



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA

Elias Rodrigues Sampaio

A EQUAÇÃO DE MONGE-AMPÈRE E A CURVATURA GAUSSIANA
Um Estudo da Relação

CAMPINA GRANDE
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA

Elias Rodrigues Sampaio

A EQUAÇÃO DE MONGE-AMPÈRE E A CURVATURA GAUSSIANA
Um Estudo da Relação

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda

CAMPINA GRANDE
2023

Folha de Aprovação

Aos meus filhos, minha fonte de energia e inspiração.

AGRADECIMENTOS

Escrever uma página de agradecimentos é uma tarefa dura e com certeza injusta, quando consideramos todas reduções que devemos aplicar nesta tarefa, mas mesmo assim, a mesma deve ser cumprida.

É fato conhecido, que chegar até aqui não foi fácil. Concluir essa graduação era um sonho que guardei por muito tempo. Por isso, valorizo demais essa conquista e tenho imensa gratidão com aqueles que me auxiliaram na trajetória.

Toda a minha família fez parte deste sonho. Inicialmente meus pais merecem serem honrados, pois, lá atrás, estes dispuseram de todas as suas energias para que eu e meus irmãos, tivéssemos a melhor educação que eles poderiam nos oferecer a época.

Agradeço demais, ao mesmo tempo que peço desculpas a meus filhos, Sophia e Luan, e minha esposa, Sheila. Foi roubado deles, a maioria do tempo que utilizei para estudar. Esse tempo não pode ser mais repostado e, por isso, sou ainda mais grato.

Encontrei dentro da UAMAT um ambiente fantástico, com pessoas incríveis, professores e funcionários, que me proporcionaram todas as condições para me desenvolver como aluno. Por este motivo, agradeço à Unidade Acadêmica pela oportunidade.

A todos os professores, agradeço pelo conhecimento que conseguiram me passar, com paciência, humanidade, mas também com disciplina. Deixo aqui um abraço especial aos professores doutores Angelo Roncalli, Claudianor Alves e José Lindomberg Possiano, que em momentos complicados para mim, estiveram lá para me incentivar a concluir o curso. Em especial ao professor Angelo que me acolheu como orientando e me conduziu, com todo o zelo, até aqui.

Por fim, agradeço a força maior, a qual, com toda a minha humilde ignorância, não consegui encontrar definição, apesar de ter certeza de sua existência.

RESUMO

A Equação de Monge-Ampère é uma Equação Diferencial Parcial, totalmente não-linear de segunda ordem, que possui várias aplicações em diversos ramos da matemática. Este trabalho tem como objetivo mostrar, que esta EDP se relaciona com a Curvatura Gaussiana, quando se trabalha com superfícies parametrizadas pelo gráfico de uma função diferenciável ϕ , com domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Procurou-se utilizar conhecimentos adquiridos em disciplinas que fazem parte do currículo do Bacharelado em Matemática, tais como diferenciabilidade de funções, produto interno de vetores, entre outros. A partir de uma revisão bibliográfica, foi construída uma sequência teórica, onde ao final, pôde-se mostrar que tal relação de fato existe, e que a mesma se dá através do determinante da matriz hessiana $D^2\phi$ e do gradiente $\nabla\phi$. Além disso, supondo que ϕ é radialmente simétrica em relação a z , mostramos que encontrar uma solução $\phi(z)$ para a EDP é equivalente a encontrar uma solução $\mu(\|z\|)$ para uma EDO equivalente.

Palavras-chave: Equação de Monge-Ampère; Curvatura Gaussiana; Superfícies geradas pelo gráfico de funções.

ABSTRACT

The Monge-Ampère Equation is a second-order fully nonlinear partial differential equation that has many applications in many branches of mathematics. This work aims to show that this PDE is related to the Gaussian Curvature, when working with surfaces parameterized by the graph of a differentiable function ϕ , with domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. An attempt was made to use knowledge acquired in disciplines that are part of the curriculum of the Bachelor Degree in Mathematics, such as differentiability of functions, inner product of vectors, among others. From a bibliographic review, a theoretical sequence was built, where in the end, it could be shown that such a relationship actually exists, and that it occurs through the determinant of the Hessian matrix $D^2\phi$ and the gradient $\nabla\phi$. Furthermore, assuming that ϕ is radially symmetric with respect to z , we show that finding a solution $\phi(z)$ for the PDE is equivalent to finding a solution $\mu(\|z\|)$ for an equivalent ODE. $\mu(r)$.

Key words: Monge-Ampère Equation, Gaussian Curvature, Surfaces as Graph of Functions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 Contextualização	11
1.2 Objetivos	12
1.3 Organização do Trabalho.	12
2 CONHECIMENTOS PRELIMINARES	14
2.1 Álgebra Vetorial	14
2.2 Álgebra Linear	17
2.3 Cálculo e Análise	21
2.4 Equações Diferenciais Parciais	21
3 GEOMETRIA DIFERENCIAL	23
3.1 Superfícies Regulares	23
3.2 Plano Tangente	28
3.3 Primeira Forma Fundamental.	29
3.4 Superfícies Orientáveis.	30
3.5 Aplicação de Gauss	30
3.6 Segunda Forma Fundamental	33
3.7 Curvaturas.	35
3.7.1 <i>Curvatura Normal</i>	37
3.7.2 <i>Curvatura Gaussiana</i>	38
4 EQUAÇÃO DE MONGE-AMPÈRE	46
4.1 A Equação de Monge-Ampère e a Curvatura Gaussiana	46
4.2 Forma Radial para a Equação de Monge-Ampère	46
4.3 Método de Resolução	50
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Ao término do curso de bacharelado em Matemática, espera-se que o aluno concluinte tenha acumulado conhecimento suficiente para construir, ou auxiliar no desenvolvimento de estratégias para resolver demandas que necessitem, de alguma maneira, da Matemática.

Sabemos que a Matemática possui inúmeras aplicações em inúmeras áreas da vida humana e sendo assim, este potencial atribuído ao bacharel em matemática deve ser reconhecido, independentemente se o concluinte do curso irá dar continuidade a sua carreira acadêmica dentro da matemática, ou se o mesmo irá buscar seguir, em algum outro ramo científico, como por exemplo, alguma das engenharias, física, computação, etc.

É interessante registrar, que estas características são previstas no Plano Pedagógico do Curso, documento estrutural dos cursos da UAMAT/UFCG. Também é sabido que, a carreira do profissional de matemática, enfrenta, assim como outras, enormes desafios em nossa sociedade, sobretudo, quanto a ampliação do número de profissionais na área, como também a dificuldade em aumentar e qualificar as interações entre os diferentes ramos científicos. Dessa forma, proporcionar uma boa qualificação aos alunos formados nessa, ou em qualquer graduação, é papel imprescindível para a instituição educadora.

A produção acadêmica dos discentes de um curso pode ser uma forma bastante eficiente de se avaliar quanto e como os alunos aprenderam durante o seu período na universidade. O problema está na dificuldade de se diferenciar em um trabalho acadêmico, o que foi originado da base curricular, ou seja das disciplinas regulares do curso, ou de uma atividade complementar, como uma iniciação científica, por exemplo. Sendo assim, mesmo que não haja obrigatoriedade de associar explicitamente, as disciplinas do curso à produção acadêmica dos alunos, tal ação pode ser uma estratégia importante no planejamento de atualizações no currículo do curso.

"A equação de **Monge-Ampère** é uma equação diferencial parcial, não-linear, de segunda ordem, que aparece em vários problemas de Análise e de Geometria, tais como os que envolvem equação de curvatura gaussiana prescrita, geometria afim, transporte ótimo, etc"¹ (FIGALLI, 2017, pg-1, tradução nossa). Ainda conforme Figalli (2017), a equação recebeu este nome em decorrência de sua formulação inicial proposta por dois matemáticos franceses, **Gaspard Monge (1746-1818)** e **André-Marie Ampère (1755-1836)** e tem a seguinte apresentação, também conhecida como forma clássica.

$$\det(D^2\phi) = f(z, \phi, \nabla\phi)$$

onde $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

¹ The Monge-Ampère equation is a nonlinear partial differential equation arising in several problems from analysis and geometry, such as the prescribed Gaussian curvature equation, affine geometry, optimal transportation, etc.

Quando falamos de Curvatura Gaussiana, estamos falando sobre uma das contribuições do matemático alemão **Karl Friedrich Gauss(1777-1855)**, nascido em Brunswick e falecido em Göttingen e que, segundo [Grey \(2023\)](#), é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, devido as suas contribuições para as ciências de modo geral, especialmente para a Matemática, sobretudo para a teoria dos números, geometria diferencial, cálculo, etc.

1.2 Objetivos

Nesse trabalho, procuramos mostrar que as informações apresentadas nas disciplinas que compõem o currículo obrigatório do curso, quando associados entre si, servem de base para solucionar diversos problemas de natureza matemática. Com o intuito de exemplificar este fato, estudamos a relação existente entre o conceito de **Curvatura Gaussiana** e a equação de **Monge-Ampère**.

Buscamos demonstrar que através do determinante da matriz hessiana $\det(D^2\phi)$, a equação de **Monge-Ampère** relaciona-se com a **Curvatura Gaussiana**, quando estamos lidando com superfícies parametrizadas pelo gráfico de uma função diferenciável.

$$\det(D^2\phi) = K(p)(1 + \|\nabla\phi\|^2)^2.$$

onde $K(p)$ é a **Curvatura Gaussiana** de uma determinada superfície do \mathbb{R}^3 , no ponto p .

1.3 Organização do Trabalho

Dividimos nosso texto em capítulos e seções, nas quais, determinamos uma sequência textual, onde apresentamos inicialmente conceitos matemáticos que serão utilizados para mostrar a relação entre a curvatura gaussiana e a equação de Monge-Ampère de fato existe e quais as condições necessárias para que ela ocorra.

No segundo capítulo foram sintetizados tópicos de Álgebra Vetorial, Álgebra Linear, Cálculo e Equações Diferenciais, sendo apresentadas definições, alguns resultados e exemplos. Serão duas seções. A primeira, será dedicada a tópicos que estão presentes em disciplinas que fazem parte do currículo regular do curso de bacharelado. Na segunda parte, apresentamos um pequeno resumo sobre equações diferenciais parciais.

No terceiro capítulo, trabalharemos com a Geometria Diferencial, desenvolvendo o conceito de **Curvatura Gaussiana**, procurando mostrar que superfícies que foram geradas a partir de funções diferenciáveis, com domínio no \mathbb{R}^2 , podendo ser o próprio \mathbb{R}^2 , atendem aos critérios de regularidade e além disso, que tais superfícies também são orientáveis, possibilitando a construção de duas formas quadráticas, denominadas por **Primeira e Segunda Formas Fundamentais**, $I_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ e $II_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$, $II_p(v) = \langle dN_p(v), v \rangle_p$ respectivamente, onde $v \in T_pS$, as quais serão usadas para calcular a Curvatura Gaussiana de S . Por fim, teremos

a maneira de se calcular a **Curvatura-Gaussiana**, através do "**gradiente**" e do determinante da "**hessiana**" da função que gera a superfície S .

O livro "**Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**" do professor **Manfredo Perdigão do Carmo**² foi utilizado como fonte principal para nossa pesquisa. Além dele, buscamos informações em publicações de autores como **PRESSLEY, LIMA, DELGADO; FRENSEL** e outros.

No quarto capítulo, faremos uma síntese teórica, apenas para que possamos situar a **Equação de Monge-Ampère**, dentro do ambiente das equações diferenciais parciais. Falaremos um pouco sobre algumas características da equação, em sobretudo, quanto a sua classificação como uma EDP de segunda ordem e a sua não-linearidade. Mostraremos alguns exemplos de formatos para a **Equação de Monge-Ampère**, porém, nos atemos ao modelo considerado clássico, onde temos:

$$\det(D^2\phi) = f(x, \phi, \nabla\phi)$$

, onde ϕ é uma função diferenciável em $\Omega = B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$, $\phi \in C^2(\Omega)$.

Ainda neste capítulo, estudaremos uma aplicação da **Equação de Monge-Ampère**, em que ϕ é uma solução radialmente simétrica para $\det(D^2\phi) = f(x, \phi, \nabla\phi)$. Ressalte-se, que não é o objetivo deste trabalho encontrar a solução para a EDP, mas sim, mostrar a existência da solução, através de algum método de "Ponto Fixo".

Além do artigo e figalli2017, retiramos algumas informações de evans2022partial para falarmos da **Equação de Monge-Ampère**, como também de equações diferenciais parciais de maneira geral.

As considerações finais são apresentadas no capítulo 5. Falaremos sobre os resultados obtidos, observando se os objetivos do trabalho foram alcançados e apresentaremos também, novas ideias para pesquisas que surgirão a partir do que foi trabalhado nesse trabalho.

² CARMO, M. P. D. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. [S.l.]: SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

2 CONHECIMENTOS PRELIMINARES

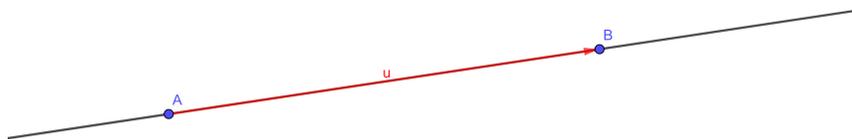
O **Bacharelado em Matemática** é um curso bastante abrangente, quando tratamos do ponto de vista dos conteúdos que são ministrados na graduação. Além de disciplinas pertencentes à área matemática em si, o curso também aborda outros campos do conhecimento, alguns diretamente relacionados com a proposta do curso e outros que tem como objetivo de fornecer capacidades complementares para futuros profissionais. Dessa forma, a graduação possui em sua grade curricular, disciplinas de Física, Computação e até de línguas estrangeiras.

Nesta seção, faremos uma breve síntese de alguns tópicos matemáticos, relacionados com esta pesquisa. Mostraremos algumas definições e resultados, sem que o assunto seja aprofundado. Deixaremos para nos capítulos 3 e 4, fazer uma apresentação mais aprofundada, porém, ainda direcionada, dos temas Geometria Diferencial e Equação de Monge-Ampère.

2.1 Álgebra Vetorial

Segundo Winterle (2000), existem grandezas que não se definem apenas através de um número ou um valor, existindo a necessidade de mais informações para fazê-lo e, neste caso, precisamos identificar direção e sentido. Desta maneira, o autor define, geometricamente, uma grandeza vetorial, como sendo um segmento orientado de reta. Ou seja, chamaremos de vetor \vec{u} , a grandeza que possui direção, a mesma da reta e além disso, possui uma medida, a qual chamamos de módulo, por notação $\|\vec{u}\|$, que representa o tamanho do segmento de reta. Por fim, um segmento de reta determina dois pontos de uma reta, sendo estes os pontos A e B , a escolha de como percorrer esses segmentos, de A até B , ou de B até A é definir o sentido de \vec{u} . Na figura 1, observamos que o vetor \vec{u} possui sentido de A para B .

Figura 1 – Vetor \vec{u} .



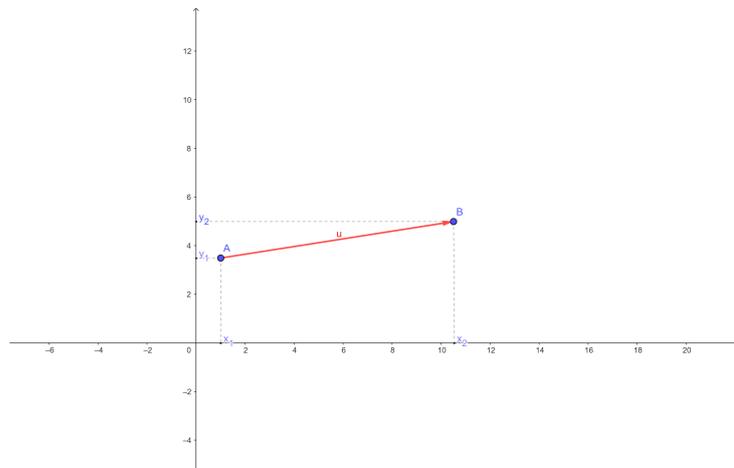
Fonte: Construção própria com Geogebra

Ter essa noção geométrica de vetor é importante para entendermos intuitivamente do que

estamos tratando, embora saibamos que mais adiante necessitaremos efetuar diversos cálculos envolvendo estes entes matemáticos. Portanto, precisamos também, estabelecer uma estrutura algébrica para eles.

Definição 2.1.1. *Sejam os pontos $A, B \in \mathbb{R}^2$, com $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Dizemos que \vec{u} é um vetor, sobre o segmento AB , com sentido de A para B , se $\vec{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, como se pode ver na figura 2.*

Figura 2 – Vetor no \mathbb{R}^2



Fonte: Construção própria com Geogebra

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores do \mathbb{R}^2 e $\lambda \in \mathbb{R}$, com $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, temos que:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- $\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1)$;
- O valor real determinado por $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ é chamado de módulo de \vec{u} , sendo denotado por $\|\vec{u}\|$.

Observação 2.1.2. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1 \cdot \vec{v}) = (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$;

Observação 2.1.3. Se $\|\vec{u}\| = 0$, então $\vec{u} = (0, 0)$, sendo \vec{u} chamado de vetor nulo, ou $\vec{0}$;

Observação 2.1.4. Se $\|\vec{u}\| = 1$, chamamos \vec{u} de vetor unitário.

Quando se fala em vetores no \mathbb{R}^3 podemos defini-los de maneira análoga ao \mathbb{R}^2 . Ou seja, dado os pontos $C, D \in \mathbb{R}^3$, com $C = (x_1, y_1, z_1)$ e $D = (x_2, y_2, z_2)$, um vetor \vec{v} é um vetor no \mathbb{R}^3 , onde $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

A mesma analogia se estende, com as devidas particularidades, as operações que efetuamos com vetores do \mathbb{R}^3 . Resumidamente, sejam \vec{a} e \vec{b} , vetores do \mathbb{R}^3 , temos que,

- a) $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;
- b) $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1)$;
- c) O valor real determinado por $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ é chamado de módulo de \vec{a} , sendo denotado por $\|\vec{a}\|$.

Seguiremos apresentando alguns conceitos importantes sobre vetores. Esclarecidas as diferenças entre os vetores do \mathbb{R}^2 e do \mathbb{R}^3 , as definições que seguem, serão mostradas apenas para o \mathbb{R}^3 .

Definição 2.1.5. *Sejam $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, chamamos de produto escalar entre os vetores \vec{a} e \vec{b} , o número real denotado por $\vec{a} \cdot \vec{b}$, com*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2,$$

onde, (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) são as coordenadas de \vec{a} e \vec{b} , respectivamente.

Observação 2.1.6. *O produto escalar, também denominado de produto interno, pode também ser denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Além disso, a operação segue às seguintes propriedades:*

Sejam \vec{a}, \vec{b} e \vec{v} vetores no \mathbb{R}^3 e $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$;
- ii) $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ e $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$;
- iii) $\lambda \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \lambda \cdot \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \cdot \vec{b} \rangle$;
- iv) *Se $\vec{a} \neq \vec{0} = (0, 0, 0)$, então $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$. Se $\vec{a} = \vec{0}$, então $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$;*
- v) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \right)^2 = \|\vec{a}\|^2$

A partir da caracterização do produto interno, podemos calcular o ângulo entre dois vetores, o qual denotaremos por θ e, além disso, apresentar mais duas condições as quais quaisquer vetores do \mathbb{R}^3 estão submetidos. Considerando \vec{a} e \vec{b} vetores aleatórios, temos:

1. $\cos \theta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$;
2. $\|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$. (Desigualdade de Schwarz);
3. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$. (Desigualdade Triangular).

Observação 2.1.7.

De (1), se \vec{a} e \vec{b} são não-nulos e $\theta = 90^\circ$, temos que $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$;

Se $\theta = 90^\circ$, os vetores são chamados de perpendiculares, ou ortogonais.

Definição 2.1.8. Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} os vetores da base canônica de \mathbb{R}^3 , chamamos de produto vetorial de \vec{a} por \vec{b} , o vetor \vec{c} , denotado por $\vec{a} \wedge \vec{b}$, onde

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{i}(y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2) + \vec{j}(z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2) + \vec{k}(x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2).$$

Observação 2.1.9. Abaixo, algumas características do vetor \vec{c} . Sejam \vec{a} e \vec{b} vetores no \mathbb{R}^3 .

- i) O vetor $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ é ortogonal tanto em relação ao vetor \vec{a} , quanto ao vetor \vec{b} ;

$$\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = x_1 \cdot y_1 \cdot z_2 - x_1 \cdot z_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot z_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot x_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot x_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot y_1 \cdot x_2 = 0;$$

Analogamente,

$$\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = x_2 \cdot y_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1 \cdot y_2 + y_2 \cdot z_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot x_1 \cdot y_2 - z_2 \cdot y_1 \cdot x_2 = 0.$$

Logo, $\vec{c} // \vec{a}$ e $\vec{c} // \vec{b}$.

- ii) Se θ é o ângulo entre os vetores \vec{a} e \vec{b} , temos que $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \text{sen}(\theta)$.

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \text{ (Identidade de Lagrange)} \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2(\theta) \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \text{sen}^2(\theta). \end{aligned}$$

Portanto, $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \text{sen}(\theta)$.

2.2 Álgebra Linear

Na seção anterior, sintetizamos a ideia de vetores no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 . Agora, faremos o mesmo com os conceitos relacionados a disciplina de **Álgebra Linear**. Mais uma vez, destacaremos apenas os pontos importantes que tem relação com a nossa pesquisa.

Daqui em diante, só utilizaremos a notação " \rightarrow " para representar alguns vetores específicos. Em seu lugar, trataremos o vetor \vec{v} apenas por v , ou pelo valor de suas coordenadas. Ou seja, $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Na Álgebra Linear, um dos conceitos mais importantes é o de Espaço Vetorial, pois é nesse ambiente, que possui regras próprias bem definidas, onde passaremos a trabalhar com vetores.

Abaixo, seguem algumas definições encontradas no livro texto de (BUENO, 2006).

Definição 2.2.1. Um Espaço Vetorial X sobre \mathbb{R} é um conjunto cujos elementos são vetores e estes podem ser somados e multiplicados pelos elementos do corpo \mathbb{R} . Se $u, v, w \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então as propriedades abaixo devem ser satisfeitas:

1. $u + v \in X$;
2. $u + v = v + u$;
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$;
4. $\exists 0 \in X$, tal que, $u + 0 = u$ (Elemento Neutro);
5. $\exists (-u) \in X$, tal que, $u + (-u) = 0$ (Inverso Aditivo);
6. $\alpha \cdot (u) \in X$;
7. $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$;
8. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
9. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$
10. Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que, $1 \cdot u = u$ (Elemento Neutro Multiplicativo, ou Unidade).

Definição 2.2.2. Um subconjunto Y do Espaço Vetorial X , onde as propriedades de X também são válidas é chamado de Subespaço Vetorial.

Definição 2.2.3. Sejam Y e X espaços vetoriais sobre o corpo \mathbb{R} . A aplicação

$$T : X \longrightarrow Y$$

que satisfaz

$$T(u + \alpha \cdot v) = T(u) + \alpha \cdot T(v)$$

Para todo $u, v \in X$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é chamada de Transformação Linear.

Observação 2.2.4. De modo geral, quando falamos de corpo, estamos tratando de um conjunto K , não vazio, onde podemos definir duas operações binárias internas, "+" (Adição) e "." (Multiplicação), onde as seguintes propriedades são válidas:

Para quaisquer a, b e c pertencentes ao corpo K , valem

1. As operações de Adição e Multiplicação são fechadas em relação a K ;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. $a + b = b + a$;

4. Existe $0 \in K$, tal que, $a + 0 = 0 + a = a$;
5. Existe $-a$, tal que, $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
6. $a.(b.c) = (a.b).c$;
7. $a.b = b.a$;
8. Existe $1 \in K$, tal que, $a.1 = 1.a = a$;
9. Existe a^{-1} , tal que, $a.a^{-1} = 1$;
10. $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$.

Observação 2.2.5. Se $X = Y$, então T é denominado de *Operador Linear*;

Observação 2.2.6. Se T é uma aplicação bijetiva, então T é um isomorfismo e dizemos que X é isomorfo à Y ;

Definição 2.2.7. Seja V um Espaço Vetorial sobre o corpo \mathbb{R} . A aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada de *Produto Interno em X* , satisfazendo as seguintes propriedades:

Para todo $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
2. $\langle u + \lambda.v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda.\langle v, w \rangle$;
3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Observação 2.2.8. Se $V = \mathbb{R}^3$, o produto escalar entre $x, y \in V$, tomando-se $x = (x_1, \dots, x_3)$ e $y = (y_1, \dots, y_3)$ é definido da seguinte forma:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i.y_i = x_1.y_1 + \dots + x_n.y_3$$

Observação 2.2.9. Quando o Espaço Vetorial V , possui dimensão finita, dizemos que V é um Espaço Euclidiano;

Definição 2.2.10. Se x e y são vetores do espaço com produto interno V , dizemos que u e v são vetores ortogonais, se $\langle x, y \rangle = 0$ e neste caso usamos a notação $u \perp v$.

Definição 2.2.11. Seja V um Espaço Vetorial sobre o corpo \mathbb{R} . Uma aplicação $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *norma em V* , se satisfaz todas as condições abaixo:

- a $\|u\| \geq 0$, se $u \neq 0$, $\forall u \in V$;
- b $\|\lambda.u\| = |\lambda|.\|u\|$, $\forall u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;

c $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V.$

Proposição 2.2.12. *Todo Espaço Vetorial V , com produto interno, tem uma norma $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$.*

Teorema 2.2.13 (Pitágoras). *Seja V um Espaço Vetorial, com produto interno e $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$. Se $u, v \in V$ com $u \perp v$, então:*

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Proposição 2.2.14 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja V um Espaço Vetorial, com produto interno e $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$. Então, para todo $u, v \in V$ temos:*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Definição 2.2.15. *Sejam V um Espaço Vetorial sobre o corpo \mathbb{R} e B um subconjunto de V . Dizemos que B gera V , se todo vetor de V for uma combinação linear de um número finito de elementos de B . Em outras palavras:*

$$\text{Se } u \in V, \text{ então } u = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \dots + \lambda_n \cdot b_n, \forall u \in V, b_i \in B \text{ e } \lambda_i \in \mathbb{R}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n.$$

Definição 2.2.16. *Sejam V um Espaço Vetorial sobre o corpo \mathbb{R} e B um subconjunto de V . Dizemos que B é linearmente independente, ou LI, quando for válido:*

$$\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \dots + \lambda_n \cdot b_n = 0 \iff \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = 0, \forall b_i \in B \text{ e } \lambda_i \in \mathbb{R}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n.$$

Definição 2.2.17. *Sejam V um Espaço Vetorial sobre o corpo \mathbb{R} e B um subconjunto de V . Se B gera V e além disso, B é um conjunto linearmente independente, dizemos que B é uma base para o Espaço Vetorial V .*

Observação 2.2.18. *Caso $u \perp v$ para quaisquer $u, v \in B$, dizemos que B é ortogonal, ou normal. Se além disso, $\|w\| = 1$ para todo $w \in B$, então dizemos que B é ortonormal.*

Definição 2.2.19. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{R} e seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Definimos $T^* : W \rightarrow V$ como adjunta de T se a condição abaixo for satisfeita.*

$$\langle Tu, w \rangle = \langle u, T^*w \rangle, \text{ para quaisquer } u \in V \text{ e } w \in W.$$

Observação 2.2.20. *Em relação a T e T^* , temos*

- Se T admite uma T^* , esta é única.
- Se $T = T^*$, chamamos T de auto-adjunto.
- Se T é auto-adjunta, então $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$.

- T ser auto-adjunto implica em:

$$[T]_B^t = [T]_B, \text{ para toda base } B \text{ de } V, \text{ quando esta é uma base ortonormal.}$$

Observação 2.2.21. Para cada aplicação auto-adjunta $T : V \rightarrow V$, podemos associar a T uma aplicação $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $B(u, v) = \langle Tu, v \rangle$, para quaisquer $u, v \in V$. Por outro lado, cada aplicação B corresponde a uma forma quadrática Q , de maneira que $Q(u) = B(u, u)$.

2.3 Cálculo e Análise

Definição 2.3.1. Uma aplicação $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita contínua no ponto $p \in \Omega$, quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(F(p)).$$

Observação 2.3.2. Se F é contínua em todos os pontos de Ω , dizemos que F é contínua em Ω .

Proposição 2.3.3. $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua se, e somente se, cada uma de suas funções componentes $F_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$, também é contínua.

Proposição 2.3.4. Sejam $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, aplicações contínuas em Ω e Ω_1 , respectivamente. Então, $G \circ F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação contínua.

Definição 2.3.5. Se uma aplicação contínua $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva e possui uma aplicação inversa $F^{-1} : F(\Omega) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que também é contínua, dizemos que F é um homeomorfismo sobre $F(\Omega)$.

Definição 2.3.6. Seja a aplicação $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos que F é diferenciável em $p \in \Omega$, se as suas funções componentes, ou coordenadas são diferenciáveis em p . Ou seja:

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$$

e

F_i tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em p , com $i = 1, \dots, m$.

2.4 Equações Diferenciais Parciais

No curso de Bacharelado em Matemática existem duas disciplinas obrigatórias sobre Equações Diferenciais. A disciplina denominada EDL, a qual traz os conceitos de Equações Diferenciais Lineares e a disciplina conhecida como EDO, onde as Equações Diferenciais ordinárias são vistas de forma detalhada. Ocorre que, Equações Diferenciais Parciais não fazem

parte do currículo obrigatório do curso. Esta disciplina é oferecida como cadeira optativa, quando demandada por professores, ou alunos. Apesar disso, o tema está presente em outras disciplinas do curso, de maneira superficial.

Em nosso trabalho estamos tratando da **Equação de Monge-Ampère**, uma Equação Diferencial Parcial, de segunda ordem, não-linear e diante dessa classificação da equação, trazemos uma breve descrição dessas definições.

Definição 2.4.1. *Uma expressão da forma*

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad (x \in U).$$

é chamada de Equação Diferencial Parcial de k-ésima ordem, onde

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

é dada, $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ é desconhecida e $U \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 2.4.2. *Quanto a linearidade, uma EDP*

- é dita linear se tem a forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

para funções $a_\alpha (|\alpha| \leq k)$, f ;

- é dita semi-linear se tem a forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0;$$

- é dita quase-linear se tem a forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0;$$

- é dita completamente não-linear se depende não-linearmente dos termos de ordem mais alta.

Exemplo 2.4.3.

- $u_{xx} + \sin(x)u_{yy} + \cos(x) = 0$ (Linear);
- $u_{xx} + e^x u_{yy} + 6 = 0$ (Linear);
- $uu_{xx} + u_{yy} = 0$ (Não-Linear);

3 GEOMETRIA DIFERENCIAL

Superfícies regulares do \mathbb{R}^3 podem ser construídas a partir do gráfico de certas funções. Neste capítulo, veremos como se calcula a **Curvatura Gaussiana** destas superfícies. Vejamos inicialmente, como [Carmo \(2005\)](#) define a **Curvatura Gaussiana**.

Definição 3.0.1. *Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação normal de Gauss em p . O determinante de dN_p é chamado de curvatura gaussiana K de S em p . Dessa forma,*

$$K(p) = \det(dN_p).$$

No caso em que e_1, e_2 é uma base ortonormal de T_pS formada de autovetores de dN_p , com $dN_p(e_1) = -k_1e_1$ e $dN_p(e_2) = -k_2e_2$, temos

$$K(p) = k_1k_2.$$

Observando a definição acima, vemos que a ideia de **Curvatura Gaussiana** envolve um conjunto de vários outros conceitos, como a Aplicação Normal de Gauss e as Curvatura Principais de S no ponto p , k_1 e k_2 , respectivamente. Dessa forma, devemos tentar apresentar, de forma sequencial e construtiva a Geometria Diferencial que precede à **Curvatura Gaussiana**.

Seguiremos a sequência existente no livro **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**, do professor [Carmo \(2005\)](#), procurando restringir nosso trabalho em superfícies que são gráficos de funções.

Ao final do capítulo, teremos uma definição para a **Curvatura Gaussiana**, onde a mesma poderá ser calculada, com base no determinante da matriz hessiana e do gradiente, da função cujo gráfico equivale a superfície S . Devemos lembrar que, isto se faz necessário para podermos também, relacionar a **Curvatura Gaussiana** à **Equação de Monge-Ampère**.

3.1 Superfícies Regulares

Definir uma superfície no espaço é uma tarefa que exige, um pouco de "imaginação" e em um segundo momento, algum conhecimento sobre continuidade e diferenciabilidade, mas, alguns autores, dentre eles [Carmo \(2005\)](#) e [Pressley \(2010\)](#), concordam com o fato de que superfícies no \mathbb{R}^3 se assemelham a pedaços do \mathbb{R}^2 , "deformados" e unidos, de maneira que mesmo pertencentes ao \mathbb{R}^3 se comportem como se estivessem no \mathbb{R}^2 .

Superfície é um subconjunto de \mathbb{R}^3 , que na vizinhança de qualquer ponto dado, "parece" um pedaço de \mathbb{R}^2 , da mesma forma que a superfície da Terra, embora seja quase esférica, parece ser plana para alguém no chão que enxerga apenas o horizonte. ([PRESSLEY, 2010](#), pg-68, tradução nossa)¹.

¹ A surface is a subset of \mathbb{R}^3 that looks like a piece of \mathbb{R}^2 in the vicinity of any given point, just as the surface of the Earth, although actually nearly spherical, appears to be a flat plane to an observer on the surface who sees only to the horizon

Ainda segundo Pressley (2010), uma superfície, pode ser definida como um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$, se para cada ponto $p \in S$, existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, contendo p , de maneira que $S \cap V$ seja um homeomorfismo em relação a U . Apesar de ser uma boa definição para superfícies no espaço, esta definição torna difícil a aplicação de alguns conceitos matemáticos, que serão necessários mais a frente. Dessa forma, acrescentando-se algumas condições, chegamos a definição de Superfície Regular.

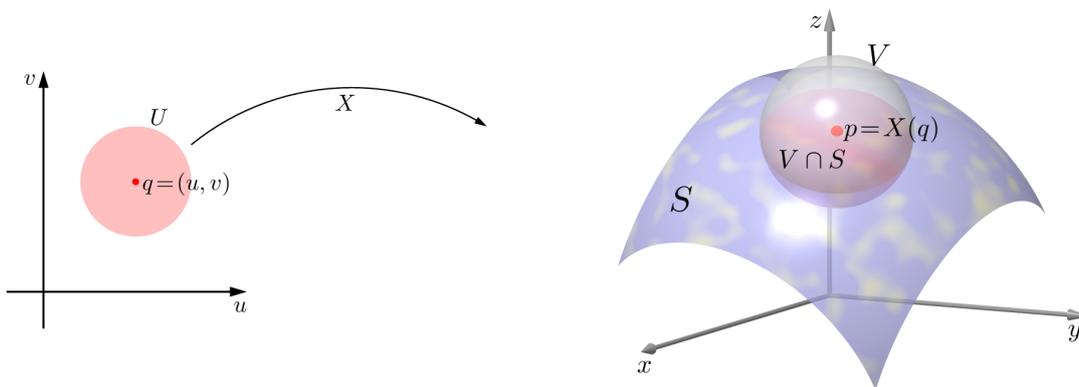
Definição 3.1.1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **Superfície Regular** se, para cada $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ com $p \in V$, e uma aplicação $X : \Omega \rightarrow V \cap S$, definida em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tal que:

1. $X : \Omega \rightarrow V \cap S, X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, é diferenciável, isto é, as funções $x, y, z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em Ω ;
2. $X : \Omega \rightarrow V \cap S$ é um homeomorfismo, isto é X é uma bijeção contínua cuja inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow \Omega$ é contínua;
3. A aplicação linear definida por $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in \Omega$.

A aplicação X é denominada de parametrização.

Observando as definições de Superfície e de Superfície Regular, vê-se que a condição 1 irá permitir traçar vetores tangentes à superfície, conseqüentemente, poderemos pensar em planos tangentes à superfície S . Já a condição 2 traz a injetividade de X , o que segundo Carmo (2005), serve para mostrar que em superfícies regulares não pode haver auto-interseções. Por fim, a condição 3, nos permite pensar em plano tangente para cada ponto $p \in S$.

Figura 3 – Superfícies Regulares



Fonte: Delgado e Frensel (2017)

Classificar um subconjunto de \mathbb{R}^3 como superfície regular, utilizando-se apenas da definição, pode ser uma tarefa bastante difícil. Além disso, em nosso estudo, buscamos caracterizar superfícies parametrizadas pelo gráfico de uma função f , diferenciável. Dessa forma, vamos utilizar o resultado abaixo para mostrar como funciona a regularidade para este tipo de superfície.

Proposição 3.1.2. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, definida no conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, então o seu gráfico

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega \text{ e } z = f(x, y)\}$$

é uma superfície regular.

Demonstração: Seja $X(u, v) = \text{Graf}(f) = (u, v, f(u, v))$, onde f é uma função diferenciável em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Devemos verificar se X cumpre as 3 condições estabelecidas na definição de superfície regular.

- Inicialmente, sabendo que f é diferenciável em Ω , suas funções coordenadas também o são e dessa forma, temos que $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é diferenciável, satisfazendo assim, a primeira condição;
- Admitindo que a superfície S foi parametrizada pelo gráfico de f , então, $\forall p \in S$, temos que $p = (u, v, f(u, v))$ e isto nos mostra que existe apenas um ponto $q = (u, v) \in \Omega$, tal que $X(q) = p$. Ou seja, $X(\Omega)$ é uma bijeção contínua e sendo assim, possui inversa X^{-1} . Segue que, X^{-1} é uma projeção ortogonal de $p \in S$ sobre o plano xy , que é uma aplicação contínua. Tal fato, comprova que $X(\Omega)$ é um homeomorfismo, cumprindo a condição 2 da definição;
- Já quanto a terceira condição, basta observar que $\forall q \in \Omega$ a **matriz jacobiana** de dX_q tem posto 2 e assim dX_q é injetiva para todo q em Ω , onde,

$$JdX_q(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix}.$$

Conclui-se que superfícies no \mathbb{R}^3 , parametrizadas pelo gráfico de uma função f diferenciável, são superfícies regulares. ■

Exemplo 3.1.3. Vamos mostrar que a esfera de centro na origem e raio 1,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular.

Seja $X_3^+ : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $X_3^+(u, v) = (u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$. O nosso objetivo é mostrar que X_3^+ cumpre as condições necessárias para que.

1. Não é difícil ver que para todo $(u, v) \in U$, teremos $X_3^+(u, v) = S^2 \cap H_3^+$, onde $H_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$. Ou seja, $X_3^+(U)$ é a parte de cima, com exceção do equador, da esfera de raio 1 e centrada na origem;

2. Para todo $(u, v) \in U$, temos que $1 - (u^2 + v^2) > 0$. Portanto, X_3^+ é diferenciável em U ;
3. $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para todo $q \in \Omega$;
4. X_3^+ é um homeomorfismo, pois X_1^+ é uma bijeção contínua sobre $S^2 \cap H_3^+$ e $(X_1^+)^{-1} = \pi|_{S^2 \cap H_3^+}$ é contínua, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção sobre o plano-xy dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

teremos

Como foi mostrado acima, a vizinhança coordenada $S^2 \cap H_3^+$ representa apenas uma parte da esfera. Dessa forma, necessitamos complementá-la com mais vizinhanças, até que consigamos cobrir toda a superfície da esfera. Para isso, vamos utilizar a aplicação X_1^- , com $X_1^-(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$. De maneira análoga ao que foi feito com X_1^+ , chegaremos a $X_1^-(u, v)$.

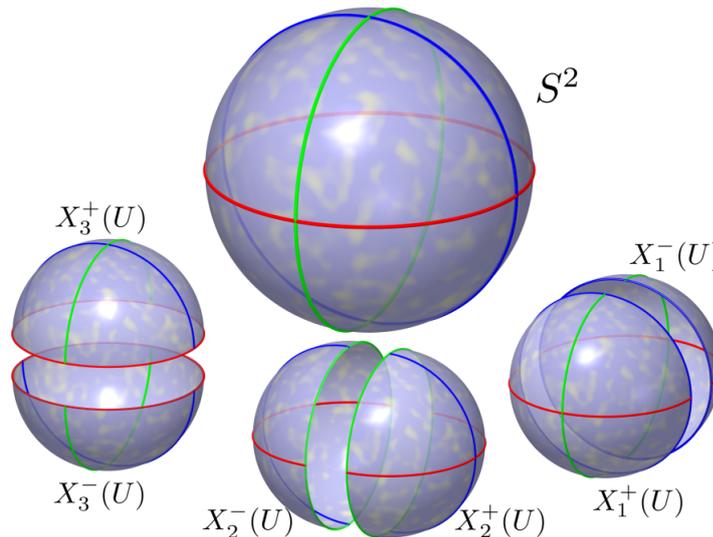
$$X_3^+, \text{ com } X_3^+(u, v) = (+\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v);$$

$$X_1^-, \text{ com } X_1^-(u, v) = (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v).$$

$$X_2^+, \text{ com } X_2^+(u, v) = (u, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v);$$

$$X_2^-, \text{ com } X_2^-(u, v) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v);$$

Figura 4 – Esfera como Superfície Regular



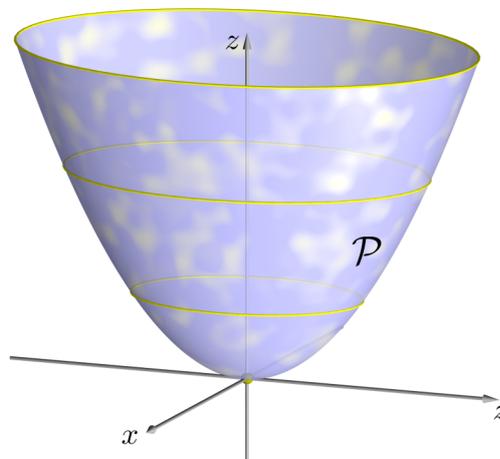
Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2017)

Deve-se atentar para o fato de que nem todo subconjunto no \mathbb{R}^3 é gráfico de uma função de duas variáveis, conforme descreve Lima (1998). Quanto a isso, o autor diz para verificar se uma superfície é o gráfico de alguma função do \mathbb{R}^2 , basta observar que uma reta qualquer que corta a superfície, toca a superfície em no máximo um ponto. Caso contrário, a superfície

não pode ser o gráfico de $f(x, y)$. Tendo isto em mente, a esfera do exemplo anterior, não pode ser o gráfico de $f(x, y)$, pois, inúmeras retas verticais cortam a esfera em mais de um ponto. Por outro lado, quando observamos cada uma das parametrizações utilizadas para compor a superfície esférica, vemos que cada um dos hemisférios, individualmente, é uma superfície regular, parametrizada pelo gráfico de $X_i^{+/-}$, com $i = 1, \dots, 3$.

Exemplo 3.1.4. O parabolóide elíptico $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = u, y = v \text{ e } z = f(u, v)\}$ é uma superfície regular, pois é o gráfico da função diferenciável $f(u, v) = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, com a e b positivos.

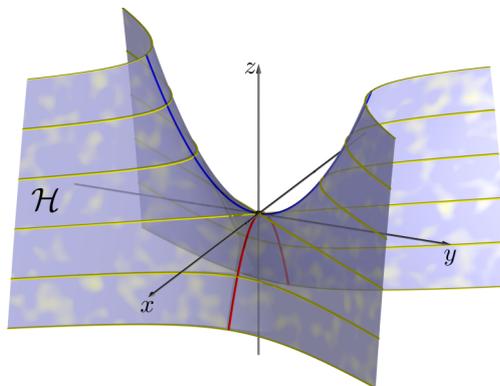
Figura 5 – Parabolóide Elíptico.



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2017)

Exemplo 3.1.5. O parabolóide hiperbólico $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = u, y = v \text{ e } z = f(u, v)\}$ é uma superfície regular, pois é o gráfico da função diferenciável $f(u, v) = \frac{u^2}{b^2} - \frac{v^2}{a^2}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, com a e b positivos.

Figura 6 – Parabolóide Hiperbólico.



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2017)

3.2 Plano Tangente

Como foi visto na Definição 3.1.1 a regularidade da superfície S , permite que para cada ponto $p \in S$ sejam escolhidos vetores que tangenciam S em p .

Definição 3.2.1. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Dizemos que $v \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a S em p se $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ é uma curva parametrizada diferenciável em 0 e $\alpha(0) = p$.*

A definição acima, nos mostra que a aplicação $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ desenha curvas sobre a superfície S , de maneira que $\alpha(0)$ é ponto $p \in S$. A partir daqui, podemos então relacionar o subespaço vetorial $dX_q \subset \mathbb{R}^3$ com o conjunto dos vetores tangentes a S , no ponto p , mostrando que eles são iguais.

Proposição 3.2.2. *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de uma superfície regular S e seja $q \in \Omega$. O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de valores tangentes a S em $X(q)$.

Demonstração: Seja w um vetor tangente a S em $X(q)$, isto é, seja $w = \alpha'(0)$, em que $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X(\Omega) \subset S$ é diferenciável e $\alpha(0) = X(q)$. A curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ é diferenciável para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Pela definição de diferencial, temos $dX_q(\beta'(0)) = w$. Portanto, $w \in dX_q(\mathbb{R}^2)$.

Por outro lado, seja $w = dX_q(v)$, onde $v \in \mathbb{R}^2$. É claro que v é o vetor velocidade da curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ dada por

$$\gamma(t) = tv + q, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

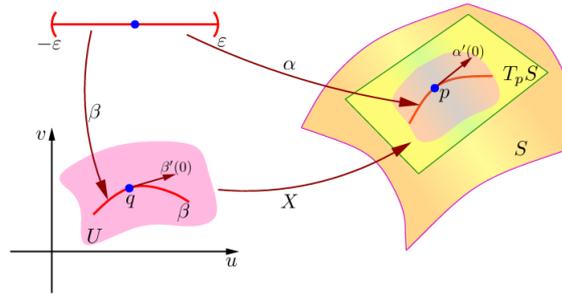
Note que $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = v$. Por tanto, pela definição de diferencial, $w = \alpha'(0)$, onde $\alpha = x \circ \gamma$. Isto mostra que w é um vetor tangente. ■

Definição 3.2.3. *O plano tangente a S em p , designado por T_pS , é o plano que passa por $p \in S$ e é formado pelos vetores tangentes a S em p .*

A Proposição 3.2.2 mostra que o plano T_pS não depende da parametrização X . Por outro lado, a medida que escolhermos uma parametrização, geramos uma base $(X_u(q), X_v(q))$ para T_pS , pois X_u e X_v são linearmente independentes.

Podemos agora, calcular um vetor unitário $N(p)$, normal ao plano T_pS da seguinte forma,

$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Figura 7 – Plano Tangente $T_p S$.

Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2017).

Para todo $p \in S$, $N(p)$ é diferenciável. Logo, a aplicação $N : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável.

3.3 Primeira Forma Fundamental

A princípio, poderíamos deixar de lado a apresentação da primeira forma fundamental, pois, conseguiríamos estabelecer o conceito de curvatura gaussiana, utilizando-se apenas informações obtidas da segunda forma fundamental, porém, é importante estudar a primeira forma fundamental, pois, é através dela que percebemos o caráter de Espaço Vetorial assumido pelo \mathbb{R}^3 e pelas superfícies mergulhadas nele.

Segundo Carmo (2005), o plano tangente a superfície S em p está contido no \mathbb{R}^3 . Logo, tomando-se vetores em $T_p S$, os mesmos estarão submetidos a um produto interno. Ou seja, se $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então temos que $\langle w_1, w_2 \rangle$ representa o produto interno entre w_1 e w_2 .

Definição 3.3.1. A forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$, é chamada a Primeira Forma Fundamental da superfície regular S em $p \in S$.

Neste momento estamos interessados em escrever a Primeira Forma Fundamental, em termos de uma parametrização de S .

Seja $v \in T_p S$. Então existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X(\Omega)$, diferenciável em 0, tal que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $\alpha(0) = p$ e $v = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q)$, onde $X(q) = p$ e $q \in U$. Então,

$$\begin{aligned}
 I_p(v) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\
 &= \langle X_u(0).u'(0) + X_v(0).v'(0), X_u(0).u'(0) + X_v(0).v'(0) \rangle_p \\
 &= \langle X_u(0), X_u(0) \rangle_p . (u'^2(0)) + \langle X_u(0), X_v(0) \rangle_p . u'(0).v'(0) + \\
 &\quad + \langle X_u(0), X_v(0) \rangle_p . u'(0).v'(0) + \langle X_v(0), X_v(0) \rangle_p . (v'^2(0)) \\
 &= \langle X_u(0), X_u(0) \rangle_p . (u'^2(0)) + 2. \langle X_u(0), X_v(0) \rangle_p . u'(0).v'(0) + \langle X_v(0), X_v(0) \rangle_p . (v'^2(0)) \\
 &= E. (u'^2(0)) + 2.F. u'(0).v'(0) + G. (v'^2(0)).
 \end{aligned}$$

onde,

$$E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle_p;$$

$$F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle_p;$$

$$G(u, v) = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle_p.$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $X_u(u, v); X_v(u, v)$ de T_pS , sendo $q = (u, v)$ e $X(u, v) = X(q) = p$.

3.4 Superfícies Orientáveis

O próximo passo de nosso texto é definir a orientabilidade de uma superfície. Ou seja, dizer que uma superfície S de \mathbb{R}^3 é ou não orientável. Essa caracterização é importante, pois servirá para adequar, mais uma vez, a superfície regular S as condições da equação de Monge-Ampère, como vimos anteriormente.

Definição 3.4.1. *Uma superfície regular S é orientável quando existe uma família de parametrizações de S , $\{X_\alpha : \Omega_\alpha \rightarrow X(\Omega_\alpha) | \alpha \in A\}$, tal que:*

(1) $S = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha(\Omega_\alpha)$;

(2) se $W_{\alpha\beta} = X_\alpha(\Omega_\alpha) \cap X_\beta(\Omega_\beta) \neq \emptyset$, a aplicação de mudança de coordenadas

$$h_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \circ X_\beta : X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow X_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$$

tem Jacobiano positivo em todo ponto $q \in X_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$.

Observando a definição acima, percebe-se que quando uma superfície é totalmente gerada por apenas uma parametrização, as condições impostas acima estão plenamente satisfeitas e sendo assim, superfícies parametrizadas pelo gráfico de uma função, são orientáveis, restando apenas, escolher qual a orientação a se utilizar.

3.5 Aplicação de Gauss

Vamos agora, descrever uma aplicação denominada de Aplicação de Gauss. Neste ponto, não serão utilizadas coordenadas locais, afim de se manter o aspecto geométrico das definições e propriedades, porém, mais a frente será necessário fazê-lo, pois haverá a necessidade de se efetuar cálculos sobre esta aplicação.

Como já foi falado anteriormente, uma superfície regular S é dita orientável, se podemos definir uma campo diferenciável de vetores unitários, em toda a superfície, utilizando-se

$$N(p) = \frac{X_u(X^{-1}(p)) \wedge X_v(X^{-1}(p))}{\|X_u(X^{-1}(p)) \wedge X_v(X^{-1}(p))\|}$$

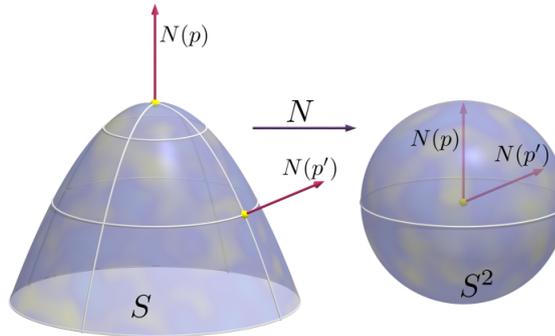
para definir cada um desses vetores.

Definição 3.5.1. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$, com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada a **Aplicação de Gauss** de S .

Figura 8 – Aplicação de Gauss



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2017)

Acima, vê-se que a Aplicação Normal de Gauss mapeia a superfície regular S em uma esfera unitária S^2 , associando cada ponto $p \in S$ ao ponto $N_p \in S^2$, onde N_p é o vetor unitário, normal à S em p , conforme indicado por (PRESSLEY, 2010).

Logo se percebe, que N é diferenciável e dN_p é uma aplicação linear que levará vetores em $T_p S$ até $T_{N(p)} S^2$. Sabendo que $T_p S$ e $T_{N(p)} S^2$ são os mesmos espaços vetoriais, temos que $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$.

Em complemento, temos:

O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de $T_p S$. Ele mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito à curva $\alpha(t) = 0$. Assim, dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p (CARMO, 2005).

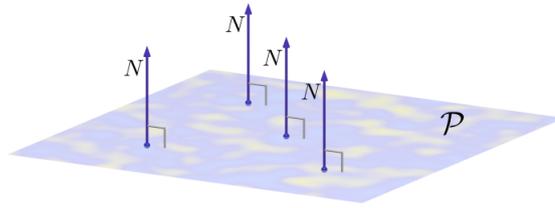
Exemplo 3.5.2. Seja o plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$ onde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Então, o campo de vetores normais unitários $N(x, y, z) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ é constante e portanto, $dN \cong 0$. Isto é, todo vetor do plano tangente $T_p S$ é um autovetor associado ao autovalor zero.

O resultado mostrado a seguir, define o diferencial da Aplicação Normal de Gauss, dN_p , como uma aplicação linear auto-adjunta e este fato, permitirá que seja associada à dN_p uma forma quadrática, a qual é denominada de Segunda forma Fundamental.

Proposição 3.5.3. A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é uma aplicação auto-adjunta.

Figura 9 – Plano



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2017)

Demonstração: Sabendo que dN_p é linear, resta provar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS . Seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em p , de modo que os vetores X_u e X_v formam uma base para T_pS .

Vamos verificar como se comporta dN_p , levando-se em conta a curva parametrizada em S , $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $\alpha(0) = p$.

Temos, ■

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u \cdot u'(0) + X_v \cdot v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned}$$

Ocorre que X_u, X_v é uma base para T_pS . Logo, $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. Assim, devemos mostrar que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Sabemos que $\langle N, X_u \rangle = 0 = \langle N, X_v \rangle$, portanto, derivando-se $\langle N, X_u \rangle = 0$ em relação a v obteremos,

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0.$$

Analogamente, derivando-se $\langle N, X_v \rangle = 0$ em relação a u chegaremos a

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0.$$

Agora, sabendo que $X_{uv} = X_{vu}$, temos

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 = \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle.$$

O que nos permite concluir que,

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle.$$

3.6 Segunda Forma Fundamental

Uma vez que,

$$dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$$

é uma aplicação linear auto-adjunta, podemos relacionar dN_p a uma forma quadrática

$$Q : T_pS \rightarrow \mathbb{R} \text{ onde } , Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle.$$

Esta forma quadrática é intitulada de Segunda Forma Fundamental, sendo denotada por II_p .

A seguir, será mostrada a sua definição, e a indicação de como se calcular cada um de seus coeficientes.

Definição 3.6.1. *Sejam S uma superfície regular orientável e N uma aplicação normal de Gauss de S . A segunda forma fundamental de S num ponto $p \in S$, relativa à orientação N , é a forma quadrática de T_pS determinada pelo operador dN_p , isto é,*

$$II_p(w) = \langle -dN_p(w), w \rangle, w \in T_pS.$$

A partir deste ponto, serão estabelecidas as expressões para a **Segunda Forma Fundamental** e para a **Diferencial da Aplicação de Gauss** em um sistema de coordenadas locais.

Seja $N : S \rightarrow S^2$ uma orientação para a superfície regular S , parametrizando S por $\mu : \Omega \rightarrow \mu(\Omega)$ e sendo esta compatível com N , temos,

$$N(u, v) = \frac{\langle \mu_u \wedge \mu_v \rangle}{\|\mu_u \wedge \mu_v\|}(u, v), \forall (u, v) \in \Omega.$$

Tomando $\gamma \in T_pS$, temos que $\gamma = a \cdot \mu_u(q) + b \cdot \mu_v(q)$, com $\mu(q) = p$. Segue abaixo, a expressão para a diferencial da aplicação de Gauss, em termos de γ :

$$\begin{aligned} dN_p(\gamma) &= dN_p(a \cdot \mu_u(q) + b \cdot \mu_v(q)) \\ &= a \cdot dN_p(\mu_u(q)) + b \cdot dN_p(\mu_v(q)) \\ &= a \cdot N_u(q) + b \cdot N_v(q). \end{aligned}$$

Observe que N_u e N_v são vetores perpendiculares a N e sendo assim, os dois também pertencem ao T_pS . Tal fato, nos diz que

$$\begin{cases} N_u = a_{11}\mu_u(q) + a_{21}\mu_v(q); \\ N_v = a_{12}\mu_u(q) + a_{22}\mu_v(q). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} dN_p(\gamma) &= aN_u(q) + bN_v(q) \\ &= a(a_{11}\mu_u(q) + a_{21}\mu_v(q)) + b(a_{12}\mu_u(q) + a_{22}\mu_v(q)) \\ &= \mu_u(q)(aa_{11} + ba_{12}) + \mu_v(q)(aa_{21} + ba_{22}). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$dN_p \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Segue que,

$$[dN_p]_{\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ou seja, $[dN_p]_{\beta}$ é a matriz de dN_p na base $\{\mu_u(q), \mu_v(q)\}$.

Em consequência dos resultados encontrados acima, a **Segunda Forma Fundamental**, terá a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} II_p(\gamma) &= \langle -dN_p(\gamma), \gamma \rangle = -\langle dN_p(\gamma), \gamma \rangle \\ &= -\langle aN_u(q) + bN_v(q), a\mu_u(q) + b\mu_v(q) \rangle \\ &= -\langle N_u(q), \mu_u(q) \rangle (a)^2 + \langle N_u(q), \mu_v(q) \rangle ab + \langle N_v(q), \mu_u(q) \rangle ba + \langle N_v(q), \mu_v(q) \rangle (b)^2. \end{aligned}$$

Como $\langle N_v(q), \mu_v(q) \rangle = \langle N_v(q), \mu_u(q) \rangle$ temos,

$$\begin{aligned} II_p(\gamma) &= -\langle N_u(q), \mu_u(q) \rangle (a)^2 - 2\langle N_u(q), \mu_v(q) \rangle ab - \langle N_v(q), \mu_v(q) \rangle (b)^2 \\ &= e(q)(a)^2 + 2f(q)ab + g(q)(b)^2. \end{aligned}$$

Os coeficientes $e(q)$, $f(q)$ e $g(q)$ são os coeficientes da **Segunda Forma Fundamental** e os mesmos são descritos conforme representado abaixo:

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u(q), \mu_u(q) \rangle = \langle N(q), \mu_{uu}(q) \rangle; \\ f &= -\langle N_u(q), \mu_v(q) \rangle = -\langle N_v(q), \mu_u(q) \rangle = \langle N(q), \mu_{uv}(q) \rangle = \langle N(q), \mu_{vu}(q) \rangle; \\ g &= -\langle N_v(q), \mu_v(q) \rangle = \langle N(q), \mu_{vv}(q) \rangle. \end{aligned}$$

Como foi mostrado anteriormente, $N_u(q) = a_{11}\mu_u(q) + a_{21}\mu_v(q)$ e $N_v(q) = a_{12}\mu_u(q) + a_{22}\mu_v(q)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} -e &= \langle a_{11}\mu_u(q) + a_{21}\mu_v(q), \mu_u(q) \rangle = a_{11}\langle \mu_u(q), \mu_u(q) \rangle + a_{21}\langle \mu_v(q), \mu_u(q) \rangle; \\ -f &= \langle a_{11}\mu_u(q) + a_{21}\mu_v(q), \mu_v(q) \rangle = a_{11}\langle \mu_u(q), \mu_v(q) \rangle + a_{21}\langle \mu_v(q), \mu_v(q) \rangle; \\ -f &= \langle a_{12}\mu_u(q) + a_{22}\mu_v(q), \mu_u(q) \rangle = a_{12}\langle \mu_u(q), \mu_u(q) \rangle + a_{22}\langle \mu_v(q), \mu_u(q) \rangle; \\ -g &= \langle a_{12}\mu_u(q) + a_{22}\mu_v(q), \mu_v(q) \rangle = a_{12}\langle \mu_u(q), \mu_v(q) \rangle + a_{22}\langle \mu_v(q), \mu_v(q) \rangle. \end{aligned}$$

Associando à parametrização $\mu(\Omega)$ à **Primeira Forma Fundamental**, temos que

$$\begin{aligned} E(q) &= \langle \mu_u(q), \mu_u(q) \rangle; \\ F(q) &= \langle \mu_u(q), \mu_v(q) \rangle; \\ G(q) &= \langle \mu_v(q), \mu_v(q) \rangle. \end{aligned}$$

Temos agora, a seguinte formatação para os coeficientes da **Segunda Forma Fundamental**.

$$-e = a_{11}E + a_{21}F;$$

$$-f = a_{11}F + a_{21}G;$$

$$-f = a_{12}F + a_{22}G;$$

$$-g = a_{12}F + a_{22}G.$$

Usando notação matricial para representar os coeficientes, obtemos

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Multiplicado em ambos os lados por $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$, obtemos

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

O que nos leva a seguinte expressão:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Segue ainda,

$$-\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Por fim, encontramos uma relação que associa cada valor a_{ij} da matriz dN_p , a uma expressão em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, como vemos a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{pmatrix}.$$

3.7 Curvaturas

Nesta seção iremos apresentar algumas medidas de curvatura que podem ser aplicadas em superfícies regulares. Trabalharemos com superfícies regulares orientadas por um campo N .

Mostraremos que estas medidas estão relacionadas com curvas desenhadas sobre a superfície S e que foram parametrizadas pelo comprimento de arco. Por medida de economia textual e da não necessidade de regredir mais no assunto Geometria Diferencial, alguns resultados preliminares serão omitidos ou resumidos.

No primeiro capítulo do livro [Carmo \(2005\)](#), o autor nos traz as ideias básicas sobre curvas, as quais estão refletidas a seguir, lembrando que o foco do nosso trabalho são as superfícies no \mathbb{R}^3 .

Definição 3.7.1. *Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada regular, se $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$*

Definição 3.7.2. *Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável. Diz-se que α é parametrizado pelo comprimento de arco se, para cada $t_0, t_1 \in (a, b)$, com $t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Ou seja,*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

assim, $\|\gamma'(t)\| = 1$, para todo $t \in (a, b)$.

A partir destas definições, seguiremos com a definição de curvatura de uma curva $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco. Para isso, será utilizada a derivada segunda de $\alpha(s)$, a qual mede a velocidade de afastamento da curva, de sua tangente em s .

Definição 3.7.3. *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então, a curvatura de α em $s \in I$ é o número real*

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Exemplo 3.7.4. *Seja $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada, com*

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{(1+t)^3}}{3}, \frac{\sqrt{(1-t)^3}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

Dessa forma, vejamos como se comportam a primeira derivada $\gamma'(s)$ e a segunda derivada $\gamma''(s)$.

Antes de proceder com o estudo, vamos reescrever γ da seguinte forma:

$$\gamma(t) = \left(\frac{(1+t)^{3/2}}{3}, \frac{(1-t)^{3/2}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

Dessa forma, temos que

$$\gamma'(t) = \left(\frac{(1+t)^{1/2}}{2}, \frac{(1-t)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\left(\frac{(1+t)^{1/2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{(1-t)^{1/2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1+t}{4} + \frac{1-t}{4} + \frac{1}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Segundo a definição, $\|\gamma'(t)\| = 1$ nos mostra que γ é parametrizada pelo comprimento de arco.

Dessa forma, podemos agora, calcular a curvatura de $\|\gamma''(t)\|$. Desde que,

$$\gamma'(t) = \left(\frac{(1+t)^{1/2}}{2}, \frac{(1-t)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

então,

$$\gamma''(t) = \left(\frac{1}{4(1+t)^{1/2}}, \frac{-1}{4(1-t)^{1/2}}, 0 \right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} k(s) = \|\gamma''(t)\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{4(1+t)^{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4(1-t)^{1/2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{2}{1-t^2}\right)}. \end{aligned}$$

E portanto, a curvatura de γ em $t \in (-1, 1)$ é igual a $\frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{2}{1-t^2}\right)}$.

3.7.1 Curvatura Normal

Quando uma curva regular, parametrizada $\alpha(s)$ está projetada sobre uma superfície regular do \mathbb{R}^3 , podemos relacionar a sua curvatura $k(s)$ com o vetor $N(p)$, normal à superfície S .

Definição 3.7.5. *Seja C uma curva regular em S que passa por p , $k(p)$ a curvatura de C em p e $\cos \theta = \langle n(p), N(p) \rangle$, onde $n(p)$ é o vetor normal a C em p e $N(p)$ é o vetor normal a S em p . O número $k_n(p) = k(p) \cos \theta$ é chamado de curvatura normal de C em p .*

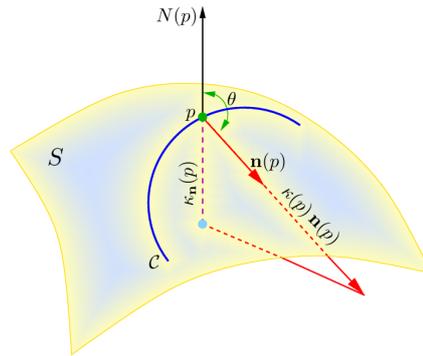
Devemos observar que, $k_n(p) = k(p) \langle n(p), N(p) \rangle$ é o comprimento da projeção do vetor $k(p)n(p)$ sobre o vetor unitário, normal em p . Ressalte-se que $k_n(p)$ terá o sinal dado pela orientação $N(p)$ de S , em p . Isso também nos mostra que $k_n(p)$ não depende da orientação da curva C , pois, mudar a orientação de C , não altera os valores de $k(p)$, ou de $n(p)$.

Agora, sendo $\alpha : I \rightarrow C$ a parametrização por comprimento de arco da curva regular C , de maneira que $\alpha(0) = p \in S$ e $\alpha'(0) = v$, temos que

$$N(s) = \langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0, \quad \forall s \in I.$$

Segue que,

Figura 10 – Curvatura Normal.



Fonte: (DELGADO; FRENSEL, 2017)

$$\langle N(\alpha(s)), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle, \quad \forall s \in I.$$

Logo,

$$\begin{aligned} II_p(v) &= II_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N(0), \alpha''(0) \rangle = -\langle N(p), k(p)n(p) \rangle = k_n(p). \end{aligned}$$

Por este resultado, concluímos que em um vetor unitário $v \in T_pS$, a segunda forma fundamental II_p tem valor igual a curvatura normal de qualquer curva regular desenhada sobre a superfície S que passa por p e é tangente a v em p .

Sabemos que $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ é uma aplicação linear auto-adjunta e sendo assim, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS , tal que $dN_p(e_1) = k_1 \cdot e_1$ e $dN_p(e_2) = k_2 \cdot e_2$. Ou seja, e_1 e e_2 são autovetores e k_1 e k_2 são autovalores de dN_p . Além disso, sob a base $\{e_1, e_2\}$, a matriz de dN_p é diagonal, com $k_1 \geq k_2$, de sua diagonal, os valores máximo e mínimo da forma quadrática de $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ sobre o círculo unitário de dN_p .

Definição 3.7.6. Os valores máximo e mínimo da curvatura normal, respectivamente, k_1 e k_2 , são chamados de curvaturas principais em p e as direções dadas pelos auto-vetores e_1 e e_2 são denominadas de direções principais em p .

3.7.2 Curvatura Gaussiana

A relação apresentada anteriormente, entre as curvaturas de uma curva, descrita sobre uma superfície do \mathbb{R}^3 e a segunda forma fundamental II_p nos trazem ferramentas para construirmos o conceito de Curvatura Gaussiana de uma superfície orientada S . Inicialmente, trataremos a

definição comumente apresentada nos textos de Geometria Diferencial e logo depois, passaremos a fazer uma abordagem mais direcionada a **Aplicação de Gauss** em termos de coordenadas locais e mais adiante ainda, restringiremos essas ideias à superfícies parametrizadas pelo gráfico de uma função diferenciável f .

Definição 3.7.7. *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ uma aplicação linear auto-adjunta, que é a diferencial da **Aplicação de Gauss** para a superfície S . Chamamos de **Curvatura Gaussiana** K de S de p , o determinante da matriz que representa dN_p . Além disso, dizemos que a **Curvatura Média** H de S de p é a metade do traço de dN_p .*

Observe que, quando consideramos a **Aplicação de Gauss** dN_p para uma base ortonormal β , a matriz de dN_p é uma matriz diagonal com k_1 e k_2 em sua diagonal principal. Devemos lembrar que k_1 e k_2 , denominadas de Curvaturas Principais, são os valores máximo e o mínimo da curvatura normal em p respectivamente. Assim,

$$[dN_p]_{\beta} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Dessa maneira, podemos calcular a Curvatura Gaussiana K como sendo o produto de k_1 por k_2 . Por outro lado a Curvatura Média H é igual a metade da soma $k_1 + k_2$. Ou seja,

$$K(p) = k_1 k_2.$$

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

A definição abaixo, nos mostra como classificar os pontos de uma superfície regular, de acordo com as Curvaturas Gaussiana e Média.

Definição 3.7.8. *Seja o ponto p pertencente à $S \in \mathbb{R}^3$. De acordo com o valor de $K(p)$ e de $H(p)$, podemos denominar p de:*

- *Ponto Elíptico, se $K(p) \geq 0$;*
- *Ponto Hiperbólico, se $K(p) \leq 0$;*
- *Ponto Parabólico, se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$;*
- *Ponto Planar, se $K(p) = 0$ e $H(p) = 0$;*

Vamos nos concentrar agora, em verificar como a **Curvatura Gaussiana** se apresenta, quando verificamos a Aplicação de Gauss em coordenadas locais. Para isso, vamos relembra a seção anterior, onde obtivemos os seguintes valores para as entradas da matriz da aplicação linear dN_p ,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{pmatrix}.$$

Seguindo a definição de Curvatura Gaussiana, temos

$$\begin{aligned} K &= \det[dN_p]_\beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \left(\frac{f^2F^2 - fFgE - eGfF + egGE}{(EG - F^2)^2} \right) - \left(\frac{geF^2 - gFfE - fGeF + f^2GE}{(EG - F^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{f^2F^2 + egGE - geF^2 - f^2GE}{(EG - F^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{F^2(f^2 - ge) + GE(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{(eg - f^2)(GE - F^2)}{(EG - F^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right). \end{aligned}$$

Assim, usando os coeficientes das duas formas fundamentais I_p e II_p , temos que a curvatura gaussiana de S no ponto p é igual a:

$$K(p) = \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right).$$

O foco principal deste estudo é a relação entre Curvatura Gaussiana de uma superfície regular S , parametrizada pelo gráfico de uma função diferenciável h e a **Equação de Monge-Ampère**. Então, faz sentido encontrarmos um maneira de aplicar o que foi já visto em superfícies deste tipo.

Seja S uma superfície regular e orientada, parametrizada pelo gráfico de $\phi(u, v)$, onde $\phi(u, v)$ é diferenciável, ou seja,

$$X(u, v) = (u, v, \phi(u, v)), \text{ com } (u, v) \in \Omega.$$

Vamos calcular o vetor ortonormal a superfície S , no ponto p , usando o produto vetorial entre os vetores X_u e X_v .

Temos que,

$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}.$$

Sendo assim, com os vetores X_u e X_v provenientes da parametrização de S pelo gráfico de h , chegamos a

$$X_u \wedge X_v = -i \cdot \phi_u - j \cdot \phi_v + k.$$

Assim, chegamos ao vetor

$$X_u \wedge X_v = (-\phi_u, -\phi_v, 1),$$

cuja norma é igual:

$$\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{(-\phi_u)^2 + (-\phi_v)^2 + (1)^2} = \sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}.$$

Portanto,

$$N(p) = \frac{(-\phi_u, -\phi_v, 1)}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}}.$$

As derivadas parciais de $X(u, v)$, em relação a u e v são dada por:

$$X_u = (1, 0, \phi_u);$$

$$X_v = (0, 1, \phi_v);$$

$$X_{uu} = (0, 0, \phi_{uu});$$

$$X_{uv} = (0, 0, \phi_{uv});$$

$$X_{vv} = (0, 0, \phi_{vv}).$$

Abaixo, temos os valores dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais.

$$e = \langle N(q), X_{uu}(q) \rangle;$$

$$f = \langle N(q), X_{uv}(q) \rangle = -\langle N(q), X_{vu}(q) \rangle;$$

$$g = \langle N(q), X_{vv}(q) \rangle;$$

$$E = \langle X_u(q), X_u(q) \rangle;$$

$$F = \langle X_u(q), X_v(q) \rangle = \langle N(q), X_{vu}(q) \rangle;$$

$$G = \langle X_v(q), X_v(q) \rangle.$$

Vamos então, utilizar $N(p)$ e os valores das derivadas parciais aos coeficientes acima, obtendo,

$$e = \left\langle \frac{(-\phi_u, -\phi_v, 1)}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}}, (0, 0, \phi_{uu}) \right\rangle = \frac{\phi_{uu}}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}};$$

$$f = \left\langle \frac{(-\phi_u, -\phi_v, 1)}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}}, (0, 0, \phi_{uv}) \right\rangle = \frac{h_{uv}}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}};$$

$$g = \left\langle \frac{(-\phi_u, -\phi_v, 1)}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}}, (0, 0, \phi_{vv}) \right\rangle = \frac{\phi_{vv}}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}};$$

$$E = \langle (1, 0, \phi_u), (1, 0, \phi_u) \rangle = 1 + \phi_u^2;$$

$$F = \langle (1, 0, \phi_u), (0, 1, \phi_v) \rangle = \phi_u \cdot \phi_v;$$

$$G = \langle (0, 1, \phi_v), (0, 1, \phi_v) \rangle = 1 + \phi_v^2.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} eg - f^2 &= \left(\frac{\phi_{uu}}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}} \right) \left(\frac{\phi_{vv}}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}} \right) - \frac{\phi_{uv}^2}{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1} \\ &= \left(\frac{\phi_{uu}\phi_{vv}}{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1} \right) - \frac{\phi_{uv}^2}{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1} \\ &= \left(\frac{\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2}{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (1 + \phi_u^2)(1 + \phi_v^2) - \phi_u^2\phi_v^2 \\ &= 1 + \phi_u^2 + \phi_v^2 + \phi_u^2\phi_v^2 - \phi_u^2\phi_v^2 \\ &= 1 + \phi_u^2 + \phi_v^2. \end{aligned}$$

Conseguimos relacionar os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais da superfície regular S às diferenciais de primeira e segunda ordens da função ϕ , cujo gráfico parametriza S e sendo assim, obtemos a seguinte expressão para $\frac{eg - f^2}{EG - F^2}$:

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2}{1 + \phi_u^2 + \phi_v^2} = \frac{\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2}{(\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1)^2}.$$

O que nos leva a concluir que para esse tipo de superfície, a Curvatura Gaussiana K pode ser calculada da seguinte forma:

$$K(p) = \frac{\phi_{uu}\phi_{vv} - \phi_{uv}^2}{(\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1)^2}.$$

Exemplo 3.7.9. Seja S uma superfície regular, que é o gráfico da função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x, y) = x^3 - 3y^2x$.

Seja S o gráfico da função h , então existe $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, $X(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u)$, que parametriza toda a superfície S . Essa superfície regular é conhecida como **Sela de Macaco**. Vamos verificar a **Curvatura Gaussiana** K nos pontos $p_0 = (0, 0, 0)$ e $p_1 = (-1, 0, -1)$

Como $h(u, v) = u^3 - 3v^2u$, temos que

$$h_u(u, v) = 3u^2 - 3v^2;$$

$$h_v(u, v) = -6vu;$$

$$h_{uu}(u, v) = 6u;$$

$$h_{vv}(u, v) = -6u;$$

$$h_{uv}(u, v) = -6v.$$

Para $p_0 = (0, 0, 0)$ temos,

$$h_u(0, 0) = 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0;$$

$$h_v(0, 0) = -6 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$$h_{uu}(0, 0) = 6 \cdot 0 = 0;$$

$$h_{vv}(0, 0) = -6 \cdot 0 = 0;$$

$$h_{uv}(0, 0) = -6 \cdot 0 = 0.$$

Então,

$$K(p_0) = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^2} = \frac{0 - 0}{(0 + 0 + 1)^2} = 0.$$

Ou seja, p_0 é um ponto planar.

Já em relação a $p_1 = (1, 0, -1)$ temos,

$$h_u(-1, 0) = 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 0^2 = 3;$$

$$h_v(-1, 0) = -6 \cdot 0 \cdot -1 = 0;$$

$$h_{uu}(-1, 0) = 6 \cdot -1 = -6;$$

$$h_{vv}(-1, 0) = -6 \cdot -1 = 6;$$

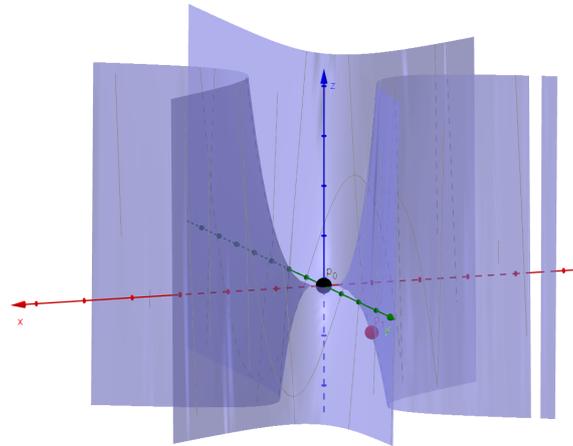
$$h_{uv}(-1, 0) = -6 \cdot 0 = 0.$$

Assim,

$$K(p_1) = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^2} = \frac{-6 \cdot 6 - 0}{((3)^2 + 0 + 1)^2} = \frac{-36}{10^2} = -0,36,$$

verificando que p_1 é um ponto hiperbólico.

Figura 11 – Sela de Macaco.



Fonte: Criação própria com o aplicativo Geogebra

Agora, vamos estabelecer outra relação importante para nosso trabalho. Precisamos determinar como a Curvatura Gaussiana é representada em função do determinante da matriz hessiana e do vetor gradiente da função ϕ , ou seja, $\det(D^2\phi)$ e $\nabla\phi$.

Como já foi visto anteriormente, a função ϕ possui derivadas de segunda ordem. Dessa forma, a matriz hessiana da função ϕ é apresentada da seguinte maneira:

$$D^2\phi = \begin{pmatrix} \phi_{uu} & \phi_{uv} \\ \phi_{vu} & \phi_{vv} \end{pmatrix}$$

Trata-se de uma matriz 2×2 , a qual calculamos o determinante pelo produto da diagonal principal, subtraída pelo produto da diagonal secundária.

$$\det(D^2\phi(u, v)) = \phi_{uu} \cdot \phi_{vv} - \phi_{uv} \cdot \phi_{vu}.$$

Como sabemos, $\phi_{uv} = \phi_{vu}$. Logo,

$$\det(D^2\phi) = \phi_{uu} \cdot \phi_{vv} - \phi_{uv}^2.$$

Por outro lado, temos que o vetor gradiente $\nabla\phi$ é o vetor do \mathbb{R}^2 cujas entradas são as derivadas parciais de primeira ordem de ϕ . Sendo assim,

$$\nabla\phi = (\phi_u, \phi_v),$$

Segue que,

$$\|\nabla\phi\| = \sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2},$$

o que nos leva a

$$\|\nabla\phi\|^2 = \phi_u^2 + \phi_v^2.$$

Sendo assim, a **Curvatura Gaussiana** da superfície regular S , no ponto p , parametrizada pelo gráfico de ϕ , quando relacionada a matriz hessiana e ao vetor gradiente de ϕ será calculada por:

$$K(p) = \frac{\det(D^2\phi)}{(1 + \|\nabla\phi\|^2)^2}. \quad (3.1)$$

Observação 3.7.10. *Percebe-se que o sinal da curvatura de S em p , está diretamente relacionada ao sinal de $\det(D^2\phi)$. Ou seja, caso o determinante da matriz hessiana de ϕ seja positivo, então o valor da Curvatura Gaussiana também será. No Exemplo 3.7.9, $\det(D^2h) = -36 \leq 0$ e assim, o que determinou o sinal de $K(p_1) = -0,36$.*

4 EQUAÇÃO DE MONGE-AMPÈRE

Na parte introdutória deste trabalho, apresentamos a visão de Figalli (2017) sobre a **Equação de Monge-Ampère**. Neste capítulo, exibiremos de forma mais detalhada como estão relacionados os dois conceitos, o da equação citada acima e a medida **Curvatura Gaussiana**.

A equação de Monge-Ampère é uma EDP, de segunda ordem, não-linear dada por:

$$\det(D^2\psi) = f(z, \psi, \nabla\psi), \quad z \in \Omega.$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em Ω . Além disso, $\nabla\psi$ e $D^2\psi$ são respectivamente, o vetor gradiente e a matriz hessiana de ψ .

4.1 A Equação de Monge-Ampère e a Curvatura Gaussiana

No capítulo anterior, a equação (3.1) nos mostrou que a **Curvatura Gaussiana** de uma superfície S , gerada pelo gráfico da função ϕ pode ser calculada através do determinante da matriz hessiana e do gradiente, ambos da função ϕ . Ou seja,

$$K(p) = \frac{\det(D^2\phi)}{(1 + \|\nabla\phi\|^2)^2}.$$

Por se tratar de uma equação com valores reais, a seguinte manipulação é possível.

$$K(p)(1 + \|\nabla\phi\|^2)^2 = \det(D^2\phi).$$

Desta forma, assumindo que $\psi(z) = \phi(z)$, a **Equação de Monge-Ampère** será dada por:

$$\det(D^2\psi) = K(p)(1 + \|\nabla\psi\|^2)^2. \quad (4.1)$$

O que comprova, de fato, a existência da relação entre os dois conceitos matemáticos.

4.2 Forma Radial para a Equação de Monge-Ampère

Considere a equação abaixo,

$$\det(D^2\psi) = f(z, \psi, \nabla\psi), \quad \text{em } \Omega.$$

onde $\Omega = B(0, R) = \{z \in \mathbb{R}^2 / \|z\| < R\}$, ou $\Omega = \mathbb{R}^2$ e suponha que $\psi \in C^2(\Omega)$ é uma função radialmente simétrica em relação a z . Isto é,

$$\psi(z) = \mu(\|z\|) = \mu(r), \quad \text{onde } r = \|z\| > 0.$$

Vamos usar a regra da cadeia para determinar quanto vale $\psi_x(z)$ e $\psi_y(z)$.

Observe que,

$$\psi_x(z) = \mu'(r)r_x.$$

Como $r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, resulta que,

$$r_x = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}.$$

Segue que,

$$\psi_x(z) = \mu'(r) \frac{x}{r}. \quad (4.2)$$

Analogamente:

$$\psi_y(z) = \mu'(r)r_y.$$

e daí,

$$\psi_y(z) = \mu'(r) \frac{y}{r}. \quad (4.3)$$

Obtidas a derivadas parciais de primeira ordem ψ , em relação as direções de z , vamos agora estabelecer $\psi_{xx}(z)$.

Usando a regra da cadeia, combinada com a regra do produto e o resultado **4.2** temos,

$$\begin{aligned} \psi_{xx}(z) &= (\psi_x(z))_x = \psi_x(\mu'(r) \frac{x}{r}) \\ &= (\mu'(r))_x \frac{x}{r} + \mu'(r) \left(\frac{x}{r} \right)_x \\ &= (\mu'(r))_x r_x \frac{x}{r} + \mu'(r) \frac{r^2 - x^2}{r^3} \\ &= \mu''(r) \frac{x}{r} \frac{x}{r} + \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2} \right) \\ &= \mu''(r) \frac{x^2}{r^2} + \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Chegamos então a,

$$\psi_{xx}(z) = \mu''(r) \frac{x^2}{r^2} + \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2} \right).$$

Analogamente, temos

$$\psi_{yy}(z) = \mu''(r) \frac{y^2}{r^2} + \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - y^2}{r^2} \right).$$

Seguindo o mesmo raciocínio, vamos obter ψ_{xy} .

Observe que

$$\psi_{xy} = (\psi_y(z))_x.$$

Como vimos acima, $\psi_y(z) = \mu'(r)\frac{y}{r}$.

Segue que,

$$\psi_{xy} = \left(\mu'(r)\frac{y}{r} \right)_x.$$

Isto nos leva a

$$\begin{aligned} \psi_{xy} &= \left(\mu'(r)\frac{y}{r} \right)_x \\ &= (\mu'(r))_x \left(\frac{y}{r} \right) + \mu'(r) \left(\frac{y}{r} \right)_x \\ &= \mu''(r) \left(\frac{x}{r} \right) \left(\frac{y}{r} \right) + \mu'(r) \frac{\left(0r - y(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{r^2} \\ &= \mu''(r) \left(\frac{x}{r} \right) \left(\frac{y}{r} \right) + \mu'(r) \frac{\left(-y \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} 2x \right)}{r^2} \\ &= \mu''(r) \left(\frac{x}{r} \right) \left(\frac{y}{r} \right) + \mu'(r) \frac{\left(-y \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{r} 2 \cdot x \right)}{r^2} \\ &= \mu''(r) \left(\frac{x}{r} \right) \left(\frac{y}{r} \right) + \mu'(r) \frac{\left(\frac{-y \cdot x}{r} \right)}{r^2} \\ &= \mu''(r) \left(\frac{x}{r} \right) \left(\frac{y}{r} \right) + \mu'(r) \left(\frac{-yx}{r^3} \right) \\ &= \mu''(r) \left(\frac{xy}{r^2} \right) + \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{-yx}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi_{xy} = \mu''(r) \left(\frac{xy}{r^2} \right) - \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{yx}{r^2} \right).$$

Sabendo que $\psi_{xy} = \psi_{yx}$, podemos agora, determinar $\det(D^2\psi(x))$. Assim,

$$\begin{aligned} \det(D^2\psi) &= \begin{vmatrix} \psi_{xx} & \psi_{xy} \\ \psi_{xy} & \psi_{yy} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mu''(r)\frac{x^2}{r^2} + \mu'(r)\frac{1}{r}\left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right) & \mu''(r)\left(\frac{xy}{r^2}\right) - \mu'(r)\frac{1}{r}\left(\frac{xy}{r^2}\right) \\ \mu''(r)\left(\frac{xy}{r^2}\right) - \mu'(r)\frac{1}{r}\left(\frac{xy}{r^2}\right) & \mu''(r)\frac{y^2}{r^2} + \mu'(r)\frac{1}{r}\left(\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right) \end{vmatrix} \\ &= \left[\mu''(r)\frac{x^2}{r^2} + \mu'(r)\frac{1}{r}\left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right) \right] \left[\mu''(r)\frac{y^2}{r^2} + \mu'(r)\frac{1}{r}\left(\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right) \right] - \left[\mu''(r)\left(\frac{xy}{r^2}\right) - \mu'(r)\frac{1}{r}\left(\frac{xy}{r^2}\right) \right]^2. \end{aligned}$$

Lembrando que $r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos que $r^2 = x^2 + y^2$ e assim, $r^2 - x^2 = y^2$ e $r^2 - y^2 = x^2$.

Assim,

$$\begin{aligned} \det(D^2\psi) &= \left[\mu''(r) \frac{x^2}{r^2} + \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{y^2}{r^2} \right) \right] \left[\mu''(r) \frac{y^2}{r^2} + \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{x^2}{r^2} \right) \right] - \left[\mu''(r) \left(\frac{xy}{r^2} \right) - \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{xy}{r^2} \right) \right]^2 \\ &= \left[(\mu''(r))^2 \frac{x^2 y^2}{r^4} + \mu''(r) \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{x^4}{r^4} \right) + \mu'(r) \mu''(r) \frac{1}{r} \left(\frac{y^4}{r^4} \right) + (\mu'(r))^2 \frac{1}{r^2} \left(\frac{x^2 y^2}{r^4} \right) \right] \\ &\quad - \left[(\mu''(r))^2 \left(\frac{x^2 y^2}{r^4} \right) - 2\mu''(r) \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{x^2 y^2}{r^4} \right) + (\mu'(r))^2 \frac{1}{r^2} \left(\frac{x^2 y^2}{r^4} \right) \right]. \end{aligned}$$

Operando as subtrações necessárias, obtemos

$$\begin{aligned} \det(D^2\psi) &= \left[\mu''(r) \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{x^4}{r^4} \right) + \mu'(r) \mu''(r) \frac{1}{r} \left(\frac{y^4}{r^4} \right) + 2\mu''(r) \mu'(r) \frac{1}{r} \left(\frac{x^2 y^2}{r^4} \right) \right] \\ &= \frac{\mu''(r) \mu'(r)}{r} \left(\frac{x^4}{r^4} + \frac{y^4}{r^4} + 2 \frac{x^2 y^2}{r^4} \right) \\ &= \frac{\mu''(r) \mu'(r)}{r} \left(\frac{(x^2 + y^2)^2}{r^4} \right) \\ &= \frac{\mu''(r) \mu'(r)}{r} \left(\frac{(r^2)^2}{r^4} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\det(D^2\psi) = \frac{\mu''(r) \mu'(r)}{r}, r > 0. \quad (4.4)$$

Por outro lado, iremos supor que a função ψ é radialmente simétrica em relação a z e $\nabla\psi$.

Sendo assim,

$$f(z, \psi(z), \nabla\psi) = \tilde{f}(\|z\|, \psi(\|z\|), \|\nabla\psi\|)$$

Vamos obter o gradiente $\nabla\psi$, na forma radial. Observe que,

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= (\psi_x, \psi_y) \\ &= \left(\mu'(r) \frac{x}{r}, \mu'(r) \frac{y}{r} \right) \\ &= \frac{\mu'(r)}{r} (x, y). \end{aligned}$$

Lembrando que $z = (x, y)$, obtemos então,

$$\nabla\psi = \frac{\mu'(r)}{r} z.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|\nabla\psi\| &= \left\| \frac{\mu'(r)}{r} z \right\| \\ &= \frac{|\mu'(r)|}{r} \|z\| \\ &= \frac{|\mu'(r)|}{r} r \\ &= |\mu'(r)|, \end{aligned}$$

ou seja, sabendo que $r = \|z\|$, $\psi(\|z\|) = \mu(r)$, chegamos a

$$f(z, \psi(z), \nabla\psi) = \tilde{f}(r, \mu(r), |\mu'(r)|). \quad (4.5)$$

De (4.4) e (4.5), obtemos,

$$\frac{\mu''(r)\mu'(r)}{r} = \tilde{f}(r, \mu(r), |\mu'(r)|). \quad (4.6)$$

Multiplicando ambos os membros de (4.6) por $2r$, obtemos

$$\begin{aligned} 2r \left(\frac{\mu''(r)\mu'(r)}{r} \right) &= 2r\tilde{f}(r, \mu(r), |\mu'(r)|) \\ 2\mu''(r)\mu'(r) &= 2r\tilde{f}(r, \mu(r), |\mu'(r)|). \end{aligned}$$

Como,

$$2\mu''(r)\mu'(r) = \frac{d}{dr}(\mu'(r))^2.$$

Obtemos então,

$$\frac{d}{dr}(\mu'(r))^2 = 2r\tilde{f}(r, \mu(r), |\mu'(r)|). \quad (4.7)$$

4.3 Método de Resolução

Em (4.7), temos uma Equação Diferencial Ordinária. Vamos estabelecer um método de resolução para esta EDO.

Como estamos interessados apenas em soluções positivas para o nosso problema, vamos estabelecer as seguintes condições iniciais:

$$\mu(0) = a > 0 \text{ e } \mu'(0) = 0.$$

O nosso problema então, terá o seguinte formato.

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(\mu'(r))^2 = 2r\tilde{f}(r, \mu(r), |\mu'(r)|), 0 < r < R; \\ \mu(0) = a > 0 \text{ e } \mu'(0) = 0. \end{cases}$$

Integrando a primeira equação, definida de 0 a r e usando s como parâmetro, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{d}{dr}(\mu'(s))^2 ds &= \int_0^r 2s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds \\ \mu'(r)^2 - \mu'(0)^2 &= 2 \int_0^r s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds \\ \mu'(r)^2 - 0 &= 2 \int_0^r s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds \\ \mu'(r)^2 &= 2 \int_0^r s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds \\ \mu'(r) &= \left(2 \int_0^r s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Usando mais uma vez o processo de integração, dessa vez, com t como parâmetro, chegamos a

$$\begin{aligned}\int_0^r \mu'(s) dt &= \int_0^r \left(2 \int_0^t s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ \mu(r) - \mu(0) &= \int_0^r \left(2 \int_0^t s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ \mu(r) - a &= \int_0^r \left(2 \int_0^t s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ \mu(r) &= a + \int_0^r \left(2 \int_0^t s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds\right)^{\frac{1}{2}} dt.\end{aligned}$$

Então, definindo o operador $T : E \rightarrow E$, para algum subconjunto $E \subset C^1([0, R])$, dado por

$$T\mu(r) = a + \int_0^r \left(2 \int_0^t s\tilde{f}(s, \mu(s), |\mu'(s)|) ds\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

concluimos que, as possíveis soluções da EDO são ponto fixo do operador T , isto é

$$T\mu(r) = \mu(r). \quad (4.8)$$

Tal fato nos leva a crer que a existência desta solução pode ser confirmada através de alguma estratégia que utilize resultados que envolvam ponto fixo, porém, isto não é um dos objetivos deste trabalho e assim, a resolução completa, fica como proposta para uma futura pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término deste trabalho, verificamos que conseguimos alcançar o objetivo central da pesquisa. Ou seja, usando conhecimentos adquiridos nas disciplinas que compõem o currículo formal do curso de graduação em Bacharelado em Matemática, demonstramos que a equação de **Monge-Ampère** pode ser aplicada para prescrever a **Curvatura Gaussiana** de superfícies que foram parametrizadas pelo gráfico de funções diferenciáveis. Pois neste caso, obtemos a seguinte equação,

$$\det(D^2\phi) = K(p)(1 + \|\nabla\phi\|^2)^2,$$

onde ϕ é uma função diferenciável, com domínio em um subconjunto do \mathbb{R}^2 , podendo ser o próprio \mathbb{R}^2 e $K(p)$ é a **Curvatura Gaussiana** no ponto p .

Por outro lado, não obtemos a solução $\mu(r)$ para a equação diferencial. Apenas definimos uma estratégia para tentar resolvê-la. Dessa forma, fica estabelecido como proposta para uma subsequente pesquisa, obter uma solução completa, estudando para isso, os teoremas de ponto fixo, ou outras estratégias que envolvam EDPs não-lineares.

Referências

- BUENO, H. P. *Álgebra Linear-um segundo curso, volume 06 de Textos Universitários*. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- CARMO, M. P. D. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. [S.l.]: SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K. Notas de aula - geometria diferencial 1. *Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro*, 2017.
- FIGALLI, A. *The Monge-Ampère equation and its applications*. 1. ed. [S.l.]: European Mathematical Society, 2017.
- GREY, J. J. "Carl Friedrich Gauss". 2023. Disponível em <https://www.britannica.com/biography/Carl-Friedrich-Gauss>. Acessado em 06/12/2022.
- LIMA, E. L. *Coordenadas no Espaço; Coleção do Professor de Matemática*. 3. ed. [S.l.]: SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.
- PRESSLEY, A. N. *Elementary differential geometry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- WINTERLE, P. *Vetores e Geometria Analítica. Ed.* [S.l.]: Makron Books, 2000.