por meio do sublime amor, Ele me conduziu em cada etapa dessa dissertação dando ânimo e zelo para realizar as atividades necessárias, assim como me apresentou pessoas maravilhosas e me concedeu amigos verdadeiros.

Agradeço a minha família, Jeová (pai), Paula (mãe) e Geovânia (irmã), que sempre lutaram por mim e me apoiaram diariamente. Também agradeço a uma família que amo, minha namorada Maria Clara, meus sogros, Adriana e Dedé, e ao meu cunhado, Vinícius, que também sempre me motivavam a perseverar. Aos meus familiares na fé, a todos do grupo de oração CRES, da catequese e de toda Paróquia Sagrada Família, obrigado por suas orações e pela doce fraternidade.

Também agradeço a cada um dos meus amigos da UAMat, em especial, Ismael, Luis, Siebra e Pedro Mestrado que acreditaram em mim mais do que eu mesmo acreditaria. Obrigado pelo apoio e pela fraternidade de vocês.

Agradeço a cada um dos meus professores orientadores, em ordem cronológica, a começar com Ronaebson Carvalho durante o ensino médio do IF, a passar por Marinho no treinamento das olimpíadas, depois por Rodrigo Cohen no PICME, por Daniel Cordeiro no PET, por Claudianor Oliveira Alves nas Iniciações Científicas e o primeiro ano de mestrado, Luiz Antônio no Estágio Supervisionado e Alânnio Nóbrega na dissertação. Cada um de vocês me instruíram, educaram e motivaram, sempre com muito boa vontade, a fim de que eu conseguisse dar o meu melhor. Me perdoem pelo tanto de trabalho que dei a vocês. Também agradeço a todos os professores e funcionários da família UAMat da UFCG. Especialmente, Aninha que sempre nos alegra com sua presença. Por fim, agradeço a banca por examinarem essa dissertação afim de torná-la

útil para outros amantes da matemática. Muito obrigado!

Resumo

O aperfeiçoamento do conceito de taxa de variação para o conceito de derivada aconteceu quase simultaneamente com o famoso físico Isaac Newton (1643-1727) e o notável matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Nessa dissertação, é exposto o conceito de derivada sob diversas perspectivas. Primeiramente, são apresentados os conceitos de derivada por meio de Newton e por meio de Leibniz para funções reais. Em seguida, é generalizado o conceito de derivada para espaços de dimensão finita e, em seguida, são exibidos os conceitos de derivada a Gâteaux e à Fréchet em espaços vetoriais normados. Por fim, é construído o conceito de inclinação fraca para funcionais semicontínuos inferiormente e também esse conceito é associado a outros conceitos de derivada para funções menos regulares.

Palavras-chave: Conceito de derivada segundo Newton e segundo Leibniz; Derivada a Gâteaux e a Fréchet; Inclinação fraca.

Abstract

The development of the concept of rate of change happened almost simultaneously between the famous physicist Isaac Newton (1643-1727) and the remarkable mathematician Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). In this essay, it is introduced many concepts of differential functions. First, it is commented through the gaze of Newton and Leibniz thoughts for real functions. After that, it is generalized the concept of differential function for finite-dimensional space with Gâteaux and Fréchet derivative and, next, it is explained these concepts for normed vector space. Finally, it is constructed the weak slope concept for lower semicontinuous functions and related with other concepts of derivative for less regular functions.

Keywords: Concept of differential functions through Newton and Leibniz; Gâteaux and Fréchet Derivative; Weak slope.

Conteúdo

Notações

- X' denota o conjunto de pontos aderentes de X;
- Sejam $a, b \in X$, com X um espaço vetorial, $[a,b] := \{ta + (1-t)b \mid 0 \leq t \leq 1\}$ e $(a,b) := \{ta + (1-t)b \mid 0 < t < 1\}$
- Seja E um espaço vetorial. $\|\cdot\|_E$ denota uma norma em E, caso não haja risco de confusão do espaço em questão, denotaremos apenas por $\|\cdot\|$.
- $||\cdot||_*$ denota a norma dos funcionais lineares contínuos, isto é, dados X um espaço de Banach e $I \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$

$$||I||_* = \sup\{|I(x)| \ : \ x \in X \text{ e } ||x||_X \leq 1\}.$$

- $G(f)$ denota o gráfico da função $f : X \to Y$, isto, é

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Introdução

O conceito de derivada tem enorme relevância na tecnologia atual e no desenvolvimento na ciência, como é citado pelo Stewart:

> As taxas de variação ocorrem em todas as ciências. Um geólogo se interessa em saber a taxa na qual uma massa de rocha fundida resfria através da condutividade térmica com o meio rochoso que a envolve. Um engenheiro quer saber a taxa segundo a qual a água flui para dentro ou para fora de um reservatório; um geógrafo está interessado na taxa de variação da densidade populacional em uma cidade à medida que aumenta a distância de seu centro; um meteorologista está interessado na taxa de variação da pressão atmosférica em relação à altura. (STEWART, 2006 .p. 206)

O aperfeiçoamento do conceito de taxa de variação para o conceito de derivada aconteceu quase simultaneamente com o famoso físico Isaac Newton (1643-1727) e o notável matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Nesse trabalho, é apresentado o conceito de derivada sob diversas perspectivas.

No Capítulo 1, vemos o desenvolvimento de derivada por meio da visão de Newton e por meio da visão de Leibniz. Também são apresentadas quais propriedades possuem demonstrações provenientes da visão de Newton e quais são da visão de Leibinz.

No Capítulo 2, os conceitos de derivada são generalizadas para dimensões superiores. Primeiramente, são apresentados os conceitos de derivada para o $\mathbb{R}^N$ e, em seguida, generalizado para os Espaços Vetoriais Normados que não possuem, necessariamente, dimensão finita.

No Capítulo 3, o objetivo é apresentar o conceito de inclinação fraca e inclinação fraca equivariante que são conceitos derivada que englobam funções que não são deriváveis no sentido apresentado no capítulo 2. Por exemplo, é possível calcular a inclinação fraca da função módulo na origem como também a inclinação fraca de funções que são apenas semicontínuas inferiormente.

Dessa forma, pretendemos que esse trabalho sirva como um guia para compreender um pouco melhor o conceito de derivada e como esse conceito se desenvolveu e se desenvolve durante os séculos.

Capítulo 1

A derivada de funções reais

Neste capítulo, é abordado o conceito de derivada a partir do aperfeiçoamento do conceito de taxa de variação e é perpassado pelas compreensões de derivada obtida por Newton e por Leibniz. Vale ainda ressaltar que, em cada seção, são expostos teoremas cuja demonstrações clássicas foram feitas a partir do ponto de vista de Newton e outros que foram feitas a partir do ponto de vista de Leibniz.

1.1 A derivada como taxa de variação segundo Newton

A derivada, como comentado na introdução, é uma das ferramentas da matemática mais aplicáveis na natureza e na tecnologia. Durante os séculos, esse conceito foi amplamente discutido e atualizado em diversos contextos. Nesta seção, a derivada é apresentada como uma taxa de variação infinitesimal.

A taxa de variação T de uma função real f em um intervalo $[a, b]$ é dada pela expressão:

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.1}$$

Diversas grandezas são descritas por meio de taxas de variação, como, por exemplo, a velocidade média (variação da distância pelo tempo), a aceleração média (variação da velocidade em relação ao tempo), a densidade populacional (população por metro quadrado) e a pressão (força por metro quadrado).

Ao considerar $h = b - a$, podemos reescrever essa expressão (1.1) da seguinte forma:

$$T = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Esse quociente é comumente denominado na literatura por quociente de Newton. Em geral, a motivação para a derivada como conhecida hoje é dada por meio da tentativa de determinar uma velocidade instantânea a partir da velocidade média. Vejamos como essa relação é feita:

Considere um projétil com movimento retilíneo com uma velocidade $\overrightarrow{v}$ em relação a um tempo t. Considere s_0 a posição inicial do projétil e denominemos de a distância $s(t)$ a posição do projétil no tempo t. A velocidade média entre a posição no tempo t_1 e no t_2 é denotada por $v_{\text{média}}$.

Dessa forma, se desejar calcular a velocidade do projétil exatamente no tempo t_0, poder-se-ia calcular diversas velocidades médias entre o tempo t_0 e um tempo t onde o tempo t pode ser tomado cada vez mais próximo do tempo t_0. Ou seja, ao denotar a velocidade média entre t e t_0 por

$$v_{\text{ média}}(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

e a velocidade instantânea no tempo t_0 por $v(t_0)$, teremos intuitivamente que $v_{\text{média}}(t)$ converge para $v(t_0)$ quando t converge para t_0. Ou seja,

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_{\text{média}}(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Note que foi utilizado um conceito de convergência acima e limite de função. Segundo Pitombeira e Roque, Referência [10], a formulação rigorosa da definição de limite é iniciada pelo famoso A. L. Cauchy (1789-1857). Sendo assim, conforme o livro Um curso de Análise do Elon, Referência [20], a definição de derivada como uma taxa de variação atualmente é definida da seguinte forma:

Definição 1.1. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X \cap X'$. Dizemos que f é derivável em a quando existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

No caso afirmativo, o limite $f'(a)$ cham-se a derivada de f no ponto a. Quando f é derivável em todo ponto de $X \cap X'$, dizemos que f é derivável.

A exigência de a pertencer ao conjunto X' de pontos de aderência de X, ou seja, de a ser um ponto de acumulação advém da necessidade de que haja pelo menos uma sequência de pontos de X que convirja para a, sequência essa utilizada no quociente de Newton.

Observação: 1.2. Escrevendo $h = x - a$, obtemos $x = a + h$ e, assim, podemos reescrever a derivada de f no ponto $a \in X \cap X'$ da seguinte forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Observemos, a seguir, que a derivada de uma função constante é nula:

Exemplo 1 (Função constante é derivável)**.** Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = a$. Então, $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, observemos o quociente de Newton:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Dessa forma, $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Intuitivamente, esperava-se que esse fato ocorresse pois, ao atermos a nossa atenção para a taxa de variação da função constante, veremos que não se tem variação alguma. Portanto, a derivada em tais pontos deve ser zero.

Com o seguinte exemplo, pode-se ver que a derivada pode ser diferente de zero e o seu valor variar a depender de cada um do ponto. É interessante notar que o seguinte exemplo evidencia o caráter infinitesimal da derivada como taxa de variação em um ponto.

Exemplo 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^n,$$

com $n \in \mathbb{N}$. Então f é derivável e

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

De fato, observemos o quociente de Newton

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Pelo binômio de Newton, temos

$$(x+h)^n = \binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n,$$

então

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{[x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n] - x^n}{h}.$$

Portanto,

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h},$$

e, assim,

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}.$$

Dessa forma,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

Portanto,

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

No livro do Elon, Referência [20], há diversas propriedades inerentes a derivada de funções reais. A seguir, citaremos algumas propriedades que são necessárias para estudarmos algumas características principais da derivada afim de generalizar tal conceito para dimensões superiores.

Teorema 1.3 (Regras de derivação)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. Então, $f+g, f-g, f\cdot g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são deriváveis no mesmo ponto e*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

(ii) $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$;

(iii) $(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$;

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}$.

A demonstração das regras de derivação é feita utilizando apenas a definição de derivada e a definição de limite de uma função por epsilons e deltas. A partir das regras de derivação, pode-se conhecer a derivada de algumas funções elementares e, a partir delas, pode conhecer as derivadas de muitas outras funções que são somas, subtrações, multiplicações ou divisões dessas funções elementares.

Teorema 1.4. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Se f for derivável em a, então f é contínua em a.*

Demonstração. De fato, observemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\\ &= \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\\ &= \lim_{x\to a}(x-a)\cdot f'(a) = 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Dessa forma, f é contínua em a. □

Teorema 1.5. *Se $a \in X$ um ponto de máximo ou de mínimo local, então $f'(a) = 0$.*

Os seguintes teoremas apresentados possuem demonstrações que foram desenvolvidas por meio da interpretação da derivada como uma taxa de variação, semelhante a visão de Newton.

Um dos teoremas mais notáveis que relaciona a derivada e a taxa de variação é o Teorema do Valor Médio. O Teorema do Valor Médio é surpreendente pois relata que a taxa de variação de uma função f, com adequadas propriedades, em um intervalo $[a, b]$ é exatamente a derivada de f em um ponto c entre a e b :

Teorema 1.6. *(Teorema do Valor Médio) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Com o Teorema do Valor Médio, é possível provar o seguinte resultado:

Corolário 1.7. *Se uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada nula em todos os pontos $x \in (a, b)$, então f é constante.*

Assim, podemos conhecer propriedades das funções a partir da análise de sua derivada. Por exemplo, se a derivada for limitada, a função deve ser Lipschitz:

Corolário 1.8. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, tem-se*

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|.$$

Também, a partir do Teorema do Valor Médio, ao considerar $b = a+h$, com $h > 0$, podemos reescrever a expressão presente no Teorema do Valor Médio da seguinte forma:

$$f(a+h) = f(a) + f'(c) \cdot h \tag{1.2}$$

onde $c \in [a, a+h]$. Ao observar a Expressão (1.2) à direita, podemos concluir que é uma expressão que recorda uma função afim. Ou seja, podemos teorizar em aproximar a imagem da função f em torno de a por uma função afim. Sendo assim, por meio do Teorema do Valor Médio, podemos adentrar em outra perspectiva de derivada como aproximação da função por meio de uma função linear. Tal forma de pensar derivada foi inicialmente proposto por G. W. Leibniz (1646-1716) o qual abordaremos na Seção 1.2.

1.2 A derivada como aproximação por uma transformação linear por G. W. Leibniz

Segundo Toeplitz, Referência [25], os matemáticos gregos trataram diversos problemas que versam em determinar retas tangentes em determinadas curvas como, por exemplo, determinar retas tangentes em círculos e em elipses. Além dos matemáticos gregos, o matemático Fermat também desenvolveu maneiras de encontrar retas tangentes a curva, vide a Referência [11].

Segundo Júnior, na Referência [17], G. W. Leibniz construiu o conceito de derivada de funções tangentes. Antes de contemplar a construção do conceito de derivada segundo Leibniz, vejamos como ele abordou o conceito de limite de função.

No que tange o conceito de limite de função, o questionamento norteador apontado por Leibniz é

Qual a função constante que melhor aproxima os valores $f(x)$, quando x varia em uma vizinhança de x_0?

O conceito de melhor aproximação diz respeito a uma medida de velocidade de convergência. Para isso, se c for uma função constante a ser testada, basta considerar uma função erro:

$$\varepsilon(h) = f(x_0 + h) - c$$

e esperar que o erro se aproxime de zero conforme o h se aproxime de 0. Para trabalhar sobre essa convergência, Leibniz utilizou um conceito de números infinitesimais o qual não foi bem aceito pela comunidade acadêmica da época. Na década de 1960, Abraham Robinson (Referência [23]), desenvolveu uma Análise Não-Standard que determina um fundamento rigoroso para esse conceito de números infinitesimais o qual é incrementado aos números reais. Afim de evitar a abordagem dos infinitesimais, utilizaremos o conceito de escalas e ordem em que auxilia na estabilização da ideia de melhor convergência.

Definição 1.9. Uma função $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, é denominada escala de aproximação quando φ é monotonicamente decrescente tal que, para qualquer $N > 0$ exista algum valor x, a partir do qual, tenhamos $\varphi(y) < \frac{1}{N}$, para $y < x$.

Observação: 1.10. Note que se φ é uma escala de aproximação, então

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0.$$

Definição 1.11. Uma escala α é de menor ordem do que β, denotamos por $\alpha \prec \beta$ ou $\alpha = o(\beta)$ quando existe uma escala φ tal que

$$\alpha(s) \leq \varphi(s)\beta(s).$$

Observação: 1.12. Em relação a definição de limite, α ser de menor ordem do que β é equivalente dizer que

$$\lim_{s \to 0} \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = 0.$$

Inspirados em Hardy, Referência [16], é definido:

Definição 1.13. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções. Dizemos que f é de ordem menor do que g, e denota-se por $f = o(g)$ ou por $f \prec g$, se existir uma escala φ tal que

$$|f(x)| \leq \varphi(|x|)| \cdot |g(x)|$$

Observação: 1.14. A escala principal que serve como padrão é a função identidade $\varphi(s) = s$. Outras escalas mais rápidas que a identidade são $\varphi_1(s) = |s \log s|, \varphi_2(s) = s^p$ para $p > 1$ e $\varphi(s) = e^{\frac{-1}{s}}$. Algumas escalas mais lentas do que a identidade são as funções da forma $\varphi(s) = s^p$ para $p < 1$.

O uso de escalas e de ordenação são elementos essencial na Análise Assintótica e, a partir dela, podemos definir uma ordem parcial ($\preceq$):

Definição 1.15. Diz-se que a escala α é no máximo de ordem da escala β e escreve-se $\alpha \preceq \beta$, se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\alpha(h) \leq C\beta(h)$$

no respectivo domínio. Se tivermos $\beta \preceq \alpha$, dizemos que α e β têm a mesma ordem e escreve-se $\alpha \approx \beta$.

Definição 1.16. Diz-se que uma função definida na vizinhança de zero é de menor ordem do que h, quando $h \to 0$ e a denotamos por $o(h)$, se existir uma escala φ tal que

$$|f(h)| \leq |h| \cdot \varphi(|h|).$$

Observação: 1.17. A soma de duas funções com ordem $o(h)$ ainda é uma função com ordem $o(h)$ e o produto de duas funções de $o(h)$ é uma função de $o(h^2)$. Dessa forma, faz sentido dizer que $o(h) + o(h) = o(h)$.

Vejamos agora a definição de limite segundo o uso de ordens e classes:

Definição 1.18. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f tem limite y_0 quando $x \to x_0$ se para alguma vizinhança de x_0, o erro

$$\epsilon(h) = f(x_0 + h) - y_0$$

da aproximação

$$f(x_0 + h) = y_0 + \epsilon(h),$$

tenhamos $|\epsilon| \leq \varphi$, ou seja, admite uma estimativa

$$|\epsilon(h)| \leq \varphi(|h|)$$

para alguma escala φ. Dizemos que f é contínua em x_0 quando $y_0 = f(x_0)$.

Observação: 1.19. Esse conceito de limite de uma função é equivalente ao conceito de limite por meio de epsilons e deltas exibido por Cauchy.

Nos direcionando a definição de derivada, uma vez definido o conceito de aproximação local por meio de funções constantes, podemos também tentar aproximar a função por meio de funções lineares. Assim, pretendemos determinar uma reta que melhor aproxime os da função f em torno de x_0, ou seja, para valores $x_0 + h$ com h próximo de 0, ou seja, por uma rea que seja tangente ao gráfico de f no ponto x_0. Dessa forma, espera-se uma aproximação da seguinte forma:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + \epsilon_a(h),$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é um número a ser escolhido. Note que a expressão $f(x_0) + a \cdot h$ recorda a lei de formação de uma função afim. Assim, para que essa função afim se aproxime do valor $f(x_0 + h)$, é necessário que

$$\epsilon_a(h) \to 0,$$

quando $h \to 0$. Em termos de ordem, $\epsilon_a(h) = o(h)$, ou seja,

$$\epsilon_a(h) = h\epsilon_0(h)$$

onde ϵ_0 se aproxima de 0 em alguma escala. Nesse contexto, podemos definir a derivada segundo a Leibniz da seguinte forma:

Definição 1.20. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X \cap X'$. Dizemos que f é derivável em x_0 quando existir $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + o(|h|).$$

No caso afirmativo, o número a é denotado por $f'(x_0)$ e chama-se a derivada de f no ponto x_0. Quando f é derivável em todo ponto de $X \cap X'$, dizemos que f é derivável.

Observação: 1.21. Note que a definição de derivada como taxa de variação (Definição 1.1) é equivalente a definição de derivada como aproximação por reta tangente (Definição 1.20).

A partir dessa abordagem, pode-se provar teoremas importantíssimos que é o Teorema da Regra da Cadeia e o Teorema da Função Inversa:

Teorema 1.22. *(Regra da Cadeia) Sejam $f : X \to \mathbb{R}, g : Y \to \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$, $a \in X \cap X'$, $b = f(a) \in Y \cap Y'$. Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$, então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, valendo $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Teorema 1.23. *(Derivada de uma função inversa) Seja $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ uma função que possui inversa $g = f^{-1} : Y \to X \subset \mathbb{R}$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo,*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

A partir da regra da Cadeia, nos tornamos hábeis para derivar diversas combinações lineares e composições de funções elementares. Já o Teorema da Função Inversa, nos auxilia, por exemplo, na derivação das funções inversas trigonométricas tais como arcosseno, arcocosseno, arcotangente etc.

No próximo capítulo, é exibido como o conceito de derivada pode ser generalizado para os espaços vetoriais de dimensão maior do que 1 tanto pela visão de Newton (derivada como uma taxa de variação) como pela visão de Leibniz (derivada como aproximação por transformação linear).

Capítulo 2

A derivada em Espaços Vetoriais Normados

2.1 A derivada no $\mathbb{R}^N$

O desenvolvimento da derivação para funções $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tem várias motivações. Primeiramente, é interessante notar que há fenômenos que possuem mais de uma variável tais como, segundo a 2ª Lei de Newton, a força resultante depende de duas variáveis: a massa e a aceleração. Sendo assim, poderíamos pensar na taxa de variação da força resultante segundo a variação da massa ou a taxa de variação da força resultante segundo a aceleração. Outro exemplo é o volume de um cilindro que é dada pela expressão

$$V(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

onde r é o raio e h é a altura do cilindro.

Como a derivada também auxilia na determinação de pontos de máximo e mínimos (Teorema 1.5), em diversos casos, é importante desenvolver o conceito de derivada para essa classe de funções afim de otimizar situações que perpassam pela Engenharia Civil, Elétrica, Economia e etc.

A abordagem analítica de René Descartes (1596-1650) para a geometria plana trouxe grandes impactos para a matemática. Como comentado na Seção 1.2, na perspectiva dos antigos matemáticos Gregos, a busca por retas tangentes à curvas era determinado por construções puramente geométricas e realizadas por meio da construção com a régua e compasso. Com a abordagem do Descartes, podemos associar uma curva em um plano a um caminho contínuo $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Assim, vale a pergunta

"É possível determinar um conceito de derivada para funções vetoriais afim de encontrar retas tangentes às curvas?"

Dessa forma, nessa seção, devotaremos nossa atenção ao seguinte questionamento:

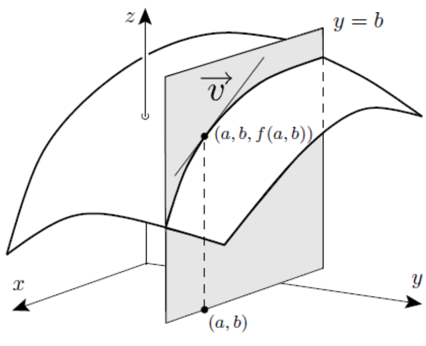
"Como podemos estender o conceito que tínhamos de derivada de funções reais para funções vetoriais?"

Para isso, considere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ e seja $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^N$ um vetor unitário. Segundo a ideia de Newton em ver a derivada como taxa de variação, podemos pensar na taxa de variação da função f na direção $\overrightarrow{v}$ em um ponto a, assim atentaremos ao limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Caso esse limite exista, dizemos que f possui uma derivada direcional na direção $\overrightarrow{v}$ no ponto a e a denotaremos por $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Figura 2.1: Taxa de variação da função f na direção v



Fonte: LIMA (2014, p. 118)

Mais formalmente, podemos definir da seguinte forma:

Definição 2.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^M$, $a \in U$ e $v \in \mathbb{R}^N$. A derivada direcional de f no ponto a, segundo o vetor v, é, por definição, o limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

quando tal limite existe. Quando v é um vetor da base canônica do $\mathbb{R}^N$, dizemos que a derivada direcional é uma derivada parcial e representamos por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \text{Derivada direcional de f no ponto a, segundo o vetor } e_i.$$

Observação: 2.2. A derivada direcional também é denominada de derivada a Gâteaux.

Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 + y, y - x^3).$$

Observemos que f possui derivadas parciais as quais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x, -3x^2) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1, 1).$$

Já a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $g(x, y) = (x, |y|)$ é derivável em relação a e_1 mas não é derivável em relação a e_2, visto que a função módulo não é derivável.

Para um estudo mais aprofundado da derivada direcional e das regras de derivação direcional recomendamos os livros de Cálculo (Referência [24]) e os livros de análise das Referências [21] e [2].

Vale ressaltar que a derivada direcional busca fazer a análise de uma função vetorial em uma direção e, sendo assim, é possível determinar retas tangentes ao gráfico nessa direção assim como valores de máximos ou mínimos nessa direção. Porém, apenas a existência da derivada direcional não traz necessariamente propriedades como continuidade da função, máximos ou mínimos locais em todas as direções.Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & se\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & se\ x = y = 0. \end{cases}$$

Vejamos que f possui derivada direcional para toda direção $\overrightarrow{v}$ no ponto $(0, 0)$.

Para isso, considere $\overrightarrow{v} = (a, b)$ e observemos o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (f((0, 0) + t(a, b)) - f(0, 0)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot f((ta, tb)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 a^3 \cdot tb}{(ta)^6 + (tb)^2}.$$

Daí, obtemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3a^3\cdot tb}{(ta)^6+(tb)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{ta^3b}{t^4a^2+b}.$$

Assim, se $a, b \neq 0$, temos

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot(f((0,0)+t(a,b))-f(0,0))=\lim_{t\to 0}\frac{ta^3b}{t^4a^2+b}=0.$$

Como também se $a=0$ ou $b=0$, não simultaneamente nulos, temos

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3a^3\cdot tb}{(ta)^6+(tb)^2}=0.$$

Portanto, para toda direção $\overrightarrow{v}$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0.$$

Porém, f não é contínua em $(0,0)$. De fato, observemos que

$$f(x,x^3)=\frac{x^6}{2x^6}=1/2.$$

Assim, fazendo $x\to 0$, teremos $(x,x^3)\to(0,0)$, mas

$$f(x,x^3)\to 1/2\neq 0.$$

Dessa forma, f não é uma função contínua.

Assim, o Exemplo 4 nos diz que o fato da função ter derivadas direcionais mesmo em todas as direções em torno do vetor nulo, não podemos concluir que a função seja contínua nesse ponto. Propriedade essa que não condiz com o que tínhamos na derivada na reta (veja o Teorema 1.4).

Sendo assim, é preciso repensar o conceito de derivada de tal forma que consiga fazer uma análise da imagem de uma função em todos as direções. Nessa perspectiva, podemos pensar no conceito de derivada como aproximação por uma transformação linear segundo o Leibniz da seguinte forma:

Definição 2.3. Sejam $U\subset\mathbb{R}^N$ um aberto, $f:U\to\mathbb{R}^M$. Dizemos que f é diferenciável à Fréchet, quando dado $a\in U$ existir um transformação linear contínua $L_0:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ tal que

$$f(a+h)=f(a)+L_0(h)+o(\|h\|),$$

então L_0 é chamada derivada de f segundo Fréchet no ponto a e denotada com um dos símbolos:

$$\partial f(a) = f'(a) = \nabla f(a) = df(a).$$

O próximo teorema evidencia que, além do estabelecimento da boa definição de derivada à Fréchet em um ponto a, a função deve ser contínua nesse ponto:

Teorema 2.4. *Se f é diferenciável em a, então*

a) *f é contínua em a;*

b) *L_0 é única.*

Demonstração.

a) Como L_0 é contínua em 0, temos

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a)) = \lim_{h\to 0}(L_0(h) + o(\|h\|)) = L_0(0) = 0.$$

Portanto, $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. Dessa forma, f é contínua em a.

b) Suponha que

$$f(a+h) = f(a) + L_0(h) + o(\|h\|) = f(a) + L_1(h) + o(\|h\|)$$

e seja $x \in \mathbb{R}^N$. Para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$f(a+tx) - f(a) = tL_0(x) + t\|x\|\epsilon_0(tx) = tL_1(x) + t\|x\|\epsilon_1(tx)$$

com $\lim_{t\to 0} \epsilon_i(tx) = 0$ para $i \in \{0, 1\}$. Notando que

$$L_1(x) - L_0(x) = \|x\|(\epsilon_1(tx) - \epsilon_0(tx))$$

e fazendo $t \to 0$, temos

$$L_1(x) - L_0(x) = 0.$$

Portanto, $L_1(x) = L_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e, assim, $L_1 = L_0$. $\square$

O seguinte teorema, presente no livro do Bartle (Referência [2]), relaciona bem a derivada a Fréchét e a derivada a Gâteaux:

Teorema 2.5. *Seja $f : U \to \mathbb{R}^M$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^N$. Se f é diferenciável em $a \in U$ então existe a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ qualquer direção v, a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v} : U \to \mathbb{R}^M$ é contínua e vale a relação*

$$f'(x) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x)$$

onde o ponto na equação anterior representa a avaliação da transformação linear $f'(x)$ no ponto v.

Assim, o conceito de derivada a Fréchet é mais forte do que a derivada direcional. Quando a função é diferenciável, procura-se analisar a variação da função em um ponto a não somente em relação a retas (direções) que passam no ponto a, mas por meio de qualquer caminho que pode passar por a. Quando a função é diferenciável a Fréchet, conseguimos recuperar diversos resultados que tínhamos para funções diferenciáveis na reta tais como:

Teorema 2.6. *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto e conexo. Se $f : U \to \mathbb{R}$ possui derivadas direcionais em todo ponto $x \in U$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$ para qualquer v, então f é constante.*

Teorema 2.7. *(Regra da Cadeia) Sejam $U \subset \mathbb{R}^M$, $V \subset \mathbb{R}^N$ abertos, $f : U \to \mathbb{R}^N$ diferenciável no ponto a, com $f(U) \subset V$, e $g : V \to \mathbb{R}^P$ diferenciável no ponto $f(a)$. Então, $g \circ f : U \to \mathbb{R}^P$ é diferenciável no ponto a, com*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) : U \to \mathbb{R}^P.$$

Teorema 2.8. *(Desigualdade do Valor Médio) Dado $U \subset \mathbb{R}^M$ aberto, seja $f : U \to \mathbb{R}^N$ diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto $(a, a+v)$ e tal que sua restrição ao segmento fechado $[a, a+v] \subset U$ seja contínua. Se $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, a+v)$, então*

$$\|f(a+v) - f(a)\| \leq M \cdot \|v\|.$$

Teorema 2.9. *(Teorema da função Inversa) Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^N$ diferenciável em $c \in U$ diferenciável. Se a aplicação $f' : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$ é contínua e que a derivada $f'(c)$ seja bijetora. Então existe uma vizinhança V_1 de c tal que $V_2 = f(V_1)$ é uma vizinhança de $f(c)$, $f : V_1 \to V_2$ é bijetora e f possui uma função inversa contínua $g : V \to U$. Ainda mais, a aplicação $g' : V_2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ é contínua e se $x = g(y) \in U$, então a aplicação linear $g'(y)$ é a função inversa da aplicação linear $f'(x)$.*

Teorema 2.10. *(Teorema da Função Implícita) Sejam $U \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação de classe C^1. Considere $c \in \mathbb{R}^N$, S o conjunto dos pares $(x, y) \in U$ que satisfazem a relação*

$$f(x, y) = c$$

e suponha $S \neq \emptyset$. Se $(a, b) \in S$ e a aplicação $\partial_2 f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ dada por

$$\partial_2 f(u) = f'(a, b)(0, u)$$

é invertível, então existem um aberto $U' \subset U$ de (a,b), uma vizinhança W de a em $\mathbb{R}^N$ e $\varphi : W \to \mathbb{R}^M$ uma aplicação C^1 de tal forma que as seguintes sentenças são equivalentes:

(i) $(x,y) \in U'$ *e* $f(x,y) = c$;

(ii) $x \in W$ *e* $y = \varphi(x)$.

A extensão da utilidade dos conceitos de derivada apresentados nesse capítulo é muito grande perpassando nas mais diversas áreas. Mas, mesmo sendo tão abrangente, há situações em que é preciso generalizar o conceito de derivada mais ainda como, por exemplo, no Cálculo das Variações, veja, na próxima seção, em que as funções são definidas em espaços vetoriais de dimensão infinta.

2.2 Derivada pra funcionais definidos em espaços vetoriais normados

2.3 Derivada em espaços normados

Nessa seção, nos basearemos no livro Cauculus on Normed Vector Spaces do Coleman, no livro Minimax Theorem, Referências [8] e [26], e consideraremos $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados.

Ao prestarmos atenção ao conceito de derivada que foi construído na Seção 2.1, podemos perceber que pouco foi utilizado do espaço $\mathbb{R}^N$ no que tange a finitude da sua dimensão, mas, essencialmente, necessitou da estrutura de um espaço vetorial normado.

Sendo assim, podemos definir derivada à Gâteaux (direcional) e a Fréchet (diferencial) de maneira análoga fazendo os devidos ajustes da seguinte forma:

Definição 2.11. (Derivada direcional) Sejam U um aberto de E, $f : U \to F$ uma aplicação, $a \in U$ e $v \in E \setminus \{0\}$. Dizemos que f é diferenciável em a na direção de v quando o seguinte limite existe:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Quando tal limite existe, o representamos por $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ e o denominamos por derivada direcional de f em a na direção v.

Definição 2.12. (Diferencial) Sejam $U \subset E$ um aberto e $f : U \to F$ uma aplicação. Dizemos que f é diferenciável à Frèchet, quando dado $x_0 \in U$ existir um transformação linear contínua $L_0 : E \to F$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_0(h) + o(\|h\|),$$

então L_0 é chamada derivada de f segundo Fréchet no ponto x_0 e denotada com um dos símbolos:

$$\partial f(x_0) = f'(x_0).$$

Quando avaliamos a diferencial em h podemos representar por $f'(a)(h)$ ou $f'(a).h$.

Exemplo 5. Considere um espaço de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $\| \cdot \|$ é a norma induzida pelo produto interno, isto é $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, e a função $f : H \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2,$$

é de classe $C^1(H, \mathbb{R})$ com

$$f'(u)v = \langle u, v \rangle\ , \quad \forall u, v \in H.$$

Para verificar isso, mostremos primeiramente que $\frac{\partial f}{\partial v}(u)$ existe para todo $u, v \in H$. Para $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, observe que

$$\begin{aligned} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\|u + tv\|^2 - \|u\|^2}{t}\right) \\ &= \langle u, v \rangle + \frac{t}{2}\|v\|^2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = \langle u, v \rangle\ .$$

Ao observar o Teorema 2.5, mesmo sendo em dimensão infinita faz sentido considerar o operador $L : H \to H$ onde

$$L(v) = \frac{\partial f(u)}{\partial v} = \langle u, v \rangle\ .$$

Por definição de produto interno, obtemos que L é linear e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, L é um operador contínuo. Por fim, basta mostrar que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{f(u + v) - f(u) - \langle u, v \rangle}{\|v\|} = 0.$$

Note então que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(u+v)-f(u)-\langle u,v\rangle}{\|v\|} &= \frac{\frac{1}{2}\|u+v\|^2-\frac{1}{2}\|u\|^2-\langle u,v\rangle}{\|v\|} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(\langle u+v,u+v\rangle-\langle u,u\rangle\right)-\langle u,v\rangle}{\|v\|}, \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle-\langle u,u\rangle\right)-\langle u,v\rangle}{\|v\|} \\
&= \frac{\langle v,v\rangle+\langle u,v\rangle}{\|v\|} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\|v\|^2+\langle u,v\rangle}{\|v\|} \\
&= \frac{1}{2}\|v\|+\frac{1}{2}\left\langle u,\frac{v}{\|v\|}\right\rangle .
\end{aligned}
$$

portanto,

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{f(u+v)-f(u)-\langle u,v\rangle}{\|v\|}=0$$

e assim, f é Fréchét diferenciável com

$$f'(u)(v)=\langle u,v\rangle .$$

Para provarmos que f é de classe $C^1(H,\mathbb{R})$, considere $u_n\to u$ em H e veja que

$$
\begin{aligned}
|f'(u_n)(v)-f'(u)(v)| &= |\,\langle u_n,v\rangle-\langle u,v\rangle\,| \\
&= |\,\langle u_n-u,v\rangle\,| \\
&\le \|u_n-u\|\cdot\|v\| \\
\Rightarrow \sup_{\|v\|\le 1}|f'(u_n)(v)-f'(u)(v)| &\le \|u_n-u\|,
\end{aligned}
$$

consequentemente,

$$\|f'(u_n)-f'(u)\|_{H'}\to 0 \ \text{ quando } \ u_n\to u \ \text{ em } \ H,$$

mostrando que f' é contínua. Assim, $f\in C^1(H,\mathbb{R})$.

Assim, ao considerar o espaço de sequências $H=l^2$ (veja o Exemplo 13 do Apêndice A) e $f:l^2\to\mathbb{R}$ onde

$$f(x_n)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2.$$

Assim, $f \in C^1(l^2, \mathbb{R})$ e

$$f'(x_n)(y_n) = \langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n.$$

Exemplo 6. A função $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ é contínua, mas não é diferenciável na origem. De fato, suponha, por absurdo, que $\|0\|' : E \to \mathbb{R}$ exista. Então, para $h \in E$ tal que $\|h\|$ seja suficientemente pequeno, temos

$$\|h\| = \|0\|'h + o(h) \Rightarrow \lim_{h\to 0}\left(1 - \|0\|'\frac{h}{\|h\|}\right) = 0$$

e

$$\|h\| = \| - h\| = \|0\|'(-h) + o(h) \Rightarrow \lim_{h\to 0}\left(1 + \|0\|'\frac{h}{\|h\|}\right) = 0.$$

Somando os dois limites acima, temos

$$0 = \lim_{h\to 0}\left(1 + \|0\|'\frac{h}{\|h\|}\right) + \left(1 - \|0\|'\frac{h}{\|h\|}\right) = \lim_{h\to 0} 2 \Rightarrow 0 = 2.$$

Um absurdo. Assim, $\| \cdot \|$ não é diferenciável no 0.

Em espaços vetoriais normados quaisquer também são válidos os seguintes teoremas, cujas demonstrações estão presentes na Referência [8]:

Teorema 2.13. *Seja f uma função definida em um aberto U de um espaço normado E cuja imagem está contida no produto $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$. Então f é diferenciável em $a \in U$ se, e somente se, as funções coordenadas $f_i : U \to F_i$ são diferenciáveis em a. E, nesse caso, devemos ter*

$$f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), \cdots, f_p'(a)).$$

Teorema 2.14. *Sejam E e F espaços vetoriais normados, $f, g : E \to E$ aplicações e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se f e g são diferenciáveis em a, então $(f + \lambda g)$ também é e vale:*

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda \cdot g'.$$

O seguinte teorema versa que os pontos de máximo ou pontos de mínimos são pontos críticos. Tal teorema é basilar para o Cálculo das Variações e para solução de algumas Equações Diferenciais Elípticas:

Teorema 2.15. *Sejam $U \subset E$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se* *a é um extremo local (um ponto de máximo ou um ponto de mínimo), então*

$$f'(a)(v) = 0$$

para todo $v \in E$.

Teorema 2.16. *(Regra da Cadeia) Sejam E, F e G espaços vetoriais normados, O um aberto de E e U um aberto de F , $f : O \to F$ e $g : U \to G$ tal que $f(O) \subset U$. Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em $f(a)$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

Teorema 2.17. *(Teorema do Valor Médio) Seja U um subconjunto aberto de um espaço vetorial E e considere $a, b \in E$ com $[a, b] \subset U$. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Teorema 2.18. *Se U é um subconjunto aberto e conexo de E e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável com $f'(v) = 0$ para todo $v \in U$, então f é constante.*

Teorema 2.19. *Sejam E, F espaços vetoriais normados, U subconjunto aberto de E e $f : U \to F$ diferenciável. Se o segmento $[a, b]$ está contido em U, então*

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|b - a\|_E.$$

Nos próximos teoremas que generalizam o Teorema da Função Inversa e o da Função Implícita do $\mathbb{R}^N$, é utilizado uma classe especial de espaços vetoriais normados: Os espaços de Banach. Para mais informações sobre esse espaço veja a Definição A.3 do Apêndice A.

Teorema 2.20. *(Teorema da função inversa) Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ e $f : U \to F$ de classe C^1. Se $a \in U$ e $f'(a)$ é invertível, então existe uma vizinhança aberta U' de a tal que $f|_{U'}$ é um difeomorfismo C^1 em relação a sua imagem.*

Teorema 2.21. *(Teorema da Função implícita) Sejam E_1, E_2 e F espaços de Banach, $U \subset E_1 \times E_2$ aberto e $f : U \to F$ uma aplicação de classe C^1. Considere $c \in F$, S o conjunto dos pares $(x, y) \in U$ que satisfazem a relação*

$$f(x, y) = c$$

e suponha $S \neq \emptyset$. Se $(a, b) \in S$ e a aplicação $\partial_2 f : E_2 \to F$ dada por

$$L(u) = f'(a, b)(0, u)$$

é invertível, então existe um aberto $U' \subset U$ de (a, b), uma vizinhança W de a em E_1 e $\varphi : W \to E_2$ uma aplicação C^1 tal que as seguintes sentenças são equivalentes:

(i) $(x, y) \in U'$ *e* $f(x, y) = c$;

(ii) $x \in U$ *e* $y = \varphi(x)$.

Sendo assim, como podemos ver, as abordagens para derivada tanto de Cauchy por meio de taxa de variação como de Fréchet por meio de aproximação por Transformação Linear dialogam bastante entre si e trazem grandes contribuições para generalizações.

Afim de generalizar um pouco mais o conceito de derivada, não observaremos mais o espaço em que as funções estão inseridas, mas procuraremos diminuir a exigência da definição de derivada afim de que abarque uma classe mais geral de funções.

Em especial, na próxima seção, é desenvolvida mais um conceito de derivada que é a inclinação fraca (weak slope).

Capítulo 3

Outros conceitos de derivada

Os conceitos de derivada continuam sendo generalizados para abordar outras situações. Por exemplo, como avaliar a taxa de variação de uma função em que o gráfico tem um bico assim como a função módulo?

Nessa situação, não é possível pensar em derivada nem a Gatêaux e a Fréchet. Nessa contexto, foram desenvolvidos vários conceitos que podem abordar essa situação, por exemplo, o gradiente generalizado de Clark (vide [6],[7] e [1]), a subdiferencial (vide [13]), a inclinação forte (vide [13]) e também a inclinação fraca (weak slope) (vide [5]) para funções semicontínuas inferiormente.

Assim, neste capítulo, serão apresentados várias generalizações do conceito de derivada para funções que não são deriváveis no sentido clássico. Na primeira seção conheceremos as definições de alguns conceitos de derivada. Na segunda seção será apresentado, com mais detalhe, o conceito de inclinação fraca. Por fim, veremos a relação entre esses conceitos e o conceito de derivada clássica.

3.1 Mais alguns conceitos de derivada

Durante essa seção, considere X um espaço métrico munido com a métrica d. Nesta seção, veremos os conceitos de inclinação forte, subdiferencial e gradiente generalizado de Clark. Essa seção, foi baseada no artigo de Degiovanni e Marzochhi (Vide [12]) e Canino e Degiovanni (Vide [5]).

Vale ressaltar que alguns dos conceitos de derivada serão realizado utilizando o conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ denominado de reta estendida. Para mais informações sobre a reta estendida, veja a Definição A.4 do Apêndice A.

Um interessante conceito é o de inclinação forte. A proposta da inclinação forte é de determinar qual é a maior inclinação possível das retas tangentes de uma função em um ponto u. Caso queira aprofundar o estudo nesse conceito, recomendamos o artigo de Giorgi, Marino e Tosques (Vide [13]). Vejamos a definição:

Definição 3.1 (Inclinação forte)**.** Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e $u \in D(f)$. Definimos

$$|\nabla f|(u) = \begin{cases} \limsup_{v \to u} \frac{f(u)-f(v)}{d(u,v)}, & \textit{se } \text{u não é mínimo local} \\ 0, & \textit{se } \text{u é um mínimo local.} \end{cases}$$

O número real estendido $|\nabla f|(u)$ é chamado de inclinação forte de f em u.

Observe que a inclinação forte procura avaliar a taxa de variação da função que é inspirado na forma de Newton pensar em derivada. Já a subdiferencial está mais associado a forma que Leibniz pensou a derivada como aproximação por transformação linear:

Definição 3.2 (Subdiferencial)**.** Seja X um espaço de Banach, $A \subset X$ um aberto e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função semicontínua inferiormente (Definição A.5). Para todo $u \in D(f)$, denotamos por $\partial^- f(u)$ o conjunto dos vetores α em X' tal que

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0. \tag{3.1}$$

Os elementos de $\partial^- f(u)$ são chamados de subdiferencial de f em u.

Vejamos um exemplo da subdiferencial de uma função que não é diferenciável no sentido clássico:

Exemplo 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função módulo. Calculemos $\partial^- f(0)$. Observemos que se $\alpha \in \partial^- f(0)$, então

$$\begin{aligned} \liminf_{v \to 0} \frac{f(v) - f(0) - \langle \alpha, v - 0 \rangle}{|v - 0|} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \liminf_{v \to 0} \frac{|v| - \alpha \cdot v}{|v|} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \liminf_{v \to 0} \left(1 - \alpha \frac{v}{|v|}\right) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \alpha \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Portanto, $\partial^- f(0) = [-1, 1]$.

Por fim, abordaremos o conceito de subdiferencial de Clark para funções localmente lipschitz. Uma teoria dos pontos críticos para essa classe de funções está presente no artigo de Chang (Vide [6]). Vejamos a definição do grafiente generalizado de Clark:

Definição 3.3. Seja X um espaço de Banach, $A \subset X$ aberto, f uma função localmente lipschitz e $u \in A$. Definimos a derivada direcional generalizada por

$$f^\circ(u; w) = \limsup_{\substack{v \to u \\ t \to 0^+}} \frac{f(v + tw) - f(v)}{t},$$

e o gradiente generalizado por

$$\partial f(u) = \{\alpha \in X'; f^\circ(u; w) \geq \langle \alpha, w \rangle; \forall w \in X\}.$$

Na dissertação de Abrantes (Vide [1]), há uma boa demonstração de que $\partial f(u) \neq \emptyset$ e é compacto em relação a topologia fraca estrela.

Na próxima seção, é construído o conceito de inclinação fraca para funcionais semicontínuos inferiormente.

3.2 Inclinação fraca

Ao longo dessa seção, consideraremos X como um espaço métrico munido com a métrica d.

Definição 3.4. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $u \in X$. Denotaremos por $|df|(u)$ como o supremo dos $\sigma \in [0, +\infty]$ tal que existem $\delta > 0$ e uma aplicação contínua

$$H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to X$$

tal que

a) $d(H(v, t), v) \leq t$,

b) $f(H(v, t)) \leq f(v) - \sigma t$.

O número real estendido $|df|(u)$ é chamada inclinação fraca de f em u.

No seguinte exemplo, veremos como se comporta a inclinação fraca com as funções Lipschitz:

Exemplo 8. Sejam (X, d) um espaço métrico e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz com constante de Lipschitz k, então $|dg|(x) \leq k$.

De fato, seja $\sigma \geq 0$ tal que exista uma aplicação contínua

$$H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to X$$

tal que

(i) $d(H(v, t), v) \leq t$,

(ii) $g(H(v, t)) \leq g(v) - \sigma t$.

Observemos que

$$\begin{array}{rcl} \sigma t & \leq & g(v) - g(H(v,t)) \\ \Rightarrow \sigma & \leq & \dfrac{g(v) - g(H(v,t))}{t} \leq \dfrac{k \cdot d(v, H(v,t))}{t} \\ \Rightarrow \sigma & \leq & \dfrac{k \cdot t}{t} = k. \end{array}$$

Logo, o k é uma cota superior para esses σ. Como $|dg|(x)$ é o supremo de tais σ, segue que

$$|dg|(x) \leq k.$$

Observe que tal propriedade é visível geometricamente, visto que toda função Lipschitz está entre duas funções afins com inclinação k. Portanto, faz sentido que a inclinação fraca seja majorada por essa constante k (vide Figura 3.1).

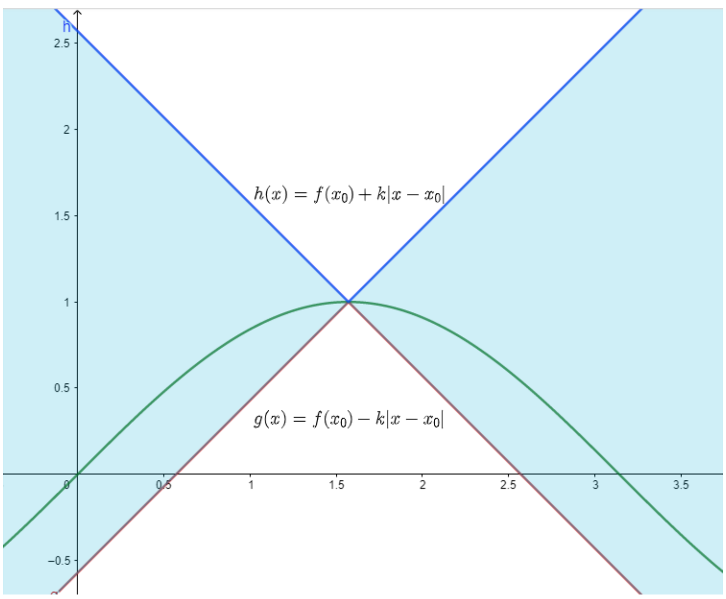


Figura 3.1: Função Lipschitz delimitada por funções lineares com inclinação k.

Exemplo 9. Consideremos agora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = |x|$. Então

$$|df|(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0. \end{cases}$$

De fato, vejamos, primeiramente, para o caso em que x_0 é positivo. Observemos que, pelo Exemplo (8), temos $|df|(x_0) \leq 1$. Falta então provar que $|df|(x_0) \geq 1$. Consideremos $\delta = \frac{x_0}{8}$, $H : B(x_0, \delta) \times [0, \delta] \to \mathbb{R}$ onde $H(y, t) = y - t$. Notemos que H é contínua e que

$$d(H(y,t), y) = |y - t - y| = |t| = t$$

para todo $y \in B(x_0, \delta)$.

Mostremos agora que H goza da propriedade (b) presente na Definição (3.4). Seja $y \in B(x_0, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Observemos que podemos escrever $y = x_0 + \epsilon$ ou $y = x_0 - \epsilon$, onde $\epsilon \in [0, \delta]$. Ora, se $y = x_0 + \epsilon$, então

$$\frac{|y| - |y - t|}{t} = \frac{|x_0 + \epsilon| - |x_0 + \epsilon - t|}{t}.$$

Como $t < \delta = \frac{x_0}{8}$, segue que

$$x_0 - t \geq 0.$$

Logo,

$$\frac{|y| - |y - t|}{t} = \frac{x_0 + \epsilon - (x_0 + \epsilon - t)}{t} = \frac{t}{t} = 1.$$

Por outro lado, se $y = x_0 - \epsilon$ e, ao observarmos que $\epsilon, t \in [0, \frac{x_0}{8}]$, temos $x_0 - \epsilon - t \geq 0$. Logo,

$$\frac{|y| - |y - t|}{t} = \frac{x_0 - \epsilon - (x_0 - \epsilon - t)}{t} = \frac{t}{t} = 1.$$

Tendo em vista que, em ambos os casos, temos

$$1 = \frac{f(y) - f(H(y,t))}{t}$$

para todo $y \in B(x, \delta)$ e $t \in [0, \delta]$. Daí, por meio de manipulações algébricas, segue que

$$f(H(y,t)) \leq f(y) - 1 \cdot t.$$

Dessa forma, por definição, devemos ter $|df|(x_0) \geq 1$. Portanto, $|df|(x_0) = 1$ para $x_0 > 0$.

Analogamente, mostra-se que $|df|(x_0) = 1$ para x_0 negativo. Observe que, nessas regiões, a função módulo é derivável e, ainda mais,

$$|f'(x)| = 1 = |df|(x)$$

para $x \neq 0$.

Tal igualdade não é uma mera coincidência, no Corolário 3.20, é afirmado que, para funções deriváveis, a inclinação fraca coincide com a norma da diferencial da função em questão.

Vejamos agora o caso em que x é nulo. Para isso, consideremos $\sigma \geq 0$ e uma aplicação H associada a σ conforme a Definição (3.4). Observemos que, ao aplicarmos $v = 0$ na propriedade (b) de H, temos

$$\begin{aligned} f(H(0,t)) &\leq f(0) - \sigma \cdot t \Rightarrow \\ \sigma &\leq \frac{f(0) - f(H(0,t))}{t} \Rightarrow \\ \sigma &\leq \frac{|0| - |H(0,t)|}{t} \leq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\sigma = 0$. Sendo assim, $|df|(0) = \sup \sigma = 0$.

Observemos que, nesse último exemplo, vimos que a inclinação fraca da função módulo no 0 é o 0. Perceba que 0 é um mínimo global da função módulo. A próxima proposição mostra que a inclinação fraca é nula em mínimos locais.

Proposição 3.5. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $U \subset X$ um subconjunto aberto. Se $u \in U$ é um ponto de mínimo local de f, então $|df|(u) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $|df|(u) > 0$. Consideremos $\sigma \in (0, |df|(0))$ e uma aplicação $H : U \times [0, \delta] \to \mathbb{R}$ como na Definição (3.4). Sendo assim,

a) $d(x, H(x,t)) \leq t$

b) $f(H(x,t)) \leq f(x) - \sigma t$

para todo $x \in U$ e $t \in [0, \delta]$. Note que, da propriedade (a), temos

$$H(x,t) \to x, \quad \text{quando } \ t \to 0.$$

Sendo $x = u$ um ponto de mínimo, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$f(u) \leq f(H(u,t)), \quad \forall t \in [0, \delta_1],$$

visto que u é um ponto de mínimo local de f. Dessa forma, observemos agora que, de (b), temos

$$\sigma \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{t}$$

aplicando $x = u$, temos

$$\sigma \leq \frac{f(u) - f(H(u,t))}{t} \leq 0, \quad \forall t \in [0, \delta_1].$$

Assim, o 0 é uma cota superior de tais σ, portanto

$$|df|(u) \leq 0 \Rightarrow |df|(u) = 0.$$

$\square$

A seguir, definiremos dois importantes conjuntos que são os alicerces para a construção do conceito de inclinação fraca para funções semicontínuas inferiormente:

Definição 3.6. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função semicontínua inferiormente. Denominamos de domínio efetivo de f o conjunto

$$D(f) = \{x \in X : f(u) < \infty\}$$

e de epigráfico de f o conjunto

$$epi(f) = \{(u, \xi) \in X \times \mathbb{R}; f(u) \leq \xi\}.$$

onde o epigráfico é munido com a métrica

$$d((u, \xi), (v, \mu)) = (d(u, v)^2 + |\xi - \mu|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação: 3.7. Se f é semicontínua inferiormente, então o $epi(f)$ é fechado em $X \times \mathbb{R}$. De fato, seja $(u, \xi) \in \overline{epi(f)}$. Logo, existe uma sequência $((u_n, \xi_n))$ de elementos de $epi(f)$ tal que

$$(u_n, \xi_n) \to (u, \xi),$$

segundo a métrica do $epi(f)$. Sendo assim,

$$d((u_n, \xi_n), (u, \xi)) \to 0.$$

Como $0 \leq d(u_n, u) \leq d((u_n, \xi_n), (u, \xi))$ e $0 \leq |\xi_n - \xi| \leq d((u_n, \xi_n), (u, \xi))$, segue que $(d(u_n, u))$ e $(|\xi_n - \xi|)$ convergem para 0. Portanto,

$$u_n \to u \ \ em \ \ X \quad e \quad \xi_n \to \xi \ \ em \ \ \mathbb{R}.$$

Como $(u_n, \xi_n) \in epi(f)$, temos

$$f(u_n) \leq \xi_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dessa maneira, podemos fazer $n \to \infty$ e ao observar que f é s.c.i., temos

$$f(u) \leq \liminf f(u_n) \leq \liminf \xi_n = \xi.$$

Portanto, $(u, \xi) \in epi(f)$. Dessa forma, $epi(f)$ é fechado.

Definição 3.8. Seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função *s.c.i.*. Definamos a função $\mathcal{G}_f : epi(f) \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{G}_f(u, \xi) = \xi.$$

Proposição 3.9. *A função $\mathcal{G}_f$ é uma função lipschitz.*

Demonstração. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_f(u, \xi) - \mathcal{G}_f(v, \mu)| &= |\xi - \mu| = \sqrt{|\xi - \mu|^2} \\ &\leq \sqrt{|\xi - \mu|^2 + d(u, v)^2} \\ &\leq 1 \cdot d((u, \xi), (v, \mu)). \end{aligned}$$

□

Observação: 3.10. Como a função $\mathcal{G}_f$ é Lipschitz de constante 1, segue, do Exemplo 8, que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, \xi) \leq 1$$

para todo $(u, \xi) \in epi(f)$.

A seguinte proposição mostrará uma relação entre $|d\mathcal{G}_f|(u, \xi)$ e $|df|(u)$ quando f é uma função contínua. Vejamos:

Proposição 3.11. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $u \in X$ e $\xi \in \mathbb{R}$. Então*

a)

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = \begin{cases} \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}}, & se\ |df|(u) < \infty \\ 1, & se\ |df|(u) = +\infty \end{cases}$$

b) $|d\mathcal{G}_f|(u, \xi) = 1,\ se\ f(u) < \xi.$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq \begin{cases} \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}}, & se\ |df|(u) < \infty \\ 1, & se\ |df|(u) = +\infty \end{cases} \tag{3.2}$$

Se $|df(u)| = 0$, então a desigualdade é verdadeira. Por outro lado, seja $0 < \sigma < |df|(u)$ e consideremos $H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to X$ uma aplicação contínua como na Definição (3.4). Considere $K : (B((u, f(u)), \delta) \cap epi(f)) \times [0, \delta] \to epi(f)$ dada por

$$K((v, \mu), t) = \left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right), \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} t \right).$$

Notemos que K está bem definida pois, ao aplicar a propriedade (b) de H presente na Definição (3.4), temos

$$\begin{aligned} f\left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)\right) &\leq f(v) - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t \\ &\leq \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t, \end{aligned}$$

visto que $(v, \mu) \in epi(f)$. Assim, $K((v, \mu), t) \in epi(f)$. Vejamos que K goza das propriedades (a) e (b) da Definição (3.4).

Propriedade (a):

Observemos que, ao aplicarmos a propriedade (a) de H, temos

$$\begin{aligned} d(K((v, \mu), t), (v, \mu)) &= \left(d\left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right), v\right)^2 + \left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} t - \mu\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{t^2}{1+\sigma^2} + \frac{\sigma^2 t^2}{1+\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} = t. \end{aligned}$$

Propriedade (b): Notemos que

$$\mathcal{G}_f\left(K((v, \mu), t)\right) = \mu - \frac{\sigma t}{\sqrt{1+\sigma^2}} = \mathcal{G}_f(v, \mu) - \frac{\sigma t}{\sqrt{1+\sigma^2}}.$$

Dessa forma, por definição de inclinação fraca, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}. \tag{3.3}$$

Consideremos uma sequência maximizante (σ_n) tal que

$$\sigma_n \to |df|(u).$$

Vejamos agora dois casos:

Caso 1: $|df|(u) < \infty$.

Assim, obtemos que

$$\sigma_n \to |df|(u).$$

Como a função $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

é contínua e, por (3.3), temos

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq \frac{\sigma_n}{\sqrt{1+\sigma_n^2}}.$$

Fazendo $n \to \infty$, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+|df(u)^2}}. \tag{3.4}$$

<u>**Caso 2:**</u> $|df|(u) = \infty$

Dessa forma, $\sigma_n \to \infty$. Observemos agora que

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = 1.$$

Logo, aplicando σ_n em (3.3) e fazendo $n \to \infty$, segue

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq 1.$$

Provando, assim,que a Desigualdade (3.2) é verdadeira. Mostremos agora que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \leq \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}}.$$

Caso $|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = 0$, segue que a desigualdade é verdadeira. Caso contrário, podemos considerar $0 < \sigma < |d\mathcal{G}_f|(u, f(u))$ e uma aplicação contínua, com $\delta < 1$,

$$K : B((u, f(u)), \delta) \times [0, \delta] \to epi(f)$$

com as propriedades presentes na Definição (3.4). Pela continuidade de f, existe $\delta' > 0$ tal que $\delta' \leq \delta\sqrt{1-\delta^2}$ e

$$d(v, u)^2 + |f(v) - f(u)|^2 < \delta^2, \quad \forall v \in B(u, \delta').$$

Definamos $H : B(u, \delta') \times [0, \delta'] \to X$ onde

$$H(v, t) = K_1\left((v, f(v)), \frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right),$$

sendo K_1 a primeira componente de K. Devido a escolha de $\delta' > 0$, note que H está bem definida. Ainda mais, note que H é contínua visto que K_1 também é contínua. Provemos agora que H goza das propriedades (a) e (b) da Definição 3.4:

Propriedade (a): Veja que

$$\begin{aligned} d\left(K\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right),(v,f(v))\right)^2 &= d\left(K_1\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right),v\right)^2 \\ &+ \left|K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)-f(v)\right|^2. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} d(H(v,t),v)^2 &= d\left(K_1\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right),v\right)^2 \\ &= d\left(K\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right),(v,f(v))\right)^2 \\ &\quad -\left|K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)-f(v)\right|^2. \end{aligned}$$

Portanto, pela propriedade (a) de K, temos

$$d(H(v,t),v)^2 \leq \frac{t^2}{1-\sigma^2} - \left|K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)-f(v)\right|^2. \tag{3.5}$$

Observemos agora que, pela propriedade (b) de K, temos

$$\mathcal{G}_f\left(K(v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) \leq f(v) - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t \leq f(v) - \mathcal{G}_f\left(K(v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right).$$

Como $\mathcal{G}_f\left(K(v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) = K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)$, temos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}t \leq f(v) - K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right).$$

Logo, da Desigualdade (3.5), temos

$$d(H(v,t),v)^2 \leq \frac{t^2}{1-\sigma^2} - \frac{\sigma^2 t^2}{1-\sigma^2} = t^2.$$

Provando a propriedade (a) para H.

Propriedade (b): Observemos que

$$\begin{aligned} f(H(v,t)) &= f\left(K_1\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\right) \\ &\leq K_2\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) \\ &= \mathcal{G}_f\left(K\left((v,f(v)),\frac{t}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)\right) \\ &= \mathcal{G}_f(v,f(v)) - \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}t \\ &= f(v) - \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}t. \end{aligned}$$

onde foram utilizadas as definições de epígrafo ($Im(K) \subset epi(f)$), a definição de $\mathcal{G}_f$ e a propriedade (b) de K, respectivamente. Portanto, por definição de $|df|(u)$, segue que

$$|df|(u) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

Usando um argumento semelhante para concluir a veracidade da Inequação (3.4), segue que

$$|df|(u) \geq \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}.$$

Daí, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) \leq \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u)^2)}}.$$

quando $|df|(u) < +\infty$. Portanto, se $|df|(u) < \infty$, então

$$|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) = \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u)^2)}}.$$

Por fim, vejamos a demonstração da seguinte afirmação:
Afirmação: Se $f(u) < \xi$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu \geq f(v) + \delta$$

quando $(v,\mu) \in B((u,\xi),\delta)$.

De fato, suponha, por absurdo, que a afirmação não seja válida. Logo existe uma sequência $((v_n,\mu_n))$ tal que

$$d((v_n,\mu_n),(u,\xi)) < \frac{1}{n} \tag{3.6}$$

e

$$\mu_n < f(v_n) + \frac{1}{n}. \tag{3.7}$$

Da Desigualdade (3.6), segue que

$$\begin{aligned} v_n &\to u \; em \; X \quad e \\ \mu_n &\to \xi \; em \; \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Passando o limite na Desigualdade (3.7) e observando que f é contínua, segue que

$$\xi \leq f(u),$$

o que é um absurdo. Assim, existe $\delta > 0$ tal que $\mu \geq f(v) + \delta$ sempre quando

$$(v, \mu) \in B((u, \xi), \delta).$$

Concluindo, assim, a afirmação.

Agora, definamos $H : B((u, \xi), \delta) \times [0, \delta] \to epi(f)$ dada por

$$H((v, \mu), t) = (v, \mu - t).$$

Observemos que, H é contínua e está bem definida, pois

$$f(v) + t \leq f(v) + \delta \leq \mu \Rightarrow$$

$$f(v) \leq \mu - t \Rightarrow (v, \mu - t) \in epi(f). \tag{3.8}$$

Ainda mais,

$$d(H((v, \mu), t), (v, \mu)) = d((v, \mu - t), (v, \mu)) \leq t.$$

Concluindo que H goza da propriedade (a) da Definição (3.4). Ademais,

$$\mathcal{G}_f(H(v, \mu), t) = \mathcal{G}_f(v, \mu - t) = \mu - t = \mathcal{G}_f(v, \mu) - 1 \cdot t.$$

Mostrando que H goza da propriedade (b) da Definição (3.4). Portanto, se $(u, \xi) \in epi(f)$, então

$$\begin{aligned} |d\mathcal{G}_f|(u, \xi) &\geq 1 \Rightarrow \\ |d\mathcal{G}_f|(u, \xi) &= 1. \end{aligned}$$

Pois já tínhamos verificado, no Exemplo (8), que $|d\mathcal{G}_f|(u, \xi) \leq 1$. $\square$

Observando a proposição anterior, podemos reescrever a inclinação fraca de f,

$|df|(u)$, em termos da inclinação fraca de $\mathcal{G}_f$ observando os seguintes passos:

$$\begin{aligned}
|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)) &= \frac{|df|(u)}{\sqrt{1+(|df|(u))^2}} \\
(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2\cdot(1+(|df|(u))^2) &= (|df|(u))^2 \\
(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2+(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2\cdot(|df|(u))^2 &= (|df|(u))^2 \\
(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 &= (|df|(u))^2-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2\cdot(|df|(u))^2 \\
(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2 &= (1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2)\cdot(|df|(u))^2 \\
\frac{(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}{(1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2)} &= (|df|(u))^2 \\
|df|(u) &= \frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}.
\end{aligned}$$

Assim, ao considerarmos f uma função contínua e tomarmos $u\in X$ de tal forma que $|df|(u)<\infty$, segue que temos a seguinte relação:

$$|df|(u)=\frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}. \tag{3.9}$$

Dessa forma, podemos ver como a inclinação fraca de f está bem relacionada com a inclinação fraca de $\mathcal{G}_f$. Mas, vale ressalta que, só pelo fato de f ser uma função *s.c.i.*, obtemos que o conjunto $epi(f)$ é fechado (Observação 3.7) e a função $\mathcal{G}_f$ não é só contínua, mas Lipschitz.

Portanto, a proposição anterior nos permite definir, em um caminho consistente, a inclinação fraca também para funções *s.c.i.* por meio da função auxiliar $\mathcal{G}_f$.

Definição 3.12. Seja X um espaço métrico e $f : X\to\overline{\mathbb{R}}$ uma função. Definamos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
D(f) &:= \{u\in X|f(u)<\infty\} \\
f^b &:= \{u\in X|f(u)\le b\}.
\end{aligned}$$

Observação: 3.13. Se $f : X\to\mathbb{R}$ é uma função semicontínua inferiormente e $b\in\mathbb{R}$, então $D(f)$ e f^b são conjuntos fechados.

Definição 3.14. Seja $f : X\to\overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e considere $u\in D(f)$. Definimos:

$$|df|(u)=\begin{cases}\frac{|d\mathcal{G}_f|(u,f(u))}{\sqrt{1-(|d\mathcal{G}_f|(u,f(u)))^2}}, & se\ |d\mathcal{G}_f|(u,f(u))<1\\ +\infty, & se\ |d\mathcal{G}_f|(u,f(u))=1\end{cases}$$

Observemos agora que é possível definir a inclinação fraca não somente para funções contínuas, como na Definição (3.4), mas também para funções que são apenas semicontínuas inferiormente. Porém, a maneira que foi definida é muito diferente se comparada com a definição inicial (3.4).

A próxima proposição mostra um critério para obter uma estimativa por baixo para $|df|(u)$. A aplicação contínua presente nesse critério é muito similar com a aplicação presente na Definição inicial (Definição 3.4) de inclinação fraca:

Proposição 3.15. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e $u \in D(f)$. Suponha que existam $\delta > 0$, $b > f(u)$, $\delta > 0$ e uma aplicação contínua*

$$H : (B(u, \delta) \cap f^b) \times [0, \delta] \to X$$

tal que goze das propriedades:

a) $d(H(v,t), v) \leq t$,

b) $f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$.

Então, $|df|(u) \geq \sigma$.

Demonstração. O caso em que $|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) = 1$ é trivial pois teríamos $|df|(u) = \infty$ que é maior do que qualquer $\sigma > 0$. Sendo assim, consideremos o caso em que $|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) < 1$.

Seja $\delta' \in (0, \delta]$ tal que

$$\mu \leq b$$

para $(v, \mu) \in B((u, f(u)), \delta')$ e definamos

$$K : (B((u, f(u)), \delta') \cap epi(f)) \times [0, \delta'] \to epi(f)$$

onde

$$K((v,\mu),t) = \left(H\left(v, \frac{t}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right), \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t \right).$$

Seguindo os mesmos passos presentes na demonstração da Proposição (3.11) acerca da aplicação K, obtemos que $K((v,\mu),t) \in epi(f)$ e que K goza das propriedades (a) e (b) presentes na Definição (3.4), ou seja,

$$\begin{aligned} d(K((v,\mu),t),(v,\mu)) &\leq t, \\ \mathcal{G}_f(K((v,\mu),t)) &= \mathcal{G}_f(v,\mu) - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot t. \end{aligned}$$

Assim, observando ainda mais que K é contínua, segue que K é uma deformação como na Definição (3.4) e, assim, obtemos que

$$|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}.$$

Por manipulações algébricas, podemos reescrever a última desigualdade da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\leq \frac{(|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)))^2}{1 + (|d\mathcal{G}_f|(u, f(u)))^2} = (|df|(u))^2 \Rightarrow \\ \sigma &\leq |df|(u). \end{aligned}$$

□

A seguir, veremos algumas propriedades importantes sobre a inclinação fraca. A proposição a seguir nos diz que a função inclinação fraca é uma função *s.c.i.* com respeito a topologia do gráfico, vejamos:

Proposição 3.16. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e considere $u \in D(f)$. Se*

$$(u_k, f(u_k)) \to (u, f(u)) \text{ em } G(f),$$

então

$$|df|(u) \leq \liminf_k |df|(u_k).$$

Demonstração. Provemos, primeiramente, para o caso em que f é uma função contínua. Observemos que se $|df|(u) = 0$, então a afirmativa é verdadeira. Consideremos então o caso em que $|df(u)| > 0$. Sendo assim, sejam $\sigma \in (0, |df|(u))$ e $H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to X$ como na Definição (3.4).

Notemos que, como $u_k \to u$, segue que $u_k \in B(u, \frac{\delta}{2})$ para k suficientemente grande. Consideremos $H_1 = H|_{B(u_k, \frac{\delta}{2}) \times [0, \frac{\delta}{2}]}$. Observemos que H_1 goza das propriedades (a) e (b) presentes na Definição (3.4). Dessa forma,

$$|df|(u_k) \geq \sigma. \tag{3.10}$$

Como σ foi tomado arbitrariamente segundo a Definição (3.4), temos

$$|df|(u_k) \geq |df|(u),$$

pois $|df|(u)$ é o supremo do conjunto de tais σ e, segundo a Desigualdade (3.10), $|df|(u_k)$ é uma conta superior desse conjunto, para k suficientemente grande. Dessa forma,

$$|df|(u) \leq \liminf_k |df|(u_k).$$

Provando assim que $|df|$ é uma função s.c.i. segundo a topologia do gráfico, quando f é contínua. Vamos ao caso geral. Como $\mathcal{G}_f$ é contínua, aplicando o caso anterior, segue que

$$|d\mathcal{G}_f|(u) \leq \liminf_k |d\mathcal{G}_f|(u_k).$$

Observemos agora a função $f_1 : [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

que é contínua. Logo, pela igualdade 3.9,

$$\begin{aligned} \frac{|d\mathcal{G}_f|(u)}{\sqrt{1-|d\mathcal{G}_f|(u)}} &\leq \liminf_k \frac{|d\mathcal{G}_f|(u_k)}{\sqrt{1-|d\mathcal{G}_f|(u_k)}} \Rightarrow \\ |df|(u) &\leq \liminf_k |df|(u_k). \end{aligned}$$

□

Neste contexto, vimos a construção do conceito de inclinação fraca para funcionais semicontínuos inferiormente, assim como exemplos e propriedades. A seguir, veremos algumas relações entre os conceitos apresentados nas Seções 3.1 e 3.2.

3.3 Relação entre os conceitos de derivadas

A primeira relação que veremos é que a inclinação fraca é sempre menor ou igual do que a inclinação forte. Como consequência interessante é que pontos críticos no sentido da inclinação forte, também são pontos críticos em relação a inclinação fraca:

Proposição 3.17. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i., então $|df|(u) \leq |\nabla f|(u)$ para todo $u \in X$.*

Demonstração. Provemos, primeiramente, para o caso em que f é contínua. Consideremos $u \in X$. Então, temos dois casos:

<u>Caso 1:</u> u não é mínimo local.

Neste caso, se $|df|(u) = 0$, então não há o que provar. Dessa forma, consideremos $\sigma \in (0, |df|(u))$ e uma aplicação $H : U \times [0,\delta] \to \overline{\mathbb{R}}$ como na Definição (3.4). Assim, temos

a) $d(x, H(x,t)) \leq t$

b) $f(H(x,t)) \leq f(x) - \sigma t$

para todo $x \in U$ e $t \in [0, \delta]$. Observemos que, de (b), temos

$$\sigma \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{t}$$

e, de (a), segue que

$$\sigma \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{t} \leq \frac{f(x) - f(H(x,t))}{d(x, H(x,t))} \leq \limsup \frac{f(u) - f(v)}{d(u,v)} = |\nabla f|(u).$$

Caso 2: u é um mínimo local.

Da Proposição (3.5), segue que $|df|(u) = 0$. Sendo assim, $|df|(u) \leq |\nabla f|(u)$. $\square$

Já a seguinte proposição, é enunciadas diversas propriedades entre os conceitos de subdiferencial, subdiferencial de Fenchel e inclinação forte. Vejamos:

Proposição 3.18. *Sejam $A \subset X$ um conjunto aberto, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. e $u \in D(f)$. Então as seguintes sentenças são verdadeiras:*

a) *Se $g : A \to \mathbb{R}$ é Frèchet diferenciável em u, então*

$$\partial^-(f+g)(u) = \{\alpha + dg(u) | \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

b) *Se $\alpha \in \partial^- f$, então para todo $w \in X$*

$$\langle \alpha, w \rangle \leq \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(u+tw) - f(u)}{t};$$

c) *Se A é um conjunto convexo e f é uma função convexa, então $\partial^- f(u)$ equivale à subdiferencial de Fenchel;*

d) *Se $\alpha \in \partial^- f$, então $|\nabla f|(u) \leq ||\alpha||$;*

e) *$\partial^- f(u)$ é fechado forte e convexo em X'.*

Demonstração da afirmação (a):

De fato, seja $\beta \in \partial^-(f+g)(u)$, escrevamos $\beta = \beta - dg(u) + dg(u)$ e observemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{v \to u} \frac{(f+g)(v) - (f+g)(u) - \langle \beta, v-u \rangle}{||v-u||} &\geq 0 \Rightarrow \\ \liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \beta - dg(u), v-u \rangle}{||v-u||} + \frac{g(v) - g(u) - \langle dg(u), v-u \rangle}{||v-u||} &\geq 0. \end{aligned}$$

Observemos que
$$\lim_{v\to u}\frac{g(v)-g(u)-\langle dg(u),v-u\rangle}{||v-u||}=0,$$
pois g é Frèchet diferenciável em u. Daí, segue que
$$\liminf_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)-\langle \beta-dg(u),v-u\rangle}{||v-u||}\geq 0.$$
Dessa forma, $\beta - dg(u)\in\partial^- f(u)$. Sendo assim, $\partial^-(f+g)(u)\subset\{\alpha+dg(u)|\alpha\in\partial^- f(u)\}$. A inclusão contrária é imediata. Portanto,
$$\partial^-(f+g)(u)=\{\alpha+dg(u)|\alpha\in\partial^- f(u)\}.$$

Demonstração da afirmação (b):

Definamos $v=u+tw$, assim por definição, temos
$$\liminf_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)-\langle\alpha,v-u\rangle}{||v-u||}=\liminf_{t\to 0^+}\frac{f(u+tw)-f(u)-\langle\alpha,tw\rangle}{||tw||}\geq 0.$$
Observando agora que
$$\frac{\langle\alpha,tw\rangle}{||tw||}=\frac{\langle\alpha,w\rangle}{||w||},$$
pois $t\geq 0$ e α é linear, assim
$$\frac{\langle\alpha,w\rangle}{||w||}\leq\liminf_{t\to 0^+}\frac{f(u+tw)-f(u)}{||tw||}.$$
Daí, segue que
$$\langle\alpha,w\rangle\leq\liminf_{t\to 0^+}||w||\cdot\frac{f(u+tw)-f(u)}{||tw||}=\liminf_{t\to 0^+}\frac{f(u+tw)-f(u)}{t}.$$

Demonstração da afirmação (c):

Seja $\alpha\in\partial f(u)$ um subgradiente de Fenchel. Logo,
$$\langle\alpha,u-v\rangle\leq f(u)-f(v).$$
para todo $v\in A$. Dessa maneira, segue que
$$0\leq f(u)-f(v)-\langle\alpha,u-v\rangle,$$

para todo $v \in A$. Dessa forma,

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Portanto, $\alpha \in \partial^- f(u)$. Dessa forma, $\partial f(u) \subset \partial^- f(u)$.

Provemos a inclusão contrária. Seja $\alpha \in \partial^- f(u)$. Logo,

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Sendo assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0$$

para todo $v \in B(u, \delta) \subset A$. Seja $w \in A$. Sendo A convexo, obtemos que o segmento $[u, w]$ está contido em A. Sendo assim, consideremos $v = tu + (1-t)w$ onde $t > 0$ foi tomado de tal forma que $v \in B(u, \delta)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} &\geq 0 \Rightarrow \\ \langle \alpha, tu + (1-t)w - u \rangle &\leq f(tu + (1-t)w) - f(u). \end{aligned}$$

Como f é convexa, obtemos

$$\langle \alpha, (1-t)(w-u) \rangle \leq f(tu+(1-t)w) - f(u) \leq tf(u) + (1-t)f(w) - f(u) = (1-t)(f(w) - f(u)) \Rightarrow$$

$$\langle \alpha, w - u \rangle \leq f(w) - f(u).$$

para todo $w \in A$,. Dessa forma, $\alpha \in \partial f(u)$. Portanto, $\partial^- f(u) \subset \partial f(u)$. Sendo assim, $\partial^- f(u) = \partial f(u)$ concluindo a demonstração do item (c).

Demonstração da afirmação (d):

Seja $\alpha \in \partial^- f$.Observemos que

$$||\alpha|| = \limsup \frac{\langle \alpha, u - v \rangle}{||u - v||}$$

e

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Sendo assim,

$$\liminf_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)}{||v-u||}-\limsup_{v\to u}\frac{\langle\alpha,v-u\rangle}{||v-u||}\geq 0.$$

Logo,

$$|\nabla f|(u)=\limsup_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)}{||v-u||}\leq||\alpha||.$$

Demonstração da afirmação (e): Provemos primeiramente que $\partial^- f(u)$ é fechado forte. Para isso, consideremos $\alpha\in\overline{\partial^- f(u)}$ e uma sequência (α_n) em $\partial^- f(u)$ tal que

$$\alpha_n\to\alpha$$

com a norma de X'. Observemos que

$$\begin{aligned}\liminf_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)-\langle\alpha,v-u\rangle}{||v-u||} &= \liminf_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)-\langle\alpha_n,v-u\rangle}{||v-u||}\\ &\quad -\frac{\langle\alpha-\alpha_n,u-v\rangle}{||u-v||}.\\ &\geq \liminf_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)-\langle\alpha_n,v-u\rangle}{||v-u||}\\ &\quad -\limsup_{v\to u}\frac{\langle\alpha-\alpha_n,u-v\rangle}{||u-v||}.\end{aligned}$$

Como $\alpha_n\to\alpha$ fortemente, segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\langle\alpha-\alpha_n,u-v\rangle}{||u-v||}=0.$$

Logo, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n>n_0$ tem-se

$$\left|\limsup_{v\to u}\frac{\langle\alpha-\alpha_n,u-v\rangle}{||u-v||}\right|<\epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\liminf_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)-\langle\alpha,v-u\rangle}{||v-u||} &\geq \liminf_{v\to u}\frac{f(v)-f(u)-\langle\alpha_n,v-u\rangle}{||v-u||}\\ &\quad -\limsup_{v\to u}\frac{\langle\alpha-\alpha_n,u-v\rangle}{||u-v||}\\ &\geq -\epsilon.\end{aligned}$$

Recordando que $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, podemos afirmar que

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \geq 0.$$

Portanto, $\alpha \in \partial^- f(u)$. Logo, $\partial^- f(u)$ é fechado forte.

Vejamos agora que $\partial^- f(u)$ é convexo. Sejam $\alpha, \beta \in \partial^- f(u)$, provaremos que $[\alpha, \beta] \subset \partial^- f(u)$. Para isso, consideremos $w = t\alpha + (1-t)\beta \in [\alpha, \beta]$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle t\alpha + (1-t)\beta, v - u \rangle}{||v - u||} &= t \liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{||v - u||} \\
&+ (1-t) \liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \beta, v - u \rangle}{||v - u||} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, $w \in \partial^- f(u)$. Portanto, $[\alpha, \beta] \subset \partial^- f(u)$. Dessa forma, $\partial^- f(u)$ é um conjunto convexo. $\square$

Agora, veremos que, para as funções de classe C^1, os conceitos de inclinação fraca, inclinação forte e subdiferencial são compatíveis. A demonstração do seguinte teorema foi omitida devido ao uso de técnicas avançadas da Análise Funcional que foge do escopo desse trabalho. Para conferir a demonstração, sugerimos a leitura da dissertação presente na referência [14].

Teorema 3.19. *Seja $A \subset X$ aberto e convexo com X sendo um espaço de Banach. Considere $f_0 : A \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função convexa e s.c.i., $f_1 : A \to \overline{\mathbb{R}}$ de classe $C^1(A)$ e $f = f_0 + f_1$. As seguintes sentenças são válidas*

a) $|df|(u) = |\nabla f|(u)$ *para todo* $u \in D(f)$.

b) $|df|(u) < +\infty$ *se, e somente se,* $\partial^- f(u) \neq \emptyset$. *para todo* $u \in D(f)$. *E, nesse caso,*

$$|df|(u) = \min\{||\alpha|| \; ; \; \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Corolário 3.20. *Seja $A \subset X$ aberto e convexo, com X sendo um espaço de Banach. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável à Fréchet, então*

$$|df|(u) = ||f'(u)||$$

onde $f'(u)$ é a diferencial de f no ponto u.

Demonstração. De fato, basta considerar $f_0 = 0$ e $f_1 = f$. Assim, como f é diferenciável em u, segue que

$$\partial^- f(u) = \{f'(u)\} \neq \emptyset.$$

Portanto, da propriedade (b) do Teorema 3.19, temos $|df|(u) < +\infty$ e, assim,

$$|df|(u) = \min\{||\alpha|| \; ; \; \alpha \in \partial^- f(u)\} = \min\{||f'(u)||\} = ||f'(u)||.$$

□

Observemos que a relação entre a inclinação fraca e a subdiferencial pode ser contemplada no Exemplo (9). De fato, no Exemplo (7), vimos que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função módulo, devemos ter

$$\partial^- f(0) = [-1, 1].$$

Assim,

$$\min\{||\alpha|| \; ; \; \alpha \in \partial^- f(u)\} = 0.$$

E vimos, no Exemplo (9), que $|df|(0) = 0$. Logo,

$$|df|(0) = \min\{||\alpha|| \; ; \; \alpha \in \partial^- f(u)\}.$$

Agora, veremos uma relação entre a inclinação fraca e o gradiente generalizado de Clark (Definição 3.3):

Teorema 3.21. *Seja X um espaço de Banach, $A \subset X$ aberto e $f : X \to \mathbb{R}$ localmente lipschitz. Então, para todo $u \in A$, temos*

$$|df|(u) \geq \min\{||\alpha|| \; ; \; \alpha \in \partial f(u)\}.$$

Dessa forma, nessa seção, vimos várias relações interessantes entre a inclinação fraca e os conceitos de derivada tais como o clássico, a inclinação forte, a derivada clássica, a subdiferencial, a subdiferencial de Fenchel e o gradiente generalizado de Clark.

Sendo assim, o conceito de derivada elaborado por Newton e Leibniz trouxeram grandes repercussões na Física, na Matemática e outra diversas áreas. As generalizações, inspiradas nesses dois grandes cientistas, aumentam a aplicabilidade dos conceitos para locais em que eram impensáveis, por exemplo, para funções Localmente Lipschitz, podendo haver bico no gráfico, ou funções semicontínuas inferiormente, podendo ser descontínuas.

Apêndice A

Definições complementares

Nesta seção, veremos algumas definições que são utilizadas durante o trabalho mas não são comumente comentados nos cursos de matemática à nível de graduação. Assim, objetivamos, nesse apêndice, facilitar a pesquisa do leitor ao indicar as referências confiáveis e de qualidade.

Esse apêndice foi baseado nos capítulos 1,2 e 3 do Livro "Introductory Functional Analysis with Applications"de Erwin Kreyzig (referência [18]).

Primeiramente, vejamos a definição de um espaço métrico:

Definição A.1 (Espaço Métrico)**.** Um Espaço Métrico é um par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X (ou função distância em X,) isto é, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ onde, para $x, y, z \in X$, temos

- $d(x, y) \geq 0$;
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$; (Simetria)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdade triangular)

Exemplo 10. O par $(\mathbb{R}^N, d_N)$, onde $d_N : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com

$$d_N(x, y) = \|x - y\|$$

e $\| \cdot \|$ indica uma norma no $\mathbb{R}^N$, é um espaço métrico. A métrica d_N é denominada de métrica induzida pela norma $\| \cdot \|$;

Exemplo 11. Seja X um conjunto com mais de um elemento. Considere a função $d_0 : X \times X \to X$ onde

$$d_0(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq y \\ 0, & se\ x = y. \end{cases}$$

O par (X, d_0) é uma métrica d_0 é conhecida como a métrica conhecida por métrica zero um.

Inspirados no Exemplo 10, obtemos o seguinte resultado que envolve norma de um espaço vetorial e uma métrica de um espaço métrico:

Proposição A.2. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. A função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ onde*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

define uma métrica para E.

Assim, todo espaço vetorial normado é também um espaço métrico. A seguinte definição fala de uma importante classe de espaços vetoriais: Os espaços de Banach.

Definição A.3 (Espaços de Banach)**.** Um espaço vetorial normado X é denominado espaço de Banach quando as sequências de Cauchy em X são convergentes.

Exemplo 12. O espaço Euclidiano $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, independentemente da escolha da norma.

Exemplo 13. O conjunto

$$l^p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} |\ com\ x_n \in \mathbb{R}\ e\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

para $1 \leq p < \infty$, é um espaço vetorial normado de Banach quando munido a norma

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Outra classe de espaços muito especial são os espaços de Hilbert. Neles, a norma está diretamente associada a um produto interno e, assim, pode-se comentar de maneira mais imediata sobre outras propriedades geométricas tais como a ortogonalidade, o ângulo formado entre os vetores, etc.

Exemplo 14. Dizemos que um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Hilbert quando existe um produto interno $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ em X tal que

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 15. Considere o espaço vetorial normado $\mathbb{R}^N$ munido com a norma euclidiana

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_e = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_e)$ é um espaço de Hilbert, pois,

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_e = \langle (x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n) \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 16. O espaço $(l^2, \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Hilbert, mas $(l^p, \|\cdot\|_p)$ não é para $p \neq 2$.

Por fim, vejamos a seguinte classificação de funções semicontínuas inferiormente, mais abreviadamente s.c.i. . Essas funções estão presentes, por exemplo, em diversos problemas presentes nas Equações Diferenciais Elípticas, em especial, nos métodos variacionais. Mas, para isso, conheçamos o conjunto dos números reais estendidos:

Definição A.4. Considere o conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

com as seguintes operações a mais

- Quando $a \neq \infty$:

  $a + \infty = \infty + a = \infty;$

  $a - \infty = \infty - a = \infty;$

  $\frac{a}{\infty} = a \cdot 0 = 0 \cdot a;$

  $\frac{\infty}{a} = \infty.$

- Quando $a \neq 0$;

  $\frac{a}{0} = \infty = a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty;$

  $\frac{a}{0} = \infty.$

A seguinte definição foi baseada na seção 4 do capítulo 1 do livro Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations do Brezis (referência [4]):

Definição A.5 (Função semicontínua inferiormente)**.** Seja X um espaço de Banach. Uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é denominada de função semicontínua inferiormente quando

$$[f \leq \lambda] = \{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$$

é fechado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 17. Toda função contínua é semicontínua inferiormente.

Exemplo 18. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0 \\ 1, & se\ x > 1. \end{cases}$$

é uma função semicontínua inferiormente.

Bibliografia

[1] Abrantes Santos, J. Teoremas Minimax paa funcionais Localmente Lipschitz e Aplicações. Orientador: Claudianor Oliveira Alves. 2007. Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2001. (181). Dissertação (Mestrado) - Mestrado em Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande,2007.

[2] Bartle, G. R.,The Elements of Real Analysis,Ed. 2,Editorial Limusa, México,1982.

[3] Bredon, G. E.,Introduction to compact transformation groups,Pure and Applied Mathematics, Vol. 46,Academic Press, New York-London,1972.

[4] Brezis, H.,Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,Universitext,Springer, New York,2011.

[5] Canino, A. and Degiovanni, M.,Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations,Topological methods in differential equations and inclusions (Montreal, PQ, 1994),NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.,472,1–50,Kluwer Acad. Publ., Dordrecht,1995.

[6] Chang, K. C.,Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations,J. Math. Anal. Appl.,Journal of Mathematical Analysis and Applications,80,1981.

[7] Clarke, F. H.,Optimization and nonsmooth analysis,Classics in Applied Mathematics,5,Second,Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA,1990.

[8] Coleman, R.,Calculus on normed vector spaces,Springer, New York,2012.

[9] D'Avenia, P. and Montefusco, E. and Squassina, M.,On the logarithmic Schrödinger equation, Commun. Contemp. Math.,Communications in Contemporary Mathematics,16,2014.

[10] De Carvalho, J. B. P., Roque, T.,Tópicos de história da Matemática,Vol. 1,SBM: Rio de Janeiro,2012.

[11] Eves, H.,,Introdução a história da Matemática,Vol. 1,Editora Unicamp: Campinas,2004.

[12] Degiovanni, M. and Marzocchi, M.,A critical point theory for nonsmooth functionals,Ann. Mat. Pura Appl. (4),Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta,167,1994.

[13] De Giorgi, E. and Marino, A. and Tosques, M.,Problems of evolution in metric spaces and maximal decreasing curve,Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8),Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Serie VIII,68,1980.

[14] Faustino, R. M. Multiplicidade de soluções para uma classe de equações de Schröndinger logarítmica: Uma abordagem via inclinação fraca. Orientador: Allânio Barbosa Nóbrega. Dissertação (Mestrado) - Mestrado em Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande,2022.

[15] Guerrero, P. and López, José and Nieto, Juanjo,Global H1 solvability of the 3D logarithmic Schrödinger equation,Nonlinear Analysis: Real World Applications,11,2010,

[16] Hardy, G. H.,Orders of infinity,Vol. 1,Cambridge: John Clay University Press: London ,1910.

[17] Junior, W. C. F.,As Múltiplas faces da Derivada I: Newton vs. Leibniz,Ciência e Natura,vol. 36,p. 108-1202014.

[18] Kreyzig, E.,Introductory Functional Analysis with Applications,Wiley Classics Library,vol. 11978.

[19] Lieb, E. H. and Loss, M., Analysis, Graduate Studies in Mathematics, 14, Second, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[20] Lima, E. L.,Um curso de Análise,Vol. 1,Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro,2014.

[21] Lima, E. L.,Um curso de Análise,Vol. 2,Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro,2014.

[22] Marzocchi, M.,Multiple solutions of quasilinear equations involving an area-type term,J. Math. Anal. Appl.,Journal of Mathematical Analysis and Applications,196,1995.

[23] Robinson, A. L.,Non-Standard Analysis,Vol. 1,North-Holland Publishing Company Amsterdam: Los Angeles ,1966.

[24] Thomas, G. B.,Cálculo,Vol. 2,Pearson: São Paulo,2012.

[25] Toeplitz, O.,The Calculus: A Genetic Approach,Vol. 1,The University of Chicago Press, London: Chicago,1963.

[26] Willem, M.,Minimax Theorem,Birkhauser,1996.