Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Variedades de Álgebras Associativas de Expoente Um ou Dois

por

Felipe Barbosa Cavalcante †

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C376v Cavalcante, Felipe Barbosa.
Variedades de álgebras associativas de expoente um ou dois / Felipe Barbosa Cavalcante. – Campina Grande, 2017.
72 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior".
Referências.

1. PI-Expoente. 2. Variedades de Álgebras. 3. Z_2-graduações. 4. Envoltórias de Grassmann. I. Brandão Júnior, Antônio Pereira. II. Título.

CDU 51(043)

Variedades de Álgebras Associativas de Expoente Um ou Dois

por

Felipe Barbosa Cavalcante

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Lucio Centrone

Prof. Dr. Lucio Centrone - UNICAMP

Diogo Diniz P.S. Silva

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG

Antônio Pereira Brandão Júnior

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Novembro/2017

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a minha família: a minha filha Saphira por servir de constante fonte de inspiração e estímulo; aos meus pais Josefa e Luis pelo suporte durante os estudos e por tantos sacrifícios feitos.

Também gostaria de agradecer a todos os professores e funcionários da Unidade Acadêmica de Matemática da UFCG. Em especial, aos professores: Antônio Pereira Brandão Júnior, por ter me orientado neste trabalho e ter me ensinado tantas coisas, não apenas acerca da matemática como também da vida; Daniel Cordeiro de Morais Filho, pelos anos de tutoria no Grupo PET-Matemática UFCG, tutoria essa, que culminou em diversas lições que me servirão para toda a vida.

Finalmente agradeço aos amigos do curso, especialmente os companheiros de mestrado e também aos membros do Grupo Pet-Matemática UFCG, pelo apoio e incentivo dados e também por estarem presentes em tantos dias e noites em seções de estudos e momentos de descontração regados a café e boas conversa.

Obrigado!

Dedicatória

À minha filha Saphira, por ter sido uma fonte constante e inesgotável de motivação e a minha família, por sua capacidade de acreditar e investir em mim.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma caracterização das variedades de álgebras associativas de expoente menor ou igual a dois, sobre corpos de característica zero. Primeiramente, será apresentado um resultado de Kemer que afirma que uma variedade tem expoente menor ou igual a um se, e somente se, não contém a álgebra exterior de dimensão infinita e nem a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2. Por fim, será apresentado um resultado devido a Giambruno e Zaicev, o qual afirma que uma variedade tem expoente maior que dois se, e somente se, contém uma das cinco álgebras dadas em uma lista prévia.

Palavras-chave: PI-Expoente, Variedades de Álgebras, $\mathbb{Z}_2$-graduações, Envoltórias de Grassmann.

Abstract

In this work we present a characterization of varieties of associative algebras with exponent less than or equal to two, over fields of characteristic zero. We first show a result due to Kemer which states that a variety has expoent lower than or equal to one if, and only if, it does not contain the infinite dimensional Grassmann algebra and the algebra of 2×2 upper triangular matrices over a field. Finally, we show a result by Giambruno and Zaicev, which states that a variety has exponent higher than two, if and only if, it contains one of the five algebras given in a previous list.

Key words: PI-Exponent, Varieties of Algebras, $\mathbb{Z}_2$-gradings, Grassmann Envelopes.

Sumário

Introdução

Seja $X = \{x_1, x_2, ...\}$ um conjunto enumerável de variáveis associativas e não comutativas. Sendo K um corpo, iremos considerar $K\langle X\rangle$ a K-álgebra associativa livre gerada por X, isto é, a álgebra (associativa e não comutativa) dos polinômios nas variáveis de X com coeficientes em K. Dizemos que uma K-álgebra A associativa é uma *álgebra com identidade polinomial* (ou *PI-álgebra*) se existe um polinômio não nulo $f(x_1, \cdots, x_n)$ tal que para quaisquer elementos $a_1, \cdots, a_n$ pertencentes a A vale $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$. Neste caso o polinômio f é dito uma identidade polinomial da álgebra A.

Como exemplos de PI-álgebras temos as álgebras comutativas, uma vez que o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade para qualquer álgebra comutativa, as álgebras de dimensão finita, as álgebras nilpotentes, entre outras. Em 1950, Amitsur e Levitzki, em [1], provaram que, para qualquer número natural n, a álgebra das matrizes de ordem n com entradas num corpo K satisfaz a identidade standard de grau $2n$ (cuja definição é dada no capítulo 1 deste trabalho). Este resultado, conhecido como Teorema de Amitsur-Levitzki, é um marco na PI-teoria (teoria das álgebras com identidades polinomiais).

Dentro da PI-teoria, um importante objeto de estudo é o conjunto de todas as identidades de uma álgebra A, denotado por $T(A)$. Este conjunto, além de ser um ideal, possui a propriedade de ser invariante por todos os endomorfismos da álgebra $K\langle X\rangle$, sendo assim dito um *T-ideal*.

Um dos problemas centrais na PI-teoria é a busca de uma *base* para as identidades polinomiais de uma álgebra (isto é, um conjunto que *gera como T-ideal* o ideal das identidades desta álgebra), mais especificamente, a busca de uma tal base finita. Em 1950, W. Specht conjecturou a existência de base finita para $T(A)$, onde A é uma PI-álgebra associativa sobre um corpo de característica 0. Esta conjectura, conhecida como *problema da base finita*, foi provada mais de 30 anos depois por Kemer em [14] e [15]. Contudo, gostaríamos de deixar claro que o trabalho de Kemer, apesar de sua importância e profundidade, não mostra como obter bases finitas de identidades polinomiais. Assim, a busca de tais bases finitas para álgebras importantes é ainda objeto de vastas pesquisas na PI-teoria.

Um resultado que auxilia na busca de uma base para $T(A)$, quando A é uma álgebra associativa sobre um corpo de característica 0, é o fato de que $T(A)$ é gerado pelos seus polinômios multilineares, o que reforça a importância do estudo desses polinômios. Uma ferramenta para auxiliar neste estudo é a sequência de codimensões de uma K-álgebra A, denotada por $(c_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$, que é definida por

$$c_n(A) = dim\left(\frac{P_n}{P_n \cap T(A)}\right) \ , \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

onde P_n denota o espaço vetorial de todos os polinômios multilineares em n variáveis fixas.

Em 1972, o matemático Regev (vide [18]) mostrou uma limitação exponencial para a sequência de codimensões de uma PI-álgebra, ou seja, para cada PI-álgebra A, existe uma constante a tal que $c_n(A) \leq a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, a sequência numérica $(\sqrt[n]{c_n(A)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais não negativos limitada superiormente. Portanto, faz sentido indagarmos se essa sequência é convergente. Acerca dessa ideia, na década de 1980, surgiu a conjectura de Amitsur, que especulava que, para qualquer PI-álgebra A, a sequência numérica $(\sqrt[n]{c_n(A)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergia para um número inteiro não negativo. Em 1998 e 1999, os matemáticos Antonio Giambruno e Mikhail Zaicev confirmaram as suspeitas de Amitsur, mostrando em [6] e [7] que isto de fato acontece para toda PI-álgebra sobre um corpo de característica zero. Define-se então o *PI-expoente* de uma álgebra A, denotado por $exp(A)$, como sendo

$$exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Observa-se que $exp(A)$ é um inteiro não negativo, para cada PI-álgebra associativa A.

Uma *variedade de álgebras* (associativas) é uma classe de álgebras fechada a subálgebras, quocientes e produtos diretos. Sendo $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras, definimos o T-ideal de $\mathcal{V}$, denotado por $T(\mathcal{V})$, como sendo a interseção de todos os T-ideais das identidades das álgebras que pertencem a $\mathcal{V}$. Sabe-se que existe $A \in \mathcal{V}$ tal que $T(\mathcal{V}) = T(A)$, e daí definem-se as codimensões e o PI-expoente de $\mathcal{V}$ como sendo as codimensões e o PI-expoente de A. No estudo de variedades de álgebras, um dos problemas interessantes é o de classificá-las a partir do valor de seu PI-expoente.

Em 1978, o matemático russo Kemer, em [12], caracterizou as variedades com limitação polinomial de sua sequência de codimensões em termos de sua sequência de cocaracteres (indicamos a referência [9] para uma leitura sobre este conceito). Posteriormente, em [13], ele apresentou uma nova caracterização para essas variedades, mostrando que uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo de característica 0 tem sequência de codimensões com crescimento polinomial se, e somente se, não contém a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e nem a álgebra das matrizes 2×2 triangulares superiores. Deste resultado de Kemer segue imediatamente que uma variedade $\mathcal{V}$ tem expoente menor ou igual a 1 se, e somente se, $\mathcal{V}$ não contém a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e nem a álgebra das matrizes 2×2 triangulares superiores. Ademais, observando que uma variedade tem expoente 0 se, e somente se, todas as suas álgebras são nilpotentes, temos uma caracterização das variedades de expoente igual a 1.

Em 2000, os matemáticos Giambruno e Zaicev, em [8], fazendo uso da caracterização do PI-expoente dada em [7], conseguiram um resultado semelhante para variedades de expoente menor ou igual a 2, ou seja, eles conseguiram caracterizar essas variedades em termos de álgebras que elas não podem conter. Mais precisamente, sendo K um corpo de característica 0 e $\mathcal{V}$ uma variedade de K-álgebras associativas, foi mostrado que $exp(\mathcal{V}) \leq 2$ se, e somente se, $A_i \notin \mathcal{V}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E^{(0)} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \Big/ x, y \in E \ , \ z \in E^{(0)} \right\};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} E^{(0)} & E \\ 0 & E \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \Big/ y, z \in E \ , \ x \in E^{(0)} \right\};$$

$A_3 = UT_3(K)$, a álgebra das matrizes 3×3 triangulares superiores sobre K;

$A_4 = M_2(K)$, a álgebra das matrizes 2×2 sobre K;

$$A_5 = M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ a, d \in E^{(0)} \ , \ b, c \in E^{(1)} \right\}.$$

Aqui E denota a álgebra exterior de dimensão infinita e $E^{(0)}$ e $E^{(1)}$ as componentes homogêneas de sua $\mathbb{Z}_2$-graduação usual. Observe que, juntando as caracterizações apresentadas acima para as variedades de exponte menor ou igual a 1 e menor ou igual a 2, temos a caracterização das variedades de expoente igual a 2.

Nesta dissertação, nosso objetivo principal será detalhar e apresentar demonstrações para as caracterizações das variedades de expoentes um e dois dadas acima.

No primeiro capítulo apresentaremos os conceitos básicos e resultados iniciais a respeito de álgebras, radical de Jacobson, $\mathbb{Z}_2$-graduações e envoltórias de Grassmann de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas, identidades polinomiais e variedades de álgebras associativas, codimensões e PI-expoente de uma álgebra que servirão como base para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 2 iremos apresentar uma demonstração para a classificação das variedades de expoente 1 em termos das álgebras exterior e das matrizes triangulares superiores de ordem 2. Para isto mostraremos a existência de uma álgebra de dimensão finita que gera uma variedade nestas condições e então utilizaremos a decomposição de Wedderburn-Malcev e a caracterização fornecida em [6] do PI-expoente de uma álgebra de dimensão finita.

De modo semelhante ao feito no capítulo 2, no capítulo 3 iremos apresentar uma demonstração dada por Giambruno e Zaicev da caracterização das variedades de expoente 2. Esta demonstração é feita por meio da existência de uma superálgebra de dimensão finita cuja envoltória de Grassmann gera a variedade em questão, bem como por meio da caracterização do PI-expoente dada em [7].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos e resultados iniciais que servirão como base para o desenvolvimento deste trabalho.

Dividiremos este capítulo em 5 seções: a primeira irá tratar do conceito de álgebras e de suas propriedades básicas, a segunda tratará do radical de Jacobson de uma álgebra e álgebras semissimples, a terceira abordará $\mathbb{Z}_2$-graduações e envoltórias de Grassmann de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas, a quarta versará sobre os temas identidades polinomiais e variedades de álgebras associativas; por fim, a última seção será dedicada a estabelecer os conceitos de codimensões e PI-expoente de uma álgebra.

Entretanto, destacamos que no decorrer desta dissertação iremos assumir que o leitor conheça os conceitos e resultados básicos da álgebra linear, assim como os conceitos e resultados básicos referentes à teoria de grupos, anéis e corpos. Para um leitor interessado em um estudo mais detalhado desses conceitos e resultados, indicamos as referências [5] e [11], referentes à teoria de grupos, anéis e corpos e álgebra linear, respectivamente.

1.1 Álgebras

Nesta seção trataremos dos conceitos de álgebras, subálgebras, ideais e homomorfismos. Além disso, iremos exibir alguns resultados concernentes a estes conceitos, bem como exemplos destas estruturas, que serão resgatados e utilizados nos capítulos subsequentes.

Inicialmente, fixemos algumas convenções. A menos que especifiquemos o contrário, ao longo desta dissertação K irá sempre denotar um corpo, e todas as álgebras que iremos tratar serão consideradas K-espaços vetoriais.

Definição 1. Uma K-*álgebra* é um par $(A, *)$, onde A é um K-espaço vetorial e $*$ é uma operação em A que é bilinear, isto é, $* : A \times A \longrightarrow A$

satisfaz

i) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

ii) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

iii)$(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Na definição acima, a operação $*$ é chamada de *multiplicação*. Por simplicidade de notação, passaremos a denotar uma K-álgebra $(A, *)$ simplesmente por A, ficando subentendida a operação $*$ e o corpo K. Ademais, denotaremos o produto $a * b$ por ab, e definimos indutivamente $a_1a_2 \cdots a_na_{n+1} = (a_1a_2 \cdots a_n)a_{n+1}$, para $a_i \in A$ e $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2. Dizemos que um subconjunto β é uma *base da álgebra* A se β é uma base do espaço vetorial A. Definimos a *dimensão da álgebra* A como sendo a dimensão do espaço vetorial A.

Embora, a priori, para que um espaço vetorial A seja uma álgebra necessite de uma multiplicação definido entre todos os seus elementos, de modo prático podemos definir uma multiplicação em A a partir de uma base de A, conforme mostra a observação a seguir.

Observação 1. *Sejam A um espaço vetorial, β uma base de A e $f : \beta \times \beta \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer. Então existe uma única aplicação bilinear $* : A \times A \longrightarrow A$ que satisfaz $u * v = f(u, v)$ para quaisquer $u, v \in \beta$.*

Definição 3. Dizemos que uma álgebra $(A, *)$ é:

a) Associativa, se a multiplicação $*$ é associativa.

b) Comutativa, se a multiplicação $*$ é comutativa.

c) Unitária (ou com unidade), se existe $1 \in A$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, para todo $a \in A$.

d) Nilpotente, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que o produto de quaisquer $n + 1$ elementos de A resulte em 0. Neste caso, definimos o *índice de nilpotência de A* como sendo o menor natural n satisfazendo esta condição.

De agora em diante, a menos que especifiquemos o contrário, iremos considerar apenas álgebras associativas, ou seja, o termo *álgebra* vai significar álgebra associativa. Contudo, gostaríamos de destacar que, embora não seja o objetivo deste trabalho, muitos dos conceitos que abordaremos para álgebras associativas, também podem ser estudados no contexto de álgebras não associativas.

Um conceito importante acerca de operações entre elementos de uma álgebra é o conceito de comutador de elementos, o qual passaremos a abordar agora. Se A é uma álgebra e $a, b \in A$, definimos *o comutador de* a *por* b, denotado por $[a, b]$, como sendo $[a, b] = ab - ba$. Definimos também *o comutador de tamanho* n como sendo $[a_1, a_2, \cdots, a_n] = [[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}]a_n]$ para $a_i \in A$. Através de cálculos simples, podemos verificar que

- $[a, b] = 0$ se, e somente se, $ab = ba$.
- $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$, para quaisquer $a, b, c \in A$.

Ademais, usando indução e a última igualdade acima mostra-se que

$$[a_1 a_2 \cdots a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1 a_2 \cdots a_{i-1}[a_i, c]a_{i+1} \cdots a_n$$

para quaisquer $a_1, \cdots, a_n, c \in A$.

Discorramos agora sobre subálgebras, ideais de uma álgebra, resultados e propriedades voltadas a estes temas.

Definição 4. Seja A uma álgebra. Dizemos que:

a) Um subespaço vetorial B de A é uma *subálgebra de* A se $b_1 b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$.

b) Um subespaço I de A é um *ideal à direita (resp. à esquerda) de* A se $xa \in I$ (resp. $ax \in I$) para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$. Quando I é ideal à direita e à esquerda de A, dizemos que é um *ideal bilateral* (ou simplesmente *ideal*) de A.

Observe que todo ideal é uma subálgebra, e toda subálgebra de uma álgebra A é, por si, uma álgebra.

Antes de apresentarmos alguns exemplos, gostaríamos de destacar algumas propriedades básicas de álgebras, cujas demonstrações são simples.

Observação 2. *Sejam* A *uma* K*-álgebra,* $a, b, c \in A$ *e* $\alpha_1, \alpha_2 \in K$*. Então:*

a) $0a = a0 = 0$.

b) $(\alpha_1 a)(\alpha_2 b) = \alpha_1 \alpha_2 ab$.

c) $(-a)b = a(-b) = -ab$ *e, consequentemente,* $(-a)(-b) = ab$.

d) $a(b - c) = ab - ac$ *e* $(a - b)c = ac - bc$.

e) $(-1)a = a(-1) = -a$ *e* $(-1)(-a) = a$ *(quando* A *é unitária).*

Observação 3. *Sejam* A *uma álgebra,* W *um subespaço de* A*,* S *e* X *conjuntos geradores de* A *e* W *(como espaços vetoriais), respectivamente. Então:*

a) W *é uma subálgebra de* A *se, e somente se,* $x_1 x_2 \in W$ *para quaisquer* $x_1, x_2 \in X$.

b) W *é um ideal de* A *se, e somente se,* $xs, sx \in W$ *para quaisquer* $x \in X$ *e* $s \in W$.

Observação 4. *Sejam A uma álgebra, B uma subálgebra e I e J ideais de A. Então:*

a) $I + B = \{u + b \mid u \in I, b \in B\}$ é uma subálgebra de A.

b) $I + J = \{u + v \mid u \in I, v \in J\}$, $IJ = \langle uv \mid u \in I, v \in J\rangle$ (subespaço gerado) e $I \cap J$ são ideais de A. Ademais, $IJ \subseteq I \cap J$.

c) Sendo $(I_j)_{j\in\Lambda}$ uma família de ideais de A, então

$$\sum_{j\in\Lambda} I_j = \{x_1 + \cdots + x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_i \in \cup_{j\in\Lambda} I_j\}$$

é um ideal de A.

Sendo $I_1, I_2, \cdots, I_n$ ideais de uma álgebra A, definimos recursivamente $I_1I_2\cdots I_n = (I_1I_2\cdots I_{n-1})I_n$. Segue da observação acima que $I_1I_2\cdots I_n$ é um ideal de A e que $I_1I_2\cdots I_n \subseteq I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$. Particularmente, temos que se I é um ideal de A, então dado $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$I^n = \underbrace{II\cdots I}_{n \text{ vezes}}$$

é um ideal de A. Ademais, diremos que I é um *ideal nilpotente* de A quando existir um natural n tal que $I^n = \{0\}$, ou equivalentemente, quando existir um natural n tal que qualquer produto de elementos de A, dentre os quais ao menos n elementos são de I, resulta em zero.

Vejamos agora alguns exemplos de álgebras, subálgebras, e ideais.

Exemplo 1. *Sendo K um corpo, K possui uma estrutura natural de K-espaço vetorial. Ademais, considerando a multiplicação de K, observa-se que K é uma K-álgebra.*

Exemplo 2. *Seja A uma álgebra. Definimos o centro de A, denotado por $Z(A)$, como sendo o conjunto*

$$Z(A) = \{x \in A \ /\ xa = ax, \forall\ a \in A\}.$$

Temos que $Z(A)$ é uma subálgebra de A.

Exemplo 3. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e consideremos o K-espaço vetorial $M_n(K)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em K. Esse espaço, munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade.*

Mais geralmente, sendo A uma álgebra consideremos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A. Definindo o produto em $M_n(A)$ analogamente ao feito para $M_n(K)$, teremos em $M_n(A)$ uma estrutura de álgebra.

Considerando agora o subespaço $U_n(A)$ das matrizes $n \times n$ triangulares superiores com entradas em A, observa-se facilmente que $U_n(A)$ é uma subálgebra de $M_n(A)$.

Por fim, gostaríamos de destacar em $M_n(A)$ as matrizes elementares $E_{ij}(a)$, para $1 \leq i, j \leq n$ e $a \in A$, onde $E_{ij}(a)$ é a matriz cuja única entrada não nula é a na i-ésima linha e j-ésima coluna. Ademais, quando A possui unidade denotamos $E_{ij}(1)$ por E_{ij}, e para estas matrizes vale a relação:

$$E_{ij}E_{lk} = \begin{cases} E_{ik} & , \text{ se } j = l. \\ 0 & , \text{ se } j \neq l. \end{cases}$$

Exemplo 4. *Consideremos um espaço vetorial V com base $\{e_1, e_2, ...\}$. Definimos a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) de V, denotada por $E(V)$ ou simplesmente por E, como sendo a álgebra com base*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_n} \ / \ i_1 < i_2 < \cdots < i_n, n \in \mathbb{N}\},$$

e cujo produto é definido, por bilinearidade, a partir das relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$.

Observemos que, como espaço vetorial, podemos escrever $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$, onde $E^{(0)}$ e $E^{(1)}$ são os subespaços vetoriais de E gerados pelos conjuntos $\{1, e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_m} \ / \ m \text{ é par}\}$ e $\{e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k} \ / \ k \text{ é ímpar}\}$, respectivamente.

Utilizando o princípio de indução e a relação $e_ie_j = -e_je_i$, concluímos que $e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_m}e_{j_1}e_{j_2} \cdots e_{j_k} = (-1)^{mk}e_{j_1}e_{j_2} \cdots e_{j_k}e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_m}$, para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$. Daí segue que $ax = xa$ para quaisquer $x \in E$ e $a \in E^{(0)}$, e que $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E^{(1)}$. Ademais, mostra-se que $Z(E) = E^{(0)}$, quando char $K \neq 2$ (quando char $K = 2$ tem-se E comutativa).

Para finalizarmos este exemplo, gostaríamos de chamar atenção para algumas subálgebras de E. Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos o subespaço E_n de E gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k} \ / \ i_1 < i_2 < \cdots < i_k \ , \ k \leq n\}$. Temos que E_n é uma subálgebra de E de dimensão finita 2^n.

Exemplo 5. *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto não vazio de A. Definimos a subálgebra de A gerada por S, denotada por $K\langle S\rangle$, como sendo o subespaço gerado pelo conjunto $\{s_1s_2 \cdots s_n \ / \ s_i \in S \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$. Além disso, $K\langle S\rangle$ é a menor subálgebra de A contendo S, no sentido que qualquer outra subálgebra que contenha S deve conter $K\langle S\rangle$. Analogamente, definimos o ideal de A gerado por S, como sendo o subespaço gerado pelo conjunto $\{s, as, sb, asb \ / \ a, b \in A \text{ e } s \in S\}$. Neste caso, esse é o menor ideal de A contendo S.*

Uma observação pertinente a respeito de subálgebras geradas é o fato de que se o subconjunto S é multiplicativamente fechado, isto é, $xy \in S$ para *todos $x, y \in S$, então a subálgebra gerada por S coincide com o espaço vetorial gerado por S.*

Sendo S um subconjunto finito, digamos $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$, denotamos $K\langle S\rangle$ por $K\langle s_1, \cdots, s_n\rangle$. Se existe um subconjunto finito S tal que $K\langle S\rangle = A$ dizemos que A é uma álgebra finitamente gerada.

Exemplo 6. *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Consideremos o espaço vetorial quociente A/I e, para cada $a \in A$, iremos denotar por $\overline{a}$ o elemento $a + I$ de A/I. Recordemos que as operações de soma e produto por escalar em A/I são definidas por*

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \quad e \quad \lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$$

para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Consideremos agora a multiplicação

$$\begin{aligned} \cdot : A/I \times A/I &\longrightarrow A/I \\ (\overline{a}, \overline{b}) &\longmapsto \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab} \end{aligned}$$

Observa-se, sem muita dificuldade, que esta multiplicação está bem definida. Ademais, munido dela, o espaço A/I é uma álgebra, chamada de álgebra quociente de A por I.

Exemplo 7. *Sejam A e B duas álgebras. Definimos o produto tensorial dos espaços vetorias A e B, denotado por $A \otimes_K B$ (ou simplesmente $A \otimes B$), como sendo o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{a \otimes b \;/\; a \in A \text{ e } b \in B\}$, onde os elementos $a \otimes b$, chamados de tensores, satisfazem:*

$$(a + c) \otimes b = (a \otimes b) + (c \otimes b)$$

$$a \otimes (b + d) = (a \otimes b) + (a \otimes d)$$

$$\lambda a \otimes b = a \otimes \lambda b = \lambda(a \otimes b)$$

quaisquer que sejam $a, c \in A$, $b, d \in B$ e $\lambda \in K$.

Uma propriedade bastante útil do produto tensorial é a propriedade universal, que garante que se V é um espaço vetorial e $f : A \times B \longrightarrow V$ é uma aplicação bilinear, então existe uma única transformação linear $T_f : A \otimes B \longrightarrow V$ tal que $T_f(a \otimes b) = f(a, b)$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$.

Observemos agora que utilizando a propriedade universal, podemos definir em $A \otimes B$ uma multiplicação, a princípio nos tensores e depois estendida por bilinearidade para $A \otimes B$, dada por

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

Munido desta multiplicação, temos que $A \otimes B$ é uma álgebra, chamada de produto tensorial de A por B.

Por fim, sendo A e B álgebras apresentaremos agora uma maneira de determinar uma base para o produto tensorial $A \otimes B$. Para esse fim, observemos que se $\{a_1, \cdots, a_n\}$ e $\{b_1, \cdots, b_m\}$ são subconjuntos linearmente independentes de A e B, respectivamente, então $\{a_i \otimes b_j \mid 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\}$ é um subconjunto linearmente independentes de $A \otimes B$. Assim, se α e β são bases para A e B, respectivamente, então $\gamma = \{u \otimes v \mid u \in \alpha \text{ e } v \in \beta\}$ é uma base para $A \otimes B$.

Para maiores detalhes sobre o produto tensorial de álgebras e para a demonstração da propriedade universal, indicamos a referência [2].

Observemos que se F é um corpo, K é um subcorpo de F (ou seja, F é uma extensão de K) e A uma F-álgebra, restringindo-se a multiplicação por escalar para elementos de K e mantendo-se o produto de A, temos que A torna-se uma K-álgebra. Por outro lado, através do produto tensorial, se A é uma K-álgebra, podemos construir uma F-álgebra a partir de A. Basta considerar a K-álgebra $\overline{A} = A \otimes_K F$ (observe que F é naturalmente uma K-álgebra) e o seguinte produto por escalar (sobre F) em $\overline{A}$, definido nos tensores e estendido por justaposição para qualquer elemento de $\overline{A}$:

$$x(a \otimes x_1) = a \otimes xx_1$$

para $a \in A$ e $x, x_1 \in F$. Desta forma, $\overline{A}$ torna-se uma F-álgebra, chamada de *extensão de escalares da álgebra A*. Observa-se que $dim_F \overline{A} = dim_K A$.

Para finalizar esta seção, iremos definir homomorfismos de álgebras, apontar algumas de suas propriedades básicas e apresentar alguns exemplos de isomorfismos entre produtos tensoriais de álgebras.

Definição 5. Sejam A e B álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é dita um *homomorfismo de álgebras* quando ocorre:

i) $\varphi(1_A) = 1_B$ (onde 1_A e 1_B denotam as unidades de A e B, respectivamente), no caso de A e B serem unitárias.

ii) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todos $x, y \in A$.

Observação 5. *A condição (ii) acima equivale a $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$, para todos u, v num conjunto gerador de A (como espaço vetorial).*

Quando na definição anterior φ é bijetiva, dizemos que φ é um *isomorfismo de álgebras*. Neste caso, as álgebras A e B são ditas isomorfas, o que é denotado por $A \simeq B$. No caso particular em que $A = B$, dizemos que φ é um *automorfismo de A*. Denotamos por $Aut\ A$ o conjunto de todos os automorfismos de A.

Algumas propriedades básicas de homomorfismos de álgebras, que queremos destacar, são dadas pela observação a seguir.

Observação 6. *Sejam A e A_1 álgebras e $f : A \longrightarrow A_1$ um homomorfismo. Valem:*

a) $f(0_A) = 0$ (onde 0 denota o elemento zero de A_1);

b) Se B é subálgebra de A, então $f(B) = \{f(b) \ / \ b \in B\}$ é subálgebra de A_1. Particularmente, $Imf = \{f(a) \ / \ a \in A\}$ é um subálgebra de A_1;

c) Se S é um subálgebra de A_1, então $f^{-1}(S) = \{s \in A \ / \ f(s) \in S\}$ é um subálgebra de A. Ademais, se S é um ideal de A_1, então $f^{-1}(S)$ é um ideal de A. Particularmente, $Ker\ f = f^{-1}(\{0\})$ é um ideal de A;

d) f é injetivo se, e somente se, $Ker\ f = \{0_A\}$.

Por fim, sendo A,B, e C álgebras, fazendo uso da propriedade universal (vide Exemplo 7), é possível mostrar os resultados a seguir. Para a consulta da demonstração destes resultados, indicamos a referência [2].

Observação 7. *Sejam A, B e C álgebras e $\overline{K}$ o fecho algébrico do corpo K. Então valem:*

i) $B \otimes_K A \simeq A \otimes_K B$.

ii) $(A \otimes_K \overline{K}) \otimes_{\overline{K}} B \simeq A \otimes_K (\overline{K} \otimes_{\overline{K}} B)$, como K-álgebras e também como $\overline{K}$ álgebras.

iii) $\overline{K} \otimes_K \overline{K} \simeq \overline{K}$.

iv) O produto tensorial é distributivo em relação à soma direta, isto é, $(A \oplus B) \otimes C \simeq (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$.

v) O produto tensorial é associativo, isto é, $(A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C)$.

1.2 Radical de Jacobson e Semissimplicidade

Nesta seção abordaremos os conceitos de radical de Jacobson de uma álgebra e de álgebras simples e semissimples. Ademais, traremos à tona alguns exemplos e resultados relacionados a estes conceitos que se farão necessários no decorrer desta dissertação.

Em toda esta seção, todas as álgebras consideradas terão dimensão finita.

Definição 6. Seja A uma álgebra. Definimos *o radical de Jacobson* de uma álgebra A, denotado por $J(A)$, como sendo a soma de todos os ideais nilpotentes de A.

Segue imediatamente da definição acima que $J(A)$ é um ideal de A. É importante observar que, no caso de álgebras de dimensão qualquer, define-se o radical de Jacobson de uma álgebra A como sendo a intersecção de todos os ideais maximais à esquerda de A (um ideal à esquerda I de A é dito *ideal maximal à esquerda de* A se $I \neq A$ e se não existe nenhum ideal à esquerda I_1 de A tal que $I \subsetneq I_1 \subsetneq A$. De posse desta definição, mostra-se que no caso particular de álgebras de dimensão finita o radical de Jacobson coincide com a soma de todos os ideais nilpotentes. Para um estudo mais geral do radical de Jacobson indicamos as referências [2], [10] e [17].

Observação 8. *É possível verificar (vide [4]) que $J(A)$ é um ideal nilpotente de A.*

Sendo $J(A)$ um ideal de A, podemos considerar a álgebra quociente $A/J(A)$, a qual é abordada na seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

Proposição 1. *Seja A uma álgebra, então $J(A/J(A)) = \{0\}$.*

Abordaremos agora os conceitos de álgebras simples e semissimples, tendo como objetivo apresentar resultados, que sob certas condições, nos permitirão decompor álgebras em soma diretas.

Definição 7. Dizemos que uma álgebra A é simples se $A^2 \neq \{0\}$ e se A não possui ideais além de $\{0\}$ e A.

Exemplo 8. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ a álgebra $M_n(K)$ é simples.*

Observação 9. *Destacamos que, na verdade, sobre um K corpo algebricamente fechado, as álgebras $M_n(K)$, com $n \in \mathbb{N}$, são as únicas álgebras simples de dimensão finita, conforme pode ser visto em [4] e em [10].*

Definição 8. Uma álgebra A é dita *semissimples* se $J(A) = \{0\}$.

Observação 10. *Segue da Proposição 1 que para toda álgebra A tem-se que a álgebra quociente $A/J(A)$ é semissimples.*

É interessante observar que toda álgebra simples é semissimples e que toda álgebra semissimples deve possuir unidade. Demonstrações desses fatos podem ser encontradas em [4].

Para finalizar essa seção, apresentaremos agora importantes resultados acerca do radical de Jacobson e álgebras semissimples. As demonstrações dos dois teoremas a seguir podem ser vistas em [4] e [9], respectivamente.

Teorema 1. *Se uma álgebra A é semissimples, então existem $B_1, B_2, \cdots, B_n$ subálgebras simples de A tais que $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$.*

Observação 11. *Destacamos que nas condições do teorema acima, as álgebras $B_1, B_2, \cdots, B_n$ são ideais de A que, como álgebras, são simples. Além disso, como $B_i \cap B_j = \{0\}$, tem-se $B_iB_j = \{0\}$.*

Teorema 2. *(Teorema de Wedderburn-Malcev) Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica 0. Então, existe uma subálgebra semissimples B de A tal que $A = B + J(A)$.*

Combinando os teoremas anteriores temos o seguinte corolário.

Corolário 1. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica 0. Então, existem subálgebras simples $B_1, B_2, \cdots, B_n$ de A tais que $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n + J(A)$.*

1.3 $\mathbb{Z}_2$-Graduações e Envoltórias de Grassmann

Nesta seção trataremos dos conceitos de $\mathbb{Z}_2$-graduação e envoltória de Grassmann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Além disso, exporemos alguns exemplos e resultados, referentes a estes conceitos, que serão essenciais ao longo desta dissertação.

Nesta dissertação, ao mencionarmos $\mathbb{Z}_2$, estaremos nos referindo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Definição 9. Seja A uma álgebra. Definimos uma $\mathbb{Z}_2$-*graduação* em A como sendo um conjunto $\{A^{(0)}, A^{(1)}\}$ de subespaços vetoriais de A tais que

$$A = A^{(0)} \oplus A^{(1)} \quad \text{e} \quad A^{(i)}A^{(j)} \subseteq A^{(i+j)}$$

para quaisquer $i, j \in \{0, 1\}$. Definimos uma *álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada* (ou *superálgebra*) como sendo uma álgebra munida de uma $\mathbb{Z}_2$ graduação.

Na definição anterior, os subespaços $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são chamados de *componentes homogêneas de graus* 0 e 1, respectivamente, e seus elementos de *elementos homogêneos de graus* 0 e 1, na devida ordem.

Observemos que, de modo geral, testar a condição $A^{(i)}A^{(j)} \subseteq A^{(i+j)}$ para $i, j \in \{0, 1\}$ pode não ser um trabalho simples. Contudo essa condição é equivalente a $xy \in A^{(i+j)}$ para quaisquer $x \in S_0$ e $y \in S_1$, onde S_k é um conjunto gerador de $A^{(k)}$ (como espaço vetorial), o que torna sua verificação mais prática.

Antes de passarmos aos exemplos de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas, ressaltemos a seguinte proposição.

Proposição 2. *Se $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e unitária, então $1 \in A^{(0)}$.*

Demonstração. Sendo $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, existem $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$ tais que $1 = a_0 + a_1$. Daí, devemos ter

$$a_0 = a_0 1 = a_0^2 + a_0 a_1$$

e assim como $a_0^2 \in A^{(0)}$ e $a_0a_1 \in A^{(1)}$, pela unicidade da decomposição de a_0 devemos ter $a_0a_1 = 0$ e $a_0 = a_0^2$. Por outro lado, temos também

$$a_1 = 1a_1 = a_0a_1 + a_1^2 = a_1^2$$

e como $a_1 \in A^{(1)}$ e $a_1^2 \in A^{(0)}$ temos que $a_1 = a_1^2 = 0$. Portanto, concluímos que $1 = a_0 \in A^{(0)}$. $\square$

Vejamos agora alguns exemplos de álgebras graduadas.

Exemplo 9. *Toda álgebra A possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, basta tomar $A^{(0)} = A$ e $A^{(1)} = \{0\}$. Esta $\mathbb{Z}_2$-graduação é chamada de $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial.*

Exemplo 10. *Consideremos a álgebra $M_2(K)$, e notemos que uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para $M_2(K)$ é dada por*

$$M_2^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Big/ \ a, d \in K \right\} \ e \ M_2^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \Big/ \ b, c \in K \right\}$$

Exemplo 11. *Sendo E a álgebra de Grassmann, observemos que*

$$E = E^{(0)} \oplus E^{(1)},$$

onde $E^{(0)}$ e $E^{(1)}$ são os subespaços vetoriais de E gerados pelos conjuntos $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m} \ / \ m$ é par$\}$ e $\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \ / \ k$ é ímpar$\}$, respectivamente, é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para E.

Exemplo 12. *Consideremos a subálgebra $M_{1,1}(E)$ de $M_2(E)$ dada por*

$$M_{1,1}(E) = \begin{pmatrix} E^{(0)} & E^{(1)} \\ E^{(1)} & E^{(0)} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \Big/ \ x, z \in E^{(0)} \ e \ y, w \in E^{(1)} \right\},$$

e notemos que tomando

$$M_{1,1}^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \Big/ \ x, z \in E^{(0)} \right\} \ e \ M_{1,1}^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ w & 0 \end{pmatrix} \Big/ \ y, w \in E^{(1)} \right\},$$

temos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para $M_{1,1}(E)$.

Neste ponto nos dedicaremos aos conceitos de subespaços, subálgebras e ideais homogêneos de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Definição 10. Sejam $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e W um subespaço de A. Dizemos que W é um *subespaço homogêneo*, com respeito a essa $\mathbb{Z}_2$-graduação, quando $W = (W \cap A^{(0)}) \oplus (W \cap A^{(1)})$. Sendo B uma subálgebra (resp. ideal) de A, diremos que B é uma *subálgebra homogênea* (resp. *ideal homogêneo*), com respeito a essa $\mathbb{Z}_2$-graduação, se B é homogêneo como um subespaço de A.

Sejam $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, B uma subálgebra homogênea e I um ideal homogêneo de A. Neste caso, a partir da $\mathbb{Z}_2$-graduação de A podemos induzir $\mathbb{Z}_2$-graduações em B, I e A/I, da seguinte maneira. Para B e I, basta considerar $B^{(i)} = (B \cap A^{(i)})$ e $I^{(i)} = (I \cap A^{(i)})$, para $i = 0, 1$. Em relação a A/I, devemos considerar $(A/I)^{(i)} = (A^{(i)} + I)/I$, com $i = 0, 1$. Essas $\mathbb{Z}_2$-graduações são chamadas de $\mathbb{Z}_2$-*graduações induzidas*.

Antes de passarmos a tratar de envoltórias de Grassmann, iremos, de certo modo, generalizar o conceito de álgebras simples estendendo-o para o contexto de superálgebras. Além disso, trataremos do conceito de homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado e apresentaremos uma classificação de superálgebras simples de dimensão finita dada por Kemer.

Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra e suponhamos *char* $K \neq 2$. Para cada $x \in A$ existem únicos $x_0 \in A^{(0)}$ e $x_1 \in A^{(1)}$ tais que $x = x_0 + x_1$. Assim, fica bem definida a aplicação $\varphi : A \longrightarrow A$ dada por $\varphi(x) = x_0 - x_1$. Ademais, é fácil ver que φ é uma transformação linear e que vale

$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = Id_A$, onde Id_A denota a aplicação identidade de A. Observemos agora que, pela Proposição 2, temos que se A é unitária, então $1 \in A^{(0)}$, donde $\varphi(1) = 1$, e que dados $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1 \in A$, com $x_0, y_0 \in A^{(0)}$ e $x_1, y_1 \in A^{(1)}$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(xy) &= \varphi((x_0 + x_1)(y_0 + y_1)) \\
&= \varphi(x_0y_0 + x_0y_1 + x_1y_0 + x_1y_1) \\
&= \varphi((x_0y_0 + x_1y_1) + (x_0y_1 + x_1y_0)) \\
&= x_0y_0 + x_1y_1 - x_0y_1 - x_1y_0 \\
&= (x_0 - x_1)(y_0 - y_1) \\
&= \varphi(x_0 + x_1)\varphi(y_0 + y_1) \\
&= \varphi(x)\varphi(y).
\end{aligned}$$

Portanto, φ é um homomorfismo de álgebras.

Observemos também que $x = x_0 + x_1 \in A$ é tal que $\varphi(x) = 0$, então $x_0 = x_1$ com $x_0 \in A^{(0)}$ e $x_1 \in A^{(1)}$, o que acarreta $x_0 = x_1 = 0$. Logo, φ é injetivo. Ademais, dado $x = x_0 + x_1 \in A$, temos $x = x_0 - (-x_1) = \varphi(x_0 - x_1)$, o que nos permite concluir que φ é na verdade um isomorfismo de álgebras, ficando assim estabelecido que toda $\mathbb{Z}_2$-graduação em uma álgebra A induz um automorfismo de ordem 2 de A. Por fim, observemos que $x_0 = \frac{x+\varphi(x)}{2}$ e $x_1 = \frac{x-\varphi(x)}{2}$.

Reciprocamente, suponhamos $\varphi \in Aut\ A$, com $\varphi^2 = Id_A$. Consideremos os subespaços

$$A^{(0)} = \{x \in A \mid \varphi(x) = x\} \quad \text{e} \quad A^{(1)} = \{x \in A \mid \varphi(x) = -x\}$$

de A e notemos que $A^{(0)} \cap A^{(1)} = \{0\}$. Além disso, dado $x \in A$ temos

$$\varphi\left(\frac{x+\varphi(x)}{2}\right) = \frac{\varphi(x)+x}{2} \quad \text{e} \quad \varphi\left(\frac{x-\varphi(x)}{2}\right) = \frac{-(x-\varphi(x))}{2},$$

donde $\frac{x+\varphi(x)}{2} \in A^{(0)}$ e $\frac{x-\varphi(x)}{2} \in A^{(1)}$. Ademais, tomando $x_0 = \frac{x+\varphi(x)}{2}$ e $x_1 = \frac{x-\varphi(x)}{2}$, temos $x = x_0 + x_1$, e portanto $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em A. Temos também $\varphi(x) = x_0 - x_1$. Logo, fica comprovado que todo automorfismo de ordem 2 de uma álgebra A induz uma $\mathbb{Z}_2$-graduação nessa álgebra.

Consideremos $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e φ o automorfismo de ordem 2 induzido pela $\mathbb{Z}_2$-graduação de A. Nessas condições, sendo W um subespaço de A, tem-se que W é homogêneo se, e somente se, $\varphi(W) = W$. De fato, sendo $w \in W$, arbitrário, existem únicos $w_0 \in A^{(0)}$ e $w_1 \in A^{(1)}$ tais que $w = w_0 + w_1$, sendo $w_0 = \frac{w+\varphi(w)}{2}$ e $w_1 = \frac{w-\varphi(w)}{2}$. Assim, se $\varphi(W) = W$, então $w_0, w_1 \in W$, donde W é homogêneo. Reciprocamente, se W é homogêneo, então $w_0, w_1 \in W$, donde $\varphi(W) \subseteq W$ (como $\varphi^2 = Id_A$, temos $\varphi(W) = W$).

Exemplo 13. *Sejam A uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, φ o automorfismo de ordem 2 induzido pela $\mathbb{Z}_2$-graduação de A e J o radical de Jacobson de A. Então, como $\varphi(\{0\}) = \{0\}$ e $\varphi(J) = J$, temos que $\{0\}$ e J são ideais homogêneos de A.*

Sejam A uma superálgebra e φ o automorfismo induzido pela $\mathbb{Z}_2$-graduação de A. Dizemos que A é uma *álgebra φ-simples (ou superálgebra simples)* se A não tem φ-ideais, isto é, ideais que são preservados por φ, além de $\{0\}$ e A. Equivalentemente, A é uma superálgebra simples se não possui ideais homogêneos além de $\{0\}$ e A. É imediato da definição acima que toda álgebra simples que possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação é uma superálgebra simples.

Apresentaremos agora um teorema (cuja demonstração pode ser encontrada em [9]) que é uma generalização do Teorema de Wedderburn-Malcev.

Teorema 3. *Sejam A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica zero e φ o automorfismo induzido pela $\mathbb{Z}_2$-graduação de*

A. Então, Se $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n + J(A)$, onde cada B_i é uma subálgebra homogênea de A e φ-simples, isto é, cada B_i é uma superálgebra simples.

Assim, pelo Teorema 3, ao tratarmos de superálgebras semissimples de dimensão finita, podemos nos concentrar apenas em suas componentes φ-simples.

Definiremos agora homomorfismos e e isomorfismos $\mathbb{Z}_2$-graduados e apresentaremos uma caracterização de superálgebras simples de dimensão finita.

Definição 11. Sejam $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ e $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Um homomorfismo de álgebras $\phi : A \longrightarrow B$ é dito um *homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado* se $\phi(A^{(i)}) \subseteq B^{(i)}$, para todo $i \in \{0, 1\}$.

Um *isomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado* é um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado bijetivo.

Teorema 4. *Uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo K algebricamente fechado deve ser isomorfa a uma das seguintes superálgebras:*

I) $M_{a,b}(K) = M_{a+b}(K)$, onde $a > 0$, $b \geq 0$, munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação

$$M_{a,b}^{(0)}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \right\} \ , \ M_{a,b}^{(1)}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

onde $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ são matrizes $a \times a, a \times b, b \times a, b \times b$, respectivamente, com entradas em K.

II) $M_n(C)$, onde C é a álgebra $K \oplus Kc$ e $c^2 = 1_C$, munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação

$$M_n^{(0)}(C) = M_n(K) \ , \ M_n^{(1)}(C) = M_n(K)c = \{Ac \ / \ A \in M_n(K)\}.$$

Observemos que quando $b = 0$, no caso I do teorema anterior, temos que $M_{a,b}(K) = M_a(K)$ munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial.

Para finalizarmos essa seção, abordaremos o conceito de envoltória de Grassmann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e apresentaremos como exemplo a envoltória da álgebra $M_2(K)$ (veja o Exemplo 10).

Definição 12. Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra. A álgebra

$$G(A) = (A^{(0)} \otimes E^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes E^{(1)})$$

é chamada de *envoltória de Grassmann de A*.

É de fácil verificação que $G(A)$ é uma subálgebra de $A \otimes E$ e que $G^{(0)} = A^{(0)} \otimes E^{(0)}$ e $G^{(1)} = A^{(1)} \otimes E^{(1)}$ definem uma graduação em $G(A)$. Assim, a envoltória de Grassmann de uma superálgebra é sempre uma superálgebra.

Considerando a álgebra $C = K \oplus Kc$ citada no Teorema 4, observamos que ela tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, definida por $C^{(0)} = K$ e $C^{(1)} = Kc$. É interessante observar que a álgebra exterior E é isomorfa a $G(C)$, e uma demonstração deste fato pode ser vista no contexto da demonstração do Lema 2, no Capítulo 2.

Exemplo 14. *Consideremos a álgebra $M_2(K)$, munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação definida no Exemplo 10, e calculemos agora $G(M_2(K))$. Para tal, examinemos separadamente cada parcela da soma direta*

$$G(M_2(K)) = (M_2^{(0)}(K) \otimes E^{(0)}) \oplus (M_2^{(1)}(K) \otimes E^{(1)}).$$

Inicialmente consideremos a superálgebra $M_{1,1}(E)$ e

$$M_{1,1}^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \Big/ \ x, z \in E^{(0)} \right\} \quad e \quad M_{1,1}^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ w & 0 \end{pmatrix} \Big/ \ y, w \in E^{(1)} \right\}$$

(como no Exemplo 12) e a aplicação

$$\begin{aligned} f : M_2^{(0)}(K) \times E^{(0)} &\longrightarrow M_{1,1}^{(0)} \\ \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, x_0 \right) &\longmapsto f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, x_0 \right) = \begin{pmatrix} ax_0 & 0 \\ 0 & bx_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e mostremos que f é bilinear. De fato, temos

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, x_0 \right) &= f\left(\begin{pmatrix} a+\alpha c & 0 \\ 0 & b+\alpha d \end{pmatrix}, x_0 \right) \\ &= \begin{pmatrix} (a+\alpha c)x_0 & 0 \\ 0 & (b+\alpha d)x_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_0+\alpha cx_0 & 0 \\ 0 & bx_0+\alpha dx_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_0 & 0 \\ 0 & bx_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} cx_0 & 0 \\ 0 & dx_0 \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, x_0 \right) + \alpha f\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, x_0 \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, x_0+\alpha y_0\right) &= \begin{pmatrix} a(x_0+\alpha y_0) & 0 \\ 0 & b(x_0+\alpha y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_0+\alpha a y_0 & 0 \\ 0 & bx_0+\alpha b y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_0 & 0 \\ 0 & bx_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} ay_0 & 0 \\ 0 & by_0 \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, x_0\right) + \alpha f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, y_0\right) \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $a, b, c, d, \alpha \in K$ *e* $x_0, y_0 \in E^{(0)}$. *Assim, pela propriedade universal (vide Exemplo 7), existe uma única transformação linear* $T_f : M_2^{(0)}(K) \otimes E^{(0)} \longrightarrow M_{1,1}^{(0)}$ *tal que*

$$T_f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \otimes x_0\right) = \begin{pmatrix} ax_0 & 0 \\ 0 & bx_0 \end{pmatrix}.$$

Ademais, mostremos agora que T_f *é um isomorfismo de espaços vetoriais. Para tal, consideremos a transformação linear* $S : M_{1,1}^{(0)} \longrightarrow M_2^{(0)}(K) \otimes E^{(0)}$, *tal que*

$$S\left(\begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes x_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes y_0$$

e observemos que para quaisquer $x_0, y_0, e_0 \in E^{(0)}$, $a, b \in K$, *temos*

$$\begin{aligned} T_f \circ S\left(\begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix}\right) &= T_f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes x_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes y_0\right) \\ &= \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S \circ T_f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \otimes e_0\right) &= S\begin{pmatrix} ae_0 & 0 \\ 0 & be_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes ae_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes be_0 \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes e_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \otimes e_0 \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \otimes e_0 \end{aligned}$$

Portanto, T_f é um isomorfismo de espaços vetoriais, com $S = {T_f}^{-1}$.

De modo completamente análogo, é possível mostrar a aplicação

$$\begin{aligned} S_1 : M_{1,1}^{(1)} &\longrightarrow M_2^{(1)}(K) \otimes E^{(1)} \\ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} &\longmapsto S_1\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes y \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Por fim, notemos que $\theta : M_{1,1}(E) \longrightarrow G(M_2(K))$, dada por

$$\theta\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} + S_1\begin{pmatrix} 0 & y \\ w & 0 \end{pmatrix} = E_{11} \otimes x + E_{22} \otimes z + E_{12} \otimes y + E_{21} \otimes w$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais que preserva o $\mathbb{Z}_2$-grau. Ademais, mostra-se facilmente que θ é um isomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de álgebras.

Assim, teremos

$$G(M_2(K)) \simeq M_{1,1}(E).$$

1.4 Polinômios e Variedades de Álgebras

Neste seção, inicialmente iremos apresentar os conceitos de identidade polinomial de uma álgebra e de T-ideal, como também diversos exemplos e resultados concernentes a esses conceitos. Por fim, abordaremos o tema variedades de álgebras e exporemos propriedades deste conceito que serão de grande importância no decorrer desta dissertação.

Começaremos definindo a álgebra de polinômios. Para tal consideremos $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto não vazio, cujos elementos chamaremos de *variáveis*. Definimos uma *palavra em X* como sendo uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x_{i_j} \in X$. Neste caso, dizemos que n é *o tamanho da palavra*, e quando $n = 0$ temos a palavra vazia, que em geral denotamos por 1. Diremos que duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k}$ são iguais quando $n = k$ e $x_{i_l} = x_{j_l}$ qualquer que seja $l \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Tomemos agora $S(X)$ o conjunto de todas as palavras em X e $K_1\langle X\rangle$ o espaço vetorial com base $S(X)$. Observemos que os elementos de $K_1\langle X\rangle$ são somas formais do tipo

$$f = \sum_{m \in S(X)} \alpha_m m \text{ , onde } \alpha_m \in K \text{ e } \{m \in S(X) \mid \alpha_m \neq 0\} \text{ é finito,}$$

as quais chamaremos de *polinômios*. Observemos que, chamando de *monômios* o produto de um escalar por uma palavra, temos que um polinômio é uma soma formal de monômios.

Consideremos agora a operação de concatenação em $S(X)$, onde essa operação é dada por:

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{i_2}\cdots x_{j_k}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k}.$$

Observa-se facilmente que essa operação é associativa e possui elemento neutro em $S(X)$ (a saber, a palavra vazia). Assim, uma vez que $S(X)$ é uma base para $K_1\langle X\rangle$, conforme comentamos na Observação 1, a operação de concatenação induz em $K_1\langle X\rangle$ uma operação bilinear, que a torna uma álgebra associativa e unitária. Considerando $K\langle X\rangle$ como sendo o subespaço de $K_1\langle X\rangle$ gerado por $S(X) - \{1\}$, temos que $K\langle X\rangle$ é uma subálgebra (não unitária) de $K_1\langle X\rangle$.

Passemos agora à ideia de avaliar um polinômio de $K\langle X\rangle$ em elementos de uma álgebra. Para tal, consideremos A um álgebra e $h : X \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer, tomando $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Observemos que existe uma aplicação linear $T_h : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $T_h(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$. Ademais, é de fácil verificação que T_h é um homomorfismo de álgebras, e o único satisfazendo $T_h|_X = h$.

Sendo $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}) \in K\langle X\rangle$, denotaremos por $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n})$ a imagem de f por T_h. De modo prático, $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n})$ é o elemento de A que obtemos ao substituir x_i por a_i em f.

Definição 13. Um polinômio $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é dito uma *identidade polinomial* para uma álgebra A, e denotamos por $f \equiv 0$ em A, quando $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$.

Sendo A uma álgebra, denotamos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A. Observemos que o polinômio nulo sempre pertence a $T(A)$. Ademais, se A é tal que $T(A) \neq \{0\}$, dizemos que A é uma *álgebra com identidade polinomial* ou uma *PI-álgebra.*

Conforme mostra a observação a seguir, existe uma relação entre as identidades polinomiais de uma álgebra e as identidades polinomiais de uma subálgebra e de um quociente dela.

Observação 12. *Sejam A uma álgebra, B uma subálgebra e I um ideal de A. Então, $T(A) \subseteq T(B)$ e $T(A) \subseteq T(A/I)$.*

Vejamos agora alguns exemplos de identidades polinomiais.

Exemplo 15. *O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3]$ é uma identidade para a álgebra exterior E. De fato, observamos primeiramente que $[x, y] \in E^{(0)}$ para quaisquer elementos $x, y \in E$. De acordo com o Exemplo 4, temos que E é comutativa, para Char $K = 2$, e $Z(E) = E^{(0)}$, para Char $K \neq 2$. Em qualquer caso, observamos que $[x, y] \in Z(E)$ e daí $f(x, y, z) = [[x, y], z] = 0$, quaisquer que sejam x, y, $z \in E$.*

Exemplo 16. *O polinômio* $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ *é uma identidade polinomial para a álgebra*

$$M_{1,1}(E) = \begin{pmatrix} E^{(0)} & E^{(1)} \\ E^{(1)} & E^{(0)} \end{pmatrix}$$

do Exemplo 12.

De fato, notemos que dados $a_1, a_2, d_1, d_2 \in E^{(0)}$ *e* $b_1, b_2, c_1, c_2 \in E^{(1)}$*, temos*

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 & b \\ c & c_1b_2 - c_2b_1 \end{pmatrix}$$

com $b = (a_1 - d_1)b_2 + (d_2 - a_2)b_1, c = (a_2 - d_2)c_1 + (d_1 - a_1)c_2 \in E^{(1)}$*. Ademais, uma vez que* $b_1c_2 - b_2c_1 = c_1b_2 - c_2b_1$*, tomando* $a = c_1b_2 - c_2b_1 \in E^{(0)}$ *temos*

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix},$$

Por fim, observemos que dados $a, d \in E^{(0)}$*,* $b, c, e, f \in E^{(1)}$*, vale*

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ f & d \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} bf - ec & 0 \\ 0 & ce - fb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bf - ec & 0 \\ 0 & bf - ec \end{pmatrix} \in Z(M_{1,1}(E)). \end{aligned}$$

Portanto, ao avaliarmos f *em elementos de* $M_{1,1}(E)$*, obtemos o comutador de um elemento central por um elemento qualquer de* $M_{1,1}(E)$*, concluindo então que* $f \equiv 0$ *em* $M_{1,1}(E)$*.*

Tratemos agora de alguns tipos específicos de polinômios, iniciando pelos polinômios multi-homogêneos e multilineares.

Definição 14. Sejam $m \in K\langle X\rangle$ um monômio, $f \in K\langle X\rangle$ um polinômio e $x_i \in X$. Definimos:

a) O *grau de* m *em* x_i, denotado por $deg_{x_i}m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m.

b) O *grau de* f *em* x_i, denotado por $deg_{x_i}f$, como sendo o maior grau em x_i dos monômios que compõem f.

Um polinômio $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é dito *homogêneo* em uma variável x_i quando todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. Dizemos que f é *multi-homogêneo* se f é homogêneo em todas as variáveis. Quando f é homogêneo de grau 1 em x_i, dizemos que f é *linear em* x_i. Por fim, f

será chamado de *multilinear* quando for linear em todas as suas variáveis, ou seja, quando cada variável tiver grau 1 em cada monômio de f. Neste caso, denotando por S_n o grupo das permutações de $\{1, 2, \cdots, n\}$, f tem a forma

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \text{ , com } \alpha_\sigma \in K.$$

Denotaremos por P_n o subespaço de todos os polinômios multilineares de $K\langle X \rangle$ nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$. É de verificação imediata que o conjunto $\{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base do espaço vetorial P_n. Logo, $dim P_n = n!$.

Destacamos que, conforme assegura a observação a seguir, verificar se um polinômio multilinear é uma identidade para uma álgebra é algo que pode ser feito de modo mais prático do que a verificação para um polinômio qualquer. A demonstração dessa observação pode ser encontrada em [9].

Observação 13. *Sejam A um álgebra, $f(x_1, \cdots, x_n) \in P_n$ e β uma base de A. Se $f(b_1, b_2, \cdots, b_n) = 0$ para quaisquer $b_1, b_2, \cdots, b_n \in \beta$, então $f \in T(A)$.*

Vejamos agora alguns exemplos de polinômios multilineares.

Exemplo 17. *Seja $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1$. Então, f é multilinear. Ademais, para cada $n \in \mathbb{N}$, o comutador de tamanho n, $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, é um polinômio multilinear.*

Exemplo 18. *O polinômio*

$$St_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

onde $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação $\sigma \in S_n$, é um polinômio multilinear, chamado de polinômio standard de grau n. Em [9], podemos encontrar uma demonstração do Teorema de Amitsur-Levitzki, que assegura que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o polinômio standard St_{2n} é uma identidade para a álgebra $M_n(K)$. Este teorema foi demonstrado primeiramente por Amitsur e Levitzki, em [1], e tendo surgido posteriormente outras demonstrações.

Por outro lado, fixando $e_1, e_2, \cdots, e_n$ geradores distintos da álgebra exterior E, considerado char $K = 0$ e recordando que $e_i e_j = -e_j e_i$, temos

$$\begin{aligned} St_n(e_1, \cdots, e_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(n)} \\ &= n! e_1 e_2 \cdots e_n \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Assim, a álgebra exterior não satisfaz nenhuma identidade standard.

Passemos agora ao estudo de polinômios alternados.

Definição 15. Seja $f(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) \in K\langle X\rangle$ um polinômio linear nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Diz-se que f é *alternado nas variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se, para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, vale

$$f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = -f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m).$$

Dizemos que um polinômio multilinear f é um *polinômio alternado* quando f é alternado em todas as suas variáveis.

Observemos que, como qualquer permutação do S_n pode ser escrita como um produto de tranposições, segue que se $f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ é alternado em $x_1, \cdots, x_n$, então, para toda $\sigma \in S_n$, temos

$$f(x_{\sigma(1)} \cdots, x_{\sigma(n)}, y_1, \cdots, y_m) = (-1)^\sigma f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m).$$

Um exemplo de polinômio alternado é o polinômio standard. Mais ainda, a menos de escalares, os polinômios standard são os únicos polinômios alternados, ou seja, vale a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [9].

Proposição 3. *Consideremos $f(x_1, \cdots, x_n)$ um polinômio alternado. Então, $f(x_1, \cdots, x_n) = \alpha St_n(x_1, \cdots, x_n)$ para algum $\alpha \in K$.*

Trabalhemos agora o conceito de operador alternador. Definimos o *operador alternador $A_{x_1,\cdots,x_n}$ nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$* da seguinte forma:

$$A_{x_1,\cdots,x_n} f = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}, y_1, \cdots, y_m)$$

onde $f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ é um polinômio linear nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$.

Observa-se, sem muitas dificuldades, que $A_{x_1,\cdots,x_n}$ é linear e $A_{x_1,\cdots,x_n} f$ é um polinômio alternado nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$.

Exemplo 19. *Consideremos $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$. Temos*

$$\begin{aligned} A_{x_1,\cdots,x_n} f &= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \\ &= St_n(x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Para cada $\sigma \in S_n$, consideremos a aplicação $T_\sigma : P_n \longrightarrow P_n$ definida por $T_\sigma(f(x_1, \cdots, x_n)) = f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$. Observemos que para cada $\sigma \in S_n$ temos T_σ um operador linear. Além disso, dadas $\sigma, \gamma \in S_n$ vale $T_\sigma \circ T_\gamma = T_{\sigma\gamma}$.

Definamos agora

$$e_{(1^n)} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma T_\sigma.$$

Sendo $f(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio multilinear, observemos que

$$e_{(1^n)} f = A_{x_1,\cdots,x_n} f.$$

Gostaríamos de destacar que a notação $e_{(1^n)}$ é oriunda da Teoria das Representações de Grupos, mais especificamente da Teoria de Young, e refere-se a um elemento da álgebra de grupo KS_n, a qual tem uma ação natural no espaço P_n dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$. Para as definições e um estudo detalhado desta ação, indicamos o capítulo 2 da referência [9].

Como consequência da Proposição 3 temos o seguinte teorema:

Teorema 5. *Sejam $r + l + 1 = k$ e $\{i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_l, t\} = \{1, 2, \cdots, k\}$. Então, $e_{(1^k)}[[x_{i_1} \cdots x_{i_r}, x_{j_1} \cdots x_{j_l}], x_t] = 0$ em $K\langle X\rangle$. Consequentemente, se $Y = \{i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_m, t\} \subseteq \{1, 2, \cdots, k\}$, então devemos ter $e_{(1^k)}(a[[x_{i_1} \cdots x_{i_n}, x_{j_1} \cdots x_{j_m}], x_t]b) = 0$, para quaisquer a, b monômios em $K\langle X\rangle$ tais que $a[[x_{i_1} \cdots x_{i_n}, x_{j_1} \cdots x_{j_m}], x_t]b \in P_k$.*

Demonstração. Uma vez que podemos tomar $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(i_1) = 1$, $\sigma(i_2) = 2, \cdots, \sigma(i_r) = r, \sigma(j_1) = r+1, \cdots, \sigma(j_l) = k-1, \sigma(t) = k$ e que, fixada $\sigma \in S_n$, temos $\{\sigma\beta \mid \beta \in S_n\} = S_n$, é suficiente provar o lema para o caso em que $i_1 = 1, i_2 = 2, \cdots, i_r = r, j_1 = r+1, \cdots, j_l = k-1, t = k$.

Observemos agora que

$$[[x_1 \cdots x_r, x_{r+1} \cdots x_{k-1}], x_k] = f_1 + f_2 + f_3 + f_4,$$

onde $f_1 = x_1 \cdots x_k, f_2 = -x_{r+1} \cdots x_{k-1} x_1 \cdots x_r x_k, f_3 = -x_k x_1 \cdots x_{k-1}$ e $f_4 = x_k x_{r+1} \cdots x_{k-1} x_1 \cdots x_r$. Assim,

$$e_{(1^k)}[[x_1 \cdots x_r, x_{r+1} \cdots x_{k-1}], x_k] \;=\; e_{(1^k)} f_1 + e_{(1^k)} f_2 + e_{(1^k)} f_3 + e_{(1^k)} f_4.$$

Pela Proposição 3, temos que o primeiro membro da última equação é igual a um múltiplo do polinômio standard de grau k. Assim, denotemos por λ_i o coeficiente do monômio $x_1 \cdots x_k$ em $e_{(1^k)} f_i$, e notemos que se λ é o coeficiente desse monômio em $e_{(1^k)}[[x_1 \cdots x_r, x_{r+1} \cdots x_{k-1}], x_k]$ devemos ter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$. Por outro lado temos, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -(-1)^{rp}$, $\lambda_3 = -(-1)^{k-1}$ e $\lambda_4 = (-1)^{rp}(-1)^{k-1}$, com $p = k - r - 1$. Daí,

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - (-1)^{rp} - (-1)^{k-1} + (-1)^{rp}(-1)^{k-1} \\ &= (1 - (-1)^{rp})(1 - (-1)^{r+p}). \end{aligned}$$

Portanto, uma vez que rp ou $r+p$ é par, devemos ter $(1-(-1)^{rp}) = 0$ ou $(1-(-1)^{r+p}) = 0$, e temos a primeira parte do resultado.

Para a segunda parte da demonstração, consideremos

$$S_Y = \{\sigma \in S_k \mid \sigma(j) = j,\ \forall\ j \in \{1, \cdots, k\} - Y\} \quad \text{e} \quad e_Y = \sum_{\tau \in S_Y} (-1)^\tau T_\tau.$$

Sendo S_Y um subgrupo de S_k, tomemos agora $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_z\}$ um transversal à esquerda para S_Y em S_k. Assim, devemos ter $S_k = \theta_1 S_Y \cup \theta_2 S_Y \cup \cdots \cup \theta_z S_Y$, e portanto

$$\begin{aligned} e_{(1^k)} &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma T_\sigma \\ &= \sum_{h=1}^{z} \sum_{\tau \in S_Y} (-1)^{\theta_h} (-1)^\tau T_{\theta_h \tau} \\ &= \left(\sum_{h=1}^{z} (-1)^{\theta_h} T_{\theta_h} \right) \left(\sum_{\tau \in S_Y} (-1)^\tau T_\tau \right) \\ &= \left(\sum_{h=1}^{z} (-1)^{\theta_h} T_{\theta_h} \right) e_Y. \end{aligned}$$

Logo,

$$e_{(1^k)} a[[x_{i_1} \cdots x_{i_n}, x_{j_1} \cdots x_{j_m}], x_t] b$$

$$= \left(\sum_{h=1}^{z} (-1)^{\theta_h} T_{\theta_h} \right) (e_Y(a[[x_{i_1} \cdots x_{i_n}, x_{j_1} \cdots x_{j_m}], x_t] b))$$

$$= \left(\sum_{h=1}^{z} (-1)^{\theta_h} T_{\theta_h} \right) (a(e_Y[[x_{i_1} \cdots x_{i_n}, x_{j_1} \cdots x_{j_m}], x_t]) b) = 0$$

pois os índices das variáveis em a e b são fixadas pelas permutações em S_Y e $e_Y[[x_{i_1} \cdots x_{i_n}, x_{j_1} \cdots x_{j_m}], x_t] = 0$. Temos então o resultado. $\square$

Analisemos agora como o operador alternador modifica um produto de comutadores de tamanho 2.

Observação 14. *Seja* $f(x_1, x_2, \cdots, x_{2k}) = [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}]$. *Então,*

$$A_{x_1, \cdots, x_{2k}} f = 2^k St_{2k}(x_1, \cdots, x_{2k}).$$

De fato, pela Proposição 3, temos $A_{x_1, \cdots, x_{2k}} f = \alpha St_{2k}(x_1, \cdots, x_{2k})$, *para algum* $\alpha \in K$. *Para determinarmos* α, *calculemos o coeficiente do monômio* $x_1 x_2 \cdots x_{2k}$ *em* $A_{x_1, \cdots, x_{2k}} f$. *Para tal, observemos que* $\sigma \in S_n$ *é tal* *que* $[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \cdots [x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)}]$ *contém o monômio* $x_1 \cdots x_{2k}$ *se, e só se,* $\sigma = Id$ *ou* σ *é um produto de transposições que estão no conjunto* $\{(1\ 2), (3\ 4), \cdots, (2k-1\ 2k)\}$*, o que totaliza* 2^k *possibilidades. Temos então o resultado.*

Abordaremos agora o conceito de T-ideal e algumas de suas propriedades.

Definição 16. Dizemos que um ideal I de $K\langle X\rangle$ é um T-*ideal* se temos $f(g_1, g_2, \cdots, g_n) \in I$, para quaisquer $f(x_1, \cdots, x_n) \in I$ e $g_1, \cdots, g_n \in K\langle X\rangle$.

Apresentamos a proposição a seguir, cuja demonstração encontra-se em [9].

Proposição 4. *Se A é uma álgebra, então $T(A)$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então existe uma álgebra B tal que $I = T(B)$.*

Uma consequência imediata dessa proposição é o fato de que se f é uma identidade para uma álgebra A, ao trocarmos qualquer variável de f por um polinômio de $K\langle X\rangle$, o polinômio resultante é ainda uma identidade de A.

Um conceito bastante importante é o de T-ideal gerado por um conjunto, que descreveremos no exemplo a seguir.

Exemplo 20. *Seja $\emptyset \neq S$ um subconjunto qualquer de $K\langle X\rangle$. Definimos o T-ideal gerado por S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto*

$$\{h_1 f(g_1, g_2, \cdots, g_n) h_2 \mid g_1, \cdots, g_n \in K\langle X\rangle,\ h_1, h_2 \in K_1\langle X\rangle\}.$$

Seja A uma álgebra. Se $S \subset T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$, dizemos que S é uma base das identidades de A. Nos artigos [14] e [15], Kemer mostrou a existência de base finita para as identidades de uma álgebra quando char $K = 0$. Contudo, o trabalho de Kemer não mostra como determinar tal base finita, e até hoje não se conhece base para as identidades de algumas álgebras clássicas, como por exemplo $M_n(K)$ para $n \geq 3$.

Por outro lado, para algumas álgebras já se tem conhecimento de bases finitas de suas identidades. Por exemplo, sabe-se que o T-ideal das identidades da álgebra exterior E é gerado pelo conjunto unitário $\{[x_1, x_2, x_3]\}$ (vide [9]).

O teorema a seguir reforça a importância e serve como motivação para o estudo dos polinômios multilineares, ao tratarmos de bases de identidades. A demostração desse teorema pode ser vista em [9].

Teorema 6. *Se char $K = 0$ e I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então I é gerado pelos seus polinômios multilineares.*

Para finalizarmos esta seção, trataremos do conceito de variedades de álgebras. Inicialmente, definiremos a variedade de álgebras gerada por um conjunto de polinômios.

Definição 17. Seja S um subconjunto não vazio de $K\langle X\rangle$. Definimos a *variedade determinada por* S, denotada por $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$, como sendo a classe de todas as álgebras A tais que todos os polinômios de S são identidades de A, ou seja, $S \subseteq T(A)$.

Exemplo 21. *Sendo* $S = \{[x_1, x_2]\}$*, temos que* $\mathcal{V}(S)$ *é a classe de todas as álgebras comutativas.*

Sendo $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras, definimos o T*-ideal de* $\mathcal{V}$, denotado por $T(\mathcal{V})$, como segue

$$T(\mathcal{V}) = \bigcap_{A \,\in\, \mathcal{V}} T(A).$$

Existe uma maneira, dada por Birkhoff, de determinar quando uma classe de álgebras $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras. Esta caracterização é dada pelo teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 7. *(Teorema de Birkhoff) Uma classe não vazia* $\mathcal{V}$ *de álgebras é uma variedade se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:*

i) Se $A \in \mathcal{V}$ *e* $f : B \longrightarrow A$ *é um homomorfismo injetivo de álgebras, então* $B \in \mathcal{V}$*;*

ii) Se $A \in \mathcal{V}$ *e* $f : A \longrightarrow B$ *é um homomorfismo sobrejetivo de álgebras, então* $B \in \mathcal{V}$*;*

iii) Se $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *é uma família de álgebras e* $A_\gamma \in \mathcal{V}$ *para todo* $\gamma \in \Gamma$*, então o produto direto* $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{V}$*.*

Em outras palavras o Teorema de Birkhoff nos diz que uma classe de álgebras $\mathcal{V}$ é uma variedade, se e somente se, é fechada a subálgebras, imagens homomórficas (quocientes) e produtos diretos.

Sendo $\mathcal{V}$ a variedade determinada pelo conjunto S, observamos que devemos ter $\mathcal{V}(\langle S\rangle^T) = \mathcal{V}$. Neste caso escrevemos $T(\mathcal{V}) = \langle S\rangle^T$. Assim, asseguramos que cada variedade $\mathcal{V}$ está associada a um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Ademais, essa correspondência é biunívoca, conforme afirma o teorema a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [3],

Teorema 8. *Existe uma correspondência biunívoca entre variedades e* T*-ideais de* $K\langle X\rangle$*. Nesta correspondência uma variedade* $\mathcal{V}$ *corresponde ao* T *ideal* $T(\mathcal{V})$*, e um* T*-ideal* I *corresponde à variedade das álgebras que satisfazem todas as identidades polinominais de* I*.*

Por fim, sendo $\mathcal{V}$ uma variedade, dizemos que $\mathcal{V}$ é *gerada por uma álgebra* A, e denotamos por $\mathcal{V} = var(A)$, quando ocorre $T(A) = T(\mathcal{V})$. Observemos que, unindo o teorema anterior à Proposição 4, podemos garantir que sempre existe uma álgebra A tal que $\mathcal{V} = var(A)$.

O próximo teorema, devido a Kemer, relaciona variedades de álgebras e envoltórias de Grassmann. Sua demonstração pode ser encontrada em [16].

Teorema 9. *Se $\mathcal{V}$ é uma variedade não nula, então existe uma superálgebra B de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = var(G(B))$.*

1.5 Codimensões e PI-Expoente

Nesta seção nossos esforços dedicar-se-ão a estabelecer os conceitos de codimensões e PI-expoente de uma PI-álgebra, como também expor diversos resultados que serão cruciais no desenrolar desta dissertação. Num primeiro momento, trataremos de codimensões e resultados concernentes a este conceito. Num momento posterior, finalizaremos esta seção abordando PI-expoentes, quando exporemos resultados de existência e caracterização do PI-expoente de uma PI-álgebra, dados por Antonio Giambruno e Mikhail Zaicev.

Recordemos inicialmente que, na seção anterior, denotamos por P_n o espaço de todos os polinômios multilineares nas n primeiras variáveis. Esse espaço vetorial será de grande importância no estudo de codimensões e PI-expoentes.

Iniciaremos esse estudo a partir das codimensões.

Definição 18. Sejam A uma álgebra e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a *n-ésima codimensão de A*, denotada por $c_n(A)$, como sendo

$$c_n(A) = dim \ \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}.$$

Ademais, a sequência numérica $(c_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada de *sequência de codimensões de A*.

Vejamos agora alguns exemplos de codimensões de álgebras importantes.

Exemplo 22. *Considerando a álgebra exterior E. Para $n \in \mathbb{N}$, temos que $P_n = (P_n \cap T(E)) \oplus W$, onde W é o subespaço de P_n gerado pelos polinômios do tipo*

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}]$$

sujeitos as condições

$$i_1 < \cdots < i_k, \quad j_1 < \cdots < j_{2m} \quad e \quad k + 2m = n.$$

Além disso, esses polinômios são linearmente independentes e a quantidade deles é exatamente 2^{n-1}. Logo, dim $W = 2^{n-1}$. Segue então que

$$c_n(E) = dim\ \frac{P_n}{P_n \cap T(E)} = dim\ W = 2^{n-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Demonstrações detalhadas dessas afirmações podem ser encontradas em [9]

Exemplo 23. *As codimensões da álgebra $UT_2(K)$ das matrizes 2×2 triangulares superiores são dadas por*

$$c_n(UT_2(K)) = 2^{n-1}(n-2) + 2.$$

O cálculo dessas codimensões pode ser encontrado em [9].

A observação a seguir apresenta uma importante propriedade de codimensões relacionada à extensões do corpo base. Para a consulta da demonstração, indicamos a referência [9].

Observação 15. *Supondo K infinito, seja A uma K-álgebra. Sendo C uma K-álgebra comutativa, mostra-se que $T(A) \subseteq T(A \otimes_K C)$. Particularmente, sendo F uma extensão de K e $\overline{A} = A \otimes_K F$, temos $T(A) \subseteq T(\overline{A})$. Por outro lado, como $A \otimes_K 1_F$ é uma K-subálgebra de $\overline{A}$ isomorfa a A, temos $T(A) = T(\overline{A})$. Daí, $c_n(A) = c_n(\overline{A})$, considerando-se $\overline{A}$ como K-álgebra.*

Conforme visto na Seção 1.1 (após o Exemplo 7), temos que $\overline{A}$ é naturalmente uma F-álgebra (a extensão de escalares de A). Ademais, também vale $c_n(A) = c_n(\overline{A})$ com $\overline{A}$ vista como K-álgebra.

Observemos que o Teorema 6 garante que toda PI-álgebra satisfaz alguma identidade multilinear. Logo, temos

$$A \text{ é uma PI-álgebra} \iff c_n(A) < n! \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Em 1972, o matemático Regev mostrou, em [18], uma limitação exponencial para a sequência de codimensões de uma PI-álgebra. Esta limitação é descrita no próximo teorema, cuja demonstração pode ser vista em [9].

Teorema 10. *(Regev) Seja A uma PI-álgebra satisfazendo uma identidade polinomial de grau $d \geq 1$. Então, $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Uma consequência imediata deste teorema é que, para cada PI-álgebra A, existe uma constante a tal que $c_n(A) \leq a^n$, bastando tomar $a = (d-1)^2$, como no teorema anterior. Consequentemente, a sequência numérica $(\sqrt[n]{c_n(A)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais limitada superiormente. Portanto, faz sentido indagarmos se essa sequência é convergente. Em 1998 e 1999, os matemáticos Antonio Giambruno e Mikhail Zaicev mostraram, em [6] e [7], que para cada PI-álgebra esta sequência é convergente e converge para um número inteiro não negativo. Fica assim bem estabelecido o conceito de PI-expoente, que é definido a seguir.

Definição 19. Seja A uma PI-álgebra. Definimos o *PI-expoente de* A, denotado por $exp(A)$, como sendo

$$exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Além disso, sendo $\mathcal{V}$ uma variedade, definimos o *expoente de* $\mathcal{V}$, como sendo o expoente de A, onde A é uma álgebra tal que $\mathcal{V} = var(A)$.

Exemplo 24. *Sendo A uma álgebra, então $exp(A) = 0$ se, e somente se, A é nilpotente. De fato, observemos que $C_n(A) \in \mathbb{N}$, para todo natural n e que*

$$\begin{aligned} exp(A) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \textit{tal que}\ c_n(A) = 0\ ,\ \forall\ n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow \quad P_n \subseteq T(A),\ \forall\ n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 \cdots x_{n_0} \in T(A) \\ &\Leftrightarrow \quad A\ \textit{é nilpotente.} \end{aligned}$$

Exemplo 25. *Observemos que fazendo uso dos resultados obtidos nos Exemplos 22 e 23, concluímos que $exp(E) = exp(UT_2(K)) = 2$.*

No artigo [6], Antonio Giambruno e Mikhail Zaicev mostraram uma outra maneira de calcular o PI-expoente de uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Teorema 11. *Sejam A uma PI-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $A_1, \cdots, A_n$ subálgebras simples de A tais que $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n + J$, onde J denota o radical de Jacobson de A. Então, $exp(A)$ é dado como sendo o máximo das dimensões das subálgebras semissimples de A da forma $A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_r}$ tais que $A_{i_1} J \cdots J A_{i_r} \neq 0$, com $A_{i_1}, \cdots, A_{i_r}$ distintas.*

Apresentaremos agora um teorema que provê uma maneira, semelhante ao feito no teorema anterior, de calcular o expoente de uma PI-álgebra de dimensão qualquer sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Destacamos que a demonstração deste fato pode sem encontrada em [9].

Teorema 12. *Sejam B uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $B_1, \cdots, B_n$ subálgebras homogêneas de B que são superálgebras simples tais que $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n + J$, onde J denota o radical de Jacobson de B. Então, $exp(G(B))$ é dado como sendo o máximo das dimensões das superálgebras semissimples de B da forma $B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r}$ tais que $B_{i_1} J \cdots J B_{i_r} \neq 0$, com $B_{i_1}, \cdots, B_{i_r}$ distintas.*

Assim, sendo A uma PI-álgebra e $\mathcal{V} = var(A)$ temos, pelo Teorema 9, que existe uma superálgebra B de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = var(G(B))$, e consequentemente $exp(\mathcal{V}) = exp(G(B))$, e $exp(G(B))$ pode ser calculado como no teorema anterior.

Finalizaremos esta seção com o teorema a seguir que relaciona o expoente de uma álgebra com os expoentes de suas subálgebras, bem como relaciona o expoente de uma variedade $\mathcal{V}$ com os expoentes das álgebras que a compõe e com os das variedades contidas em $\mathcal{V}$.

Proposição 5. *Sejam A e B álgebras e $\mathcal{V}$ uma variedade. Então,*

$i)$ Se $T(A) \subseteq T(B)$, então $exp(B) \leq exp(A)$.

$ii)$ Se B é subálgebra de A, então $exp(B) \leq exp(A)$.

$iii)$ Se $A \in \mathcal{V}$, então $exp(A) \leq exp(\mathcal{V})$.

$iv)$ Se $\mathcal{W}$ é uma variedade contida em $\mathcal{V}$, então $exp(\mathcal{W}) \leq exp(\mathcal{V})$.

Demonstração. $i)$ Se $T(A) \subseteq T(B)$, então $P_n \cap T(A) \subseteq P_n \cap T(B)$. Daí, $dim(P_n \cap T(A)) \leq dim(P_n \cap T(B))$, e portanto, uma vez que $c_n(B) = n! - dim(P_n \cap T(B))$ e $c_n(A) = n! - dim(P_n \cap T(A))$, temos que $c_n(B) \leq c_n(A)$. Consequentemente, $exp(B) \leq exp(A)$.

$ii)$ Se B é uma subálgebra de A, então $T(A) \subseteq T(B)$, pela Observação 12. Temos então o resultado pelo item $i)$.

$iii)$ Recordando que
$$T(\mathcal{V}) = \bigcap_{C \in \mathcal{V}} T(C)$$
temos que se $A \in \mathcal{V}$, então $T(\mathcal{V}) \subseteq T(A)$, e o resultado é concluído argumentando como no item $i)$.

$iv)$ Se $\mathcal{W}$ é uma variedade contida em $\mathcal{V}$, temos que $T(\mathcal{V}) \subseteq T(\mathcal{W})$, e portanto, argumentando como em $i)$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Capítulo 2

Variedades de Álgebras Associativas de Expoente 1

Em 1979, o matemático russo Kemer, em [13], caracterizou as variedades de álgebras sobre corpos de característica 0 que têm sequência de codimensões com crescimento polinomial. Mais precisamente, ele mostrou que uma variedade de álgebras tem essa propriedade se, e somente se, não contém a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e nem a álgebra das matrizes 2×2 triangulares superiores.

Sendo $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas, é imediato da definição de PI-expoente (veja Seção 1.5) que se a sequência de codimensões de $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial, então $exp(\mathcal{V}) \leq 1$. Por outro lado, se $exp(\mathcal{V}) \leq 1$, tem-se que $\mathcal{V}$ não pode conter a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e nem a álgebra das matrizes 2×2 triangulares superiores, uma vez que estas álgebras têm expoente 2 (veja a Proposição 5). Assim, segue do resultado de Kemer que $exp(\mathcal{V}) \leq 1$ se, e somente se, $\mathcal{V}$ não contem a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e nem a álgebra das matrizes 2×2 triangulares superiores.

Neste capítulo concentraremos nossos esforços em expor uma outra demonstração desta caracterização, na qual se utilliza o Teorema 11 e o Corolário 1. Para este fim, traremos à tona alguns resultados auxiliares que reforçam a importância das identidades standard e destacam como a presença de uma identidade standard no T-ideal de uma variedade poder afetar a sua estrutura.

Em todo esse capítulo iremos considerar $char\ K = 0$.

Inicialmente, mostremos como o fato de uma variedade satisfazer uma identidade standard está diretamente ligado à não pertinência da álgebra exterior de dimensão infinita a essa variedade, conforme o teorema a seguir.

Teorema 13. *Uma variedade $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard se, e somente se, $E \notin \mathcal{V}$.*

Demonstração. Conforme comentamos no Exemplo 18, E não satisfaz nenhuma identidade standard. Assim, é imediato que $E \notin \mathcal{V}$ se $\mathcal{V}$ satisfaz alguma identidade standard.

Reciprocamente, suponhamos que $E \notin \mathcal{V}$ e consideremos um polinômio multilinear $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ pertencente a $T(\mathcal{V})$ e não pertencente a $T(E)$.

Recordemos que o Exemplo 20 assegura que o T-ideal das identidades de E é gerado pelo polinômio $[[x_1, x_2], x_3]$. Logo, qualquer elemento de $T(E)$ pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios do tipo

$$u[[p, q], r]v \tag{2.0.1}$$

onde u, v, p, q, r são monômios em $K\langle X\rangle$. Ademais, observemos que para quaisquer monômios $p, q, a, b \in K\langle X\rangle$, temos

$$[[p, q], ab] = a[[p, q], b] + [[p, q], a]b$$

conforme propriedades de comutadores vistas na Seção 1.1. Portanto, na equação (2.0.1) podemos tomar r como sendo um monômio de grau 1 (isto é, uma variável). Daí, todo elemento de $T(E)$ pode ser escrito como combinação linear de produtos do tipo

$$a[[x_{i_1} \cdots x_{i_k}, x_{j_1} \cdots x_{j_l}], x_r]b \tag{2.0.2}$$

Observemos que no Exemplo 22 afirmamos que o espaço P_n é gerado, módulo $P_n \cap T(E)$, pelos elementos da forma

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] \tag{2.0.3}$$

onde

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_{2m}, \quad k + 2m = n \tag{2.0.4}$$

Assim, sendo $f \in P_n$ e $f \notin T(E)$, temos que $\overline{f} \neq \overline{0}$ em $P_n/(P_n \cap T(E))$. Logo, f é uma combinação linear de elementos do tipo (2.0.3) acrescida de um elemento pertencente a $T(E)$, ou seja, f é uma combinação linear de elementos do tipo (2.0.3) e elementos multilineares do tipo (2.0.2). Mais ainda, pelo menos um elemento do tipo (2.0.3) deve aparecer com coeficiente não nulo em f.

Seja $k \in \{1, \cdots, n\}$ máximo tal que $x_{i_1} \cdots x_{i_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{n-1}}, x_{j_n}]$, sujeito às condições (2.0.4) aparece em f. Reordenando as variáveis e dividindo por um escalar conveniente, se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que o polinômio

$$x_1x_2\cdots x_k[x_{k+1},x_{k+2}]\cdots[x_{n-1},x_n] \tag{2.0.5}$$

aparece em f com coeficiente igual a 1.

Uma vez que f pertence a $T(\mathcal{V})$, substituindo, em f, x_i por $[x_i,y_i]$, para $i=1,\cdots,k$, obtemos uma nova identidade $g=g(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_k)$ para $\mathcal{V}$. Notemos agora que sendo k fixado como acima e sendo o comutador triplo uma identidade para E, todos os elementos do tipo (2.0.3) satisfazendo (2.0.4) que aparecem em f resultarão em uma identidade de E quando submetidos às substituições $x_i\to[x_i,y_i]$, $i=1,\cdots,k$, com exceção do termo (2.0.5) o qual resultará em $[x_1,y_1]\cdots[x_k,y_k][x_{k+1},x_{k+2}]\cdots[x_{n-1},x_n]$. Assim,

$$g=[x_1,y_1]\cdots[x_k,y_k][x_{k+1},x_{k+2}]\cdots[x_{n-1},x_n]+h$$

onde h é um polinômio multilinear nas variáveis $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_k$ que é uma identidade para E. Renomeando as variáveis, escrevamos

$$g=[x_1,x_2]\cdots[x_{2q-1},x_{2q}]+h$$

onde $h\in P_{2q}\cap T(E)$ é uma combinação linear de elementos do tipo (2.0.2).

Notemos também que fixados $\{i_1,\cdots,i_k,j_1\cdots,j_l,r\}\subseteq\{1,\cdots,2q\}$, se $w=a[[x_{i_1}\cdots x_{i_k},x_{j_1}\cdots x_{j_l}],x_r]b$ é um polinômio multilinear do tipo (2.0.2) aparecendo em h, pelo Teorema 5, devemos ter $e_{(1^{2q})}w=0$, donde $e_{(1^{2q})}h=0$.

Por fim, segue da Observação 14 que

$$e_{(1^{2q})}[x_1,x_2]\cdots[x_{2q-1},x_{2q}]=2^qSt_{2q}$$

Portanto, como $e_{(1^{2q})}h=0$, concluímos que

$$St_{2q}=\frac{1}{2^q}e_{(1^{2q})}[x_1,x_2]\cdots[x_{2q-1},x_{2q}]=\frac{1}{2^q}e_{(1^{2q})}g$$

pertence a $T(\mathcal{V})$, uma vez que g é pertencente a $T(\mathcal{V})$. Temos então uma contradição. $\square$

Mostremos agora que, sob certas circunstâncias, podemos tirar conclusões sobre a estrutura de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada quando a sua envoltória de Grassmann satisfaz uma identidade standard. Contudo, antes mostraremos dois lemas.

Lema 1. *Sejam $A=A^{(0)}\oplus A^{(1)}$ uma superálgebra tal que $G(A)$ satisfaça uma identidade standard e I um ideal homogêneo de A. Então, $G(A/I)$ também satisfaz uma identidade standard.*

Demonstração. Suponhamos que $St_n \in T(G(A))$. Fixemos arbitrariamente $x_1, ..., x_n \in E^{(0)} \cup E^{(1)}$ e consideremos $a_1, ..., a_n \in A^{(0)} \cup A^{(1)}$, de modo que para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, a_i e x_i pertençam a componentes homogêneas de mesmo grau. Notemos que se $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$, então teremos $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} = 0$, para qualquer $\sigma \in S_n$. Daí, nestas condições, temos que

$$St_n(\overline{a_1} \otimes x_1, \cdots, \overline{a_n} \otimes x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \overline{a_{\sigma(1)}} \cdots \overline{a_{\sigma(n)}} \otimes x_{\sigma(n)} \cdots x_{\sigma(n)} = 0$$

em $G(A/I)$.

Assim, podemos supor que $x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$. Notemos agora que, para cada $\sigma \in S_n$, existe um $\epsilon_\sigma \in \{-1, 1\}$ tal que $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} = \epsilon_\sigma x_1 x_2 \cdots x_n$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= St_n(a_1 \otimes x_1, \cdots, a_n \otimes x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \otimes x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \otimes \epsilon_\sigma x_1 \cdots x_n \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \epsilon_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \right) \otimes x_1 \cdots x_n, \end{aligned}$$

e consequentemente,

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \epsilon_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} St_n(\overline{a_1} \otimes x_1, \cdots, \overline{a_n} \otimes x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \overline{a_{\sigma(1)}} \cdots \overline{a_{\sigma(n)}} \otimes x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \overline{a_{\sigma(1)}} \cdots \overline{a_{\sigma(n)}} \otimes \epsilon_\sigma x_1 \cdots x_n \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \epsilon_\sigma \overline{a_{\sigma(1)}} \cdots \overline{a_{\sigma(n)}} \right) \otimes x_1 \cdots x_n \\ &= \overline{\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \epsilon_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \right) \otimes x_1 \cdots x_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como escolhemos $x_1, \cdots, x_n \in E^{(0)} \cup E^{(1)}$ e $a_1, ..., a_n \in A^{(0)} \cup A^{(1)}$ arbitrariamente e St_n é multilinear, temos o resultado. $\square$

Lema 2. *Sejam $M_{a,b}(K)$ e $M_n(K \oplus Kc)$ as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas dadas no Teorema 4. Então, $G(M_{a,b}(K))$, com $b \geq 1$, e $G(M_n(K \oplus Kc))$ contêm subálgebras isomorfas à álgebra exterior E.*

Demonstração. Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra tal que existe $x \in A^{(1)}$ com $x^2 = 1_A$. Considerando $T = (1_A \otimes E^{(0)}) \oplus (x \otimes E^{(1)})$, temos que T é uma subálgebra de $G(A)$.

Dado $\alpha \in E$ existem únicos $\alpha_0 \in E^{(0)}$ e $\alpha_1 \in E^{(1)}$ tais que $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$. Assim, a aplicação $\varphi : E \longrightarrow T$ dada por $\varphi(\alpha = \alpha_0 + \alpha_1) = 1_A \otimes \alpha_0 + x \otimes \alpha_1$ fica bem definida. Ademais, observando que $x^2 = 1_A$, verifica-se facilmente que φ é um isomorfismo de álgebras.

Observemos agora que tomando $x = I_n c \in M_n(K \oplus Kc)$ (onde I_n é a matriz identidade), temos que x pertence a componente de grau 1 de $M_n(K \oplus Kc)$ e $x^2 = I_n$. Assim, pelo feito acima temos que $M_n(K \oplus Kc)$ contém uma subálgebra isomorfa a E.

Para $M_{a,b}(K)$, consideremos os elementos $u = E_{a,a} + E_{a+1,a+1}$ e $v = E_{a,a+1} + E_{a+1,a}$ de $M_{a,b}(K)$ e notemos que $u^2 = u, uv = vu = v$ e $v^2 = u$. Logo, $\{u, v\}$ é multiplicativamente fechado e portanto $A = \langle u, v\rangle$ é uma subálgebra (u é a unidade de A) de $M_{a,b}(K)$. Ademais, como $u \in M_{a,b}^{(0)}(K)$ e $v \in M_{a,b}^{(1)}(K)$, observa-se facilmente que A é uma subálgebra homogênea de $M_{a,b}(K)$. Por fim, notemos que em $A = \langle u, v\rangle$ (munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida) temos $u \in A^{(0)}$ e $v \in A^{(1)}$, os quais satisfazem $v^2 = u = 1_A$, donde segue de $G(A)$, e consequentemente $G(M_{a,b}(K))$ (pois A é homogênea), contém uma subálgebra isomorfa a E. □

Observação 16. *Sejam $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ uma superálgebra e $\overline{K}$ o fecho algébrico do corpo K. Tomando $\overline{B}$ como sendo a $\overline{K}$-álgebra $B \otimes_K \overline{K}$ (extensão de escalares de B), observamos que $\overline{B}$ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural dada por*

$$\overline{B} = (B^{(0)} \otimes_K \overline{K}) \oplus (B^{(1)} \otimes_K \overline{K}).$$

Assim podemos considerar sua envoltória de Grassmann

$$G(\overline{B}) = (\overline{B}^{(0)} \otimes_{\overline{K}} E^{(0)}{}_{\overline{K}}) \oplus (\overline{B}^{(1)} \otimes_{\overline{K}} E^{(1)}{}_{\overline{K}})$$

onde $\overline{B}^{(i)} = B^{(i)} \otimes_K \overline{K}$ e $E^{(i)}{}_{\overline{K}} = E^{(i)} \otimes_K \overline{K}$, denota a componente homogênea de $\mathbb{Z}_2$-grau i, para $i = 0,\ 1$, da álgebra exterior sobre $\overline{K}$.

Usando algumas propriedades do produto tensorial (vide Observação 7), temos

$$
\begin{aligned}
G(\overline{B}) &= (\overline{B}^{(0)} \otimes_{\overline{K}} E^{(0)}{}_{\overline{K}}) \oplus (\overline{B}^{(1)} \otimes_{\overline{K}} E^{(1)}{}_{\overline{K}}) \\
&= [(B^{(0)} \otimes_K \overline{K}) \otimes_{\overline{K}} (E^{(0)} \otimes_K \overline{K})] \oplus [(B^{(1)} \otimes_K \overline{K}) \otimes_{\overline{K}} (E^{(1)} \otimes_K \overline{K})] \\
&\overset{i)}{\simeq} [(B^{(0)} \otimes_K \overline{K}) \otimes_{\overline{K}} (\overline{K} \otimes_K E^{(0)})] \oplus [(B^{(1)} \otimes_K \overline{K}) \otimes_{\overline{K}} (\overline{K} \otimes_K E^{(1)})] \\
&\overset{ii)}{\simeq} [B^{(0)} \otimes_K (\overline{K} \otimes_{\overline{K}} \overline{K}) \otimes_K E^{(0)}] \oplus [B^{(1)} \otimes_K (\overline{K} \otimes_{\overline{K}} \overline{K}) \otimes_K E^{(1)}] \\
&\overset{iii)}{\simeq} [B^{(0)} \otimes_K \overline{K} \otimes_K E^{(0)}] \oplus [B^{(1)} \otimes_K \overline{K} \otimes_K E^{(1)}] \\
&\overset{i)}{\simeq} [B^{(0)} \otimes_K E^{(0)} \otimes_K \overline{K}] \oplus [B^{(1)} \otimes_K E^{(1)} \otimes_K \overline{K}] \\
&\overset{v)}{\simeq} [(B^{(0)} \otimes_K E^{(0)}) \otimes_K \overline{K}] \oplus [(B^{(1)} \otimes_K E^{(1)}) \otimes_K \overline{K}] \\
&\overset{iv)}{\simeq} [(B^{(0)} \otimes_K E^{(0)}) \oplus (B^{(1)} \otimes_K E^{(1)})] \otimes_K \overline{K} = G(B) \otimes_K \overline{K}.
\end{aligned}
$$

Proposição 6. *Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra de dimensão finita tal que $G(A)$ satisfaça uma identidade standard. Então, o ideal gerado por $A^{(1)}$ é nilpotente.*

Demonstração. Consideremos $\overline{K}$ o fecho algébrico de K e $\overline{A} = A \otimes_K \overline{K}$. Observemos que a $\overline{K}$-álgebra $\overline{A}$ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural e que $G(\overline{A}) \simeq G(A) \otimes_K \overline{K}$, conforme a observação anterior. Logo, se $G(A)$ satisfaz uma identidade standard, então $G(\overline{A})$ também satisfaz. Por outro lado, se o ideal de $\overline{A}$ gerado por $\overline{A}^{(1)}$ for nilpotente, então o ideal de A gerado por $A^{(1)}$ também será nilpotente. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que K é algebricamente fechado.

Seja J o radical de Jacobson de A. Uma vez que J é um ideal nilpotente de A (vide Observação 8), para obtermos o resultado desejado é suficiente garantir que $A^{(1)}$ está contido em J. Suponhamos pois, por contradição, que $A^{(1)}$ não esteja contido em J. Como J é um ideal homogêneo de A, A/J tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida, a saber,

$$
\left(\frac{A}{J}\right)^{(0)} = \frac{A^{(0)} + J}{J} \quad \text{e} \quad \left(\frac{A}{J}\right)^{(1)} = \frac{A^{(1)} + J}{J}.
$$

Assim, uma vez que $A^{(1)} \not\subseteq J$, temos que $(A/J)^{(1)} \neq 0$. Ademais, segue do Lema 1 que $G(A/J)$ satisfaz uma identidade standard.

Como A/J é semissimples (vide Observação 10), pelos Teoremas 3 e 4 temos que $A/J = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$, onde cada B_i é uma subálgebra homogênea de A/J e, sendo simples como superálgebra, isomorfa a $M_{k,l}(K)$ ou a $M_k(K \oplus Kc)$, com $c^2 = 1$, $k \geq 1$ e $l \geq 0$. Considerando $B_i = B_i^{(0)} \oplus B_i^{(1)}$ (a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida) e observando que $(A/J)^{(1)} \neq 0$, devemos ter $B_j^{(1)} \neq 0$

para algum $j = 1, \cdots, m$, donde B_j é isomorfa a $M_{k,l}(K)$, com $l \geq 1$, ou a $M_k(K \oplus Kc)$, lembrando que $M_{k,0}(K)$ tem $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial.

Assim, segue do Lema 2 que $G(B_j)$, e portanto $G(A/J)$, contém uma subálgebra isomorfa a E, o que contradiz o Exemplo 18. Logo, devemos ter $A^{(1)} \subseteq J$, e o resultado segue. $\square$

Utilizemos agora a proposição anterior para mostrar que uma variedade satisfazer uma identidade standard é suficiente para garantir que ela é gerada por uma álgebra de dimensão finita. Isto é o próximo teorema.

Teorema 14. *Se uma variedade $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard, então existe uma álgebra A de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = var(A)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade satisfazendo uma identidade standard. Sabemos pelo Teorema 9, que $\mathcal{V} = var(G(B))$, onde $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ é uma superálgebra de dimensão finita.

Observemos agora (vide Proposição 6) que a componente $B^{(1)}$ gera um ideal nilpotente de B. Assim, segue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que qualquer produto de elementos de B contendo pelo menos m fatores em $B^{(1)}$ resulta em zero.

Como a dimensão de B é finita, fixemos uma base $\beta = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ de $B^{(1)}$. Tomando $t = max\{k, m\}$, consideremos $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ subálgebra de $G(B)$, onde $A^{(0)} = B^{(0)} \otimes E_t^{(0)}$, $A^{(1)} = B^{(1)} \otimes E_t^{(1)}$ e E_t denota a álgebra de Grassmann de dimensão finita 2^t. Uma vez que as dimensões de B e E_t são finitas, segue que A também possui dimensão finita.

Mostremos que $\mathcal{V} = var(A)$. De fato, sendo A uma subálgebra de $G(B)$ é imediato que A satisfaz todas as identidades de $G(B)$. Reciprocamente, seja $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ um polinômio multilinear que não seja uma identidade para $\mathcal{V} = var(G(B))$. Então escolhamos elementos $b_1, b_2, \cdots, b_s \in B^{(0)}$, $g_1, g_2, \cdots, g_s \in E^{(0)}$, $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{n-s}} \in \beta$ e $h_1, h_2, \cdots, h_{n-s} \in E^{(1)}$ tais que $f(b_1 \otimes g_1, \cdots, b_s \otimes g_s, a_{i_1} \otimes h_1, \cdots, a_{i_{n-s}} \otimes h_{n-s}) \neq 0$ em $G(B)$. Observemos que a existência de elementos nessas condições é garantida pelo fato de que o conjunto $\{b \otimes x \mid b \in B^{(0)}\ ,\ x \in E^{(0)}\} \cup \{a_i \otimes y_i \mid 1 \leq i \leq k\ ,\ y_i \in E^{(1)}\}$ gera $G(B)$ como espaço vetorial.

Por outro lado, das relações existentes entre os elementos de $E^{(0)} \cap E^{(1)}$ conforme visto no Exemplo 4), segue que o produto dos elementos $g_1, g_2, \cdots, g_s, h_1, h_2, \cdots, h_{n-s}$, ordenados de qualquer maneira, a menos de sinal coincide com o produto $g_1 g_2 \cdots g_s h_1 h_2 \cdots h_{n-s}$. Assim, devemos ter

$$f(b_1 \otimes g_1, \cdots, a_{i_{n-s}} \otimes h_{n-s}) = f_1(b_1, \cdots, b_s, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-s}}) \otimes g_1 \cdots g_s h_1 \cdots h_{n-s},$$

para algum polinômio multilinear f_1. Como $f(b_1 \otimes g_1, \cdots, a_{i_{n-s}} \otimes h_{n-s}) \neq 0$, temos que $f_1(b_1, \cdots, b_s, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-s}})$ e $g_1 \cdots g_s h_1 \cdots h_{n-s}$ são não nulos em

B e E, respectivamente. Ademais, uma vez que $t = max\{k, m\}$ e qualquer produto de elementos de B contendo pelo menos m fatores em $B^{(1)}$ resulta em zero, concluímos que $n - s < m \leq t$. Por fim, notemos que sendo 1 a unidade de E, temos

$$\begin{aligned} 0 &\neq f_1(b_1, \cdots, b_s, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-s}}) \otimes e_1 \cdots e_{n-s} \\ &= f(b_1 \otimes 1, \cdots, b_s \otimes 1, a_{i_1} \otimes e_1, \cdots, a_{i_{n-s}} \otimes e_{n-s}). \end{aligned}$$

Portanto, f não é uma identidade para A, pois $1 \in E_t^{(0)}$ e $e_1, \cdots, e_{n-s} \in E_t^{(1)}$, uma vez que $n - s < t$. Logo, as identidades de A são as mesmas identidades de $\mathcal{V}$ e temos o resultado. $\square$

Assim, combinando a equivalência mostrada no Teorema 13 e o resultado anterior, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2. *Se uma variedade $\mathcal{V}$ é tal que $E \notin \mathcal{V}$, então existe uma álgebra A de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = var(A)$.*

Embora a versão que apresentamos do Teorema 14 seja suficiente para os objetivos dessa dissertação, destacamos, a título de curiosidade, que existe uma versão mais geral deste teorema, a qual apresentaremos a seguir. Para a demonstração desse teorema, indicamos a referência [9], capítulo 7.

Teorema 15. *Para uma variedade $\mathcal{V}$ as seguintes condições são equivalentes:*
i) $\mathcal{V} = var(A)$, para alguma álgebra A de dimensão finita;
ii) $\mathcal{V} = var(A)$, para alguma álgebra A finitamente gerada;
iii) $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard;
iv) $E \notin \mathcal{V}$.

Observação 17. *Consideremos A uma K-álgebra, F uma extensão de K e $\overline{A} = A \otimes_K F$ a extensão de escalares de A. Como K-álgebras, A e $\overline{A}$ têm as mesmas identidades polinomiais (veja a Observação 15). Logo, $\overline{A} \in var(A)$.*

Seja X uma K-álgebra. Considerando $\overline{X} = X \otimes_K F$ como F-álgebra e supondo que $\overline{A}$ tenha uma F-subálgebra D isomorfa a $\overline{X}$, temos que D é uma K-subálgebra (basta restringir os escalares para K) de $\overline{A}$, donde $D \in var(A)$. Ademais, sendo $\varphi : \overline{X} \longrightarrow D$ um F-isomorfismo, particularmente φ é um K-isomorfismo. Logo, $X \otimes_K 1_F$ e $\varphi(X \otimes_K 1_F)$ são K-álgebras isomorfas e $\varphi(X \otimes_K 1_F)$ é uma K-subálgebra de D. Logo, $X \otimes_K 1_F \in var(A)$, e daí, como X e $X \otimes_K 1_F$ são isomorfas como K-álgebras, concluímos que $X \in var(A)$.

De posse desses resultados, passemos à demonstração da caracterização das variedades de expoente 1, que é o principal objetivo deste capítulo.

Teorema 16. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade. Então, $exp(\mathcal{V}) \leq 1$ se, e somente se, $E, UT_2(K) \notin \mathcal{V}$.*

Demonstração. Sabemos que $exp(E) = exp(UT_2(K)) = 2$ (vide Exemplo 25). Assim, é imediato, pela Proposição 5, que se $exp(\mathcal{V}) \leq 1$, então $E, UT_2(K) \notin \mathcal{V}$.

Reciprocamente, suponhamos que $E, UT_2(K) \notin \mathcal{V}$. Daí, uma vez que $E \notin \mathcal{V}$, pelo Corolário 2, existe uma álgebra de dimensão finita A tal que $var(A) = \mathcal{V}$. Assim, utilizando a Observação 17 e observando que $U_2(\overline{K}) \simeq U_2(K) \otimes_K \overline{K}$ (onde $\overline{K}$ denota o fecho algébrico de K), podemos concluir que $\overline{A} = A \otimes_K \overline{K}$ (como $\overline{K}$-álgebra) não possui subálgebra isomorfa a $U_2(\overline{K})$. Ademais, conforme visto na Observação 15, extensões de escalares não afetam as codimensões e portanto o expoente de uma álgebra. Logo, $exp(\overline{A}) = exp(A)$, e assim podemos supor, sem perda de generalidade, que K é um corpo algebricamente fechado.

Utilizando a decomposição de Wedderburn-Malcev para A (veja o Corolário 1), podemos escrever $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m + J$, onde $A_1, \cdots, A_m$ são subálgebras simples e J é o radical de Jacobson de A. Neste caso, como cada A_i é uma álgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, temos que cada A_i será isomorfa a uma álgebra de matrizes (veja a Observação 9), digamos $A_i \simeq M_{n_i}(K)$, com $n_i \in \mathbb{N}$. Observemos agora que se para algum $i = 1, 2, \cdots, m$ tivermos $n_i \geq 2$, então $M_{n_i}(K)$ (e consequentemente A_i) irá conter uma subálgebra isomorfa a $UT_2(K)$, o que é uma contradição, visto que $A_i \in \mathcal{V}$. Assim, devemos ter $n_i = 1$ para todo $i = 1, 2, \cdots, m$, ou seja, $A_1 \simeq A_2 \simeq \cdots \simeq A_m \simeq K$.

Recordemos que, conforme comentamos no Teorema 11, o expoente de $\mathcal{V}$ é dado como sendo o máximo das dimensões das subálgebras semissimples de A da forma $A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_r}$ com $\{i_1, \cdots, i_r\} \subseteq \{1, \cdots, m\}$ tais que $A_{i_1} J \cdots J A_{i_r} \neq 0$. Assim, para obtermos o resultado é suficiente mostrarmos que $A_i J A_k = 0$, para quaisquer $i, j = 1, \cdots, m$ e $i \neq j$.

Suponhamos, por contradição, que existam $A_i \neq A_k$ tais que $A_i J A_k \neq 0$ e consideremos 1_1 e 1_2 as unidades de A_i e de A_k, respectivamente. Uma vez que $A_i \simeq K \simeq A_k$ e $A_i J A_k \neq 0$, existem $\alpha, \beta \in K$ não nulos e $j_0 \in J$ tais que

$$(\alpha\beta) 1_1 j_0 1_2 = (\alpha 1_1) j_0 (\beta 1_2) \neq 0,$$

donde, como α e β são não nulos, concluímos que $1_1 j_0 1_2 \neq 0$.

Observemos também que, na decomposição de Wedderburn-Malcev, as subálgebras A_i e A_k são ideais de $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$, e como a soma é direta temos $A_i A_k = A_k A_i = \{0\}$. Particularmente temos $1_1 1_2 = 1_2 1_1 = 0$, e consequentemente, considerando $u_{11} = 1_1$, $u_{22} = 1_2$ e $u_{12} = 1_1 j_0 1_2$, é fácil observar que

$$u_{ij} u_{lk} = \begin{cases} u_{ik} & , \text{se } j = l. \\ 0 & , \text{se } j \neq l. \end{cases} \tag{2.0.6}$$

Daí, supondo $\lambda_1, \cdots, \lambda_3 \in K$ tais que

$$\lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{22} + \lambda_3 u_{12} = 0 \tag{2.0.7}$$

devemos ter

$$\begin{aligned} 0 = 0u_{11} &= (\lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{22} + \lambda_3 u_{12})u_{11} \\ &= \lambda_1 u_{11}u_{11} + \lambda_2 u_{22}u_{11} + \lambda_3 u_{12}u_{11} \\ &= \lambda_1 u_{11}. \end{aligned}$$

Daí, $\lambda_1 = 0$. Multiplicando agora a equação (2.0.7) por u_{22} à esquerda, podemos concluir que $0 = \lambda_2 u_{22}$, o que implica em $\lambda_2 = 0$. Assim, a equação (2.0.7) é reduzida para $0 = \lambda_3 u_{12}$, o que acarreta $\lambda_3 = 0$. Logo, o conjunto $\{u_{11}, u_{22}, u_{12}\}$ é linearmente independente . Ademais, segue de (2.0.6), que o subespaço $D = \langle u_{11}, u_{22}, u_{12}\rangle$ é multiplicativamente fechado, e então D é uma subálgebra de A.

Por fim, consideremos $T : D \longrightarrow UT_2(K)$ a transformação linear tal que $T(u_{ij}) = E_{ij}$. Observemos que, como T é linear e $\{E_{11}, E_{22}, E_{12}\} \subset ImT$, temos T sobrejetiva. Assim, do Teorema do Núcleo e da Imagem segue que

$$\begin{aligned} 3 &= dim\ D \\ &= dim\ Ker\ T + dim\ Im\ T \\ &= dim\ Ker\ T + 3\ . \end{aligned}$$

Logo, $dim\ Ker\ T = 0$, e consequentemente T é injetiva. Portanto, T é um isomorfismo de espaços vetoriais. Ademais, é imediato da relação (2.0.6) que T é um homomorfismo de álgebras (veja no Exemplo 3 o produto $E_{ij}E_{kl}$). Logo, $D \simeq UT_2(K)$, o que é um absurdo, pois $D \in \mathcal{V}$ e $UT_2(K) \notin \mathcal{V}$. Portanto, $A_iJA_k = 0$, para quaisquer $i, k = 1, \cdots, m$ e $i \neq k$. O que nos permite concluir que $exp(\mathcal{V}) \leq 1$, e temos o resultado. □

Concluímos este capítulo juntando o teorema anterior e o Exemplo 24 para concluir o corolário a seguir .

Corolário 3. *Uma variedade $\mathcal{V}$ tem expoente igual a 1 se, e somente se, $E, UT_2(K) \notin \mathcal{V}$ e $\mathcal{V}$ contém alguma álgebra não nilpotente.*

Capítulo 3

Variedades de Álgebras Associativas de Expoente 2

Como mostramos no capítulo anterior, em 1979 Kemer caracterizou as variedades de expoente 1 em termos de álgebras que essas variedades não podem conter. Posteriormente, no ano de 2000, os matemáticos Giambruno e Zaicev, fazendo uso do Teorema 12, conseguiram um resultado, semelhante ao obtido por Kemer, para variedades de expoente 2, ou seja, eles conseguiram caracterizar as variedades de expoente 2 em termos de álgebras que não podem pertencer a essas variedades.

Neste capítulo iremos mostrar detalhadamente esta classificação para as variedades de expoente 2, assim como apresentaremos uma demonstração da mesma. Para este fim, iremos considerar inicialmente a álgebra de Grassmann E munida da sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural (veja Exemplo 11), ou seja, $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$, onde $E^{(0)}$ e $E^{(1)}$ denotam os espaços vetoriais gerados pelos produtos de e_i's de tamanho par e ímpar, respectivamente.

Consideremos também as seguintes álgebras sobre K, que será um corpo de característica zero ao longo de todo este capítulo:

$$1)\ A_1 = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E^{(0)} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \Big/ x, y \in E\ ,\ z \in E^{(0)} \right\};$$

$$2)\ A_2 = \begin{pmatrix} E^{(0)} & E \\ 0 & E \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \Big/ y, z \in E\ ,\ x \in E^{(0)} \right\};$$

3) $A_3 = UT_3(K)$, a álgebra das matrizes 3×3 triangulares superiores sobre K;

4) $A_4 = M_2(K)$, a álgebra das matrizes 2×2 sobre K;

5) $A_5 = M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ a, d \in E^{(0)} \ , \ b, c \in E^{(1)} \right\}$.

A caracterização das variedades de expoente maior que 2 será dada pelo seguinte teorema:

Teorema 17. *Sejam K um corpo de característica 0 e $\mathcal{V}$ uma variedade de K-álgebras associativas. Então, $exp(\mathcal{V}) > 2$ se, e somente se, $A_i \in \mathcal{V}$ para algum $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

Assim, temos que $exp(\mathcal{V}) \leq 2$ se, e somente se, A_1, A_2, A_3, A_4, $A_5 \notin \mathcal{V}$. Além disso, juntando-se este teorema com o Teorema 16 teremos a caracterização das variedades de expoente 2.

Mostraremos também que, no sentido do Teorema 17 a lista anterior de álgebras não pode ser reduzida.

Portanto, considerando $\mathcal{V}_i = var(A_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, vamos concluir que $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$, $\mathcal{V}_4$ e $\mathcal{V}_5$ são as únicas variedades minimais de expoente maior que 2, no sentido de que, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos $exp(\mathcal{V}_i) > 2$ e para toda subvariedade própria $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}_i$, vale $exp(\mathcal{W}) \leq 2$.

Antes de demonstrarmos o Teorema 17, iremos calcular os expoentes das variedades $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3, \mathcal{V}_4, \mathcal{V}_5$.

Proposição 7. *Considere a subálgebra de $M_3(K)$*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \Big/ a, b, c, d, e \in K \right\}$$

munida da sua $\mathbb{Z}_2$-graduação $D = D^{(0)} \oplus D^{(1)}$, onde

$$D^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \Big/ x, y, z \in K \right\} \text{ e } D^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & -r & -s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ r, s \in K \right\}.$$

Então, $G(D) \simeq A_1$ e $exp(A_1) = exp(G(D)) = 3$.

Demonstração. Inicialmente, calculemos $G(D)$. Para tal, consideremos a subálgebra X de $M_3(E)$, onde

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a+r & 0 & b+s \\ 0 & a-r & a-s \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Big/ a, b, c \in E^{(0)} \ , r, s \in E^{(1)} \right\},$$

o subespaço

$$X_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Big/ \ a, b, c \in E^{(0)} \right\}$$

e a aplicação

$$\begin{aligned} f_0 : D^{(0)} \times E^{(0)} &\longrightarrow X_0 \\ \left(\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}, e_0 \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} xe_0 & 0 & ye_0 \\ 0 & xe_0 & ye_0 \\ 0 & 0 & ze_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, uma vez que f é bilinear, pela propriedade universal (vide Exemplo 7), existe uma única transformação linear $\varphi_0 : D^{(0)} \otimes E^{(0)} \longrightarrow X_0$ tal que

$$\varphi_0 \left(\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \otimes e_0 \right) = \begin{pmatrix} xe_0 & 0 & ye_0 \\ 0 & xe_0 & ye_0 \\ 0 & 0 & ze_0 \end{pmatrix}.$$

Ademais, definindo

$$\begin{aligned} \psi_0 \ : \ X_0 &\longrightarrow D^{(0)} \otimes E^{(0)} \\ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} &\longmapsto (E_{11} + E_{22}) \otimes a + (E_{13} + E_{23}) \otimes b + E_{33} \otimes c \ , \end{aligned}$$

é fácil ver que ψ_0 é linear. Além disso, para quaisquer $a, b, c, e_0 \in E^{(0)}$, $x, y, z \in K$, temos

$$\varphi_0 \circ \psi_0 \left(\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \varphi_0((E_{11} + E_{22}) \otimes a + (E_{13} + E_{23}) \otimes b + E_{33} \otimes c)$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

e

$$\psi_0 \circ \varphi_0 \left(\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \otimes e_0 \right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi_0 \left(\begin{pmatrix} xe_0 & 0 & ye_0 \\ 0 & xe_0 & ye_0 \\ 0 & 0 & ze_0 \end{pmatrix} \right) \\
&= (E_{11} + E_{22}) \otimes xe_0 + (E_{13} + E_{23}) \otimes ye_0 + E_{33} \otimes ze_0 \\
&= x(E_{11} + E_{22}) \otimes e_0 + y(E_{13} + E_{23}) \otimes e_0 + zE_{33} \otimes e_0 \\
&= \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \otimes e_0 \ .
\end{aligned}
$$

Portanto, φ_0 é um isomorfismo de espaços vetoriais, com $\varphi_0^{-1} = \psi_0$.

Analogamente ao feito para φ_0, considerando o subespaço de X

$$
X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & -x & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ \ x, y \in E^{(1)} \right\},
$$

pela propriedade universal irá existir uma transformação linear

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 : D^{(1)} \otimes E^{(1)} \longrightarrow X_1 \\
&\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & -x & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes e_1 \longmapsto \begin{pmatrix} xe_1 & 0 & ye_1 \\ 0 & -xe_1 & -ye_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Ademais, de modo análogo ao feito acima, mostra-se que φ_1 é um isomorfismo de espaços vetoriais, com inversa

$$
\begin{aligned}
&\psi_1 \ : \ X_1 \longrightarrow D^{(1)} \otimes E^{(1)} \\
&\begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & -r & -s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes r + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes s \ .
\end{aligned}
$$

Observando que $G(D) = (D^{(0)} \otimes E^{(0)}) \oplus (D^{(1)} \otimes E^{(1)})$ e $X = X_0 \oplus X_1$, podemos concluir que $\psi : X \longrightarrow G(D)$ dada por

$$
\psi \begin{pmatrix} a+x & 0 & b+y \\ 0 & a-x & b-y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \psi_0 \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & -x & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= (E_{11}+E_{22}) \otimes a + (E_{13}+E_{23}) \otimes b + E_{33} \otimes c + (E_{11}-E_{22}) \otimes x + (E_{13}-E_{23}) \otimes y.
$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais. Mostremos agora que ψ é na verdade um isomorfismo de álgebras. De fato, dados $a, b, c, d, e, f \in E^{(0)}$ e $x, y, u, v \in E^{(1)}$, temos

$$
\psi \left(\begin{pmatrix} a+x & 0 & b+y \\ 0 & a-x & b-y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d+u & 0 & e+v \\ 0 & d-u & e-v \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \right) =
$$

$$= \psi \begin{pmatrix} (a+x)(d+u) & 0 & (a+x)(e+v)+(b+y)f \\ 0 & (a-x)(d-u) & (a-x)(e-v)+(b-y)f \\ 0 & 0 & cf \end{pmatrix}$$

$$= \psi \begin{pmatrix} ad+xu+au+xd & 0 & ae+xv+bf+av+xe+yf \\ 0 & ad+xu-au-xd & ae+xv+bf-av-xe-yf \\ 0 & 0 & cf \end{pmatrix}$$

$$= (E_{11}+E_{22}) \otimes (ad+xu) + (E_{13}+E_{23}) \otimes (ae+xv+bf) + E_{33} \otimes cf +$$
$$+ (E_{11}-E_{22}) \otimes (au+xd) + (E_{13}-E_{23}) \otimes (av+xe+yf)$$
$$= [(E_{11}+E_{22})\otimes a + (E_{13}+E_{23})\otimes b + E_{33}\otimes c + (E_{11}-E_{22})\otimes x + (E_{13}-E_{23})\otimes y] \cdot$$
$$[(E_{11}+E_{22})\otimes d + (E_{13}+E_{23})\otimes e + E_{33}\otimes f + (E_{11}-E_{22})\otimes u + (E_{13}-E_{23})\otimes v]$$
$$= \psi \begin{pmatrix} a+x & 0 & b+y \\ 0 & a-x & b-y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \psi \begin{pmatrix} d+u & 0 & e+v \\ 0 & d-u & e-v \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

E consequentemente,

$$G(D) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a+r & 0 & b+s \\ 0 & a-r & b-s \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Bigg/ a,b,c \in E^{(0)} \text{ e } r,s \in E^{(1)} \right\}.$$

Por fim, mostraremos que $G(D) \simeq A_1$. Para tal, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \theta \ : \ X &\longrightarrow A_1 \\ \begin{pmatrix} a+r & 0 & b+s \\ 0 & a-r & b-s \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a-r & b-s \\ 0 & c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e observemos que θ é linear. Além disso, como $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$, é imediato que θ é sobrejetiva. Supondo agora $a,b,c \in E^{(0)}$ e $r,s \in E^{(1)}$ tais que

$$\theta \begin{pmatrix} a+r & 0 & b+s \\ 0 & a-r & b-s \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

devemos ter $c = 0$, $a = r$, e $b = s$, donde segue que $a = b = c = r = s = 0$, uma vez que $E^{(0)} \cap E^{(1)} = \{0\}$. Logo, θ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Ademais, dados $a,b,c,d,e,f \in E^{(0)}$ e $r,s,u,v \in E^{(1)}$, temos

$$\theta \left(\begin{pmatrix} a+r & 0 & b+s \\ 0 & a-r & b-s \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d+u & 0 & e+v \\ 0 & d-u & e-v \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \theta\left(\begin{pmatrix}(a+r)(d+u) & 0 & (a+r)(e+v)+(b+s)f\\ 0 & (a-r)(d-u) & (a-r)(e-v)+(b-s)f\\ 0 & 0 & cf\end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix}(a-r)(d-u) & (a-r)(e-v)+(b-s)f\\ 0 & cf\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}(a-r) & (b-s)\\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(d-u) & (e-v)\\ 0 & f\end{pmatrix}$$
$$= \theta\left(\begin{pmatrix}a+r & 0 & b+s\\ 0 & a-r & b-s\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\right)\theta\left(\begin{pmatrix}d+u & 0 & e+v\\ 0 & d-u & e-v\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}\right).$$

Isto garante que ψ é um isomorfismo de álgebras, e consequentemente $A_1 \simeq X \simeq G(D)$ e $exp(A_1) = exp(G(D))$.

Calculemos agora $exp(G(D))$, e para tal observemos que considerando

$$C_1 = \begin{pmatrix}K & 0 & 0\\ 0 & K & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \langle E_{11}+E_{22}, E_{11}-E_{22}\rangle$$

munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação $C_1 = C_1^{(0)} \oplus C_1^{(1)}$, onde

$$C_1^{(0)} = \langle E_{11}+E_{22}\rangle \quad \text{e} \quad C_1^{(1)} = \langle E_{11}-E_{22}\rangle$$

temos que C_1 é uma superálgebra simples e uma subálgebra homogênea de D. Considerando agora

$$C_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & K\end{pmatrix} = \langle E_{33}\rangle$$

munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação $C_2 = C_2^{(0)} \oplus C_2^{(1)}$, onde

$$C_2^{(0)} = \langle E_{33}\rangle \quad \text{e} \quad C_2^{(1)} = \{0\}$$

nota-se facilmente que C_2 é uma superálgebra simples uma subálgebra homogênea de D. Por fim, observemos que

$$J = J(D) = \begin{pmatrix}0 & 0 & K\\ 0 & 0 & K\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Assim, $D = (C_1 \oplus C_2) + J$, com $C_1JC_2 \neq 0$, pois $E_{13} = E_{11}E_{13}E_{33} \in C_1JC_2$. Ademais, uma vez que $J^2 = \{0\}$, segue do Teorema 12 que $exp(A_1) = exp(G(D)) = dim(C_1 \oplus C_2) = 3$

□

Proposição 8. *Considere a subálgebra de* $M_3(K)$

$$D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \Big/ a, b, c, d, e \in K \right\}$$

munida da sua $\mathbb{Z}_2$*-graduação* $D_2 = D_2^{(0)} \oplus D_2^{(1)}$, *onde*

$$D_2^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} z & y & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \Big/ x, y, z \in K \right\} \text{ e } D_2^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & r & -r \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{pmatrix} \Big/ r, s \in K \right\}.$$

Então, $G(D_2) \simeq A_2$ *e* $exp(A_2) = exp(G(D_2)) = 3$.

Demonstração. Inicialmente, calculemos $G(D_2)$. Para tal, consideremos a subálgebra X de $M_3(E)$, onde

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+r & b-r \\ 0 & c+s & 0 \\ 0 & 0 & c-s \end{pmatrix} \Big/ a, b, c \in E^{(0)}, r, s \in E^{(1)} \right\},$$

o subespaço

$$X_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Big/ a, b, c \in E^{(0)} \right\}$$

e a aplicação

$$\begin{aligned} f_0 : D_2^{(0)} \times E^{(0)} &\longrightarrow X_0 \\ \left(\begin{pmatrix} z & y & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, e_0 \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} ze_0 & ye_0 & ye_0 \\ 0 & xe_0 & 0 \\ 0 & 0 & xe_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, uma vez que f é bilinear, pela propriedade universal (vide Exemplo 7), existe uma única transformação linear $\varphi_0 : D_2^{(0)} \otimes E^{(0)} \longrightarrow X_0$ tal que

$$\varphi_0 \left(\begin{pmatrix} z & y & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \otimes e_0 \right) = \begin{pmatrix} ze_0 & ye_0 & ye_0 \\ 0 & xe_0 & 0 \\ 0 & 0 & xe_0 \end{pmatrix}.$$

Ademais, definindo

$$\begin{aligned} \psi_0 \ : \ X_0 &\longrightarrow D_2^{(0)} \otimes E^{(0)} \\ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} &\longmapsto E_{11} \otimes a + (E_{12} + E_{13}) \otimes b + (E_{22} + E_{33}) \otimes c \ , \end{aligned}$$

é fácil ver que ψ_0 é linear. Além disso, para quaisquer $a, b, c, e_0 \in E^{(0)}$, $x, y, z \in K$, temos

$$\varphi_0 \circ \psi_0 \left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \varphi_0(E_{11} \otimes a + (E_{12} + E_{13}) \otimes b + (E_{22} + E_{33}) \otimes c$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

e

$$\psi_0 \circ \varphi_0 \left(\begin{pmatrix} z & y & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \otimes e_0 \right) =$$

$$= \psi_0 \left(\begin{pmatrix} ze_0 & ye_0 & ye_0 \\ 0 & xe_0 & 0 \\ 0 & 0 & xe_0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= E_{11} \otimes ze_0 + (E_{12} + E_{13}) \otimes ye_0 + (E_{22} + E_{33}) \otimes xe_0$$

$$= zE_{11} \otimes e_0 + y(E_{12} + E_{13}) \otimes e_0 + x(E_{22} + E_{33}) \otimes e_0$$

$$= \begin{pmatrix} z & y & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \otimes e_0 \ .$$

Portanto, φ_0 é um isomorfismo de espaços vetoriais, com $\varphi_0^{-1} = \psi_0$.

Analogamente ao feito para φ_0, considerando o subespaço de X

$$X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{pmatrix} \Big/ \ x, y \in E^{(1)} \right\},$$

pela propriedade universal irá existir uma transformação linear

$$\begin{aligned} \varphi_1 : D_2^{(1)} \otimes E^{(1)} &\longrightarrow X_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{pmatrix} \otimes e_1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & xe_1 & -xe_1 \\ 0 & ye_1 & 0 \\ 0 & 0 & -ye_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ademais, de modo análogo ao feito acima, mostra-se que φ_1 é um isomorfismo de espaços vetoriais, com inversa

$$\begin{aligned} \psi_1 \ :\ & X_1 \longrightarrow D_2^{(1)} \otimes E^{(1)} \\ & \begin{pmatrix} 0 & r & -r \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes r + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes s\ . \end{aligned}$$

Observando que $G(D_2) = (D_2^{(0)} \otimes E^{(0)}) \oplus (D_2^{(1)} \otimes E^{(1)})$ e $X = X_0 \oplus X_1$, análogo ao feito na Proposição 7, podemos concluir que $\psi : X \longrightarrow G(D)$ dada por

$$\psi \begin{pmatrix} a & b+x & b-x \\ 0 & c+y & 0 \\ 0 & 0 & c-y \end{pmatrix} = \psi_0 \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{pmatrix}$$

$$= E_{11} \otimes a + (E_{12} + E_{13}) \otimes b + (E_{22} + E_{33}) \otimes c + (E_{12} - E_{13}) \otimes x + (E_{22} - E_{33}) \otimes y.$$

é um isomorfismo de álgebras.

Por fim, mostraremos que $G(D_2) \simeq A_2$. Para tal, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \theta \ :\ & X \longrightarrow A_2 \\ & \begin{pmatrix} a & b+r & b-r \\ 0 & c+s & 0 \\ 0 & 0 & c-s \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b-r \\ 0 & c-s \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e observemos que θ é linear. Além disso, como $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$, é imediato que θ é sobrejetiva. Supondo agora $a, b, c \in E^{(0)}$ e $r, s \in E^{(1)}$, tais que

$$\theta \begin{pmatrix} a & b+r & b-r \\ 0 & c+s & 0 \\ 0 & 0 & c-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

devemos ter $a = 0$, $b = r$, e $c = s$, donde segue que $a = b = c = r = s = 0$, uma vez que $E^{(0)} \cap E^{(1)} = \{0\}$. Logo, θ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Ademais, dados $a, b, c, d, e, f \in E^{(0)}$ e $r, s, u, v \in E^{(1)}$, temos

$$\theta \left(\begin{pmatrix} a & b+r & b-r \\ 0 & c+s & 0 \\ 0 & 0 & c-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e+u & e-u \\ 0 & f+v & 0 \\ 0 & 0 & f-v \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \theta \left(\begin{pmatrix} ad & a(e+u) + (b+r)(f+v) & a(e-u) + (b-r)(f-v) \\ 0 & (c+s)(f+v) & 0 \\ 0 & 0 & (c-s)(f-v) \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} ad & a(e-u)+(b-r)(f-v) \\ 0 & (c-s)(f-v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b-r \\ 0 & c-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e-u \\ 0 & f-v \end{pmatrix}$$

$$= \theta\left(\begin{pmatrix} a & b+r & b-r \\ 0 & c+s & 0 \\ 0 & 0 & c-s \end{pmatrix}\right) \theta\left(\begin{pmatrix} d & e+u & e-u \\ 0 & f+v & 0 \\ 0 & 0 & f-v \end{pmatrix}\right).$$

Isto garante que θ é um isomorfismo de álgebras, e consequentemente $A_2 \simeq X \simeq G(D_2)$ e $exp(A_2) = exp(G(D_2))$.

Calculemos agora $exp(G(D_2))$, e para tal observemos que considerando

$$C_1 = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle E_{11} \rangle$$

munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação $C_1 = C_1^{(0)} \oplus C_1^{(1)}$, onde

$$C_1^{(0)} = \langle E_{11} \rangle \ \text{ e } \ C_1^{(1)} = \{0\}$$

nota-se facilmente que C_1 é uma superálgebra simples e uma subálgebra homogênea de D_2.

Considerando agora

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = \langle E_{22} + E_{33}, E_{22} - E_{33} \rangle$$

munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação $C_2 = C_2^{(0)} \oplus C_2^{(1)}$, onde

$$C_2^{(0)} = \langle E_{22} + E_{33} \rangle \ \text{ e } \ C_2^{(1)} = \langle E_{22} - E_{33} \rangle$$

temos que C_2 é uma superálgebra simples e uma subálgebra homogênea de D_2.

Por fim, observemos que

$$J = J(D_2) = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, $D_2 = (C_1 \oplus C_2) + J$, com $C_1 J C_2 \neq 0$, pois $E_{22} = E_{11}E_{12}E_{22} \in C_1 J C_2$. Ademais, uma vez que $J^2 = \{0\}$, segue do Teorema 12 que $exp(A_2) = exp(G(D_2)) = dim(C_1 \oplus C_2) = 3$

□

Proposição 9. *Sendo $UT_3(K)$ a álgebra das matrizes triangulas superiores de ordem 3, temos $exp(UT_3(K)) = 3$.*

Demonstração. Inicialmente obersevemos que $UT_3(K) = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 + J$, com $B_i = \langle E_{ii} \rangle$ para $i = 1, 2, 3$ e $J = J(UT_3(K))$ dado por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ x, y, z \in K \right\}.$$

Observemos que $B_i \simeq K$ para todo $i = 1, 2, 3$, e consequentemente B_i é simples. Além disso, observemos que $E_{33} = E_{11}E_{12}E_{22}E_{23}E_{33} \in B_1JB_2JB_3$, e portanto $B_1JB_2JB_3 \neq \{0\}$. Assim uma vez que $J^3 = \{0\}$, temos, pelo Teorema 11, que $exp(UT_3(K)) = dim(B_1 \oplus B_2 \oplus B_3) = 3$. □

Para cálculo do expoente de $\mathcal{V}_4$ e $\mathcal{V}_5$, faremos uso do próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [9].

Teorema 18. *Para quaisquer $n, l, k \in \mathbb{N}$, sendo E a álgebra de Grasmmann, temos $exp(M_n(K)) = n^2$ e $exp(M_{l,k}(E)) = (l + k)^2$*

Logo, pelo teorema anterior, temos $exp(M_2(K)) = 4 = exp(M_{1,1}(E))$.

Passemos então à demonstração do Teorema 17.

Demonstração. Suponhamos $exp(\mathcal{V}) > 2$. Conforme visto no Teorema 9, existe uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ tal que $\mathcal{V} = var(G(B))$, onde $G(B)$ é a envoltória de Grassmann de B. Além disso, pela decomposição obtida no Teorema 3, podemos considerar $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k + J$, onde $k \in \mathbb{N}$, J é o radical de Jacobson de B e $B_1, B_2, \cdots, B_k$ são subálgebras de B homogêneas com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação, que são simples como superálgebras. Pela Observação 11, temos $B_iB_j = \{0\}$ para $i \neq j$.

Para cada $i = 1, 2, \cdots, k$ consideremos também a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida $B_i = B_i^{(0)} \oplus B_i^{(1)}$. E uma vez que o radical de Jacobson também é homogêneo em relação à $\mathbb{Z}_2$-graduação de B, podemos considerar a sua $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida $J = J^{(0)} \oplus J^{(1)}$.

Considerando agora $\overline{K}$ o fecho algébrico de K e a $\overline{K}$-álgebra $\overline{B} = B \otimes_K \overline{K}$, com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, temos $G(\overline{B}) \simeq G(B) \otimes_K \overline{K}$, de acordo com a Observação 16. Portanto, a n-ésima codimensão de $G(\overline{B})$ sobre $\overline{K}$ coincide com a n-ésima codimensão de $G(B)$ sobre K, para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que uma extensão de escalares não altera as codimensões de uma álgebra (vide Observação 15). Daí, segue que o expoente de $G(\overline{B})$ sobre $\overline{K}$ coincide com o expoente de $G(B)$ sobre K. Agora, de posse do que foi feito na Observação 17, basta mostrar que $G(\overline{B})$ possui alguma subálgebra isomorfa a $\overline{A_i} = A_i \otimes_K \overline{K}$

(a qual é isomorfa à álgebra A_i definida sobre $\overline{K}$) para algum $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Desta forma, podemos assumir que K é um corpo algebricamente fechado.

Voltemos agora a tratar da decomposição de Wedderburn-Malcev de B, mais especificamente das componentes B_i (que são superálgebras simples), presentes na decomposição de B.

Uma vez que cada B_i é uma superálgebra simples de dimensão finita e estamos supondo K algebricamente fechado, pelo Teorema 4 devemos ter B_i isomorfa a uma das seguintes álgebras:

$I)$ $M_{a,b}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \right\}$, onde $a > 0$, $b \geq 0$, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ são matrizes $a \times a, a \times b, b \times a, b \times b$, respectivamente, e $M_{a,b}(K)$ é munida da graduação

$$M_{a,b}^{(0)}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \right\} \ , \ M_{a,b}^{(1)}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

$II)$ $M_N(K \oplus Kc)$, onde $c^2 = 1$, munida da graduação

$$M_N^{(0)}(K) = M_N(K) \ , \ M_N^{(1)}(K) = M_N(K)c \ .$$

Observemos agora que se B contém uma componente simples B_i do tipo I, deve ocorrer umas das seguintes possibilidades: $a \geq 2$, $b \geq 2$ ou a e b ambos menores que 2. Se $a \geq 2$ ou $b \geq 2$, então a componente $B_i^{(0)} \simeq M_{a,b}^{(0)}(K)$ irá conter uma subálgebra A isomorfa a $M_2(K)$. Portanto, uma vez que a unidade de E pertence à componente $E^{(0)}$, a álgebra M, dada por $M = A \otimes_K 1_E$, onde 1_E denota a unidade de E, é uma subálgebra de $B_i^{(0)} \otimes_K E^{(0)}$, que por sua vez é uma subálgebra de $G(B_i)$. Ademais, como $M \simeq A \simeq M_2(K)$, segue que $G(B_i)$, e consequentemente $G(B)$, contém uma subálgebra isomorfa à $M_2(K) = A_4$, e temos o resultado nesse caso.

Tratemos agora do caso $a = b = 1$. Neste caso, temos que $B_i \simeq M_{1,1}(K) = M_2(K)$, com sua $\mathbb{Z}_2$ graduação natural (vide Exemplo 10). Recordemos agora que calculamos $G(M_2(K))$ no Exemplo 14, e assim temos que $G(B_i) \simeq G(M_2(K)) \simeq M_{1,1}(E) = A_5$, donde $G(B)$ conterá uma subálgebra isomorfa a A_5, e o resultado segue.

Consideremos agora o caso em que B contém uma componente simples B_i, do tipo II, com $N \geq 2$. Nestas condições, uma vez que $B_i^{(0)} \simeq M_N(K)$, temos que $B_i^{(0)}$ irá conter uma subálgebra isomorfa à $M_2(K)$. Logo, prosseguindo analogamente, como feito no caso em que $B_i^{(0)} \simeq M_{a,b}^{(0)}$, com $a \geq 2$ ou $b \geq 2$, concluímos que se $N \geq 2$, então $G(B_i)$, e consequentemente $G(B)$, conterá uma subálgebra isomorfa a A_4, e temos o resultado.

Resta agora tratar dos casos em que cada componente simples B_i de B é do tipo I, com $a = 1$ e $b = 0$, ou do tipo II, com $N = 1$. Isto é, trataremos dos casos em que as componentes simples de B são isomorfas às álgebras $M_{1,0}(K) \simeq K$ (com $\mathbb{Z}_2$ graduação trivial) ou $M_1(K) \oplus M_1(K)c \simeq K \oplus Kc$.

Para analisar estes casos, recordemos que conforme comentamos no Teorema 12, o expoente de $\mathcal{V}$ é dado como sendo o máximo das dimensões das subálgebras semissimples de B da forma $B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r}$ tais que $B_{i_1}J \cdots JB_{i_r} \neq 0$, onde J é o radical de Jacobson de B. Assim, uma vez que $exp(\mathcal{V}) > 2$, $dim\ K = 1$ e $dim\ (K \oplus Kc) = 2$, podemos assumir que ocorre uma das seguinte possibilidades:

(1) existem distintos i, l tais que $B_iJB_l \neq 0$, onde $B_i \simeq K \oplus Kc$ e $B_l \simeq K$;

(2) existem distintos i, l tais que $B_iJB_l \neq 0$, onde $B_i \simeq K$ e $B_l \simeq K \oplus Kc$;

(3) existem distintos i, j, l tais que $B_iJB_lJB_m \neq 0$ e $B_i \simeq B_l \simeq B_j \simeq K$;

(4) existem distintos i, l tais que $B_iJB_l \neq 0$, onde $B_i \simeq B_l \simeq K \oplus Kc$.

Suponhamos que ocorra (1), isto é, que existem $i \neq l$ tais que $B_iJB_l \neq 0$, onde $B_i \simeq K \oplus Kc$ e $B_l \simeq K$. Então, existem $a + bc \in B_i$ (com $a, b \in K$ e $c \in B_i$ é tal que $c^2 = 1_{B_i}$), $j \in J$ e $x \in B_l$ tais que $(a + bc)jx \neq 0$. Observe que na expressão $a + bc$, a denota $a1_{B_i}$. Particularmente, sendo 1_3 a unidade de B_l, devemos ter

$$0 \neq (a + bc)jx = (a + bc)j(1_3x) = ((a + bc)j1_3)x\ ,$$

donde $(a + bc)j1_3 \neq 0$.

Recordando agora que $J = J^{(0)} \oplus J^{(1)}$, existem $j_0 \in J^{(0)}$ e $j_1 \in J^{(1)}$, tais que $j = j_0 + j_1$, e assim

$$0 \neq (a + bc)j1_3 = (a + bc)(j_0 + j_1)1_3 = ((a + bc)j_01_3) + ((a + bc)j_11_3),$$

e portanto $(a+bc)j_01_3 \neq 0$ ou $(a+bc)j_11_3 \neq 0$. Mais ainda, se $(a+bc)j_11_3 \neq 0$, como $c^2 = 1_{B_i}$, temos

$$0 \neq (a + bc)j_11_3 = (ac + b)cj_11_3.$$

Portanto, como $c \in B^{(1)}$ e $j_1 \in J^{(1)}$, temos $cj_1 \in J^{(0)}$. Logo, sem perda de generalidade, podemos assumir que existem $(a + bc) \in B_i$ e $j_0 \in J^{(0)}$ tais que $(a + bc)j_01_3 \neq 0$.

Observemos agora que considerando $1 = 1_{B_i}$, temos

$$\begin{aligned} (a+b)\left(\frac{1+c}{2}\right) + (a-b)\left(\frac{1-c}{2}\right) &= \frac{a + ac + b + bc + a - b - ac + bc}{2} \\ &= \frac{2(a+bc)}{2} \\ &= a + bc\ . \end{aligned}$$

Assim, $(a+bc) = (a+b)u_{11} + (a-b)u_{22}$, onde $u_{11} = \frac{1+c}{2}$ e $u_{22} = \frac{1-c}{2}$. Além disso, temos

$$u_{11}u_{11} = \left(\frac{1+c}{2}\right)\left(\frac{1+c}{2}\right) = \frac{1+c+c+c^2}{4} = \frac{2(1+c)}{4} = u_{11}$$

$$u_{22}u_{22} = \left(\frac{1-c}{2}\right)\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{1-c-c+c^2}{4} = \frac{2(1-c)}{4} = u_{22}$$

$$u_{11}u_{22} = \left(\frac{1+c}{2}\right)\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{1+c-c-c^2}{4} = 0 = u_{22}u_{11}$$

Ademais, uma vez que $\{1, c\}$ é uma base para B_i, segue que $\{u_{11}, u_{22}\}$ é linearmente independente. Temos $u_{11} + u_{22} = 1 \in B^{(0)}$ $u_{11} - u_{22} = c \in B^{(1)}$.

Consideremos agora $u_{33} = 1_3$ e observemos que temos $B_iB_l = B_lB_i\{0\}$. Particularmente, $u_{11}u_{33} = u_{33}u_{11} = u_{22}u_{33} = u_{33}u_{22} = 0$. Mais ainda, $\{u_{11}, u_{22}, u_{33}\}$ é linearmente independente, pois $u_{11}, u_{22} \in B_i, u_{33} \in B_l$ e $B_i \cap B_l = \{0\}$.

Tomando $u_{13} = u_{11}j_0u_{33}$ e $u_{23} = u_{22}j_0u_{33}$, é fácil observar que

$$u_{ij}u_{lk} = \begin{cases} u_{ik} & , \text{se } j = l \\ 0 & , \text{se } j \neq l \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Além disso, como $1, 1_3 \in B^{(0)}$ e $c \in B^{(1)}$, temos $u_{13} + u_{23} = 1j_01_3 \in B^{(0)}$ e $u_{13} - u_{23} = cj_01_3 \in B^{(1)}$. Daí, se $u_{13} = 0$, teríamos $u_{23} = 0$, o que nos daria $(a+bc)j_01_3 = a(u_{13} + u_{23}) + b(u_{13} - u_{23}) = 0$, uma contradição. Logo, concluímos que u_{13} e u_{23} devem ser não nulos.

Daí, supondo $\lambda_1, \cdots, \lambda_5 \in K$ tais que

$$\lambda_1u_{11} + \lambda_2u_{22} + \lambda_3u_{33} + \lambda_4u_{13} + \lambda_5u_{23} = 0 \tag{3.0.2}$$

devemos ter

$$\begin{aligned} 0 = 0u_{11} &= (\lambda_1u_{11} + \lambda_2u_{22} + \lambda_3u_{33} + \lambda_4u_{13} + \lambda_5u_{23})u_{11} \\ &= \lambda_1u_{11}u_{11} + \lambda_2u_{22}u_{11} + \lambda_3u_{33}u_{11} + \lambda_4u_{13}u_{11} + \lambda_5u_{23}u_{11} \\ &= \lambda_1u_{11}. \end{aligned}$$

Donde, $\lambda_1 = 0$. Multiplicando agora a equação (3.0.2) por u_{22} (pela direita), podemos concluir que $0 = \lambda_2u_{22}$, o que implica em $\lambda_2 = 0$. Assim, prosseguindo analogamente, concluímos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Logo, o conjunto $\{u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{13}, u_{23}\}$ é linearmente independente. Ademais, segue de (3.0.1), que o subespaço $A = \langle u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{13}, u_{23}\rangle$ é multiplicativamente fechado, e portanto A é uma subálgebra de B, homogênea com respeito à

$\mathbb{Z}_2$-graduação. De fato, temos $u_{11} + u_{22}, u_{13} + u_{23}, u_{33} \in A \cap B^{(0)}$ e $u_{11} - u_{22}, u_{13} - u_{23} \in A \cap B^{(1)}$. Como $\{u_{11} + u_{22}, u_{13} + u_{23}, u_{33}, u_{11} - u_{22}, u_{13} - u_{23}\}$ é base de A, temos $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, onde $A^{(0)} = A \cap B^{(0)}$ e $A^{(1)} = A \cap B^{(1)}$. Logo, $G(A)$ é subálgebra de $G(B)$.

Consideremos agora a álgebra

$$D = \begin{pmatrix} K & 0 & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

munida da sua $\mathbb{Z}_2$-graduação $D = D^{(0)} \oplus D^{(1)}$, onde

$$D^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \Big/ x, y, z \in K \right\} \text{ e } D^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & -r & -s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ r, s \in K \right\}.$$

Consideremos também a transformação linear $T : D \longrightarrow A$, dada por $T(E_{11}) = u_{11}, T(E_{22}) = u_{22}, T(E_{33}) = u_{33}, T(E_{13}) = u_{13}$ e $T(E_{23}) = u_{23}$. Observemos que, como T é linear e $\{u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{13}, u_{23}\} \subset ImT$, temos T sobrejetiva. Assim, do Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que

$$\begin{aligned} 5 &= dim\ A \\ &= dim\ Ker\ T + dim\ Im\ T \\ &= dim\ Ker\ T + 5 \end{aligned}$$

Logo, $dim\ Ker\ T = 0$, e consequentemente T é injetiva. Portanto, T é um isomorfismo de espaços vetoriais. Mostremos que T é um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de álgebras. De fato, dados $E_{ij}, E_{lk} \in D$, se $j = l$, então $T(E_{ij}E_{lk}) = T(E_{ik}) = u_{ik} = u_{ij}u_{lk} = T(E_{ij})T(E_{lk})$, e se $j \neq l$, então $T(E_{ij}E_{lk}) = T(0) = 0 = u_{ij}u_{lk} = T(E_{ij})T(E_{lk})$. Além disso, percebamos que $D^{(0)} = \langle E_{11} + E_{22}, E_{33}, E_{13} + E_{23} \rangle$ e $D^{(1)} = \langle E_{11} - E_{22}, E_{13} - E_{23} \rangle$, e que vale

$$T(E_{11} + E_{22}) = u_{11} + u_{22} = 1 \in A^{(0)},$$

$$T(E_{33}) = u_{33} = 1_3 \in A^{(0)},$$

$$T(E_{13} + E_{23}) = u_{13} + u_{23} = 1j_0 1_3 \in A^{(0)},$$

$$T(E_{11} - E_{22}) = u_{11} - u_{22} = c \in A^{(1)},$$

$$T(E_{13} - E_{23}) = u_{13} - u_{23} = cj_0 1_3 \in A^{(1)},$$

donde $T(D^{(0)}) \subseteq A^{(0)}$ e $T(D^{(1)}) \subseteq A^{(1)}$. Portanto, T é um isomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de álgebras, e por conseguinte, $G(D) \simeq G(A)$.

Por outro lado, na Proposição 7, mostramos que $G(D) \simeq A_1$, e portanto $G(B)$ possui alguma subálgebra isomorfa a A_1, donde $A_1 \in \mathcal{V}$ e temos o resultado para o caso em que ocorre (1).

Tratemos agora, do caso em que ocorre (2), isto é, que existem $i \neq l$, tais que $B_iJB_l \neq 0$, onde $B_i \simeq K$ e $B_l \simeq K \oplus Kc$. Então, existem $a+bc \in B_l$ (com $a, b \in K$ e $c \in B_l$ é tal que $c^2 = 1_{B_l}$), $j \in J$ e $x \in B_i$ tais que $xj(a+bc) \neq 0$. Particularmente, sendo 1_1 a unidade de B_i, devemos ter

$$0 \neq (x1_1)j(a+bc) = x(1_1j(a+bc)) \ ,$$

donde $1_1j(a+bc) \neq 0$.

Observemos que, como $J = J^{(0)} \oplus J^{(1)}$, existem $j_0 \in J^{(0)}$ e $j_1 \in J^{(1)}$, tais que $j = j_0 + j_1$, e assim

$$0 \neq 1_1j(a+bc) = 1_1(j_0+j_1)(a+bc) = (1_1j_0(a+bc)) + (1_1j_1(a+bc)),$$

donde, $1_1j_0(a+bc) \neq 0$ ou $1_1j_1(a+bc) \neq 0$. Além disso, se $1_1j_1(a+bc) \neq 0$, como $c^2 = 1_{B_l}$, temos

$$0 \neq 1_1j_1(a+bc) = 1_1j_1c(ac+b)$$

Portanto, como $c \in B^{(1)}$ e $j_1 \in J^{(1)}$, temos $cj_1 \in J^{(0)}$. Logo, sem perda de generalidade, podemos assumir que existem $(a+bc) \in B_l$ e $j_0 \in J^{(0)}$ tais que $1_1j_0(a+bc) \neq 0$.

Consideremos $1 = 1_{B_l}$ e notemos que, usando argumentos semelhantes aos utilizados no caso em que ocorre (1), podemos concluir, definindo $u_{11} = 1_1$, $u_{22} = \frac{1+c}{2}$, $u_{33} = \frac{1-c}{2}$, $u_{12} = u_{11}j_0u_{22}$ e $u_{13} = u_{11}j_0u_{33}$, que

$$u_{ij}u_{lk} = \begin{cases} u_{ik} & , \text{se } j = l \\ 0 & , \text{se } j \neq l \end{cases} \quad ,$$

que o conjunto $\{u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{13}, u_{23}\}$ é linearmente independente e que o subespaço
$A = \langle u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{13}, u_{23}\rangle$ é multiplicativamente fechado, donde segue que A é uma subálgebra de B. Além disso, A é homogênea com

$$A^{(0)} = \langle u_{11}, u_{22}+u_{33}, u_{13}+u_{23}\rangle \quad \text{e} \quad A^{(1)} = \langle u_{12}-u_{13}, u_{22}-u_{33}\rangle.$$

Logo, $G(A)$ é subálgebra de $G(B)$.

Consideremos agora a álgebra

$$D_2 = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

munida da sua $\mathbb{Z}_2$-graduação $D_2 = D_2^{(0)} \oplus D_2^{(1)}$, onde

$$D_2^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} z & y & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \Big/ x, y, z \in K \right\} \text{ e } D_2^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & r & -r \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{pmatrix} \Big/ r, s \in K \right\}.$$

Consideremos também a transformação linear $T : D_2 \longrightarrow A$, dada por $T(E_{11}) = u_{11}, T(E_{22}) = u_{22}, T(E_{33}) = u_{33}, T(E_{12}) = u_{12}$ e $T(E_{13}) = u_{13}$. Como T é linear e $\{u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{12}, u_{13}\} \subset Im\ T$, decore que T sobrejetiva. Assim, do Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que

$$\begin{aligned} 5 &= dim\ A \\ &= dim\ Ker\ T + dim\ Im\ T \\ &= dim\ Ker\ T + 5\ . \end{aligned}$$

Logo, $dim\ Ker\ T = 0$, e consequentemente T é injetiva. Portanto, T é um isomorfismo de espaços vetoriais. Mostremos que T é um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de álgebras. De fato, dados $E_{ij}, E_{lk} \in D_2$, se $j = l$, então $T(E_{ij}E_{lk}) = T(E_{ik}) = u_{ik} = u_{ij}u_{lk} = T(E_{ij})T(E_{lk})$, e se $j \neq l$, então $T(E_{ij}E_{lk}) = T(0) = 0 = u_{ij}u_{lk} = T(E_{ij})T(E_{lk})$. Além disso, dado que $D_2^{(0)} = \langle E_{11}, E_{22} + E_{33}, E_{12} + E_{13} \rangle$ e $D^{(1)} = \langle E_{12} - E_{13}, E_{22} - E_{33} \rangle$, e vale

$$T(E_{11}) = u_{11} = 1_1 \in A^{(0)},$$

$$T(E_{22} + E_{33}) = u_{22} + u_{33} = 1 \in A^{(0)},$$

$$T(E_{12} + E_{13}) = u_{12} + u_{13} = 1_1 j_0 1 \in A^{(0)},$$

$$T(E_{12} - E_{13}) = u_{12} - u_{13} = 1_1 j_0 c \in A^{(1)},$$

$$T(E_{22} - E_{33}) = u_{22} - u_{33} = c \in A^{(1)},$$

temos que $T(D_2^{(0)}) \subseteq A^{(0)}$ e $T(D_2^{(1)}) \subseteq A^{(1)}$. Portanto, T é um isomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de álgebras, e por conseguinte, $G(D_2) \simeq G(A)$.

Por outro lado, na Proposição 8, mostramos que $G(D_2) \simeq A_2$, e portanto $G(B)$ possui alguma subálgebra isomorfa a A_2, donde $A_2 \in \mathcal{V}$, e temos o resultado para o caso em que ocorre (2).

Suponhamos agora que vale (3), ou seja, existem distintas B_i, B_l e B_k tais que $B_iJB_lJB_k \neq 0$, com $B_i \simeq B_l \simeq B_k \simeq K$. Assim, como nos outros casos, sendo $1_1, 1_2$ e 1_3 as unidades de B_i, B_l e B_k, respectivamente, existem $j_0, j_0' \in J^{(0)}$ e $j_1, j_1' \in J^{(1)}$, tais que $1_1(j_0 + j_1)1_2(j_0' + j_1')1_3 \neq 0$. Logo, ao menos um produto da forma $1_1 j_r 1_2 j_s' 1_3$, com $r, s \in \{0, 1\}$, é não nulo.

Fixados r, s nessas condições, definamos $u_{11} = 1_1, u_{22} = 1_2, u_{33} = 1_3$, $u_{12} = u_{11} j_r u_{22}, u_{13} = u_{11} j_r u_{22} j_s' u_{33}$ e $u_{23} = u_{22} j_s' u_{33}$. Como $u_{12}u_{23} = u_{13} \neq 0$, temos u_{12} e u_{23} também não nulos. Repetindo o raciocínio utilizado nos casos anteriores, mostra-se que $\{u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{12}, u_{13}, u_{23}\}$ é linearmente independente. Ademais, observando que

$$u_{ij}u_{lk} = \begin{cases} u_{ik} & \text{, se } j = l \\ 0 & \text{, se } j \neq l \end{cases} .$$

concluímos que $D_{rs} = \langle u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{12}, u_{13}, u_{23}\rangle$ é multiplicativamente fechado, e portanto uma subálgebra de B.

Estudaremos agora, separadamente, as possibilidades para $r, s \in \{0, 1\}$ e o que ocorre com a álgebra D_{rs} em cada uma dessas possibilidades.

Inicialmente, suponhamos $r = s = 0$, e notemos que nesse caso temos $1_1, 1_2, 1_3, j_r, j'_s \in B^{(0)}$. Daí, $D_{rs} \subseteq B^{(0)}$, e portanto $D_{rs} \otimes 1_E$ é uma subálgebra de $G(B)$ isomorfa a D_{rs}.

Tomando agora a aplicação linear $T : D_{rs} \longrightarrow UT_3(K)$, dada por $T(u_{ij}) = E_{ij}$, temos $\langle E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}\rangle \subseteq Im\ T$, e daí T é sobrejetiva. Além disso, uma vez que $dim\ D_{rs} = dim\ UT_3(K)$, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que T é bijetivo. Ademais, observando que

$$u_{ij}u_{lk} = \begin{cases} u_{ik} & \text{, se } j = l \\ 0 & \text{, se } j \neq l \end{cases} ,$$

é fácil ver que $T(u_{ij}u_{lk}) = T(u_{ij})T(u_{lk})$, e assim T é um isomorfismo de álgebras. Portanto, $G(B)$ contém uma subálgebra isomorfa a $UT_3(K)$.

Suponhamos agora que $r = 0$ e $s = 1$, e notemos que neste caso $j_r \in J^{(0)}$ e $j'_s \in J^{(1)}$, donde $\{u_{11}, u_{12}, u_{22}, u_{33}\} \subset B^{(0)}$ e $\{u_{23}, u_{13}\} \subset B^{(1)}$. Tomando então $D_{rs}^{(0)} = D_{rs} \cap B^{(0)} = \langle u_{11}, u_{12}, u_{22}, u_{33}\rangle$ e $D_{rs}^{(1)} = D_{rs} \cap B^{(1)} = \langle u_{13}, u_{23}\rangle$, temos que $D_{rs} = D_{rs}^{(0)} \oplus D_{rs}^{(1)}$ é uma subálgebra homogênea com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação de B. Assim, $G(D_{rs})$ é uma subálgebra de $G(B)$.

Fixado $x \in E^{(1)}$, não nulo, tomemos $v_{11} = u_{11} \otimes 1_E, v_{12} = u_{12} \otimes 1_E$, $v_{13} = u_{13} \otimes x, v_{22} = u_{22} \otimes 1_E, v_{23} = u_{23} \otimes x, v_{33} = u_{33} \otimes 1_E$. Temos $\beta = \{v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{12}, v_{13}, v_{23}\} \subset G(D_{rs})$, sendo $\{u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{12}, u_{13}, u_{23}\} \subset D_{rs}$ e $\{1_E, x\} \subset E$ são linearmente independentes, concluímos que β é linearmente independente (veja o Exemplo 7). Ademais, considerando $D = \langle v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{12}, v_{13}, v_{23}\rangle$ e observando que

$$v_{ij}v_{lk} = \begin{cases} v_{ik} & \text{, se } j = l \\ 0 & \text{, se } j \neq l \end{cases} , \tag{3.0.3}$$

temos D multiplicativamente fechado, e portanto D é subálgebra de $G(D_{rs})$. Além disso, seja $S : UT_3(K) \longrightarrow D$ a transformação linear tal que $S(E_{11}) = v_{11}, S(E_{12}) = v_{12}, S(E_{13}) = v_{13}, S(E_{22}) = v_{22}, S(E_{23}) = v_{23}$ e

$S(E_{33}) = v_{33}$. Então, como S é linear e $\{v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{12}, v_{13}, v_{23}\} \subseteq Im\ S$, segue que S é sobrejetiva, e portanto, uma vez que $dim\ D = dim\ UT_3(K)$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem concluímos que S é bijetiva. Além disso, por (3.0.3), podemos inferir que S, na verdade, é um isomorfismo de álgebras. Logo, $G(D_{rs})$, e consequentemente $G(B)$, contém uma subálgebra isomorfa a $UT_3(K)$.

Suponhamos agora que $r = 1$ e $s = 0$, e observemos que nestas condições $j'_s \in J^{(0)}$ e $j_r \in J^{(1)}$, donde devemos ter $\{u_{11}, u_{22}, u_{23}, u_{33}\} \subset B^{(0)}$ e $\{u_{12}, u_{13}\} \subset B^{(1)}$. Tomando então $D_{rs}^{(0)} = D_{rs} \cap B^{(0)} = \langle u_{11}, u_{22}, u_{23}, u_{33}\rangle$ e $D_{rs}^{(1)} = D_{rs} \cap B^{(1)} = \langle u_{12}, u_{13}\rangle$, temos que $D_{rs} = D_{rs}^{(0)} \oplus D_{rs}^{(1)}$ é uma subálgebra homogênea com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação de B. Assim, $G(D_{rs})$ é uma subálgebra de $G(B)$.

Fixado $x \in E^{(1)}$, não nulo, tomemos $v_{11} = u_{11} \otimes 1_E, v_{12} = u_{12} \otimes x$, $v_{13} = u_{13} \otimes x, v_{22} = u_{22} \otimes 1_E, v_{23} = u_{23} \otimes 1_E, v_{33} = u_{33} \otimes 1_E$. Uma vez que esses elementos pertencem a $G(D_{rs})$ e que as relações em (3.0.3) continuam válidas, de modo inteiramente análogo ao que foi no caso anterior, concluímos que $D = \langle v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{12}, v_{13}, v_{23}\rangle$ é subálgebra de $G(D_{rs})$ isomorfa a $UT_3(K)$. Consequentemente, $G(B)$ contém uma subálgebra isomorfa a $UT_3(K)$.

Suponhamos agora que $r = 1$ e $s = 1$, e notemos que neste caso $j'_s, j_r \in J^{(1)}$, donde temos $\{u_{11}, u_{13}, u_{22}, u_{33}\} \in B^{(0)}$ e $\{u_{12}, u_{23}\} \in B^{(1)}$. Assim, ao considerarmos $D_{rs}^{(0)} = D_{rs} \cap B^{(0)} = \langle u_{11}, u_{13}, u_{22}, u_{33}\rangle$ e $D_{rs}^{(1)} = D_{rs} \cap B^{(1)} = \langle u_{12}, u_{23}\rangle$, temos que $D_{rs} = D_{rs}^{(0)} \oplus D_{rs}^{(1)}$ é uma subálgebra homogênea com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação de B. Logo, $G(D_{rs})$ é uma subálgebra de $G(B)$.

Tomemos agora $v_{11} = u_{11} \otimes 1_E, v_{12} = u_{12} \otimes e_1, v_{13} = u_{13} \otimes e_1e_2$, $v_{22} = u_{22} \otimes 1_E, v_{23} = u_{23} \otimes e_2, v_{33} = u_{33} \otimes 1_E$. Como $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ é um subconjunto linearmente independente de E, concluímos que $\{v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{12}, v_{13}, v_{23}\}$ é um subconjunto linearmente independente de $G(D_{rs})$. Como as relações em (3.0.3) continuam válidas, de modo inteiramente análogo ao que foi nos dois casos anteriores, concluímos que $D = \langle v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{12}, v_{13}, v_{23}\rangle$ é subálgebra de $G(D_{rs})$ isomorfa a $UT_3(K)$. Consequentemente, $G(B)$ contém uma subálgebra isomorfa a $UT_3(K)$.

Assim, em qualquer dos casos $A_3 = UT_3(K) \in \mathcal{V} = var(G(B))$, e temos o resultado para o caso em que ocorre (3).

Observemos que se ocorre (4), então

$$0 \neq B_i J 1_{B_l}.$$

Caso contrário, deveríamos ter $B_i J B_l = B_i J 1_{B_l} B_l = 0$, o que é uma contradição. Assim, tratamos desse caso como feito no caso em que ocorre (1).

Resta agora mostrarmos o que concerne à recíproca. Para tal suponhamos $A_i \in \mathcal{V}$ para algum $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e recordemos que, conforme visto nas Proposições 7, 8, 9 e no Teorema 18, temos $exp(A_4) = exp(A_5) = 4$ e $exp(A_1) = exp(A_2) = exp(A_3) = 3$. Daí, sendo segue da Proposição 5 que $exp(\mathcal{V}) \geq exp(A_i) \geq 3 > 2$.

$\square$

Para finalizarmos este capítulo, demonstraremos que nas condições do Teorema 17, a lista de álgebras dada no início deste capítulo não pode ser reduzida, no sentido da proposição a seguir:

Proposição 10. *Para todos $i, j \in \{1, 2, \cdots, 5\}$ com $i \neq j$, temos $\mathcal{V}_i \not\subseteq \mathcal{V}_j$.*

Demonstração. Uma vez que, conforme ficou estabelecido nas Proposições 7, 8, 9 e no Teorema 18, $exp(\mathcal{V}_1) = exp(\mathcal{V}_2) = exp(\mathcal{V}_3) = 3$ e $exp(\mathcal{V}_4) = exp(\mathcal{V}_5) = 4$, devemos ter $\mathcal{V}_4, \mathcal{V}_5 \not\subset \mathcal{V}_i$, para $i \in \{1, 2, 3\}$, pela Proposição 5.

Observemos agora que, do Teorema de Amitsur-Levitzki (vide Exemplo 18), as álgebras $A_3 = UT_3(K)$ e $A_4 = M_2(K)$ satisfazem as identidades standard St_6 e St_4, respectivamente (observe que $UT_3(K)$ é subálgebra de $M_3(K)$). Entretanto, conforme comentamos no Exemplo 18, a álgebra exterior E não satisfaz nenhuma identidade standard. Assim, como as álgebras A_1 e A_2 contêm subálgebras isomorfas a E, a saber,

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ x \in E \right\} \subseteq A_1 \text{ e } \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \Big/ x \in E \right\} \subseteq A_2,$$

segue que A_1 e A_2, não satisfazem nenhuma identidade standard. Ademais, considerando os seguintes elementos de A_5

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_1 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, a_n = \begin{pmatrix} 0 & e_n \\ e_n & 0 \end{pmatrix}, \cdots$$

observando que $a_i a_j = -a_j a_i \neq 0$ e utilizando processo análogo ao usado no argumento do Exemplo 18, concluímos que A_5 não satisfaz nenhuma identidade standard. Assim, $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_5 \not\subseteq \mathcal{V}_i$, para $i = 3, 4$.

Além disso, considerando agora $a_1 = E_{11}, a_2 = E_{12}, a_3 = E_{13}, a_4 = E_{33} \in A_3 = UT_3(K)$, notemos que $a_1a_2a_3a_4 = E_{11}E_{12}E_{23}E_{33} = E_{13}$, e que para toda $\sigma \in S_4 - \{Id_4\}$, temos $a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} = 0$. Daí, devemos ter $St_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = E_{13} \neq 0$, donde A_3 não satisfaz $St_4 \equiv 0$. Portanto, $\mathcal{V}_3 \not\subseteq \mathcal{V}_4$.

Consideremos o polinômio $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ e mostremos que, dentre as $A_i's$, apenas A_5 satisfaz $f \equiv 0$. De fato, conforme mostramos no Exemplo 16, temos que A_5 satisfaz $f \equiv 0$.

Tomemos agora e_1, e_2, e_3, e_4 geradores distintos de E, e consideremos

$$a_1 = \begin{pmatrix} e_1 & e_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} e_2 & e_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 0 & e_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos $a_1, \cdots, a_5 \in A_1$ e vale

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 0 & -2e_1e_2e_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Para A_2, consideremos

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 & e_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_5 = \begin{pmatrix} 1 & e_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $b_1, \cdots, b_5 \in A_2$ e vale

$$f(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \begin{pmatrix} 0 & 2e_3e_2e_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Em A_3, consideremos os elementos $a_1 = E_{11}, a_2 = E_{12}, a_3 = E_{22}$, $a_4 = E_{23}, a_5 = E_{33}$, e notemos que

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = E_{13} \neq 0.$$

Em A_4, consideremos os elementos $a_1 = E_{11}, a_2 = a_4 = E_{12}, a_3 = E_{21}$, $a_5 = E_{22}$, e notemos que

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 2E_{12} \neq 0.$$

Portanto, $\mathcal{V}_i \not\subseteq \mathcal{V}_5$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Para obtermos o resultado, resta mostrar que $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_3 \not\subset \mathcal{V}_2$ e $\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3 \not\subset \mathcal{V}_1$. Para isso, mostremos agora que $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5]$ é uma identidade para A_1, mas não é identidade para A_2 nem para A_3. De fato, dados $x_1, \cdots, x_5, y_1, \cdots, y_5 \in E$, $a_1, \cdots, a_5 \in E^{(0)}$, temos

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} [x_1, x_2] & t_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $t_1 = x_1y_2 + y_1a_2 - x_2y_1 - y_2a_1$. Daí,

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & t_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $t_2 = [x_1, x_2]y_3 + t_1c_3 - x_3t_1$.

Assim, considerando $t_3 = x_4y_5 + y_4a_5 - x_5y_4 - y_5a_4$, teremos

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} x_4 & y_4 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_5 & y_5 \\ 0 & a_5 \end{pmatrix}\right] = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & t_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [x_4, x_5] & t_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, $f_1 \equiv 0$ em A_1. Ademais, tomando

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & e_3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_4 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_5 \end{pmatrix}$$

temos $a_1, \cdots, a_5 \in A_2$, e vale

$$f_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 0 & 2e_1e_3e_2e_4e_5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Logo, $\mathcal{V}_2 \nsubseteq \mathcal{V}_1$. Além disso, considerando em A_3 os elementos $b_1 = E_{11}$, $b_2 = E_{12}, b_3 = b_4 = E_{22}$ e $b_5 = E_{23}$, temos $f_1(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = E_{13} \neq 0$. Portanto, $\mathcal{V}_3 \nsubseteq \mathcal{V}_1$

Por fim, consideremos agora $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [x_1, x_2][x_3, x_4, x_5]$ e observemos que de modo inteiramente análogo ao feito para f_1, mostra-se que $f_2 \equiv 0$ em A_2. Entretanto, tomando

$$a_1 = \begin{pmatrix} e_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} e_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} e_2 & e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} e_3 & e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} e_1 & e_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos $a_1, \cdots, a_5 \in A_1$, e vale

$$f_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 0 & 4e_4e_5e_2e_3e_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Portanto, $\mathcal{V}_1 \nsubseteq \mathcal{V}_2$. Ademais, tomando em A_3, $b_1 = E_{11}, b_2 = E_{12}$, $b_3 = E_{22}, b_4 = E_{23}$ e $b_5 = E_{33}$, temos $f_2(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = E_{13} \neq 0$. Portanto, $\mathcal{V}_3 \nsubseteq \mathcal{V}_2$ e o resultado segue.

□

Para concluirmos o capítulo, gostaríamos de destacar que podemos unir o Teorema 17 ao resultado devido a Kemer, mostrado no capítulo 2 (vide Teorema 16), culminando no seguinte corolário:

Corolário 4. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo K de característica zero. Então, $Exp(\mathcal{V}) = 2$ se, e somente se, as álgebras $A_1, \cdots, A_5 \notin \mathcal{V}$ e também $E \in \mathcal{V}$ ou $UT_2(K) \in \mathcal{V}$.*

Referências Bibliográficas

[1] AMITSUR, S. A., LEVITZKI, J. *Minimal Identities for Algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 449-463.

[2] CURTIS, C. W., REINER, I. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[3] DRENSKY, V. *Free Algebras and PI-algebras.* AMS, Providence, 2006.

[4] FELZENSZWALB, B. *Álgebras de Dimensão Finitas.* IMPA-CNPq, Rio de Janeiro, 1979.

[5] FRALEIGH, J. B. *A First Course in Abstract Algebra.* 6ª Edição, Addison-Wesley, New York, 2000.

[6] GIAMBRUNO, A., ZAICEV, M. *On Codimension Growth of Finitely Generated Associative Algebras.* Adv. Math. 140 (1998), 145–155.

[7] GIAMBRUNO, A., ZAICEV, M. *Exponential Codimension Growth of PI-algebras: an Exact Estimate.* Adv. Math. 142 (1999), 221–243.

[8] GIAMBRUNO, A., ZAICEV, M. *A Characterization of Varieties of Associative Algebras of Exponent 2.* Serdica Math. J. 26 (2000), 245-252.

[9] GIAMBRUNO, A., ZAICEV, M. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods.* Math. Surveys Monographs 122, AMS, Providence, RI, 2005.

[10] HERSTEIN, I. N. *Noncommutative Rings.* Carus Monograph No. 15, MMA, Utrek, 1968.

[11] HOFFMAN, K., KUNZE, R. *Álgebra Linear.* 2ªEdição (traduzida), LTC, Rio de Janeiro, 1979.

[12] KEMER, A. R. *T-ideals With Power Growth of the Codimensions are Specht.* Sib. Math. J. 19 (1978), 37-48.

[13] KEMER, A. R. *Varietes of Finite Rank*. Proc. 15-th All the Union Algeic Conf., Krasnoyarsk, vol. 2, (1979), p. 73 (em russo).

[14] KEMER, A. R. *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded Algebras*. Math. USSR, Izv. 25, (1985), 359-374.

[15] KEMER, A. R. *Finite Basis Property of Identities of Associative Algebras*. Algebra and Logic 26, (1987), 37-48.

[16] KEMER, A. R. *Ideals of Identities of Associative Algebras*. AMS Translations of Mathematical Monograph, Vol. 87, 1988.

[17] LAM, T. Y. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[18] REGEV, A. *Existence of Identities in $A \otimes B$*. Israel J. Math. 11 (1972), 131-152.