Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Conjuntos Invariantes para Tricotomia Exponencial e Aplicações a Campos Neurais

por

Hugo Saraiva Tavares †

sob orientação do

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

T231c Tavares, Hugo Saraiva.

Conjuntos invariantes para tricotomia exponencial e aplicações a campos neurais / Hugo Saraiva Tavares. – Campina Grande, 2016.

112f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Severino Horácio da Silva".

Referências.

1. Matemática. 2. Conjuntos Invariantes. 3. Tricotomia Exponencial. 4. Campos Neurais. I. Silva, Severino Horácio da. II. Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande (PB). III. Título.

CDU 51(043)

Conjuntos Invariantes para Tricotomia Exponencial e Aplicações a Campos Neurais

por

Hugo Saraiva Tavares

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

José Lindomberg Possiano Barreiro

Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Junho/2016

Agradecimentos

Inicialmente, aos meus pais e irmãos, principais motivos das minhas conquistas.

Ao professor Horácio, pelos ensinamentos, paciência e apoio nas mais diversas ocasiões, sempre me estimulando a ir mais longe.

Aos professores do departamento de matemática da UFCG, em especial, aos professores Henrique Fernandes e Marco Antônio, por terem me introduzido na Matemática e por sempre estarem dispostos a me ajudar.

Agradeço aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade de participar e pelas contribuições pessoais acerca da dissertação.

Aos meus amigos do Rotaract Club de Campina Grande, por sempre me apoiarem, sendo minha segunda família em Campina Grande.

Ao apoio financeiro da Capes.

E a todos os outros que de alguma forma contribuíram para esta conquista.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Resumo

Neste trabalho estudamos resultados sobre existência de conjuntos invariantes sob um semigrupo com tricotomia exponencial e aplicamos os resultados abstratos para a equação de evolução de campos neurais,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \int_{S^1} J(wz^{-1})f(u(z))dz + h, \; h > 0,$$

no espaço de fase $L^2(S^1)$.

Palavras chave: Conjuntos Invariantes; Tricotomia Exponencial; Campos Neurais.

Abstract

In this work we study some results that ensure the existence of invariant sets for semigroup with exponential trichotomy and we apply the abstract results in the non local evolution equation of neural fields,

$$\frac{\partial u(w,t)}{\partial t} = -u(w,t) + \int_{S^1} J(wz^{-1})f(u(z,t))dz + h,\ \ h > 0$$

in the phase space $L^2(S^1)$

Keywords: Invariant Sets; Exponential Trichotomy; Neural Fields.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação estudamos a existência de conjuntos invariantes para um semigrupo definido num espaço de Banach abstrato e aplicamos nossos resultados para a equação de evolução de campos neurais.

Os principais objetivos deste trabalho consistem em:

1. Estudar atratores globais;

2. Investigar a propriedade do ponto de sela quando o semigrupo admite uma tricotomia exponencial, ver [3], mostrando a existência de variedades invariantes em torno de soluções de equilíbrio;

3. Aplicar os resultados abstratos para equação de campos neurais no espaço de fase $L^2(S^1)$;

4. Mostrar a existência de uma solução de equilíbrio não trivial para a equação de campos neurais a partir de um funcional de Lyapunov associado ao fluxo gerado por esta equação.

A presente dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1, seguindo principalmente as referências: [2], [4], [9], [15], [16] e [25], mostramos resultados sobre existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, (t_0, x_0) \in I \times X. \tag{1}$$

onde X é um espaço de Banach e I um intervalo em $\mathbb{R}$. Também enunciamos um resultado de [20] relacionados a diferenciabilidade do fluxo gerado por (1.2).

Ainda neste capítulo, seguindo [19], [25] e [26], abordamos algumas propriedades de semigrupos contínuos; caracterizamos alguns conjuntos especiais definidos a partir da ação de um semigrupo, como os conjuntos ω-*limite* e α-*limite*, e estudamos condições para existência de conjuntos absorventes e conjuntos atratores. Utilizando [13], [14], [23] e [25], finalizamos o capítulo definindo a noção de funcional de Lyapunov, de sistema gradiente e mostramos algumas propriedades de semigrupos fortemente contínuos.

No Capítulo 2, seguindo [3] e [11], trabalhamos com teoremas relacionados à propriedade do ponto de sela para uma classe de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach. Especificamente, o propósito da análise dos pontos de sela para o caso autônomo é comparar, em uma vizinhança de $x = 0$, as propriedades da equação diferencial ordinária não-linear

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x). \tag{2}$$

com as propriedades da equação linear

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{3}$$

O resultado principal deste capítulo mostra que, sob certas condições sobre a função f e sobre o operador A, podemos garantir a existência, em uma vizinhança de $x = 0$, de variedades invariantes chamadas centro-estáveis (centro-instáveis) e estáveis (instáveis), para o caso onde o operador A gera um semigrupo que induz uma tricotomia exponencial em num espaço de Banach X.

O Capítulo 3 é dedicado à aplicação dos resultados abstratos para Equações de Campos Neurais. Para isto, consideramos a equação de evolução dada em [8],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \int_{S^1} J(wz^{-1}) f(u(z)) dz + h, \;\; h > 0, \tag{4}$$

no espaço $L^2(S^1)$. Em (4), u é uma função real sobre $S^1 \times \mathbb{R}_+$, h é uma constante positiva, $J \in C^1$ é uma função simétrica, f é uma função não decrescente e não negativa. O símbolo " $*$ " denota o produto de convolução em S^1.

A função $u(w, t)$ denota o potencial da membrana na posição w em um tempo $t \geq 0$; a função J representa a conexão sináptica dos neurônios nas posições w e z; a função f representa a taxa com o qual os *spikes* neurais são gerados e a constante h representa um estímulo externo aplicado uniformemente em todo o campo neural, (veja [5], [6], [7], [8], [10] e [12]). Mostramos a existência de um atrator global para o fluxo gerado por (4) e estudamos a existência de variedades invariantes em vizinhanças de equilíbrio. Em seguida, usamos o funcional de Lyapunov,

$$F(u) = \int_{S^1} \left[-\frac{1}{2} f(u(w)) \int_{S^1} J(wz^{-1}) f(u(z)) + \int_0^{f(u(w))} f^{-1}(r)dr - hf(u(w)) \right] dw,$$

definido em [7] e o Princípio da Invariância de La Salle para mostrarmos a existência de uma solução de equilíbrio não trivial. Finalmente, no Apêndice, tratamos inicialmente de noções de cálculo diferencial em Espaços de Banach e em seguida exibimos alguns resultados clássicos que foram utilizados neste trabalho, como o Teorema do Ponto Fixo de Contrações, o Teorema de Hanh-Banach e o Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoremas de Existência e Unicidade em Espaços de Banach

Exibiremos nesta seção alguns resultados sobre existência e unicidade de soluções em Espaços de Banach. Para tanto, seguimos: [2], [4], [9] e [25].

Seja X um espaço de Banach. Considere em X a seguinte equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.1}$$

com

$$\begin{aligned} f : I \times X &\to X \\ (t,x) &\mapsto f(t,x) \end{aligned}$$

onde f é uma função contínua e $I \in \mathbb{R}$ é um intervalo.

Dizemos que uma função continuamente diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \to X$ é uma solução clássica de (1.1) no intervalo I se:

(i) $\{(t,\phi(t)); t \in I\}$ está contido no domínio de f;

(ii) $\dfrac{d}{dt}\phi(t) = f(t,\phi(t))$, para todo $t \in I$.

O problema de Cauchy para (1.1), com condições iniciais (t_0, x_0), será denotado por

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, (t_0, x_0) \in I \times X. \tag{1.2}$$

Lema 1.1. *O problema (1.2) é equivalente à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.3}$$

Prova. *Integrando ambos os membros de (1.2) de t_0 a t obtemos*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))ds.$$

Reciprocamente, se derivarmos ambos os lados de (1.3) obtemos

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)),$$

Também de (1.3), temos $x(t_0) = x_0$.

Teorema 1.1. (Teorema de Peano) *Consideremos um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua em Ω, então para qualquer $(t_0, x_0) \in \Omega$,*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

tem pelo menos uma solução passando por (t_0, x_0), a qual está definida num intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ para algum $\alpha > 0$.

Prova. (Ver [18], p. 14, Teorema 1.1).

Observação 1.1. *O Teorema de Peano deixa de ser válido em espaços vetoriais de dimensão infinita (ver [2] e [25]), a continuidade da função f não é suficiente pra assegurar a existência de soluções para o problema (1.2), mas acrescentando a hipótese de que f seja localmente lipschitiziana na segunda variável, pode-se provar a existência e a unicidade para o problema de Cauchy (1.3) para o Espaços de Banach em geral de maneira análoga ao caso em que $X = \mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.2. *Sejam X um espaço de Banach, $\delta > 0$ e $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Suponha que numa vizinhança do ponto (t_0, x_0) a função*

$$\begin{aligned} f : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times X &\to X \\ (t, x) &\mapsto f(t, x) \end{aligned}$$

é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz na segunda variável, isto é, existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq M\|x-y\|, \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta], \quad \forall x, y \in X. \tag{1.4}$$

Então existe uma vizinhança de t_0 tal que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

tem uma única solução.

Prova. Nesta demonstração seguiremos [21]. Sejam $\eta > 0$ e $x \in X$ tal que $\|x - x_0\| < \eta$, como f é continua em t então dado $\xi > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,x)\| \leq \xi \tag{1.6}$$

sempre que $|t - t_0| \leq \epsilon$. Usando o fato de f ser Lipschitz na segunda variável, tem-se

$$\|f(t,x) - f(t,x_0)\| \leq M\|x - x_0\| \leq M\eta. \tag{1.7}$$

Observe também que

$$\|(t,x) - (t_0,x_0)\| = \|(t-t_0, x-x_0)\| = |t-t_0| + \|x-x_0\| \leq \epsilon + \eta, \tag{1.8}$$

usando (1.6) e (1.7), temos

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(t_0,x_0)\| &\leq \|f(t,x) - f(t,x_0)\| + \|f(t,x_0) - f(t_0,x_0)\| \\ &\leq M\eta + \xi \end{aligned}$$

isto é, f é contínua numa vizinhança de (t_0, x_0) de onde segue que f é limitada nesta vizinhança. Logo existe uma contante $M_1 < \infty$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq M_1 \tag{1.9}$$

Seja agora $\alpha = min\,(\epsilon, \eta/M_1)$ e $C_\alpha(X)$ espaço de Banach das funções contínuas x definitas em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, tomando valores em X e com a norma $\|x\|_{C_\alpha} = \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \|x(t)\|$. Sejam também $\mathbf{B}_\eta = \{x \in C_\alpha(X) : \|x - x_0\| \leq \eta\}$ e T um operador sobre $\mathbf{B}_\eta$ definido por

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Observe que dado $x \in \mathbf{B}_\eta$ temos

$$\|(Tx)(t) - x_0\| \leq \alpha M_1, \tag{1.10}$$

o que implica

$$\|Tx - x_0\|_{C_\alpha} = \sup_{|t-t_0|\leq\alpha} \|(Tx)(t) - x_0\| \leq \alpha M_1 \leq \frac{\eta}{M_1} M_1 = \eta,$$

consequentemente, $T : \mathbf{B}_\eta \subset X \to \mathbf{B}_\eta$.

Sem perda de generalidade, suponha que $t \geq t_0$. Para x_1 e x_2 em $\mathbf{B}_\eta$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|(Tx_2)(t) - (Tx_1)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M\|x_2 - x_1\| ds,
\end{aligned}$$

daí,

$$\|Tx_2(t) - Tx_1(t)\| \leq M(t - t_0)\|x_2 - x_1\|. \tag{1.11}$$

Fazendo agora

$$\begin{aligned}
\|(T^2x_2)(t) - (T^2x_1)(t)\| &\leq \| \int_{t_0}^{t} [f(s, Tx_2(s) - f(s, Tx_1(s))] ds \| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M\|(Tx_2(s) - Tx_1(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M^2(s - t_0)\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha} ds \\
&= M^2\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha} \int_{t_0}^{t} (s - t_0) ds \\
&\leq M^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} \|x_2 - x_1\|_{C_\alpha},
\end{aligned}$$

temos,

$$\|T^2x_2 - T^2x_1\|_{C_\alpha} \leq \frac{M^2\alpha^2}{2!} \|x_2 - x_1\|_{C_\alpha}.$$

Suponha que para a n-ésima composição obtemos a seguinte expressão

$$\|T^nx_2 - T^nx_1\|_{C_\alpha} \leq \frac{M^n\alpha^n}{n!} \|x_2 - x_1\|_{C_\alpha}.$$

Assim, temos para a (n+1)-ésima composição

$$\begin{aligned}
\|(T^{n+1}x_2)(t) - (T^{n+1}x_1)(t)\| &\leq \|\int_{t_0}^{t} [f(s, T^n x_2(s) - f(s, T^n x_1(s))]ds\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M\|(T^n x_2(s) - T^n x_1(s))\|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} MM^n(s - t_0)^n \|x_2 - x_1\|_{C_\alpha} ds \\
&= M^{n+1}\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha} \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^n ds \\
&\leq M^{n+1}\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|T^{n+1}x_2 - T^{n+1}x_1\|_{C_\alpha} \leq \frac{(M\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}\|x_2 - x_1\|_{C_\alpha}$$

Portanto, por indução temos

$$\|T^n x_2 - T^n x_1\|_{C_\alpha} \leq \frac{M^n \alpha^n}{n!}\||x_2 - x_1\||, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mas $(M\alpha)^n/n!$ é o n-ésimo da série de Taylor de $e^{M\alpha}$, de modo que para n suficientemente grande teremos $0 < (M\alpha)^n/n! < 1$. Segue então, do Teorema do Ponto Fixo para Contrações (Teorema C.1), que existe um único $x \in \mathbf{B}_\eta$ tal que $(Tx)(t) = x(t)$. Tem-se então

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \ \text{ e } \ x(t_0) = x_0.$$

Teorema 1.3. (Cauchy, Lipchitz, Picard) *Sejam X um espaço de Banach e $F : X \to X$ uma aplicação tal que*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in X, L \in \mathbb{R}_+$$

Então para todo $x_0 \in X$, existe um único $x \in C^1([0,\infty), X)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Prova. Devemos achar $x \in C^1([0,\infty), X])$ tal que

$$x(t) = x_0 + \int_{0}^{t} F(x(s))ds \tag{1.13}$$

Defina,

$$E = \left\{ x \in C^1([0,\infty), X]); \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\| \leq \infty \right\},$$

para alguma constante $K > 0$, a ser fixada posteriormente.

Afirmação 1: *E é um espaço de Banach com a norma*

$$\|x\|_{\mathbf{E}} = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\|, \quad k > 0.$$

De fato, considere (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbf{E}$, então temos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, n > n_0 \implies \|x_n - x_m\|_{\mathbf{E}} = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x_n(t) - x_m(t)\| < \epsilon,$$

o que implica

$$e^{-kt}\|x_n(t) - x_m(t)\| < \epsilon, \forall m, n > n_0, \forall t \geq 0.$$

Observe que para cada $t \in [0, \infty)$ fixado, tem-se que a sequência $(x_n(t))$ é de Cauchy em $\mathbf{E}$. Segue então que existe $x^t \in X$ tal que $x_n(t) \to x^t$ quando $n \to \infty$.

Defina uma função $x : [0, \infty) \to X$, tal que

$$x(t) = x^t = \lim_{n\to\infty} x_n(t), \forall t \geq 0.$$

Então provaremos que (x_n) converge para x e que $x \in E$. Para isso, observe que pelo fato de (x_n) ser de Cauchy, temos que (x_n) é limitada em E. Daí existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|x_n\|_{\mathbf{E}} = \sup_{t\geq 0} e^{\kappa t}\|x_n(t)\| \leq M,$$

o que implica em

$$\begin{aligned} e^{-kt}\|x_n(t)\| &\leq \sup_{t\geq 0} e^{\kappa t}\|x_n(t)\| \\ &= \|x_n\|_{\mathbf{E}} < M, \end{aligned}$$

de onde segue que $e^{-kt}\|x_n(t)\| \leq M$,$\forall n \in \mathbb{N}, t \geq 0$ e $k > 0$ fixado. Tomando-se o limite na última desigualdade quando $n \to \infty$ obtemos

$$e^{-kt}\|x(t)\| \leq M,$$

e portanto,

$$\|x\|_{\mathbf{E}} = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|x(t)\| \leq M,$$

de onde segue que $x \in \mathbf{E}$. Para concluirmos a afirmação resta verificar que $\|x - x_n\|_{\mathbf{E}} \to 0$, quando $n \to \infty$. Para isto, veja que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m(t) - x_n(t)\| < \frac{\epsilon}{2}, \forall t \in [0, \infty)$$

para todo $m, n \geq n_0$. Fazendo $m \to \infty$ na inequação acima temos

$$\|x(t) - x_n(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

para $n > n_0$, de onde seque que

$$e^{-kt}\|x(t) - x_n(t)\| \leq \|x(t) - x_n(t)\| < \epsilon, t \in [0, \infty).$$

Daí,

$$\|x - x_n\|_{\mathbf{E}} < \epsilon,$$

o que conclui a afirmação 1.

Mostraremos agora que a função $\Phi : E \to C^1([0, \infty), X)$, onde

$$(\Phi x)(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds,$$

é tal que $\Phi(E) \subset E$.

Veja que a continuidade da Φ decorre da continuidade das funções envolvidas na sua definição e do fato de que integrais de funções contínuas são contínuas. Resta mostrar que $\|\Phi(x)\|_{\mathbf{E}} < \infty$. Para isto, começamos observando que

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\|_{\mathbf{E}} &= \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \left(\|x_0\| + \left\| \int_0^t F(x(s))ds \right\| \right) \\ &\leq \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|x_0\| + \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \left\| \int_0^t F(x(s))ds \right\|. \end{aligned}$$

Temos que mostrar que o lado direito da última desigualdade é finito, para isso note que

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \left\| \int_0^t F(x(s))ds \right\| &\leq \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \int_0^t \|F(x(s))\| ds, \\ &= \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \int_0^t \|F(x(s)) - F(0) + F(0)\| ds \\ &\leq \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \int_0^t \left[\|F(x(s)) - F(0)\| + \|F(0)\| \right] ds. \end{aligned}$$

Usando o fato de F ser Lipschitiziana com constante L, temos

$$\|F(x(s)) - F(0)\| \leq L\|x(s)\|,$$

o que implica em

$$\|F(x(s))\| - \|F(0)\| \leq \|F(x(s)) - F(0)\| \leq L\|x(s)\|,$$

consequentemente, $\|F(x(s))\| \leq L\|x(s)\| + \|F(0)\|$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|F(x(s))\| ds &\leq \int_0^t L\|x(s)\| ds + \int_0^t \|F(0)\| ds \\ &\leq \int_0^t L\|x(s)\| ds + \|F(0)\| t. \end{aligned}$$

Multiplicando a última expressão obtida por e^{-kt}, obtemos

$$e^{-kt} \int_0^t \|F(x(s))\| ds \leq \int_0^t Le^{-kt} \|x(s)\| ds + e^{-kt} \|F(0)\| t,$$

ou equivalentemente,

$$e^{-kt} \int_0^t \|F(x(s))\| ds \leq \int_0^t Le^{-kt} e^{ks} e^{-ks} \|x(s)\| ds + e^{-kt} \|F(0)\| t. \tag{1.14}$$

Considere agora o seguinte conjunto

$$G = \left\{ e^{-kt} \|F(0)\| t; t \geq 0 \right\}.$$

Mostraremos que G é limitado superiormente por $\|F(0)\|/e^k$. De fato, considere a função

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\rightarrow X \\ t &\mapsto g(t) = e^{-kt} \|F(0)\| t \end{aligned}$$

Derivando com relação à t, tem-se

$$g'(t) = \frac{\|F(0)\| - \|F(0)\| tk}{e^{kt}},$$

o que implica que $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1/k$.

Derivando g' teremos

$$g''(t) = \|F(0)\| \left(\frac{-2k + k^2 t}{e^{2kt}} \right),$$

como $g(0) = 0$ e $g''(1/k) < 0$, temos que $t = 1/k$ é um máximo global para g, o que implica que G é um conjunto limitado superiormente, de onde segue que $\sup G < \infty$. Aplicando o supremo em ambos os lados da equação (1.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds &\leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t Le^{-kt}e^{ks}e^{-ks}\|x(s)\|ds + \sup G,\\
&\leq L\|x\|_{\mathbf{E}}\int_0^t e^{-kt}e^{ks}ds + \sup G\\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}e^{-kt}\int_0^t e^{ks}ds + \sup G\\
&= L\|x\|_{\mathbf{E}}\left[\frac{1}{k} - \frac{e^{-kt}}{k}\right] + \sup G.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\int_0^t \|F(x(s))\|ds \leq L\|x\|_{\mathbf{E}}\frac{1}{k} + \sup G < \infty. \tag{1.15}$$

Afirmação 2: *Para $k > L$, Φ é uma contração.*

De fato, começamos observando que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x(s)) - \Phi(y(s))\| &= \left\|\int_0^t [F(x(s)) - F(y(s))]ds\right\|\\
&\leq \int_0^t L\|x(s) - y(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da última equação por e^{k-t} e procedendo de maneira análoga ao caso da equação (1.15), teremos

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{L}{k}\|x - y\|_{\mathbf{E}}.$$

Logo, se $k > L$, Φ é contração. Daí segue que Φ possui um único ponto fixo x, que satisfaz (1.13), e consequentemente é solução de (1.12).

■

O próximo resultado, que não demonstraremos, dará informações sobre suavidade da solução de uma EDO com relação aos dados iniciais e parâmetros.

Teorema 1.4. *Sejam A um operador linear limitado sobre um espaço de Banach X, U um aberto em $\mathbb{R} \times X$, Δ um aberto em um espaço de Banach M. Suponha*

$f: U \times \delta \to X$ com f, $D_x f$, e $D_\lambda f$ contínuas sobre $U \times \delta$, e a aplicação $t \mapsto f(t, x, \lambda)$ localmente Hölder contínua.

Para $\mu > 0$, $\lambda \in \delta$, $(\tau, \xi) \in U$, seja $x(t) = x(t, \tau, \xi, \lambda, \mu)$ a solução maximal de

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \mu A x &= f(t, x, \lambda) \\ x(\tau) &= \xi. \end{aligned}$$

Então a aplicação $(\xi, \lambda, \mu) \mapsto x(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$ é de classe C^1 de $X \times \delta \times \mathbb{R}^+$ em X no domínio de existência da solução. As derivadas $u(t) = D_\xi x(t)$, $v(t) = D_\lambda x(t)$ e $w(t) = D_\mu x(t)$ são soluções suaves de

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \mu A u &= D_x f(t, x(t), \lambda) u, \;\; u(\tau) = I; \\ \frac{dv}{dt} + \mu A v &= D_x f(t, x(t), \lambda) v + D_\lambda f(t, x(t), \lambda), \;\; v(\tau) = 0; \\ \frac{dw}{dt} + \mu A w &= D_x f(t, x(t), \lambda) w - A x(t), \;\; w(\tau) = 0. \end{aligned}$$

Prova. (Ver [20], p.64, Teorema 3.4.4 ou [9], p. 41, Teorema 2.5).

■

Observação 1.2. *Para o caso do sistema autônomo*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x), \;\; t > \tau \\ x(\tau) &= \xi. \end{aligned}$$

onde $f: X \to X$ é uma função Lipschitziana e com derivada de Fréchet f' contínua, temos que $u(t) = D_\xi x(t)$ é solução suave de

$$\frac{du}{dt} = D_x f(x(t)), \;\; u(\tau) = I,$$

onde I denota o operador identidade sobre X.

1.2 Atratores Globais para Semigrupos

Nesta seção, abordaremos alguns resultados de teoria de semigrupos contínuos e conjuntos invariantes. Para isto, seguimos as referências [19], [26] e [25].

1.2.1 Semigrupos

Definição 1.1. *Sejam X um espaço métrico completo e $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Um C^r- Semigrupo, com $r \geq 0$, é uma família de operadores $T(t) : X \to X, t \geq 0$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $T(0) = I$;
2. $T(t+s) = T(t)T(S), \forall t, s \geq 0$;
3. *$T(t)x$ é contínuo em t e x, e tem derivada de Fréchet contínua em x até a ordem r para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$.,*

onde I é o operador identidade sobre X.

A teoria de semigrupos é muito utilizada no estudo de sistemas dinâmicos, pois em geral, sua evolução pode ser descrita por um semigrupo.

Proposição 1.1. *Seja X um espaço de Banach. Se $F : X \to X$ é uma função globalmente Lipschitz e com derivada de Fréchet contínua para todo $x \in X$, então a solução do problema de Cauchy*

$$x' = F(x), x(0) = x_0 \tag{1.16}$$

define um C^1-Semigrupo $T(t) : X \to X, t \geq 0$.

Prova. O sistema (1.16) é equivalente ao problema dado por

$$x(t) = x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t F(x(s))ds.$$

Defina $T(t)x_0 = x(t) = x(t, x_0), t \geq 0$. Veja que

$$T(0)x_0 = x(0, x_0) = x_0,$$

ou seja, $T(0) = I$. Também temos para $t, \tau \geq 0$ e $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} T(t+\tau)x_0 &= x(t+\tau, x_0) = x(t, x(\tau, x_0)) \\ &= T(t)x(\tau, x_0) = T(t)T(\tau)x_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$T(t+\tau) = T(t)T(\tau)$$

Resta mostrar que $T(t)x_0$ é contínuo em t e em x_0, e possui derivada de Frechet contínua em x até a ordem r, para $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times X$. A continuidade em t seque da definição de $T(t)x_0$. Veja também que dados $x_0, y_0 \in X$, temos

$$\begin{aligned} \|T(t)x_0 - T(t)y_0\| &= \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|F(T(s)x_0) - F(T(t)y_0)\| ds \\ &\leq \|x_0 - y_0\| + \int_0^t K\|T(s)x_0 - T(s)y_0\| ds, \end{aligned}$$

onde K é a constante de Lipchitz de F. Usando o Lema de Gronwall na última inequação, temos

$$\|T(t)x_0 - T(t)y_0\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{Kt},$$

de onde segue a continuidade de $T(t)$ em x_0. Como F é contínua e F_x existe e também é contínua. Para provar que $T(t)x_0$ é diferenciável com relação à x_0, basta usar a Observação 1.2 referente ao Teorema 1.4.

■

Para qualquer $x \in X$, a *órbita positiva* por x,$\gamma^+(x)$, é definida por

$$\gamma^+(x) = \{T(t)x, t \geq 0\}.$$

Uma *órbita negativa* por x é uma função $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\phi(0) = x$, e para qualquer $s \leq 0, T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$, para $0 \leq t \leq -s$.

Uma *órbita completa* por x e uma função $\phi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e para qualquer $s \in \mathbb{R}, T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $t \geq 0$.

Observação 1.3. *Os operadores $T(t)$ podem não ser injetivos, de modo que uma órbita negativa pode não ser única. A injetividade de $T(t)$ equivale à "unicidade para trás"do sistema dinâmico, que algumas vezes aqui denotaremos por (BU) ou "backwards uniquiness". Quando $T(t), t > 0$ é injetivo, denotamos por $T(-t)$ sua inversa que leva $T(t)X$ em X. Neste caso, a família de operadores que satisafaz a Definição 2.1 é chamada de um C^r-grupo.*

Dado um ponto $u_0 \in X$, define-se uma uma *órbita positiva* iniciando em u_0 como sendo

$$\bigcup_{t \geq 0} T(t)u_0,$$

e de maneira análoga, defini-se uma *órbita negativa* terminando em u_0 como sendo o conjunto

$$\bigcup_{t \leq 0} T(-t)^{-1}u_0.$$

Uma *órbita completa* por u_0 é a união das órbitas positivas e negativas por u_0.

Agora iremos exibir alguns conceitos e propriedades de alguns tipos de subconjuntos para um semigrupo $T(t)$.

Definição 1.2. *Para qualquer $B \subset X$, definimos o conjunto ω-**limite** de B, $\omega(B)$, e o conjunto α-**limite** de B, $\alpha(B)$, respectivamente como*

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}, \quad \alpha(B) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} T(-t)^{-1}B}$$

O próximo lema irá fornecer uma caracterização para conjuntos ω-limite.

Lema 1.2. *Dado $\varphi \in X$, $\varphi \in \omega(B)$ se, e somente se, existe uma sequência (φ_n) em B e um sequência $t_n \to \infty$ tal que $T(t_n)\varphi_n \to \varphi$ quando $n \to \infty$. Analogamente, $\varphi \in \alpha(B)$ se, e somente se, existe uma sequência $(\varphi_n) \subset B$, $t_n \to -\infty$, tal que $T(t_n)\varphi_n \to \varphi$, quando $n \to \infty$.*

Prova. Dado $\varphi \in \omega(B)$, temos

$$\varphi \in \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}, \forall s \geq 0,$$

daí segue que existe uma sequência (a_n) em $\bigcup_{t \geq s} T(t)B$ tal que $a_n \to \varphi$ quando $n \to \infty$. Assim existe n_0 tal que

$$n \geq n_0 \implies \|a_n - \varphi\|_X < 1.$$

Já que $a_{n_0} \in \cup_{t \geq 0} T(t)B$, segue que $a_{n_0} = T(t_0)\varphi_0$, para algum $t_0 \geq 0$ e algum $\varphi_0 \in B$. Considere $x_0 = a_{n_0}$.

Como $\varphi \in \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}$, vai existir uma sequência (b_n) em $\cup_{t\geq 1}T(t)B$ tal que $b_n \to \varphi$, daí existe n_1 com $n_1 \geq n_0$ tal que se $n \geq n_1$, então

$$\|b_n - \varphi\|_X < \frac{1}{2}.$$

Já que $b_{n_1} \in \bigcup_{t\geq 1} T(t)B$, seque que existem $t_1 \geq 0$ e $\varphi_1 \in B$ tais que $b_{n_1} = T(t_1)\varphi_1$. Defina $x = b_{n_1}$. Repetindo este procedimento obtemos uma sequência (x_n) com $x_n = T(t_n)\varphi_n, t \geq n, \varphi_n \in B$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_0 \implies \|x_n - \varphi\|_X < \frac{1}{1+n} < \epsilon,$$

consequentemente, existem sequências (φ_n) em B e $t_n \to \infty$ tal que $T(t_n)\varphi_n \to \varphi$ quando $n \to \infty$.

Reciprocamente, se $T(t_n)\varphi_n \to \varphi$ quando $t_n \to \infty$, podemos obter (passando à uma subsequência se necessário) $t_n \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\varphi \in \overline{\{T(t_n)\varphi_n, n \geq 0\}}.$$

Mas qualquer subsequência de $(T(t_n)\varphi_n, n \geq 0)$ também converge para φ, de modo que

$$\varphi \in \overline{\{T(t_n)\varphi_n, n \geq s\}}, \forall s \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$\varphi \in \overline{\{T(t_n)\varphi_n, n \geq s\}} \subset \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}, \forall s \in \mathbb{N},$$

e portanto,

$$\varphi \in \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B},$$

E de maneira análoga, pode-se mostrar que $\varphi \in \alpha(B)$ se, e somente se, existe uma sequência (ϕ_n) convergindo para ϕ em X e uma sequência $t_n \to \infty$, tal que $T(t_n)\phi_n \in B, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Definição 1.3. *Dizemos que um conjunto $B \subset X$ é positivamente inveriante sob o semigrupo $T(t)$ se*

$$T(t)B \subset B, \forall t \geq 0,$$

de maneira análoga, B é dito ser negativamente invariante se

$$T(t)B \subset B, \forall t \leq 0$$

Definição 1.4. *Um conjunto $B \subset X$ é dito ser invariante sob o semigrupo $\{T(t)\}$ se B é positivamente e negativamente invariante sob $T(t)$, ou seja,*

$$T(t)B = B, \forall t \geq 0. \tag{1.17}$$

Quando os operadores $T(t)$ são injetivos, a relação (1.17) implica que $T(-t)$ está bem definido para $t \geq 0$ e que $T(t)B = B, \forall t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.5. *Um subconjunto Y de um espaço metrico X é dito ser um conjunto relativamente compacto se o seu fecho é compacto.*

Lema 1.3. *Assuma que para algum subconjunto $B \subset X, B \neq \emptyset$, e para algum $t_0 > 0$, o conjunto $\cup_{t \geq t_0} T(t)B$ é relativamente compacto em X. Então $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. De maneira similar, se os conjuntos $T(-t)^{-1}B, t \geq 0$, são não vazios e se para algum $t_0 > 0, \cup_{t \geq t_0} T(-t)^{-1}B$ for realativamente compacto, então $\alpha(B)$ é não-vazio, compacto e invariante.*

Prova. Como B é não vazio, temos que $\cup_{t \geq s} T(t)B$ é não vazio para todo $s \geq 0$, o que implica que os conjuntos $\overline{\cup_{t \geq s} T(t)B}$ são compactos não vazios.

Como

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B},$$

segue que $\omega(B)$ é fechado não vazio. Observe também que dado $\phi \in \omega(B)$, tem-se $\phi \in \overline{\cup_{t \geq s} T(t)B}, \forall s \geq 0$, particularmente, $\phi \in \overline{\bigcup_{t \geq t_0} T(t)B}$, para um $t_0 > 0$ arbitrário, consequentemente, $\omega(B) \subset \overline{\bigcup_{t \geq t_0} T(t)B}$, ou seja, $\omega(B)$ é um subconjunto fechado de um conjunto compacto, logo $\omega(B)$ é compacto. Portanto $\omega(B)$ é compacto não vazio.

Usando o Lema 1.2, temos que $T(t)B = B, \forall t \geq 0$. De fato, se $\varphi \in T(t)\omega(B)$, então $\varphi = T(t)\phi, \phi \in \omega(B)$ e como $T(t)$ é um operador contínuo de X em X, temos que

$$T(t + t_n)\phi_n = T(t)T(t_n)\phi_n \to T(t)\phi = \varphi,$$

onde (ϕ_n) e (t_n) são sequências definidas como no Lema 1.2. Portanto $\varphi \in \omega(B)$.

Reciprocamente, seja $\phi \in \omega(B)$, considerando novamente as sequências (ϕ_n), (t_n), dadas pela caracterização do $\omega(B)$, e observando que o conjunto de pontos da sequência $(T(t_n - t)\phi_n), t_n \geq t$ e relativamente compacto em X, temos que existe uma subsequência $t_{n_i} \to \infty$ e $\varphi \in X$ tal que

$$T(t_{n_i} - t)\phi_{n_i} \to \varphi, \text{ quando } n_i \to \infty,$$

seque então do Lema 1.2 que $\varphi \in \omega(B)$, e pela continuidade de $T(t)$ segue que

$$T(t_{n_i})\phi_{n_i} = T(t)T(t_{n_i} - t)\phi_{n_i} \to T(t)\phi, \text{ quando } n_i \to \infty,$$

mas $T(t_{n_i})\phi_{n_i} \to \phi$. Assim,

$$\phi = T(t)\varphi$$

e portanto, $\phi \in T(t)\omega(B)$.

Para $\alpha(B)$ a demonstração é feita de maneira análoga.

■

1.2.2 Conjunto Absorvente e Conjunto Atrator

Nesta subseção mostramos a existência de determinados tipos de conjuntos compactos e invariantes sob a ação de um semigrupos.

Definição 1.6. *Um conjunto $B \subset X, B \neq \emptyset$ é dito ser atrator sob o semigrupo $T(t)$ se:*

1. *B é um conjunto invariante sob $T(t)$;*

2. *Se existe uma vizinhança aberta U de X tal que para todo $u_0 \in U, T(t)u_0$ tende para B quando $t \to \infty$, ou seja,*

$$d(T(t)u_0, B) \to 0, \text{ quando } t \to \infty. \tag{1.18}$$

Se B é um atrator então a maior vizinhança aberta U que satisfaz a condição 2 é chamada **bacia de atração** de B. Dizemos que B atrai uniformemente um conjunto $C \subset U$ se

$$d(T(t)C, B) \to 0, \text{ quando } t \to \infty,$$

onde $d(C_1, C_2)$ é a semi-distância entre dois conjuntos, definida por

$$d(C_0, C_1) = \sup_{x \in C_0} \inf_{y \in C_1} d(x, y).$$

Nesse caso, também dizemos que B *atrai* C.

Definição 1.7. *Para um C^r-semigrupo $T(t), t \geq 0$, um conjunto compacto invariante A é dito ser* ***compacto invariante maximal*** *se todo conjunto compacto invariante do semigrupo está em A. Um* ***atrator global*** *é um conjunto compacto invariante maximal que atrai os subconjuntos limitados $C \subset X$.*

Para mostrar a existência de atratores globais, usaremos a definição conjunto absorvente, dada abaixo:

Definição 1.8. *Seja $B \subset X$ e U um conjunto aberto de X contendo B. Dizemos que B é absorvente em U se a órbita de qualquer subconjunto limitado de U entra em B após algum tempo, ou seja, dado $B_0 \subset U$, B_0 limitado, existe $t_0 = t_0(B) > 0$ tal que $T(t)B_0 \subset B$, para todo $t \geq t_0$.*

A existência de um atrator global $\mathcal{B}$ implica na existência de um conjunto absorvente para um semigrupo $T(t)$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, seja $V_\epsilon = \cup_{x \in B} B(x, \epsilon)$, (onde $B(x, \epsilon)$, $x \in \mathcal{B}$) são bolas abertas de raio $\epsilon > 0$ e centros em elementos de $\mathcal{B}$), então para qualquer conjunto limitado $B_0 \subset X$, temos

$$d(T(t)B_0, B) \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Então $\mathcal{B}$ sendo um atrator global, segue que existe $t(\epsilon) > 0$ tal que

$$d(T(t)B_0, \mathcal{B}) \leq \frac{\epsilon}{2}, \forall t \geq t(\epsilon),$$

e portanto, $T(t)B_0 \subset V_\epsilon, \forall\ t \geq t(\epsilon)$. Segue então que V_ϵ é um conjunto absorvente. Para mostrar a recíproca da última afirmação, devemos adicionar pelo menos uma das seguintes hipóteses:

(**H1**) Os operadores $T(t)$ são **uniformemente compactos** para t grande, isto é, para todo conjunto limitado C existe t_0 tal que

$$\bigcup_{t \geq t_0} T(t)C$$

é relativamente compacto em X.

(**H2**) X é um espaço de Banach e para todo t, $T(t) = T_1(t) + T_2(t)$, onde os operadores $T_1(t)$ são uniformemente compactos para t suficientemente grande e para todo conjunto limitado $C \in X$,

$$r_c(t) = \sup_{\varphi \in C} \|T_2(t)\varphi\|_X \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Lema 1.4. *Suponhamos válida a hipótese (H2). Se (φ_n) é limitada e $t_n \to \infty$, então*

1. $T_2(t_n)\varphi_n \to 0$;

2. $T_1(t_n)\varphi_n$ *é convergente se, e somente se,* $T(t_n)\varphi_n$ *converge (e os limites serão iguais).*

Prova. Se (**H2**) vale, então

$$0 \leq \|T_2(t_n)\varphi_n\|_X \leq \sup_{\varphi \in C} \|T_2(t_n)\varphi\|_X = r_c(t_n) \to 0, \text{ quando } t_n \to \infty,$$

onde C é um conjunto limitado que contém os termos da sequência (φ_n).

Para a segunda parte do lema, observe que

$$T(t_n)\varphi_n = T_1(t_n)\varphi_n + T_2(t_n)\varphi_n,$$

de onde segue que $T(t_n)\varphi_n$ converge se, e somente se, $T_1(t_n)\varphi_n$ converge, e quando convergem, convergem para o mesmo limite.

■

Lema 1.5. *Se o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz **(H1)** e **(H2)**, então para qualquer conjunto limitado não vazio B de X, $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante.*

Prova. Supondo (**H1**) temos, pelo Lema 1.3, que $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. Supondo agora a hipótese (**H2**), combinando os Lemas 1.2 e 1.4, temos que

$$\omega(B) = \omega_1(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T_1(t)B},$$

De fato, dado $\varphi \in \omega(B)$, existe uma sequência (φ_n) em B e uma sequência $t_n \to \infty$ tal que

$$T(t_n)\varphi_n \to \varphi \text{ quando } n \to \infty,$$

e pelo Lema 1.4, também temos $T_1(t_n)\varphi_n \to \varphi$, ou seja, $\varphi \in \omega_1(B)$, o que implica $\omega(B) \subset \omega_1(B)$. De maneira análoga se mostra $\omega_1(B) \subset \omega(B)$.

Note agora que os conjuntos dados por $\overline{\cup_{t \geq s} T_1(t)B}$ são não vazios, fechados e são tais que $\overline{\cup_{t \geq s_1} T_1(t)B} \subset \overline{\cup_{t \geq s_2} T_1(t)B}$ se $s_1 \geq s_2$. Pela hipótese (**H2**), temos que $\overline{\cup_{t \geq t_0} T_1(t)B}$ é compacto para t_0 suficientemente grande, daí tem-se que $\omega_1(B) = \omega(B)$ é compacto e não vazio.

Resta mostrar que $\omega(B)$ é invariante, ou seja, $T(t)\omega(B) = \omega(B)$. Para isto, tome $\psi \in T(t)\omega(B)$ dada por $\psi = T(t)\varphi$, para algum $\varphi \in \omega(B)$. Pelo Lema 1.2, existem sequências $\varphi_n \in B$ e $t_n \to \infty$ tais que

$$T(t)T(t_n)\varphi_n = T(t + t_n)\varphi_n \to T(t)\varphi = \psi,$$

e daí $\psi \in \omega(B)$, implicando

$$T(t)\omega(B) \subset \omega(B).$$

Considere agora $\varphi \in \omega(B)$. Para $t_n - t \geq t_0$ (t_0 suficientemente grande), temos

$$T(t_n - t)\varphi_n = T_1(t_n - t)\varphi_n + T_2(t_n - t)\varphi_n$$

Por hipótese, o conjunto de pontos da sequência $(T_1(t_n - t)\varphi_n)$ é relativamente compacto, pois

$$\overline{\bigcup_{n=n_o}^{\infty} T_1(t_n - t)\varphi_n} \subset \overline{\bigcup_{t \geq t_0} T_1(t)B}.$$

Então existe uma subsequência convergente,

$$T_1(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi, \text{ quando } n_i \to \infty,$$

e como $T_2(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to 0$ (pois trata-se de uma subsequência de $(T_2(t_n - t)\varphi_n)$), temos

$$T(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi, \text{ quando } n_i \to \infty,$$

daí, $\psi \in \omega(B)$ e pela continuidade de $T(t)$

$$T(t)\psi = \lim_{n_i \to \infty} T(t)T(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} = \varphi.$$

Logo, $\varphi \in T(t)\omega(B)$, e portanto,

$$\omega(B) \subset T(t)\omega(B).$$

Das inclusões, acima segue a invariância de $\omega(B)$.

■

Teorema 1.5. *Seja X um espaço métrico e $T(t) : X \to X, t \geq 0$, um C^r-semigrupo para algum $r \geq 0$, com $T(t)$ satisfazendo a hipótese (**H1**) ou (**H2**). Suponha também que existam um conjunto aberto U e um subconjunto limitado $B \subset U$, tal que B é absorvente em U. Então $\omega(B)$ é o atrator compacto maximal que atrai os conjuntos limitados de U.*

Prova. Considere inicialmente (**H1**) válido. Pelo Lema 1.3, temos $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante pois, por hipótese, $\cup_{t \geq t_0} T(t)B$ é relativamente compacto. Suponha por contradição, que $\omega(B)$ não seja um conjunto atrator, tem-se que existe um conjunto limitado C tal que

$$d(T(t)C, \omega(B)) \nrightarrow 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Significa que existem $\epsilon > 0$ e uma sequência $t_n \to \infty$ tais que

$$d(T(t_n)C, \omega(B)) \geq \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $b_n \in C$ de modo que

$$d(T(t_n)b_n, \omega(B)) \geq \epsilon > 0.$$

Como B é absorvente,tem-se $T(t_n)C \subset B$ para n suficientemente grande. Portanto, $T(t_n)b_n$ estará contido em B para todo $t \geq t_{n_0}$, para algum t_{n_0}. Por (**H1**), o conjunto de pontos da sequência $(T(t_n)b_n)$ é relativamente compacto, o que implica na existência de uma subsequência convergente tal que

$$b = \lim_{n_i \to \infty} T(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} T(t_{n_i} - t_{n_0})T(t_{n_0})b_{n_i}.$$

E como $T(t_{n_0})b_n \in B$, segue que $b \in \omega(B)$, o que implica em

$$d(T(t_{n_i}b_{n_i}, \omega(B)) \to 0,$$

absurdo, pois (b_{n_i}) é uma subsequência de (b_n).

Resta mostrar que $\omega(B)$ e maximal. Seja A um atrator limitado tal que $A \subset U$. Como A é invariante e B é um conjunto absorvente, temos para t suficientemente grande, $A = T(t)A \subset B$, o que implica em $A = \omega(A) \subset \omega(B)$, mostrando que $\omega(B)$ é maximal.

Suponha agora que (**H2**) se verifica. Pelo Lema 1.5, $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. Iremos mostrar que $\omega(B)$ é atrator. Suponha, por absurdo, que $\omega(B)$ não seja atrator, procedendo de maneira análoga ao que foi feito na primeira parte desta demonstração, tem-se que existe algum limitado $C \subset U$ e um $\epsilon > 0$ tal que

$$d(T(t_n)b_n, \omega(B)) \geq \epsilon > 0$$

para alguma sequência $b_n \in C$.

Como B é absorvente, $T(t_n)C$ estará contido em B para t suficientemente grande. Pela hipótese (**H2**), o conjunto de pontos da sequência $(T_1(t_n)b_n)$ é relativamente compacto, portanto existe uma subsequência convergente (b_{n_i}) tal que

$$b = \lim_{n_i \to \infty} T(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} T(t_{n_i} - t_{n_0})T(t_{n_0})b_{n_i}.$$

E como $T(t_{n_0})b_n \in B$, segue então que $b \in \omega(B)$, o que implica em

$$d(T(t_{n_i})b_{n_i}, \omega(B)) \to 0,$$

absurdo. Mostramos então que $\omega(B)$ é, de fato, um atrator. A maximalidade de $\omega(B)$ é provada de maneira análoga ao caso em que a hipótese (**H1**) se verifica.

■

1.3 Sistema Gradiente

Nesta seção, voltamos nossa atenção para uma classe especial de semigrupos, para os quais existe uma função energia que decresce ao longo das órbitas.

Definição 1.9. *Seja* $T(t) : X \to X, t \geq 0, r \geq 0$, *um* C^r*-semogrupo. Uma função* $V : X \to \mathbb{R}$ *é chamada de* ***funcional de Lyapunov*** *se:*

1. $V(x)$ *é limitado inferiormente*;

2. $V(x) \to \infty$, *quando* $|x| \to \infty$;

3. $V(T(t)x)$ *é não crescente em* t *para todo* $x \in X$;

4. *Se* x *é tal que* $T(t)x$ *está definida para* $t \in \mathbb{R}$ *e* $V(T(t)x) = V(x)$ *para* $t \in \mathbb{R}$, *então* x *é um ponto de equilíbrio, ou seja,* $T(t)x = x, \forall t \geq 0$.

Definição 1.10. *Dizemos que um semigrupo* $T(t) : X \to X, t \geq 0, r \geq 0$, *é um* ***sistema gradiente*** *se*

1. *Cada órbita positiva limitada é pré-compacta*;

2. *Existe um funcional de Lyapunov para* $T(t)$.

Proposição 1.2. *Seja* $T(t) : X \to X, t \geq 0$, *um* C^r*-semigrupo e* E *o conjunto dos pontos de equilíbrio de* $T(t)$. *Se* $T(t)$ *é um sistema gradiente, então* $\omega(x) \subset E, \forall x \in X$. *Se uma órbita negativa* $\gamma^-(x)$ *é pré-compacta, então* $\alpha(x) \subset E, \forall x \in X$.

Prova. Se $T(t)$ um sistema gradiente então existe um funcional de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$. Sendo as órbitas positivas pré-compactas, segue que o conjunto $V(\overline{\{T(t)x; t \geq 0\}})$ é compacto, logo temos que o conjunto $\{V(T(t)x); t \geq 0\}$ é limitado inferiormente, ou seja, existe um $c \geq 0$ tal que

$$V(T(t)x) > c, \forall t \geq 0, x \in X.$$

Suponha que $V(T(t)x)$ é não constante, como V é não crescente ao longo das órbitas, temos que

$$V(T(t)x) \to c, \text{ quando } t \to \infty$$

.

Considere $T(t)y, t \geq 0$ e $y \in \omega(x)$, então existe uma sequência $t_n \to \infty$ tal que $T(t_n)x \to y$. Pela continuidade de $T(t)$, temos

$$T(t)T(t_n)x \to T(t)y,$$

Pela continuidade de V, temos

$$V(T(t)T(t_n)x) \to V(T(t)y),$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} V(T(t)y) &= \lim_{n\to\infty} V(T(t)T(t_n)x) \\ &= \lim_{n\to\infty} V(T(t+t_n)x) \\ &= c, \end{aligned}$$

ou seja, $V(T(t)y) = c$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $y \in \omega(x)$. Portanto $V(T(t)y) = V(y)$, o que implica que y é ponto de equilíbrio, ou seja, $y \in E$.

Suponha agora que $\gamma^-(x)$ é uma órbita pré-compacta. Seja $y \in \alpha(x)$, então existe uma sequência $t_n \to -\infty$ tal que $T(t_n)x \to y$ quando $n \to \infty$. Considere uma sequência (t_n) de modo que $t_{n-1} - t_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $V(T(t)x)$ é não crescente, seque para $t \in (0,1)$,

$$V(T(t_{n-1})x) \leq V(T(t_n+1)x) \leq V(T(t_n+t)x) \leq V(T(t_n)x), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí, por continuidade,

$$V(T(t_n+t)x) \to V(y), \text{ quando } n \to \infty$$

Mas também tem-se

$$V(T(t_n+t)x) \to V(T(t)y), \text{ quando } n \to \infty,$$

portanto, $V(T(t)y) = V(y)$, ou seja, $y \in E$.

■

Como consequência de um sistema gradiente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.6. (Princípio de Invariância de La Salle) *Seja V um funcional de Lyapunov definido em um espaço métrico completo C, defina $E = \{x \in C : V'(x) = 0\}$ e M=conjunto maximal invariante em E. Se $\{T(t)x_0, t \geq 0\}$ estiver contido em um conjunto compacto C, então $T(t)x_0 \to M$ quando $t \to \infty$.*

Prova. (Ver [20], Teorema 4.3.4., p. 92).

■

1.4 Semigrupos Fortemente Contínuos

Exibiremos agora algumas propriedades semigrupos fortemente contínuos e de determinados tipos de operadores que geram tais tipos de semigrupos. Para isto, seguimos: [13], [14] e [23].

Definição 1.11. *Dizemos que um semigrupo $T(t) : X \to X$ é **fortemente contínuo** se*

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$

para cada $x \in X$.

Estaremos também interessados em operadores A que geram semigrupos fortemente contínuos.

Teorema 1.7. *Seja $T(t)$ um semigrupo fortemente contínuo. Então exitem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ para } 0 \leq t < \infty.$$

Prova. (Ver [23], p. 4, Teorema 2.2).

Definição 1.12. *Seja $T(t)$ um semigrupo fortemente contínuo sobre X. Considere o conjunto*

$$D(A) := \left\{ x \in X | \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe em } X \right\}$$

e para $x \in D(A)$,

$$Ax := \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Chamamos $A : D(A) \to X$ *de gerador (infinitesimal) do semigrupo* $T(t)$.

Teorema 1.8. *Assuma* $x \in D(A)$. *Então*

(i) $T(t)x \in D(A)$ *para cada* $t \geq 0$

(ii) $AT(t)x = T(t)Ax$ *para cada* $t \geq 0$

(iii) *A aplicação* $t \mapsto T(t)x$ *é diferenciável para cada* $t \geq 0$

(iv) $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$ *para* $t \geq 0$.

(v) *A série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \tag{1.19}$$

converge para $T(t)$ *uniformemente em cada intervalo compacto de* $\mathbb{R}$.

Prova. Seja $x \in D(A)$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0+} \frac{T(s)T(t)x - T(t)x}{s} &= \lim_{s\to 0+} \frac{T(t)T(s)x - T(t)x}{s} \\ &= T(t) \lim_{s\to 0+} \frac{T(s)x - x}{s} = T(t)Ax. \end{aligned}$$

Então $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$, provando as afirmações (i) e (ii). Sejam $x \in D(A)$, $h > 0$. Então se $t > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \left\{ \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\} &= \lim_{h\to 0+} \left\{ T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} \right) - T(t)Ax \right\} \\ &= \lim_{h\to 0+} \left\{ T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) + \right. \\ &+ \left. (T(t-h) - T(t))Ax \right\} = 0. \end{aligned}$$

Como $T(t)$ é um semigrupo fortemente contínuo e $\frac{T(h)x-x}{h} \to Ax$, quando $h \to 0$, temos

$$\lim_{h\to 0+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} = T(t)Ax.$$

De maneira similar,

$$\lim_{h\to 0+}\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h}=T(t)\lim_{h\to 0+}\frac{T(h)x-x}{h}=T(t)Ax.$$

Então $\frac{d}{dt}T(t)x$ existe para cada $t>0$ e é tal que $\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax$.

Para provar a última afirmação é suficiente mostrar que a sequência de aplicações $T_k:\mathbb{R}\to X$ definida por

$$T_0(t)=I,\ T_{k+1}(t)=I+\int_{t_0}^{t}A(T_k(t))dt$$

é uma sequência de somas parciais da série (1.4).

De fato,

$$\begin{aligned}
T_1(t) &= I+\int_0^t A(I)ds=I+At\\
T_2(t) &= I+\int_0^t A(I+As)ds=I+tA+\frac{t^2A^2}{2!}\\
&\ \ .\\
&\ \ .\\
T_k(t) &= I+\int_0^t A\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{s^jA^j}{j!}\right)ds=\sum_{j=0}^{k}\frac{t^jA^j}{j!}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.9. (Propriedades dos Geradores). *O domínio $D(A)$ é denso em X e A é um operador fechado.*

Prova. (Ver [14], pp. 415-416).

Teorema 1.10. (Hille-Yosida) *Seja (A,D(A)) um operador linear em um espaço de Banach X e seja $\omega\in\mathbb{R}$, $M\geq 1$ constantes. Então as seguintes propriedades são equivalentes*

1. *$(A,D(A))$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo*

$$\|T(t)\|\leq Me^{\omega t},\ \textit{para } t\geq 0$$

2. *$(A,D(A))$ é fechado, densamente definido, e para cada $\lambda>\omega$, temos $\lambda\in\rho(A)$ e*

$$\|\,[(\lambda-\omega)(\lambda I-A)]^n\,\|\leq M$$

3. $(A, D(A))$ *é fechado, densamente definido, e para cada* $\lambda \in \mathbb{C}$ *com* $Re\lambda > \omega$, *temos* $\lambda \in \rho(A)$ *e*

$$\|(\lambda I - A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n}$$

Prova. (Ver [13], p. 77, Teorema II 3.8).

Capítulo 2

Variedades Invariantes para Semigrupos com Tricotomia Exponencial

Considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x). \tag{2.1}$$

num espaço de Banach X, onde A é um operador linear limitado e $f : X \to X$ é uma aplicação continua.

Seguindo as referências [3] e [11], vamos analisar as soluções de 2.1 a partir das informações de

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{2.2}$$

Assumiremos que X é um espaço de Banach com a norma $|\cdot|$ e que o operador linear A gera um semigrupo de operadores lineares e limitados $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ fortemente contínuo. Isto é:

1. para cada $t \geq 0$, $T(t) : X \to X$ é um operador linear limitado,
2. $T(s)T(t) = T(s+t)$ para todos $s, t \geq 0$,
3. $T(0) = I$, onde I denota o operador identidade,
4. para cada $\varphi \in X$, $T(t)\varphi$ é contínua para $t \geq 0$.

5. $\lim\limits_{t\to 0+}\|T(t)x-x\|=0$ para todo $x\in X$.

Assim, pelo Teorema 2.3, existem constantes $M>0,\mu>0$ tais que

$$|T(t)\varphi|\leq Me^{ut}|\varphi| \text{ para todo } \varphi\in X, t\geq 0. \tag{2.3}$$

Iremos assumir também que para cada $t\geq 0$ $T(t)$ é injetiva, ou seja, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz a hipótese (**B.U**) (unicidade "para trás"). Também vamos assumir as seguintes hipóteses:

(a) O espaço de Banach X admite a seguinte decomposição

$$X=\pi_-X\oplus\pi_0X\oplus\pi_+X,$$

onde π_-, π_0, π_+, são projeções lineares contínuas sobre X (Ver Observação C.4 e Teorema C.9).

A Condição (a) implica também nas relações

$$\pi_-\pi_0=\pi_0\pi_-=\pi_-\pi_+=\pi_+\pi_-=\pi_0\pi_+=\pi_+\pi_0=0$$

$$\pi_-\pi_-=\pi_-,\pi_0\pi_0=\pi_0,\pi_+\pi_+=\pi_+,\pi_-+\pi_0+\pi_+=I$$

Se $\phi\in X$, escrevemos $\phi_-=\pi_-\phi,\phi_0=\pi_0\phi,\phi_+=\pi_+\phi$. Usaremos também a norma equivalente $\|\cdot\|$ sobre X, onde $\|\phi\|=|\phi_-|+|\phi_0|+|\phi_+|$.

Para cada $t\geq 0, T(t)$ comuta com os operadores π_-,π_0,π_+, então cada subespaços π_-X,π_0X,π_+X são invariantes sobre $T(t)$. Mais ainda, $T(t)$ pode ser estendido para formar um grupo de operadores lineares sobre $\pi_0X\oplus\pi_+X$. Isto é:

1. para cada $t\in\mathbb{R}$, $T(t):\pi_0X\oplus\pi_+X\to\pi_0X\oplus\pi_+X$ é um operador linear limitado,

2. $T(s)T(t)\phi=T(s+t)\phi$, para todos $s,t\in\mathbb{R},\phi\in\pi_0X\oplus\pi_+X$,

3. para cada $\phi\in\pi_0X\oplus\pi_+X$, $T(t)\phi$ é contínua para $t\in\mathbb{R}$.

(b) Existem contantes $a_-\geq 0,a_+\geq 0,min(a_-,a_+)>a_0\geq 0,K\geq 1$ tais que

$$(i)\quad \|T(t)\phi_-\| \leq Ke^{-a_-t}\|\phi_-\| \text{ para todo } \phi\in X,t\geq 0, \tag{2.4}$$

$$(ii)\quad \|T(t)\phi_0\| \leq Ke^{a_0|t|}\|\phi_0\| \text{ para todo } \phi\in X,t\in\mathbb{R}, \tag{2.5}$$

$$(iii)\quad \|T(t)\phi_+\| \leq Ke^{a_+t}\|\phi_+\| \text{ para todo } \phi\in X,t\leq 0. \tag{2.6}$$

Sem perda de generalidade, assumiremos $a_0 > 0$.

(c) Seja η uma função contínua, de valores reais, não decrescente sobre $[0, \infty]$ com $\eta(0) = 0$. Seja $f : X \to X$ um operador contínuo tal que

1. $f(0) = 0$
2. $\|f(\phi) - f(\psi)\| \leq \eta(r)\|\phi - \psi\|, \|\phi\|, \|\psi\| \leq r$.

Considere agora a equação integral

$$w(t) = T(t)w(0) + \int_0^t T(t-s)f(w(s))ds. \tag{2.7}$$

A equação (2.7) uma fórmula de "variação das constantes"no caso em que X tem dimensão infinita.

Iremos considerar apenas soluções contínuas de (2.7) para $t \geq 0$.

Lema 2.1. *Seja $\tau \geq 0$ e $w : [0, \tau] \to X, y : [-\tau, 0] \to X$ funções contínuas tais que*

$$y(t) = w(t + \tau) \text{ para todo } t \in [-\tau, 0]. \tag{2.8}$$

Se w satisfaz (2.7) em $[0, \tau]$ então y satisfaz

$$T(-t)y(t) = y(0) + \int_0^t T(-s)f(y(s))ds \text{ para todo } t \in [-\tau, 0] \tag{2.9}$$

Reciprocamente, se (BU) vale e y satisfaz (2.9), então w satisfaz (2.7) em $[0, \tau]$.

Prova. A primeira parte do teorema é um cálculo direto, usando o fato de que operadores lineares limitados comutam com sinal de integração. Para provar a segunda parte, suponha y satisfazendo (2.9). É fácil ver que

$$T(t-s)[w(t) - T(t)w(0) - \int_0^t T(t-s)f(w(s))ds] = 0, \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.10}$$

Então w satisfaz (2.7) em $[0, \tau]$ por (BU).

■

Consideramos uma solução de (2.7) em um intervao $[-\tau, 0], \tau \geq 0$, uma função $y : [-\tau, 0] \to X$ tal que $w(\cdot)$ dado por (2.8) é uma solução de (2.7) em $[0, \tau]$. O Lema 2.1 dá uma condição suficiente para que y seja uma solução.

Defina para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} f_\lambda(\varphi) &= f(\varphi), \quad \text{se } \|\varphi\| \leq \lambda, \\ f_\lambda(\varphi) &= f_\lambda\left(\frac{\lambda\varphi}{\|\varphi\|}\right), \quad \text{se } \|\varphi\| > \lambda. \end{aligned} \tag{2.11}$$

As propriedades de f e η asseguram a existência de uma função contínua e não-decrescente $\nu(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, $\nu(0) = 0$, tais que

$$\|f_\lambda(\varphi)\| \leq \nu(\lambda)\lambda, \ \|f_\lambda(\varphi) - f_\lambda(\psi)\| \leq \nu(\lambda)\|\varphi - \psi\|, \ \forall \varphi, \psi \in X \tag{2.12}$$

Com o intuito de estudar o comportamento global da equação (2.7) investigaremos o comportamento local de

$$w(t) = T(t)w(0) + \int_0^t T(t-s)f_\lambda(w(s))ds \tag{2.13}$$

Lema 2.2. *Para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi \in X$ existe uma única solução contínua $w(t)$ de (2.13) com $w(0) = \varphi$.*

Prova. Seja $\tau > 0$. Defina G como sendo o conjunto das funções contínuas $g : [0, T] \to X$ tais que $g(0) = \varphi$. Seja $\delta \geq 0$ e defina $\|g\|_\delta = \sup\limits_{t \in [0,T]} e^{-\delta t}\|g(t)\|$. Iremos mostrar que G forma um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\delta$. Para $g \in G$, $t \in [0, T]$.

De fato, suponha (g_n) uma sequência de Cauchy em G. Temos que para todo $\varepsilon > 0$ exite $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m, n \geq n_0$ implicam em

$$\|g_n - g_m\|_\delta < \frac{\varepsilon e^{-\delta T}}{2},$$

de onde segue que

$$\|g_n - g_m\|_\delta = \sup_{t \in [0,T]} e^{-\delta t}\|g_n(t) - g_m(t)\| \frac{\epsilon e^{-\delta T}}{2}.$$

Logo

$$e^{-\delta T}\|g_n(t) - g_m(t)\| \leq e^{-\delta t}\|g_n(t) - g_m(t)\| < \frac{\varepsilon e^{-\delta T}}{2},$$

daí,

$$\|g_n(t) - g_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \in [0, T], \tag{2.14}$$

donde segue que $g_n(t)$ é de Cauchy em X para todo $t \in [0,T]$. Definindo $g(t) := \lim_{n\to\infty} g_n(t)$, temos que $g(t)$ é contínua para todo $t \in [0,T]$, pois $g(t)$ é o limite uniforme de funções contínuas. De fato, passando o limite quando $m \to \infty$ em (2.14), temos

$$\|g_n(t) - g_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad \|g_n(t) - g(t)\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Veja também que $g(0) = \lim_{n\to\infty} g_n(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi = \varphi$. Resta provar que $\|g\|_\delta < \infty$. Para isto, observe que

$$\begin{aligned} \|g(t)\| &= \|g(t) - g_n(t) + g_n(t)\| \\ &\le \|g(t) - g_n(t)\| + \|g_n(t)\|, \end{aligned}$$

implicando em

$$\begin{aligned} e^{-\delta t}\|g(t)\| &\le \|g - g_n\|_\delta + \|g_n\|_\delta \\ e^{-\delta t}\|g(t)\| &\le \|g - g_n\|_\delta + \|g_n\|_\delta \\ &< \infty, \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Portanto $\|g\|_\delta < \infty$,. Desse modo, segue que $g \in G$ e portanto, G é um espaço de Banach.

Agora, para $g \in G$, $t \in [0,T]$, defina

$$(Pg)(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s) f_\lambda(g(s))ds. \tag{2.15}$$

Escrevemos

$$\int_0^t T(t-s) f_\lambda(g(s))ds = \int_0^t T(s) f_\lambda(g(t-s))ds, \tag{2.16}$$

então, usando (2.3) e (2.11), segue que para duas funções $g, h \in G$, temos,

$$\begin{aligned} \|(Pg)(t) - (Ph)(t)\| &\le \int_0^t \|T(s)(f_\lambda(g(t-s)) - f_\lambda(h(t-s)))\|ds \\ &\le \int_0^t Me^{\mu s}\|(f_\lambda(g(t-s)) - f_\lambda(h(t-s)))\|ds \\ &\le \int_0^t Me^{\mu s}\nu(\lambda)\|g(t-s) - h(t-s)\|ds \\ &\le \int_0^t Me^{\mu s}\nu(\lambda)e^{\delta(t-s)}e^{-\delta(t-s)}\|g(t-s) - h(t-s)\|ds \\ &\le \int_0^t Me^{\mu s}\nu(\lambda)e^{\delta(t-s)}\|g - h\|_\delta ds. \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{-\delta t}\|(Pg)(t)-(Ph)(t)\| \leq \left(\int_0^t Me^{(\mu-\delta)s}\nu(\lambda)ds\right)\|g-h\|_\delta, \forall t\in[0,T].$$

Daí

$$\|(Pg)-(Ph)\|_\delta \leq \left(\int_0^t Me^{(\mu-\delta)s}\nu(\lambda)ds\right)\|g-h\|_\delta. \tag{2.17}$$

Considerando λ suficientemente pequeno, temos que $P:G\to G$ é uma contração, como X é completo, segue que P tem um único ponto fixo w (vide Teorema C.1), e isso completa a prova.

■

Uma bola aberta com centro em a e raio ε em um espaço de Banach Y será denotado por $B_\varepsilon(a,Y)$. Em particular, quando $a=0$, escrevemos $B_\varepsilon(Y)\equiv B_\varepsilon(0,Y)$.

Um subconjunto K de X é dito ser localmente positivamente (negativamente) invariante se existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $\varphi\in B_\varepsilon(X)\cap K$.

1. para $t>0$ suficientemente pequeno a solução $w(t)$ de (2.7) existe com $w(0)=\varphi$,

2. se para $\tau>0$ $w(t)$ existe e pertence à $B_\varepsilon(X)$ para todo $t\in[0,\tau]$, então $w(t)\in K$ para todo $t\in[0,\tau]$.

A invariância negativa é definida trocando $>$ por $<$ em 1 e 2 acima.

Suponha que um espaço de Banach X está decomposto como $X=\pi_1X\oplus\pi_2X$ para operadores lineares contínuos π_1,π_2. Então um subconjunto S de X contendo x_0 é dito ser tangente à π_2X em x_0 se $\|\pi_1(x-x_0)\|/\|\pi_2(x-x_0)\|\longrightarrow 0$ quando $x\longrightarrow x_0$ em S.

Defina

$$\Sigma=\{\chi:\pi_-X\oplus\pi_0X\longrightarrow\pi_+X:\|\chi(\varphi_-+\varphi_0)-\chi(\psi_-+\psi_0)\|\leq$$

$$\leq\|\varphi_-+\varphi_0-\psi_-+\psi_0\|, \text{para quaisquer } \ \varphi,\psi\in X,$$

$$\chi(0)=0, \quad \|\chi\|_\Sigma\equiv sup_{\varphi\in X}\|\chi(\varphi_-+\varphi_0)\|<\infty\}.$$

A proposição a seguir mostrará que com uma métrica conveniente Σ é um espaço métrico completo.

Proposição 2.1. *Σ é um espaço métrico completo com a métrica $d(\chi_1, \chi_2) = \|\chi_1 - \chi_2\|_\Sigma$.*

Prova Seja (χ_n) uma sequência de Cauchy em X, temos

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ \ n_0 \in \mathbb{N}; m, n > n_0 \implies \|\chi_n - \chi_m\|_\Sigma < \epsilon.$$

Mas

$$\|\chi_n - \chi_m\|_\Sigma < \epsilon \ \Leftrightarrow \ sup_{\varphi \in X} \|\chi_n(\varphi_- + \varphi_0) - \chi_m(\varphi_- + \varphi_0)\| < \varepsilon.$$

Então $\chi_n(\varphi_- + \varphi_0)$ é uma sequência de Cauchy em X para cada $\varphi \in X$ fixado. Definindo $\chi(\varphi_- + \varphi_0) := lim_n \chi_n(\varphi_- + \varphi_0)$ temos que $\chi \in X$ pois X é completo. Assim sendo, tem-se que $\chi(0) = \lim_n \chi_n(0) = \lim_n 0 = 0$. Além disso, sendo

$$\|\chi(\varphi_- + \varphi_0)\| \leq \|\chi_n(\varphi_- + \varphi_0)\| + \|(\chi_n - \chi)(\varphi_- + \varphi_0)\|,$$

temos

$$sup_{\varphi \in X} \|\chi(\varphi_- + \varphi_0)\| \leq \|\chi_n\|_\Sigma + \varepsilon.$$

Logo

$$\|\chi\|_\Sigma = sup_{\varphi \in X} \|\chi(\varphi_- + \varphi_0) \leq \|\chi_n\|_\Sigma + \varepsilon < \infty.$$

Portanto, $\chi \in X$, de onde segue que X é completo.

$\blacksquare$

2.1 Variedades Centro-Estáveis e Centro-Instáveis

Teorema 2.1. *Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno existem os conjuntos*

$$S^* = \{\varphi \in X : \|\varphi_- + \varphi_0\| < \delta, \varphi_+ = p^*(\varphi_- + \varphi_0)\},$$

$$U^* = \{\varphi \in X : \|\varphi_0 + \varphi_+\| < \delta, \varphi_+ = q^*(\varphi_0 + \varphi_+)\}$$

que são denominados de variadades centro-estável e centro-instável, respectivamente, onde p^*, q^* são funções Lipschitizianas definidas sobre

$$B_\delta(\pi_- X \oplus \pi_0 X) \text{ e } B_\delta(\pi_0 X \oplus \pi_+ X).$$

S^* é localmente positivamente invariante, e se (B.U) vale, U^* é negativamente invariante. Qualquer solução de (2.7) que existe e permanece em $B_\delta(X)$ para $t \geq 0$ está em S^*, e qualquer solução de (2.7) que existe e permanece em $B_\delta(X)$ para $t \leq 0$ está em U^*. Mais ainda, S^* é tangente à $\pi_- X \oplus \pi_0 X$ em zero.

Prova. Primeiro provaremos que para λ suficientemente pequeno existe uma variedade centro-estável para (2.13) definida por p_λ^*, que mostraremos ser a única solução pra $t \geq 0$ do sistema

$$\begin{aligned} w_-(t) &= T(t)\varphi_- + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-(s) + w_0(s) + \\ &+ p_\lambda^*(w_-(s) + w_0(s)))ds, \\ w_0(t) &= T(t)\varphi_0 + \int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(w_-(s) + w_0(s) + \\ &+ p_\lambda^*(w_-(s) + w_0(s)))ds, \\ p_\lambda^*(\varphi_- + \varphi_0) &= \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda(w_-(s) + w_0(s) + \\ &+ p_\lambda^*(w_-(s) + w_0(s)))ds. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Em (2.18) $w_-(\cdot)$ e $w_0(\cdot)$ são únicas. Algumas vezes explicitaremos a dependência de $\varphi_- + \varphi_0$ escrevendo $w_-(\varphi_- + \varphi_0, t)$, $w_0(\varphi_- + \varphi_0, t)$.

Seja Σ o conjunto de operadores dado pela Proposição 2.1. Para $\chi \in \Sigma$ considere o sistema

$$\begin{aligned} w_-^\chi(t) = T(t)\varphi_- &+ \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \\ &+ \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)))ds, \\ w_0^\chi(t) = T(t)\varphi_0 &+ \int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \\ &+ \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)))ds. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Usando o método o Teorema 1.3. (Cauchy, Lipschitz, Picard), pode-se provar que dados φ_-, φ_0, (2.19) tem soluções únicas $w_-^\chi(t), w_0^\chi(t)$ definida para $t \geq 0$.

Seja $\varphi_- + \varphi_0 \in \pi_- X \oplus \pi_0 X$, e para $t \geq 0$ considere

$$\theta_1(t) = \|w_-^\chi(\varphi_- + \varphi_0, t) + w_0^\chi(\varphi_- + \varphi_0, t) - w_-^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, t) - w_0^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, t)\|.$$

Então temos,

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) \ &\leq \ \|T(t)(\varphi_- - \overline{\varphi}_-) + T(t)(\varphi_0 - \overline{\varphi}_0) + \\
&+ \ \int_0^t T(t-s)\pi_-(f_\lambda(w_-^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s) + w_0^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s) + \\
&+ \ \chi(w_-^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s) + w_0^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s))ds - \\
&- \ \int_0^t T(t-s)\pi_-(f_\lambda(w_-^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s) + w_0^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s) + \\
&+ \ \chi(w_-^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s) + w_0^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s))ds \\
&+ \ \int_0^t T(t-s)\pi_0(f_\lambda(w_-^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s) + w_0^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s) + \\
&+ \ \chi(w_-^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s) + w_0^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s))ds - \\
&- \ \int_0^t T(t-s)\pi_0(f_\lambda(w_-^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s) + w_0^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s) + \\
&+ \ \chi(w_-^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s) + w_0^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s))ds\|
\end{aligned}$$

Daí, usando (2.4) e (2.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) \ &\leq \ \|\varphi_- - \overline{\varphi}_-\| + e^{a_0 t}\|\varphi_0 - \overline{\varphi}_0\| + \\
&+ \ \int_o^t \nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\|\theta_1(s) + \chi(w_-^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s) + w_0^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s)) - \\
&- \ \chi(w_-^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s) + w_0^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s))\|ds \\
&+ \ \int_o^t \nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}\|\theta_1(s) + \chi(w_-^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s) + w_0^\chi(\varphi_- + \varphi_0, s)) \\
&- \ \chi(w_-^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s) + w_0^\chi(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0, s))\|ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) \ &\leq \ (\|\varphi_- - \overline{\varphi}_-\| + e^{a_0 t}\|\varphi_0 - \overline{\varphi}_0\| + 2K\nu(\lambda)\int_0^t [e^{-a_-(t-s)} + e^{a_0(t-s)}]\theta_1(s)ds \\
&\leq \ (\|\varphi_- - \overline{\varphi}_-\| + \|\varphi_0 - \overline{\varphi}_0\|)e^{a_0 t} + 4K\nu(\lambda)\int_0^t e^{a_0(t-s)}\theta_1(s)ds.
\end{aligned}$$

Da última desigualdade acima, segue que

$$e^{-a_0 t}\theta_1(t) \leq (\|\varphi_- - \overline{\varphi}_-\| + \|\varphi_0 - \overline{\varphi}_0\|) + 4K\nu(\lambda)\int_0^t e^{-a_0 s}\theta_1(s)ds.$$

Aplicando o Lema de Gronwall, temos

$$\theta_1(t) \leq K\|\varphi_- + \varphi_0 - \overline{\varphi}_- - \overline{\varphi}_0\|e^{(a_0 + 4K\nu(\lambda))}t, \qquad t \geq 0. \tag{2.20}$$

Seja $\chi, \psi \in \Sigma$, e para $t \geq 0$ e fixado $\varphi_- + \varphi_0$, considere $\theta_2(t) = \|w_-^\chi(t) + w_0^\chi(t) - w_-^\psi(t) - w_0^\psi(t)\|$. Então

$$\begin{aligned}
\theta_2(t) &= \| \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s))ds - \\
&- \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s) + \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s))ds + \\
&+ \int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s))ds - \\
&- \int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s) + \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s))ds\|.
\end{aligned}$$

Daí, usando (2.11) e (2.4), resulta

$$\begin{aligned}
\theta_2(t) &\leq \int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}[\theta_2(s) + \|\chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) - \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s)\|]ds + \\
&+ \int_0^t K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}[\theta_2(s) + \|\chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) - \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s)\|]ds \\
\theta_2(t) &\leq \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}[\theta_2(s) + \|\chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) - \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s)\|]ds
\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}
\theta_2(t) &\leq \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}[\theta_2(s) + \|\chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) - \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s)\| + \\
&+ \|\chi - \psi\|]ds \\
&\leq \frac{2K\nu(\lambda)}{a_0}\|\chi - \psi\| + \int_0^t 4K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}\theta_2(s)ds,
\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$e^{-a_0 t}\theta_2(t) \leq \frac{2K\nu(\lambda)}{a_0}\|\chi - \psi\|e^{-a_0 t} + \int_0^t 4K\nu(\lambda)e^{-a_0 s}\theta_2(s)ds,$$

Assim, usando o Lemma de Gronwall generalizado,

$$\theta_2(t) \leq \frac{2K\nu(\lambda)}{a_0}e^{(a_0+4K\nu(\lambda))t}, \quad t \geq 0. \tag{2.21}$$

Agora defina uma transformação Q sobre Σ por

$$Q(\chi)(\varphi_- + \varphi_0) = \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)))ds$$

De (2.4), (2.11) e (2.20), segue que

$$\begin{aligned}
\|Q(\chi)(\varphi_- + \varphi_0)\| &= \| \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)))ds\| \\
&\leq \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}\|w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s))\|ds \\
&\leq \int_0^\infty 2K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}\|w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)\|ds \\
&\leq \int_0^\infty 2K^2\nu(\lambda)e^{(a_0 - a_+ + 4K\nu(\lambda))s}\|\varphi_- - \varphi_0\|ds.
\end{aligned}$$

Lembrando que $a_0 < a_+$, segue que se tomarmos λ suficientemente pequeno a integral imprópria acima converge para o seguinte valor

$$\lim_{y\to\infty} \frac{2K^2\nu(\lambda)e^{(a_0-a_++4K\nu(\lambda))s}\|\varphi_- - \varphi_0\|}{(a_0 - a_+ + 4K\nu(\lambda))}\bigg|_0^y = \frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_- - \varphi_0\|}{(a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda))} < \infty.$$

Portanto $\|Q\chi\| < \infty$.

Utilizando um procedimento análogo, temos:

$$\|Q(\chi)(\varphi_- + \varphi_0) - Q(\chi)(\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0)\| \leq$$

$$\leq 2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_- + \varphi_0 - \overline{\varphi}_- - \overline{\varphi}_0)\|\frac{2K^2\nu(\lambda)\|\varphi_- - \varphi_0\|}{(a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda))}. \tag{2.22}$$

Tomando λ suficientemente pequeno, temos $Q(\chi) : X \to X$.

Considere agora $\chi, \psi \in \Sigma$

$$\begin{aligned}
\|(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0) - (Q\psi)(\varphi_- + \varphi_0)\| &\leq \int_0^\infty \|T(-s)\pi_+(f_\lambda(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \\
&+ \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) - f_\lambda(w_-^\psi(s) + w_0^\chi(s) + \\
&+ \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\chi(s))\|ds \\
&\leq \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}\|w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s) + \\
&+ \chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) - w_-^\psi(s) - w_0^\chi(s) - \\
&- \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\chi(s))\|ds,
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
\|(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0) - (Q\psi)(\varphi_- + \varphi_0)\| &\leq \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}[\theta_1(s) + \|\chi(w_-^\chi(s) + w_0^\chi(s)) - \\
&- \psi(w_-^\psi(s) + w_0^\psi(s))\|]ds \\
&\leq \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}[2\theta_1(s) + \|\chi - \psi\|]ds.
\end{aligned}$$

Utilizando (2.21), obtemos.

$$\|(Q\chi)(\varphi_- + \varphi_0) - (Q\psi)(\varphi_- + \varphi_0\| \leq$$

$$\leq K\nu(\lambda)\left[\frac{1}{a_+} + \frac{2K\nu(\lambda)}{a_0}(a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda))^{-1}\right]\|\chi - \psi\|,$$

Consequentemente, $Q : \Sigma \to \Sigma$ é uma contração para λ suficientemente pequeno. Portanto, pelo Teorema C.1, existe um único $p^*_\lambda \in X$ satisfazendo (2.18). Resta provar que $w_-(t) + w_0(t) + p^*_\lambda(w_-(t) + w_0(t))$ é uma solução de (2.13) para $t \geq 0$. Para isto, note que

$$\begin{aligned}
p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(t) + w_0^{p^*_\lambda}(t)) &= \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(t+s) + w_0^{p^*_\lambda}(t+s) + \\
&+ p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(t+s) + w_0^{p^*_\lambda}(t+s)))ds \\
&= \int_\infty^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s) + p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s)))ds \\
&= \int_\infty^0 T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s) + p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s)))ds + \\
&+ \int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s) + p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s)))ds.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\int_\infty^0 T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s) + p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s)))ds =$$

$$= T(t)\int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s) + p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s)))ds,$$

$$= T(t)p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(0) + w_0^{p^*_\lambda}(0)).$$

$$= T(t)p^*_\lambda(\varphi_- + \varphi_0)$$

Portanto,

$$w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s) + p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s)) = T(t)[\varphi_- + \varphi_0 + p^*_\lambda(\varphi_- + \varphi_0)] +$$

$$+ \int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s) + p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s)))ds.$$

Então $w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s) + p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(s) + w_0^{p^*_\lambda}(s))$ satisfaz a equação integral (2.18). Mais ainda,

$$w_-^{p^*_\lambda}(0) + w_0^{p^*_\lambda}(0) + p^*_\lambda(w_-^{p^*_\lambda}(0) + w_0^{p^*_\lambda}(0)) = \varphi_- + \varphi_0 + p^*_\lambda(\varphi_- + \varphi_0).$$

Como $\varphi \in U$, temos

$$p_\lambda^*(\varphi_- + \varphi_0) = \varphi_+.$$

Assim segue que,

$$w_-^{p_\lambda^*}(0) + w_0^{p_\lambda^*}(0) + p_\lambda^*(w_-^{p_\lambda^*}(0) + w_0^{p_\lambda^*}(0)) = \varphi_- + \varphi_0 + \varphi_+ = \varphi.$$

Logo, por unicidade de solução,

$$w(\varphi, t) = w_-(\varphi, t) + w_0(\varphi, t) + p_\lambda^*(w_-(\varphi, t) + w_0(\varphi, t))$$

e consequentemente, $w(\varphi, t)$ pertence à variedade S^* para $t \geq 0$. Também tem-se,

$$\|(p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t))\| \leq \sup_{\varphi \in X} \|(p_\lambda^*(\varphi_- + \varphi_0)\| = \|p_\lambda^*\|_\Sigma = \|Q(p_\lambda^*)\|_\Sigma < \infty,$$

de onde segue que $\|(p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t))\|$ é limitado.

■

Iremos a seguir provar que toda solução de (2.7) que existe e permanece em $B_\delta(x)$ para $t \geq 0$ estará contida em S^*. Para tanto, será preciso o seguinte lema:

Lema 2.3. *Sejam x, y duas soluções de (2.13) que existem para $t \geq 0$ e são tais que*

$$x_-(0) + x_0(0) = y_-(0) + y_0(0). \tag{2.23}$$

Então para λ suficientemente pequeno existe $\alpha \geq 0$ tal que

$$\|x_+(0) - y_+(0)\| \leq Ke^{-\alpha t}\|x_+(t) - y_+(t)\|, \quad \text{para todo} \;\; t \geq 0 \tag{2.24}$$

Em particular, se uma solução $w(t)$ de (2.13) existe para $t \geq 0$ e $\|w_+(t)\|$ é limitado, então $w_+(0) = p_\lambda^*(w_-(0) + w_0(0))$.

Prova. A última afirmação no lema segue imediatamente de (2.24), basta notar que se x é uma solução de (2.13) então

$$\begin{aligned} \|x_+(0) - p_\lambda^*(\varphi_- + \varphi_0)\| &\leq Ke^{-\alpha t}\|x_+(t) - p_\lambda^*(w_-(t) + w_0(t))\|, \\ &\leq Ke^{-\alpha t}(\|x_+(t)\| + \||p_\lambda^*\||), \text{para todo} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

onde $\|p_\lambda^*\|_\Sigma < \infty$.

Veja agora que se x satisfaz (2.13), para $t \geq 0$ temos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} &(i)\ \ x_-(t) = T(t)x_-(0) + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(x(s))ds, \\ &(ii)\ \ x_0(t) = T(t)x_0(0) + \int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(x(s))ds, \\ &(iii)\ T(-t)x_+(t) = x_+(0) + \int_0^t T(-s)\pi_+ f_\lambda(x(s))ds, \end{aligned} \quad . \tag{2.25}$$

similarmente para uma solução y de (2.13).

Sejam $k = K\nu(\lambda)$, $k' = \dfrac{2k^2}{a_+ - a_0 - 2k}$, $h(t) = \|x_-(t) - y_-(t)\| + \|x_0(t) - y_0(t)\|$, $g(t) = \|x_+(t) - y_+(t)\|$. Então de (i) e (ii) do sistema (2.25) e das equações correspondentes para y, temos

$$\begin{aligned} h(t) &\leq \|T(t)(x_-(0) - y_-(0))\| + \|T(t)(x_0(0) - y_0(0))\| + \\ &+ \int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\|x(s) - y(s)\|ds + \int_0^t K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}\|x(s) - y(s)\|ds \\ &\leq Ke^{a_0 t}h(t) + 2\int_0^t K\nu(\lambda)e^{a_0(t-s)}[h(s) + g(s)]ds, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

mas por hipótese, tem-se $x_-(0) + x_0(0) = y_-(0) + y_0(0)$, o que implica em

$$h(t) \leq 2k\int_0^t e^{a_0(t-s)}[h(s) + g(s)]ds, \quad t \geq 0,$$

de onde segue a seguinte estimativa

$$h(t) \leq 2k\int_0^t e^{2kt + a_0(t-s)}g(s)ds. \tag{2.26}$$

Mas de (iii) do sistema (2.25) e das equações correspondentes para a solução y, temos

$$\begin{aligned} \|x_+(0) - y_+(t)\| &= \|T(-t)(x_+(0) - y_+(t))\| + \\ &+ \int_0^t \|T(-s)\pi_+(f_\lambda(x(s)) - f_\lambda(y(s)))\|ds \leq \\ &\leq Ke^{-ta_+}\|(x_+(0) - y_+(t))\| + \int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_+ s}\|x(s) - y(s)\|ds \\ &= Ke^{-a_+ t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+ s}[h(s) + g(s)]ds. \end{aligned}$$

Daí,

$$g(0) \leq Ke^{-a_+ t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+ s}[h(s) + g(s)]ds \tag{2.27}$$

Usando a inequação (2.26), temos

$$
\begin{aligned}
g(0) &\leq Ke^{-a_+t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds + 2k\int_0^t e^{-a_+s}h(s)ds \\
&\leq Ke^{-a_+t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds + 2k^2\int_0^t\int_0^s e^{(a_--a_++2k)s}e^{-a_-\tau}g(\tau)d\tau ds \\
&\leq Ke^{-a_+t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds + 2k^2\int_0^t e^{(a_--a_++2k)s}\int_0^s e^{-a_-\tau}g(\tau)d\tau ds \\
&\leq Ke^{-a_+t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds + 2k^2\int_0^t e^{-(a_+-a_--2k)s}ds\int_0^t e^{-a_-\tau}g(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
g(0) &= Ke^{-a_+t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds + \frac{2k^2}{a_+-a_--2k}\cdot\int_0^t e^{-a_-\tau}g(\tau)d\tau \\
&\leq Ke^{-a_+t}g(t) + \left(k + \frac{2k^2}{a_+-a_--2k}\right)\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
g(0) \leq Ke^{-a_+t}g(t) + (k+k')\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds \tag{2.28}
$$

Considere agora $\psi(s) = g(t-s), \quad 0 \leq s \leq t$, observando que $g(0) = \psi(t)$ e $g(t) = \psi(0)$ e usando (2.28), obtemos

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &\leq Ke^{-a_+t}\psi(0) + (k+k')\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds \\
&\leq Ke^{-a_+t}\psi(0) + (k+k')\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds \\
e^{-a_+t}\psi(t) &\leq K\psi(0) + (k+k')\int_0^t e^{-a_+(s-t)}\psi(t-s)ds.
\end{aligned}
$$

Então

$$
e^{-a_+t}\psi(t) \leq K\psi(0) + (k+k')\int_0^t e^{-a_+(s-t)}\psi(t-s)ds.
$$

Realizando uma mudança de variável na integral da última expressão, temos

$$
e^{-a_+t}\psi(t) \leq K\psi(0) + (k+k')\int_0^t e^{a_+s}\psi(s)ds,
$$

aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$
\psi(t) \leq k\psi(0)e^{-(a_+-k-k')t},
$$

ou equivalentemente,

$$
g(0) \leq Kg(t)e^{-(a_+-k-k')t}.
$$

Logo

$$\|x_+(0) - y_+(0)\| \leq k\|x_+(t) - y_+(t)\|e^{-(a_+-k-k')t},$$

o que nos dá a equação (2.24) quando λ é suficientemente pequeno.

$\blacksquare$

Se tomarmos $\delta = \lambda$, então (2.7) e (2.13) coincidem em $B_\delta(X)$. A existência da variedade localmente positivamente invariante S^* é assegurada com $p^* = p^*_\delta$. Para verificar a tangência de S^* à $\pi_- X \oplus \pi_0 X$ em zero, basta observar que de (2.22) com $\overline{\varphi}_- + \overline{\varphi}_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} \|p^*(\varphi_- + \varphi_0)\| &= \|(Qp^*)(\varphi_- + \varphi_0)\| \\ &\leq \left(\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_+ - a_0 - 4K\nu(\lambda)}\right)\|\varphi_- + \varphi_0\|, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{\|p^*(\varphi_- + \varphi_0)\|}{\|\varphi_- + \varphi_0\|} \to 0,$$

pois $\nu(\lambda)$ tende à zero quando λ tende à zero.

Similarmente, podemos construir a variedade localmente negativamente invariante U^* através de q^*_λ, a única solução do sistema

$$(i) \quad q^*_\lambda(\varphi_+ + \varphi_0) = \int_{-\infty}^0 T(-s)\pi_- f_\lambda(w_+(s) + w_0(s) + q^*_\lambda(w_+(s) + w_0(s)))ds,$$

$$(ii) \quad w_0(t) = T(t)\varphi_0 + \int_0^t T(t-s)\pi_0 f_\lambda(w_+(s) + w_0(s) + q^*_\lambda(w_+(s) + w_0(s)))ds,$$

$$(iii) \quad w_+(t) = T(t)\varphi_+ + \int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_+(s) + w_0(s) + q^*_\lambda(w_+(s) + w_0(s)))ds,$$

para $t \geq 0$. Seja $y(t) = w_+(t) + w_0(t) + q^*_\lambda(w_+(t) + w_0(t))$. Então

$$T(-t)y(t) = y(0) + \int_0^t T(-s)f_\lambda(y(s))ds, \quad t \geq 0. \tag{2.29}$$

Do Lema 2.1 e de (2.29), segue a existência da variedade localmente instável U^*. As outras afirmações sobre U^* são provadas de maneiras similares quando (B.U) vale.

$\blacksquare$

2.2 Variedades Estáveis e Instáveis

Para mostrarmos a existência de variedades estáveis (instáveis) vamos precisar da seguinte proposição.

Proposição 2.2. *Seja G o seguinte conjunto*

$$\begin{aligned} G &= \{h : \pi_- X \to \pi_0 X \oplus \pi_+ X, \|h(\varphi_-) - h(\psi_-)\| \leq \\ &\leq \|\varphi_- - \psi_-\| \text{para todo } \varphi, \psi \in X, h(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Então G é um espaço métrico completo com a métrica

$$\rho(h_1, h_2) \equiv \sup_{\varphi \in X, \varphi \neq 0} \frac{\|h_1(\varphi_-) - h_2(\varphi_-)\|}{\|\varphi_-\|}.$$

Prova. Seja (h_n) uma sequência de Cauchy em G. Então,

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}; \quad m, n > n_0 \implies \rho(h_n, h_m) < \epsilon,$$

que por sua vez implica em

$$\|h_n(\varphi_-) - h_m(\varphi_-)\| < \epsilon \|\varphi_-\|,$$

Definindo $h(\varphi_-) := \lim_{n\to\infty} h_n(\varphi_-)$, temos

$$h(0) = \lim_{n\to\infty} h_n(0) = 0$$

Resta verificar que $\|h(\varphi_-) - h(\psi_-)\| \leq \|\varphi_- - \psi_-\|$. Para isto, note que

$$\begin{aligned} \|h(\varphi_-) - h_n(\psi_-)\| &= \|h(\varphi_-) - h_n(\varphi_-) + h_n(\varphi_-) - h_n(\psi_-)\| \\ &\leq \|h(\varphi_-) - h_n(\varphi_-)\| + \|h_n(\varphi_-) - h_n(\psi_-)\| \\ &\leq \bar{\epsilon}\|\varphi_-\| + \|\varphi_- - \psi_-\|, \end{aligned}$$

onde $\bar{\epsilon}$ pode ser tomado arbitrário quando $n \to \infty$, o que nos dá

$$\|h(\varphi_-) - h(\psi_-)\| \leq \|\varphi_- - \psi_-\|,$$

de onde segue que $h \in G$, o que implica G completo.

■

Teorema 2.2. *Dados $\epsilon > 0, \min(a_-, a_+) > \epsilon > 0$, para $\delta > 0$ existem os conjuntos*

$$S = \left\{ \varphi \in B_\delta(X) : \|\varphi_-\| < \frac{\delta}{2K},\ \varphi_0 + \varphi_+ = p(\varphi_-) \right\},$$

$$U = \left\{ \varphi \in B_\delta(X) : \|\varphi_+\| < \frac{\delta}{2K},\ \varphi_0 + \varphi_0 = q(\varphi_+) \right\},$$

denominadas de variedades estáveis e instáveis respectivamente, onde p, q são funções Lipschitz definidas para $\|\varphi_-\| < \dfrac{\delta}{2K}, \|\varphi_+\| < \dfrac{\delta}{2K}$. Se $\varphi \in S$ então existe uma única solução de (2.7) com $w(0) = \varphi$ para $t \geq 0$ e

$$\|w(t)\| \leq 2Ke^{-(a_- - \varepsilon)t}\|w_-(0)\|, \quad t \geq 0. \tag{2.30}$$

Se (BU) vale e $\varphi \in U$ então a solução $w(t)$ de (2.5) com $w(0) = \varphi$ existe para $t \leq 0$ e

$$\|w(t)\| \leq 2Ke^{-(a_+ - \varepsilon)t}\|w_+(0)\|, \quad t \leq 0. \tag{2.31}$$

Mais ainda, S e U são tangente à π_-X, π_+X em zero, respectivamente.

Prova. Demostraremos o caso S, a prova para U se dá de forma análoga.

Assumiremos que $\lambda > 0$ foi escolhido suficientemente pequeno. Iremos resolver para p_λ o sistema

$$(i) \quad w_-(t) = T(t)\varphi_- + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-(s) + p_\lambda(w_-(s)))ds, \quad t \geq 0.$$

$$(ii) \quad p_\lambda(\varphi_-) = \int_\infty^0 T(-s)(\pi_0 + \pi_+) f_\lambda(w_-(s) + p_\lambda(w_-(s)))ds. \tag{2.32}$$

Usando métodos similares aos do Teorema 2.1, podemos estabelecer para $h \in G$ a existência de uma única função $w_-^h(\varphi_-, t)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} w_-^h(\varphi_-, t) &= T(t)\varphi_- + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(w_-^h(\varphi_-, t) + \\ &+ h(w_-^h(\varphi_-, t)))ds, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.33}$$

e as estimativas

$$\|w_-^h(\varphi_-, t) - w_-^h(\overline{\varphi}_-, t)\| \leq K\|\varphi_- - \overline{\varphi}_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t} \tag{2.34}$$

$$\|w_-^{h_1}(\varphi_-, t) - w_-^{h_2}(\varphi_-, t)\| \leq \frac{K}{2}\|\varphi_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}. \tag{2.35}$$

De fato, considere $\overline{\theta}_1(t) = \|w_-^h(\varphi_-, t) - w_-^h(\overline{\varphi}_-, t)\|$, então temos

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\theta}_1(t) & \leq & \|T(t)(\varphi_- - \overline{\varphi}_-)\| + + \displaystyle\int_0^t \|T(t-s)\pi_-(f_\lambda(w_-^h(\varphi_-, s) - h(w_-^h(\varphi_-, s)) - \\
& - & f_\lambda(w_-^h(\overline{\varphi}_-, s) - h(w_-^h(\overline{\varphi}_-, s)))\|ds \\
& \leq & Ke^{-a_- t}\|\varphi_- - \overline{\varphi}_-\| + 2K\nu(\lambda)\displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)a_-}\|w_-^h(\varphi_-, s) - w_-^h(\overline{\varphi}_-, s)\|ds \\
& = & Ke^{-a_- t}\|\varphi_- - \overline{\varphi}_-\| + 2K\nu(\lambda)\displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)a_-}\theta_1(s)ds.
\end{array}$$

Daí segue que

$$e^{a_- t}\overline{\theta}_1(t) \leq K\|\varphi_- - \overline{\varphi}_-\| + 2K\nu(\lambda)\int_0^t e^{a_- s}\theta_1(s)ds$$

aplicando o lema de Gronwall,

$$\overline{\theta}_1(t) \leq K\|\varphi_- - \overline{\varphi}_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t},$$

o que nos dá (2.34).

De maneira análoga, definindo $\overline{\theta}_2(t) = \|w_-^{h_1}(\varphi_-, t) - w_-^{h_2}(\varphi_-, t)\|$, temos

$$\overline{\theta}_2(t) \leq \int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\|w_-^{h_1}(\varphi_-, s) - w_-^{h_2}(\varphi_-, s) + h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-, s)) - h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-, s))\|ds.$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\theta}_2(t) & \leq & \displaystyle\int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\|w_-^{h_1}(\varphi_-, s) - w_-^{h_2}(\varphi_-, s) + \\
& + & h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-, s)) - h_1(w_-^{h_2}(\varphi_-, s)) + h_1(w_-^{h_2}(\varphi_-, s)) - h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-, s))\|ds \\
& \leq & \displaystyle\int_0^t K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}[2\theta_2(s) + \rho(h_1, h_2)\|w_-^{h_2}(\varphi_-, s)\|]ds \\
& = & \displaystyle\int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\theta_2(s)ds + K\nu(\lambda)\rho(h_1, h_2)\int_0^t \|w_-^{h_2}(\varphi_-, s)\|ds \\
& = & \displaystyle\int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\theta_2(s)ds + K\nu(\lambda)\rho(h_1, h_2)\int_0^t \|w_-^{h_2}(\varphi_-, s)\|ds.
\end{array}$$

Usando (2.34) obtemos

$$\overline{\theta}_2(t) \leq \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{-a_-(t-s)}\theta_2(s)ds + K\nu(\lambda)\rho(h_1, h_2)\int_0^t K\|\varphi_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}ds,$$

temos então

$$e^{a_- t}\overline{\theta}_2(t) \leq K\nu(\lambda)\rho(h_1, h_2)\|\varphi_-\|\int_0^t e^{2K\nu(\lambda)t}ds + \int_0^t 2K\nu(\lambda)e^{-a_- s}\theta_2(s)ds.$$

Aplicando o lema de Gronwall,

$$e^{a_-t}\overline{\theta}_2(t) \leq \frac{K}{2}\|\varphi_-\|\rho(h_1,h_2)e^{4K\nu(\lambda)t}$$

ou equivalentemente,

$$\|w_-^{h_1}(\varphi_-,t) - w_-^{h_2}(\varphi_-,t)\| \leq \frac{K}{2}\|\varphi_-\|\rho(h_1,h_2)e^{-(a_- - 4K\nu(\lambda))t},$$

o que mostra (2.35).

Defina uma transformação P sobre G por:

$$(Ph)(\varphi_-) = \int_\infty^0 T(-s)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda(w_-^h(\varphi,s) + h(w_-^h(\varphi_-,s)))ds. \tag{2.36}$$

Usando (2.34) e (2.35) iremos mostrar que $P : G \to G$ e que P é contração. De fato, dado $h \in G$, tem-se

$$\begin{aligned}
(Ph)(0) &= \int_\infty^0 T(-s)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda(w_-^h(0,s) + h(w_-^h(0,s)))ds \\
&= \int_\infty^0 T(-s)(\pi_0+\pi_+)f_\lambda(0)ds = 0.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (2.34) temos

$$\begin{aligned}
\|(Ph)(\varphi_-) - (Ph)(\psi_-)\| &\leq \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\|w_-^h(\varphi_-,s) - w_-^h(\psi_-,s) + \\
&+ h(w_-^h(\varphi_-,s) - h(w_-^h(\psi_-,s))\|ds \\
&\leq \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\|w_-^h(\varphi_-,s) - w_-^h(\psi_-,s)\|ds \\
&\leq 2K^2\nu(\lambda)\left(\int_0^\infty e^{-(a_++a_--2K\nu(\lambda))s}ds\right)\|\varphi_- - \psi_-\| \\
&\leq \left(\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_++a_--2K\nu(\lambda)}\right)\|\varphi_- - \psi_-\|,
\end{aligned}$$

considerando λ suficientemente pequeno, teremos

$$\|(Ph)(\varphi_-) - (Ph)(\psi_-)\| \leq \|\varphi_- - \psi_-\|, \ \ \forall\, h \in G,$$

consequentemente, $P : G \to G$. Dados $h_1, h_2 \in G$, segue da desigualdade (2.35) que

$$\begin{aligned}
\|(Ph_1)(\varphi_-) - (Ph_2)(\varphi_-)\| &\leq \int_0^\infty K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\|w_-^{h_1}(\varphi_-,s) - w_-^{h_2}(\varphi_-,s) + \\
&+ h_1(w_-^{h_1}(\varphi_-,s)) - h_2(w_-^{h_2}(\varphi_-,s))\|ds \\
&\leq \int_0^\infty 2K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\|w_-^{h_1}(\varphi_-,s) - w_-^{h_2}(\varphi_-,s)\|ds \\
&\leq \int_0^\infty 2K\nu(\lambda)e^{-a_+s}\frac{K}{2}\|\varphi_-\|\rho(h_1,h_2)e^{-(a_--4K\nu(\lambda))s}ds \\
&\leq K^2\nu(\lambda)\rho(h_1,h_2)\left(\int_0^\infty e^{-(a_++a_--4K\nu(\lambda))s}ds\right)\|\varphi_-\|
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{\|(Ph_1)(\varphi_-) - (Ph_2)(\varphi_-)\|}{\|\varphi_-\|} \leq \rho(h_1,h_2)K^2\nu(\lambda)\left(\int_0^\infty e^{-(a_+ + a_- - 4K\nu(\lambda))s}ds\right)$$

considerando λ suficientemente pequeno, obtemos

$$\rho(Ph_1, Ph_2) < \rho(h_1, h_2),$$

portanto, $P : G \to G$ é uma contração. Segue então que existe um único ponto fixo p_λ satisfazendo (2.32), onde $w_-(t) = w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t)$. A desigualdade (2.30) segue da desigualdade (2.34) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\|w(t)\| &= \|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t) + p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t))\| \\
&\leq \|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t) + \int_\infty^0 T(-s-t)(\pi_+ + \pi_0)f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t+s) + \\
&+ +p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t+s)))ds\| \\
&\leq Ke^{-(a_- - 2k\nu(\lambda))} + \int_0^\infty K(e^{-a_+(t+s)} + e^{-a_0(t+s)})\nu(\lambda)\|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t+s) + \\
&+ p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t+s))\|ds \\
&\leq Ke^{-(a_- - 2k\nu(\lambda))} + \int_0^\infty 4K\nu(\lambda)e^{-a_0(t+s)}\|w_-^{p_\lambda}(\varphi_-, t+s)\|ds \\
&\leq Ke^{-(a_- - 2k\nu(\lambda))} + \int_0^\infty 4K\nu(\lambda)e^{-a_0(t+s)}e^{(a_- - 2K\nu(\lambda))(t+s)}\|\varphi_-\|ds.
\end{aligned}$$

Considerando λ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned}
\|w(t)\| &\leq K\|\varphi_-\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t} + \frac{4K^2\nu(\lambda)\|\varphi_-\|}{a_0 + a_- - 2K\nu(\lambda)}e^{-(a_0 + a_- - 2K\nu(\lambda))t} \\
&\leq \left(K + \frac{4K^2\nu(\lambda)}{a_0 + a_- - 2K\nu(\lambda)}\right)e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}\|\varphi_-\| \\
&\leq 2Ke^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}\|\varphi_-\| \\
&= 2K\|w_-(0)\|e^{-(a_- - 2K\nu(\lambda))t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Resta provar que $w_-(t) + p_\lambda(w_-(t))$ é uma solução de (2.13) para $t \geq 0$. Para isto, note que

$$\begin{aligned}
p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(t)) &= \int_\infty^0 T(-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(t+s) + p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(t+s)))ds \\
&= \int_\infty^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s) + p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)))ds \\
&= \int_\infty^0 T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s) + p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)))ds + \\
&+ \int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)))ds.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\int_{\infty}^{0} T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)+p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)))ds &= T(t)\int_{\infty}^{0} T(-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)+ \\ &+ p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)))ds \\ &= T(t)p_\lambda(\varphi_-) \\ &= T(t)p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(0)).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}w_-^{p_\lambda}(s)+p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)) &= T(t)[\varphi_- + p_\lambda(\varphi_-)] + \\ &+ \int_0^t T(t-s)\pi_+ f_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)+p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s)))ds.\end{aligned}$$

Então $w_-^{p_\lambda}(s)+p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(s))$ satisfaz a equação integral (2.18). Mais ainda,

$$w_-^{p_\lambda}(0)+p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(0)) = \varphi_- + p_\lambda(\varphi_-)$$

Como $\varphi \in U$, temos

$$p_\lambda(\varphi_-) = \varphi_+ + \varphi_0$$

Portanto,

$$w_-^{p_\lambda}(0)+p_\lambda(w_-^{p_\lambda}(0)) = \varphi$$

Por unicidade de solução, segue que

$$w(\varphi,t) = w_-(\varphi,t) + p_\lambda(w_-(\varphi,t),t))$$

E consequentemente, $w(\varphi,t)$ pertence à S.

■

O seguite lema irá mostrará que toda solução de (2.7) que começa e permanece em $B_\delta(x)$ para $t \geq 0$ estará contida em S .

Lema 2.4. *Seja x, y são duas soluções de (2.13) que existem para $t \geq 0$ e são tais que*

$$x_-(0) = y_-(0). \tag{2.37}$$

Então para λ suficientemente pequeno existe $\alpha > 0$, tal que

$$\|x_+(0)+x_0(0)-y_+(0)-y_0(0)\| \leq Ke^{-\alpha t}\|x_+(t)+x_0(t)-y_+(t)-y_0(t)\|, \forall\, t \geq 0 \tag{2.38}$$

Em particular, se $w(t)$ é uma solução de (2.7) existe e $\|w_+(t) + w_0(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$, para algum $M > 0$, então $w_+(0) + w_0(0) = p_\lambda(w_-(0))$.

Prova. A última afirmação do teorema segue de (2.38). Para isto, veja que

$$\begin{aligned}
\|w_+(0) + w_0(0) - p_\lambda(w_-(0))\| &\leq Ke^{-\alpha t}\|w_+(t) + w_0(t) - p_\lambda(w_-(t))\| \\
&\leq Ke^{-\alpha t}(\|w_+(t) + w_0(t)\| + \|p_\lambda(w_-(t))\|) \\
&\leq Ke^{-\alpha t}\left(M + \frac{4K^2\nu(\lambda)e^{-(a_0+a_- -2K\nu(\lambda))t}}{a_0 + a_- - 2K\nu(\lambda)}\right)\|\varphi_-\|.
\end{aligned}$$

Observe que o lado direito da última inequação tende a zero quando $t \to \infty$, de onde segue que $w_+(0) + w_0(0) = p_\lambda(w_-(0))$.

Para provar (2.38) veja que x satisfaz para $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
&(i) \quad x_-(t) = T(t)x_-(0) + \int_0^t T(t-s)\pi_- f_\lambda(x(s))ds, \\
&(ii) \quad T(-t)(x_+(t) + x_0(t)) = x_+(t) + x_0(t) + \int_0^t T(-s)(\pi_+ + \pi_0)f_\lambda(x(s))ds,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

de maneira similar obtemos um sistema para a solução y. Sejam $k = K'\nu(\lambda)$ e $k' = \dfrac{2k^2}{a_+ - a_0 - 2k}$, $h(t) = \|x_-(t) - y_-(t)\|$ e $g(t) = \|x_+(t) - y_+(t)\| + \|x_0(t) - y_0(t)\|$. Então de (2.39) e das equações correspondentes para y, temos

$$\begin{aligned}
h(t) &\leq \|T(t)(x_-(0) - y_-(0))\| + \int_0^t \|T(t-s)\pi_-\left[f_\lambda(x(s)) - f_\lambda(y(s))\right]\|ds \\
&\leq \int_0^t Ke^{-a_-(t-s)}\nu(\lambda)\|x(s) - y(s)\|ds \\
&\leq 2\int_0^t Ke^{a_0(t-s)}\nu(\lambda)[h(s) + g(s)]ds,
\end{aligned}$$

que pelo lema de Gromwall nos leva a seguinte estimativa,

$$h(t) \leq 2k\int_0^t e^{2kt+a_0(t-s)}g(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{2.40}$$

Mas de (ii) do sistema (2.39) e das equações correspondentes para y,

$$\begin{aligned}
g(0) &\leq \|T(-t)(x_+(t) - y_+(t) + x_0(t) - y_0(t))\| + \\
&+ \int_0^t \|T(-s)(\pi_+ + \pi_0)\left[f_\lambda(x(s)) - f_\lambda(y(s))\right]\|ds \\
&\leq Ke^{-a_+t}g(t) + \int_0^t Ke^{-a_+s}\nu(\lambda)\|x(s) - y(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$g(0) \leq Ke^{-a_+t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+s}[g(s)+h(s)]ds, t \geq 0$$

Aplicando (2.40) na inequação (2.41) teremos de maneira análoga

$$\begin{aligned} g(0) &\leq Ke^{-a_+t}g(t) + k\int_0^t e^{-a_+s}\left(2k\int_0^s e^{2kt+a_0(s-\tau)}g(\tau)d\tau\right) + \\ &+ k\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds \\ &\leq Ke^{-a_+t}g(t) + 2k^2\int_0^t\int_0^t e^{-a_0\tau}e^{-(a_+-a_0-2k)s}g(\tau)d\tau ds + \\ &+ k\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} g(0) &\leq Ke^{-a_+t}g(t) + 2k^2\left(1-\frac{e^{-(a_+-a_0-2k)t}}{a_+-a_0-2k}\right)\int_0^t e^{-a_0s}g(s)ds + \\ &+ k\int_0^t e^{-a_+s}g(s)ds \\ &\leq Ke^{-a_+t}g(t) + (k+k')\int_0^t e^{-a_0s}g(s)ds. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\psi(s) = g(t-s), 0 \leq s \leq t$, (de maneira análoga a demonstração do Lema 3.3) e aplicando o Lema de Gronwall a desigualdade (2.41), obtemos

$$\psi(t) \leq e^{-(a_0-k-k')t},$$

o que implica que, para todo $t > 0$,

$$\|x_+(0)+x_0(0)-y_+(0)-y_0(0)\| \leq K\|x_+(t)+x_0(t)-y_+(t)-y_0(t)\|e^{-(a_+-k-k')t}, \ \forall t > 0,$$

o que nos dá (2.38) para λ suficientemente pequeno.

$\blacksquare$

Se tomarmos $\delta = \lambda$, então (2.7) e (2.13) coincidem em $B_\delta(X)$ e a existência de S é assegurada com $p = p_\delta$. S é uma variedade positivamente invariante. Toda solução que começa e permanece em $B_\delta(X)$ para $t \geq 0$, continua em S pelo Lema 2.4. Para verificar a tangência de S a π_-X em zero, basta observar que

$$\begin{aligned} \|p(\varphi_-)\| &= \|(Qp)(\varphi_-)\| \\ &\leq \left(\frac{2K^2\nu(\lambda)}{a_++a_--2K\nu(\lambda)}\right)\|\varphi_-\|, \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{\|p(\varphi_-)\|}{\|\varphi_-\|} \to 0,$$

pois $\nu(\lambda)$ tende à zero quando λ tende à zero.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Aplicações em um Modelo de Campos Neurais

Neste capítulo estudamos algumas propriedades da equação de evolução proposta em [10] e dada por

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -v(x,t) + \int_{\mathbb{R}} \bar{J}(x-y)f(v(y,t))dy + h, h > 0. \tag{3.1}$$

onde $v(x,t)$ é uma função sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\bar{J} \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função não negativa par com suporte contido no intervalo $[-1,1]$, f é uma função não negativa não-decrescente e h é uma constante positiva. Para tanto, serviram de base as referências: [10], [6] e [8].

A equação (3.1) modela um certo tipo de atividade neuronal, que surge como limite para a atividade de excitação e inibição de uma rede de neurônios sinapticamente acoplados. No modelo, $v(x,t)$ denota o potencial médio da membrana de um tecido localizado na posição $x \in (-\infty, \infty)$ em um tempo $t \geq 0$. A função $f(u)$ denota a taxa de impulsos neurais ou a taxa média com que a atividade neural no nível v são gerados. O parâmetro h denota uma constante referente à algum estímulo externo aplicado a todo campo neural (3.1).

Seguindo [8], iremos também assumir, no modelo (3.1), algumas hipóteses sobre a função f, a saber:

(h1) $f \in C^1(\mathbb{R})$ e f' é localmente Lipchitziana e para alguma constante k_1,

$$0 < f'(r) < k_1, \ \forall r \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

(h2) f é estritamente crescente tomando valores no intervalo $(0, S_{max})$ para algum $S_{max} > 0$, e satisfaz, para $0 \leq s \leq S_{max}$,

$$\left| \int_0^s f^{-1}(r) dr \right| < L, \ \text{para algum } 0 < L < \infty. \tag{3.3}$$

De **(h1)** segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq k_1 |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

e, particularmente, existe uma constante $k_2 \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq k_1 |x| + k_2. \tag{3.5}$$

Com essas hipóteses, o problema de Cauchy para (3.1) está bem definido no espaço das funções contínuas e limitadas $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. De fato, suponha $u, v \in C_b(\mathbb{R})$ e considere a aplicação $F : C_b(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ dada por

$$F(v) = -v + \bar{J} * (f(v)) + h,$$

temos então,

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_\infty &\leq \|u - v\|_\infty + \|\bar{J} * (f(u)) - \bar{J} * (f(v))\|_\infty \\ &\leq \|u - v\|_\infty + \|\bar{J}\|_{L^1} \|f(u) - f(v)\|_\infty \\ &\leq \|u - v\|_\infty + \|\bar{J}\|_{L^1} k_1 \|u - v\|_\infty \\ &\leq (1 + \|\bar{J}\|_{L^1} k_1) \|u - v\|_\infty, \end{aligned}$$

ou seja, F é lipschitiziana. Aplicando o Teorema 1.3 (Teorema de Cauchy, Lipschitz, Picard) temos a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy associado a (3.1) . Como consequência da unicidade, temos que o subespaço $\mathbb{P}_{2\tau}$, das funções periódicas de período 2τ, é invariante (veja [9]).

Particularmente, escrevemos $J(\varphi(x)) = \bar{J}^\tau(x)$, onde $\bar{J}^\tau$ denota a extensão periódica (de período 2τ) da restrição de $\bar{J}$ ao intervalo $[-\tau, \tau]$, para algum $\tau > 0$. Observe que dado $v \in \mathbb{P}_{2\tau}$, temos

$$\begin{aligned}(\bar{J} * v)(x) &= \int_{\mathbb{R}} J(x-y)v(y)dy \\ &= \int_{x-\tau}^{x+\tau} \bar{J}(x-y)v(y)dy \\ &= \int_{x-\tau}^{x+\tau} \bar{J}^{\tau}(x-y)v(y)dy \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} \bar{J}^{\tau}(x-y)v(y)dy.\end{aligned}$$

Podemos então escrever (3.1), restrita a $\mathbb{P}_{2\tau}$, com $\tau > 1$, da seguinte maneira:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -v(x,t) + \int_{-\tau}^{\tau} \bar{J}^{\tau}(x-y)f(v(y))dy + h.$$

Agora, defina uma função $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ por

$$\varphi(x) = \exp(i\frac{\pi}{\tau}x)$$

e para uma função de período 2τ, v, defina $u : S^1 \to \mathbb{R}$ por $u(\varphi(x)) = v(x)$.

Proposição 3.1. *Uma função v(x,t) é uma solução 2τ-periódica de (3.1) se, e somente se, $u(w,t) = v(\varphi^{-1}(w),t)$ é solução da seguinte equação*

$$\frac{\partial u(w,t)}{\partial t} = -u(w,t) + J * (f \circ u)(w,t) + h, \quad h > 0, \tag{3.6}$$

*onde * denota a convolução em S^1, dada por*

$$(J * u)(w) = \int_{S^1} J(w \cdot z^{-1})u(z)dz, \; dz = \frac{\tau}{\pi}d\theta,$$

onde $d\theta$ indica a integração com respeito ao comprimento de arco.

Prova. (Ver [9], Proposição 4.1, p. 60).

■

3.1 Existência de Variedades Invariantes

Iremos agora aplicar os resultados expostos no Capítulo 2 para estudar a existência de variedades invariantes para a equação de evolução (3.6). Para tanto, seguimos: [21], [3] e [8].

Vamos inicialmente provar que (3.6) gera um fluxo C^1 com relação às condições iniciais.

Lema 3.1. *Se (**h1**) vale então a função F dada por*

$$F(u) = -u + J * (f(u)) + h \tag{3.7}$$

é continuamente Fréchet diferenciável em $L^2(S^1)$ com derivada dada por

$$DF(u)v = -v + J * (f'(u)v). \tag{3.8}$$

Prova. Observe que a derivada de Gâteaux de F é dada por

$$\begin{aligned} DF(u)(v) &= \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} -v + \frac{J * (f(u+tv)) - J * (f(u))}{t} \\ &= -v + J * (f'(u)v). \end{aligned}$$

Devido a linearidade da convolução, segue que $DF(u)$ é linear. Observe também que

$$\|DF(u)(v)\|_{L^2(S^1)} \leq \|v\|_{L^2(S^1)} + \|J * (f'(u)v)\|_{L^2(S^1)}.$$

Usando a desigualdade de Young (vide Teorema A.3) e a hipótese hipótese (**h1**), temos

$$\begin{aligned} \|DF(u)(v)\|_{L^2(S^1)} &\leq \|v\|_{L^2(S^1)} + \|J\|_{L^1(S^1)} \|f'(u)v\|_{L^2(S^1)} \\ &\leq \|v\|_{L^2(S^1)} + \|J\|_{L^1(S^1)} \|k_1\|v\|_{L^2(S^1)} \\ &\leq (1 + k_1\|J\|_{L^1(S^1)})\|v\|_{L^2(S^1)}, \end{aligned}$$

e portanto, $DF(u)$ é um operador linear contínuo.

Mostraremos agora que a aplicação

$$\begin{aligned} DF : L^2(S^1) &\to \pounds[L^2(S^1)] \\ u &\mapsto DF(u), \end{aligned}$$

é contínua para todo $u \in L^2(S^1)$. Com efeito, dados $u, w \in L^2(S^1)$, temos

$$\|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_{L^2} = \|J * [(f'(u_1))v] - J * [(f'(u_2))v]\|_{L^2}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
|(J * f'(u_1)v)(w) - (J * f'(u_2)v)(w)| &= |J * [f'(u_1)v - f'(u_2)v](w)| \\
&\leq \int_{S^1} |J(wz^{-1})||[f'(u_1(z)) - f'(u_2)(z)]v(z)|dz \\
&\leq \|J\|_\infty \int_{S^1} |[f'(u_1(z)) - f'(u_2)(z)]v(z)|dz.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade Hölder na última inequação, obtemos

$$\begin{aligned}
\|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_{L_2} &\leq \|J\|_\infty \left(\int_{S^1} |f'(u_1(z)) - f'(u_2(z))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{S^1} |v(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}. \\
&= \|J\|_\infty \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^2} \|v\|_{L^2},
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_{L_2}^2 \leq \|J\|_\infty^2 \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L^2}^2 \|v\|_{L^2}^2.$$

Mantendo $u_1 \in L^2(S^1)$ fixado e fazendo $u_2 \to u_1$ em $L^2(S^1)$ segue que $u_2(w) \to u_1(w)$ quase sempre em S^1. Da hipótese (**h1**) temos que existe um $M > 0$ tal que

$$|f'(u_2(w)) - f'(u_1(w))| \leq M|u_2(w) - u_1(w)|, \text{ quase sempre.}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L_2}^2 &= \int_{S^1} |f'(u_1(w)) - f'(u_2(w))|^2 dw \\
&\leq \int_{S^1} M^2 |u_1(x) - u_2(x)|^2 dw \\
&= M^2 \|u_2 - u_1\|_{L_2}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|DF(u_1)v - DF(u_2)v\|_{L_2}^2 \leq M^2 \|J\|_\infty^2 \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 \|v\|_{L^2}^2.$$

Consequentemente, pela Proposição A.5, seque que F é Fréchet diferenciável com derivada contínua em $L^2(S^1)$.

■

Observação 3.1. *Se $u(w,t)$ é solução de (3.6) com condição inicial u_0, então pela fórmula de variação das constantes, temos*

$$u(w,t) = e^{-t}u_0(w) + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (f \circ u)(w,s) + h]ds.$$

Como o lado direito da equação (3.6) é de classe C^1, temos que o fluxo gerado por (3.6), dado por $T(t)u_0 = u(w,t)$, é de classe C^1 com relação às condições iniciais, ou seja, gera um C^1-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, conforme Proposição 1.1.

Faremos agora algumas observações sobre o espectro da linearização em torno de equilíbrios de (3.6).

Observação 3.3. *O operador*

$$v \mapsto J * (f'(u_0)v)$$

é um operedor compacto em $L^2(S^1)$ para todo $u_0 \in L^2(S^1)$. Com efeito, suponha $U \subset L^2(S^1)$ um subconjunto limitado, temos:

$$\|J * (f'(u_0)v)\|_{L^2} \leq \|J\|_{L^1}\|f'(u_0)v\|_{L^2}$$

Usando (3.5) e o fato de que convergência em $L^2(S^1)$ implica em convergência quase sempre, temos

$$\|J * (f'(u_0)v)\|_{L^2} \leq \|J\|_{L^1}k_1\|v\|_{L^2}$$

de modo que se v pertence a U, então $J * (f'(u_0)U)$ será limitado. Usando o Teorema A.1, tem-se

$$\frac{\partial(J * (f'(u)v))}{\partial w} = \frac{\partial J}{\partial w} * (f'(u)v),$$

daí,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial(J * (f'(u)v))}{\partial w}\right\|_{L^2} &= \left\|\frac{\partial J}{\partial w} * (f'(u)v)\right\|_{L^2} \\ &\leq \left\|\frac{\partial J}{\partial w}\right\|_{\infty} \|f'(u)v\|_{L^2} \\ &\leq \left\|\frac{\partial J}{\partial w}\right\|_{\infty} k_1\|v\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{\partial(J * (f'(u)U))}{\partial w}$ é limitado. Usando o Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov (Teorema C.5), conclui-se que $J*(f'(u)U)$ é pré-compacto para todo $u \in S^1$ e para todo $U \subset L^2(S^1)$ limitado. Portanto, $v \mapsto J * (f'(u_0)v), v \in L^2(S^1)$ é um operador compacto.

Das observações anteriores e dos Teoremas C.8, C.7 e da Proposição C.1, segue a seguinte proposição.

$$\sigma(DF(u_0)) \setminus \{-1\}$$

é enumerável e contém apenas autovalores reais, tendo -1 como possível ponto de acumulação.

Lema 3.2. *Seja $u_0 \in L^2(S^1)$ um equilíbrio de (3.6). Existe uma decomposição*

$$L^2(S^1) = X^u \oplus X^s \oplus \mathrm{Ker}(DF(u_0)),$$

onde:

i. Im $DF(u_0) = X^u \oplus X^s$,

ii. X^u e X^s são subespaços fechados de $L^2(S^1)$, invariantes por $DF(u_0)$,

iii. X^u, X^s e $Ker(DF(u_0))$ são dois a dois ortogonais e

iv. $DF(u_0)$ é positivo definido em X^u e negativo definido em X^s.

Prova. Como $DF(u_0)$ é um operador de Fredholm auto-adjunto no espaço de Hilbert $L^2(S^1)$ (ver Teorema C.6), basta usar o Teorema C.9.

■

Do Teorema C.7, temos

$$\sigma(DF(u_0)) = \sigma_u \cup \sigma_s,$$

onde σ_u, e σ_s correspondem aos autovalores positivos e negativos respectivamente.

Sejam π_- e π_+ as projeções espectrais correspondentes a σ_u e σ_s (ver Observação C.4). Os subespaços $X^u = \pi_- L^2(S^1)$, $X^s = \pi_+ L^2(S^1)$ são invariantes sob $DF(u_0)$. (ver Teorema C.9).

Seja $Y = R(DF(u_0))$ a imagem de $DF(u_0)$. Da Proposição 1.1, seque que (3.6) gera um C^1-semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Considere a seguinte equação

$$v' = (DF(u_0)|_Y)v.$$

Do Teorema 1.4, temos que $DT(t)v_0$ é solução de (3.1) com condição inicial $v_0 = I$, onde I é a identidade, ou seja,

$$DT(t)v_0 = e^{DF(u_0)t}v_0.$$

Particularmente, $DT(t)(u_0)|_Y \equiv D(T(t)|_Y)(u_0) = e^{(DF(u_0)|_Y)t}v_0$.

Observação 3.4. *Os subespaços $X^u = \pi_- L^2(S^1)$ e $X^s = \pi_+ L^2(S^1)$ satisfazem as seguintes inequações*

$$\|(DT(t)|_Y)v\| \leq Ne^{-\nu t}\|v\| \text{ para } v \in X^s \text{ e } t \geq 0. \tag{3.9}$$

$$\|(DT(t)|_Y)v\| \leq Ne^{\nu t}\|v\| \text{ para } v \in X^u \text{ e } t \leq 0. \tag{3.10}$$

(Ver [21], p. 71-81 e [8], Proposição 3.7). Se $v \in \mathrm{Ker}(DF(u_0))$, temos

$$DF(u_0)v \equiv 0,$$

o que implica em

$$DT(t)v = e^{DF(u_0)t}v = v.$$

Assim segue que

$$\|DT(t)v\| \leq \|v\|, \quad \textit{para } v \in \mathrm{Ker}(DF(u_0)) \textit{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Suponha novamente que u_0 é um equilíbrio de (3.6) em $L^2(S^1)$. Então em uma vizinhança de u_0 em $L^2(S^1)$ temos

$$\frac{\partial(u_0+v)}{\partial t} = F(u_0+v) = F(u_0) + DF(u_0)(v) + r(u_0,v),\ v \in L^2(S^1),$$

daí,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = DF(u_0)(v) + r(u_0,v),\ v \in L^2(S^1), \tag{3.11}$$

onde $r(u_0,v)$ é tal que $r(u_0,0) = 0$ e

$$\lim_{\|v\|_{L^2}\to 0} \frac{r(u_0,v)}{\|v\|_{L^2}} = 0.$$

Pela fórmula de variação das constantes, temos que um solução de (3.11) com condição inicial $v(0) = v_0$, é dada por

$$v(t) = e^{(DF(u_0)|_Y)t}v(0) + \int_0^t e^{(DF(u_0)|_Y)(t-s)}r(u_0, v(s))ds \tag{3.12}$$

Do Teorema 2.1, segue que v satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
v_-(t) = e^{(DF(u_0)|_Y)t}v_-(0) &+ \int_0^t e^{(DF(u_0)|_Y)(t-s)}\pi_- r(u_0, v_-(s) + v_0(s) + \\
&+ p^*(v_-(s) + v_0(s)))ds, \\
v_0(t) = e^{(DF(u_0)|_Y)t}v_0(0) &+ \int_0^t e^{(DF(u_0)|_Y)(t-s)}\pi_0 r(u_0, v_-(s) + v_0(s) + \\
&+ p^*(v_-(s) + v_0(s)))ds, \\
p^*(v_-(0) + v_0(0)) &= \int_\infty^0 e^{(DF(u_0)|_Y)(-s)}\pi_+ r(u_0, v_-(s) + v_0(s) + \\
&+ p^*(v_-(s) + v_0(s)))ds,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $v_- = \pi_- v$, $v_0 = \pi_0\, v$ e p^* é uma função Lipschitziana definida em $B_\delta(\pi_- X \oplus \pi_0 X)$ para um δ suficientemente pequeno.

Observação 3.5. *É possível mostrar que o operador $DF(u_0)|_Y$ definido no espaço $H^2(S^1)$ é um gerador infinitesimal do semigrupo $DT(t)|_Y$ (veja Definição 1.15 e Teoremas 1.9) utilizando o Teorema 1.10 (Hille-Yosida) e que*

$$DT(t)|_Y = e^{(DF(u_0)|y)t}.$$

Proposição 3.2. *Dados $v, w \in L^2(S^1)$, a função $r(u_0, v)$ é tal que*

$$\|r(u_0, v) - r(u_0, w)\|_{L^2} \leq \eta(r)\|v - w\|_{L^2(S^1)},\ \|u\|_{L^2(S^1)}, \|v\|_{L^2(S^1)} \leq r$$

onde η é uma função contínua, de valores reais, não decrescente sobre $[0, \infty)$ com $\eta(0) = 0$.

Prova. Sejam $u, v \in L^2(S^1)$. De (3.11), tem-se

$$\begin{aligned}
r(u_0, v) &= F(u_0 + v) - DF(u_0)v, \\
r(u_0, w) &= F(u_0 + w) - DF(u_0)w,
\end{aligned}$$

daí, usando teorema do Valor Médio, segue que existe um $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\|r(u_0,v)-r(u_0,w)\|_{L^2} &= \|F(u_0+v)-F(u_0+w)-(DF(u_0)(v-w))\|_{L^2} \\
&= \|DF(u_0+\theta v+(1-\theta)w)(v-w)-(DF(u_0)(v-w))\|_{L^2} \\
&\leq \|\,[DF(u_0+\theta v+(1-\theta)w)-DF(u_0)]\,\|\|v-w\|_{L^2} \\
&\leq \left(\sup_{0\leq\theta\leq 1}\|\,[DF(u_0+\theta v+(1-\theta)w)-DF(u_0)]\,\|\right)\|v-w\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|r(u_0,v)-r(u_0,w)\|_{L^2} \leq$$

$$\leq \sup_{\overline{v},\overline{w}\in\overline{B}(0,r)}\left(\sup_{0\leq\theta\leq 1}\|DF(u_0+\theta\overline{v}+(1-\theta)\overline{w})-DF(u_0)\|\right)\|v-w\|_{L^2},$$

onde $\overline{B}(0,r)$ é uma bola fechada de centro na origem e raio r em $L^2(S^1)$. Definindo

$$\eta(r) = \sup_{\overline{v},\overline{w}\in\overline{B}(0,r)}\left(\sup_{0\leq\theta\leq 1}\|DF(u_0+\theta\overline{v}+(1-\theta)\overline{w})-DF(u_0)\|\right),$$

temos que $\eta(r)$ é uma função contínua, não decrescente (pois se $r_1 \leq r_2$, então $\overline{B}(0,r_1) \subseteq \overline{B}(0,r_2)$, o que, pela propriedade de supremo, nos dá $\eta(r_1) \leq \eta(r_2)$). Também é fácil ver $\eta(0)=0$.

■

Para cada $\varphi \in L^2(S^1)$ defina

$$\varphi_- = \pi_-\varphi,\ \varphi_0 = \pi_0\,\varphi,\ \varphi_+ = \pi_+\varphi$$

e considere em $L^2(S^1)$ a norma equivalente dada por,

$$\|\varphi\| = \|\varphi_-\|_{L^2(S^1)} + \|\varphi_0\|_{L^2(S^1)} + \|\varphi_+\|_{L^2(S^1)}$$

.

Agora estamos em condições de aplicar o Teorema 2.1 para garantir a existência de variedades contro-estáveis e centro-instáveis para a equação (3.6). Mais precisamente, temos o seguintes resultados:

Teorema 3.1. *Para δ suficietemente pequeno, existe um conjunto*

$$S^* = \left\{\varphi \in L^2(S^1); \|\varphi_- + \varphi_0\| < \delta, \varphi_+ = p^*(\varphi_- + \varphi_0)\right\},$$

denominado de variedade centro-estável, onde p^* é uma função Lipschitziana definida sobre $B_\delta(\pi_- L^2(S^1) \oplus \pi_0 L^2(S^1))$, e que satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
v_-(t) = e^{(DF(u_0)|_Y)t} v_-(0) \ &+ \ \int_0^t e^{(DF(u_0)|_Y)(t-s)} \pi_- r(u_0, v_-(s) + v_0(s) + \\
&+ \ p^*(v_-(s) + v_0(s)))ds, \\
v_0(t) = e^{(DF(u_0)|_Y)t} v_0(0) \ &+ \ \int_0^t e^{(DF(u_0)|_Y)(t-s)} \pi_0 r(u_0, v_-(s) + v_0(s) + \\
&+ \ p^*(v_-(s) + v_0(s)))ds, \\
p^*(\varphi_- + \varphi_0) \ &= \ \int_\infty^0 e^{(DF(u_0)|_Y)(-s)} \pi_+ r(u_0, v_-(s) + v_0(s) + \\
&+ \ p^*(v_-(s) + v_0(s)))ds.
\end{aligned}$$

S^* e localmente positivamente invariante. Toda solução de (3.12) que existe e permanece em $B_\delta(L^2(S^1))$ para $t \geq 0$ estará contida em S^*. Mais ainda, S^* é tangente a $\pi_- L^2(S^1) \oplus \pi_0 L^2(S^1)$ em zero.

Teorema 3.2. *Para δ suficietemente pequeno, existe um conjunto*

$$U^* = \left\{ \varphi \in L^2(S^1); \|\varphi_0 + \varphi_+\| < \delta, \varphi_- = q^*(\varphi_0 + \varphi_+) \right\},$$

denominado de variedade centro-instável, onde q^* é uma função Lipschitziana definida sobre $B_\delta(\pi_0 L^2(S^1) \oplus \pi_+ L^2(S^1))$, e que satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
q^*(\varphi_+ + \varphi_0) \ &= \ \int_{-\infty}^0 e^{(DF(u_0)|_Y)(-s)} \pi_- r(u_0, v_0(s) + v_+(s) + \\
&+ \ q^*(v_0(s) + v_+(s)))ds, \\
v_0(t) = e^{(DF(u_0)|_Y)t} v_0(0) \ &+ \ \int_0^t e^{(DF(u_0)|_Y)(t-s)} \pi_0 r(u_0, v_)(s) + v_+(s) + \\
&+ \ q^*(v_0(s) + v_+(s)))ds, \\
v_+(t) = e^{(DF(u_0)|_Y)t} v_+(0) \ &+ \ \int_0^t e^{(DF(u_0)|_Y)(t-s)} \pi_- r(u_0, v_0(s) + v_+(s) + \\
&+ \ q^*(v_0(s) + v_+(s)))ds.
\end{aligned}$$

Se (B.U.) vale, U^* é localmente negativamente invariante. Qualquer solução de (3.12) que existe e permanece em $B_\delta(L^2(S^1))$ para $t \leq 0$, estará contida em U^*. Mais ainda, U^* é tangente a $\pi_0 L^2(S^1) \oplus \pi_+ L^2(S^1)$ em zero.

Do Teorema 2.2, segue a existência de variedades estáveis a instáveis para (3.12), conforme os teoremas abaixo:

Teorema 3.3. *Dado ϵ tal que $\min(a_-, a_+) > \epsilon > 0$, temos que existem $\delta > 0$ e um conjunto*

$$S = \left\{ \varphi \in L^2(S^1); \|\varphi_-\| < \frac{\delta}{2K}, \varphi_+ + \varphi_0 = p(\varphi_-) \right\}.$$

denominado de variedade estável, onde p é uma função Lipschitiziana definida para $\|\varphi_-\| < \frac{\delta}{2K}$, e que satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{aligned} v_-(t) = v_-(0) \quad &+ \quad \int_0^t e^{(DF(u_0)|_Y)(t-s)} \pi_- r(u_0, v_-(s) + p(v_-(s)))ds, \\ p(\varphi_-) \quad &= \quad \int_\infty^0 e^{(DF(u_0)|_Y)(-s)} (\pi_0 + \pi_+) r(u_0, v_-(s) + p(v_-(s)))ds. \end{aligned}$$

Se $\varphi \in S$ então a única solução de (3.12) com $v(0) = \varphi$ existe para $t \geq 0$ e

$$\|v(t)\| \leq 2Ke^{-(a_- - \epsilon)t} \|v(0)\|, \ t \geq 0.$$

Mais ainda, S, é são tangente em zero a $\pi_- L^2(S^1)$.

Teorema 3.4. *Dados ϵ tal que $\min(a_-, a_+) > \epsilon > 0$, temos que existem um $\delta > 0$ e um conjunto*

$$U = \left\{ \varphi \in L^2(S^1); \|\varphi_+\| < \frac{\delta}{2K}, \varphi_- + \varphi_0 = q(\varphi_+) \right\}.$$

denominado de variedade instável, onde q é uma função Lipschitiziana definida para $\|\varphi_+\| < \frac{\delta}{2K}$, e que satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{aligned} q(\varphi_+) \quad &= \quad \int_\infty^0 e^{(DF(u_0)|_Y)(-s)} (\pi_- + \pi_0) r(u_0, v_+(s) + +q(v_+(s)))ds. \\ v_+(t) = e^{(DF(u_0)|_Y)t} v_+(0) \quad &+ \quad \int_0^t e^{(DF(u_0)|_Y)(t-s)} \pi_+ r(u_0, v_+(s) + q(v_+(s)))ds. \end{aligned}$$

Se (B.U) vale e $\varphi \in U$, então a única solução de (3.12) com $v(0) = \varphi$ existe para $t \leq 0$ e

$$\|v(t)\| \leq 2Ke^{(a_+ - \epsilon)t} \|v(0)\|, \ t \leq 0.$$

Mais ainda, U é tangentes em zero a $\pi_+ L^2(S^1)$.

3.2 Existência de Um Atrator Global.

Nesta seção, provaremos a existência de um conjunto compacto maximal invariante $A \subset L^2(S^1)$ para o fluxo gerado por (3.6). Para tanto, seguiremos [6], [7] e [20].

Lema 3.3. *Suponha* $k_1\|J\|_{L^2(S^1)} < 1$*. Então a bola de raio*

$$r = \frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\|J\|_{L^1} + h)}{1 - k_1\|J\|_{L^1}}$$

é um conjunto absorvente para o fluxo de (3.6).

Prova. Pela Observação 3.1, fórmula de variação de constantes, temos

$$u(w,t) = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}[J * (fou)(w,s) + h]ds.$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}\int_{S^1} |u(w,t)|^2 dw = -2\int_{S^1} u^2(w,t)dw + 2\int_{S^1} u(w,t)[J * (f(u(w,t)) + h]dw.$$

Pela desigualdade Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{S^1} hu(w,t)dw &= \leq \|u(\cdot,t)\|_{L^2} \left(\int_{S^1} h^2 dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= h\sqrt{2\tau}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S^1} u(w,t)J * (f(u))(w,t)dw &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^2} \left(\int_{S^1} [J * (f(u(w,t))]^2 dw\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^2}\|J\|_{L^1}\|f(u(\cdot,t))\|_{L^2} \\ &\leq k_1\|J\|_{L^1}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + k_2\|J\|_{L^1}\sqrt{2\tau}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Segue então que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2 &\leq -2\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + 2k_1\|J\|_{L^1}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + \\ &+ 2k_2\sqrt{2\tau}\|J\|_{L^1}\|u(\cdot,t)\|_{L^2} + 2h\sqrt{2\tau}\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \\ &= 2\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2(-1 + k_1\|J\|_{L^1}) + 2\|u(\cdot,t)\|_{L^2}\left(k_2\sqrt{2\tau}\|J\|_{L^1} + h\sqrt{2\tau}\right) \\ &= 2\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2\left[-1 + k_1\|J\|_{L^1} + \frac{k_2\sqrt{2\tau}\|J\|_{L^1} + h\sqrt{2\tau}}{\|u(\cdot,t)\|_{L^2}}.\right] \end{aligned}$$

Como $k_1\|J\|_{L^1} < 1$, considere $\epsilon = 1 - k_1\|J\|_{L^1} > 0$. Então quando tivermos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \geq \frac{2\sqrt{2\tau}(k_2\|J\|_{L^1} + h)}{\epsilon},$$

teremos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &\leq 2\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2\left(-\epsilon+\frac{\epsilon}{2}\right)\\ &= -\epsilon\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^2} &\leq e^{-st}\|u(\cdot,0)\|_{L^2}\\ &= e^{-(1-k_1\|J\|_{L^1})t}\|u(\cdot,0)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

■

Procedendo como em [9], se assumirmos a hipótese de f ser limitada, podemos obter um resultado análogo ao do Lema 3.3 sem supormos $k_1\|J\|_{L^2(S^1)} < 1$.

Lema 3.4. *Suponha que f é globalmente Lipchitz e que exista uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $R = (\|J\|_\infty 2\tau M + h)\sqrt{2\tau}$, então, para cada $\epsilon > 0$, a bola $B_{R+\epsilon}$ de centro na origem de $L^2(S^1)$ e raio $R+\epsilon$ é um conjunto absorvente para o fluxo gerado por (3.6).*

Prova. Da fórmula de variação de parâmetros (Observação 3.1) com condição inicial $u_0(\cdot,0) \in L^2(S^1)$, temos

$$u(w,t) = e^{-t}u(w,0) + \int_0^t e^{-(t-s)}[J*(fou)(w,s)+h]ds.$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}|u(w,t)| &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|J*(f\circ u)(w,s)+h|ds.\\ &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|J*(fou)(w,s)|ds + h.\end{aligned}$$

Usando a hipótese de f ser limitada, temos

$$\begin{aligned}|u(w,t)| &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|J*(f\circ u)(w,s)|ds + h\\ &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \int_0^t e^{-(t-s)}\|J\|_\infty M 2\tau ds + h.\\ &\leq e^{-t}|u(w,0)| + \|J\|_\infty 2\tau M + h.\end{aligned}$$

Desse modo

$$\|u(w,t)\|_{L^2} \leq e^{-t}\|u(w,0)\|_{L^2} + (\|J\|_\infty 2\tau M + h)\sqrt{2\tau}.$$

Logo, tomando $t > \ln\left(\frac{\|u\|_{L^2}}{\epsilon}\right)$, teremos que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2} < \epsilon + R,$$

de onde segue que a bola de centro 0 e raio $(\|J\|_\infty 2\tau M + h)\sqrt{2\tau}$ em $L_2(S^1)$, é um conjunto absorvente para o fluxo gerado por (3.6).

■

Teorema 3.5. *Existe um atrator global A para o fluxo de $T(t)$ gerado por (3.6) em $L^2(S^1)$, o qual está contido em $B_{R+\epsilon}(0)$ (ou $B_r(0)$) .*

Prova. Se $u(w,t)$ é solução de (3.6) com condição inicial $u(w,0)$, temos, pela fórmula de variação de constantes

$$u(w,t) = e^{-t}u(w,0) + \int_0^t e^{s-t}[J * (f \circ u)(w,s) + h]ds. \tag{3.14}$$

Suponha $u(\cdot,0) \in C$, onde C é um conjunto limitado em $L^2(S^1)$ contido em uma bola de raio ρ. Considere também $T_1(t)u(w,t) = e^{-t}u(w,0)$ e

$$T_2(t)u(w,t) = \int_0^t e^{s-t}[J * (f \circ u)(w,s) + h]ds.$$

Teremos então,

$$\|T_1(t)u\|_{L^2} \to 0, \text{ quando } t \to \infty,$$

uniformemente em u. Também de (3.14), temos $\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq K$, para $t \geq 0$, onde $K = \max\{\rho, R+\epsilon, r\}$. Portanto, para $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_2(t)u(w)}{\partial w} &= \int_0^t e^{s-t}\frac{\partial}{\partial w}[J * (f \circ u)(w,s) + h]ds \\ &= \int_0^t e^{s-t}J' * (f \circ u)(w,s)ds.\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial T_2(t)u(w)}{\partial w}\right| &\leq \int_0^t e^{s-t}[\sqrt{2\tau}\|J'\|_\infty k_1\|u(\cdot,s)\|_{L^2} + k_2 2\tau\|J\|_\infty]ds \\ &\leq \int_0^t e^{s-t}[\sqrt{2\tau}\|J'\|_\infty k_1 K + k_2 2\tau\|J\|_\infty]ds \\ &\leq \sqrt{2\tau}\|J'\|_\infty k_1 K + k_2 2\tau\|J\|_\infty.\end{aligned}$$

Segue que para $t \geq 0$ e para todo $u \in C$, o valor de $\|\frac{\partial T_2(t)u}{\partial w}\|_{L^2}$ é limitado por uma constante que não depende de t e nem de u. Então para todo conjunto limitado $C \subset L^2(S^1)$, temos $T_2(t)C$ pertencente a uma bola no espaço de Sobolev $W^{1,2}(S^1)$. Do Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov (Teorema C.5), temos que

$$\bigcup_{t \geq 0} T_2(t)C$$

é relativamente compacto em $L^2(S^1)$. Portanto, a afirmação do Teorema 3.5 segue considerando A como o ω-limite da bola $B_{R+\epsilon}(0)$ (ou $B_r(0)$).

■

Observação 3.6. *Segue da demostração dos Teoremas 3.5 e 1.5, que para cada $u_0 \in L^2(S^1)$, a órbita positiva começando em u_0 dada por*

$$\gamma^+(u_0) = \{T(t)u_0, t \geq 0\},$$

é pré-compacta.

Observação 3.7. *Supondo a hipótese de que $k_1\|J\|_{L^1(S^1)} < 1$, com $k_1 \geq 1$, temos que a aplicação $u \mapsto J * f(u) + h$, $u \in L^2(S^1)$, é uma contração. De fato, dados $u_1, u_2 \in L^2(S^1)$, teremos*

$$\begin{aligned} \|J * f(u_1) + h - (J * f(u_2) + h)\| &= \|J * (f(u_1) - f(u_2))\| \\ &\leq \|J\|_{L^2(S^1)} \|f(u_1) - f(u_2)\|. \end{aligned}$$

Segue, do Teorema do Ponto Fixo de Contrações, que existe único ponto fixo $\overline{u} \in L^2(S^1)$ tal que

$$J * f(u) + h = u,$$

isso implica na existência uma única solução de equilíbrio para a equação de campos neurais (3.6) quando $k_1\|J\|_{L^1(S^1)} < 1$.

3.3 Existência de Um Equilíbrio Não Trivial.

Iremos mostrar agora a existência de um equilíbrio não trivial para (3.6) quando $h = 0$. Para tanto, serão necessários os seguintes resultados.

Proposição 3.3. *O funcional energia $F : L^2(S^1) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$F(u) = \int_{S^1} \left[-\frac{1}{2} S(w) \int_{S^1} J(wz^{-1}) S(z) dz + \int_0^{S(w)} f^{-1}(r) dr - hS(w) \right] dw,$$

onde $S(w) = f(u(w))$, é um funcional de Lyapunov para o fluxo gerado por (3.6), o qual é contínuo em todo o espaço de fase $L^2(S^1)$.

Prova. (Ver [6], pp. 5-7).

A Proposição 3.1 e a Observação 3.6 implicam que o fluxo gerado pela equação (3.6) tem a propriedade gradiente no sentido da Definição 1.10.

Necessitaremos agora da seguinte hipótese adicional sobre a função f

(**h3**) $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq |z|$, para todo $z \in S^1$, e $\int_0^{f(b)} f^{-1}(r) dr < \frac{(f(b))^2 \|J\|_{L^1}}{2}$ para algum $b \in \mathbb{R}$.

Sejam $\overline{u}(z) = b$, para todo $z \in S^1$, e $f(\overline{u}) = f(b) = a$. Temos

$$\begin{aligned}
F(\overline{u}) = F(b) &= \int_{S^1} \left[-\frac{1}{2} f(b) \int_{S^1} J(wz^{-1}) f(b) dz + \int_0^{f(b)} f^{-1}(r) dr \right] dw, \\
&= \int_{S^1} \left[-\frac{1}{2} a \int_{S^1} J(wz^{-1}) a dz + \int_0^{a} f^{-1}(r) dr \right] dw, \\
&= \int_{S^1} \left[-\frac{1}{2} a^2 \|J\|_{L^1} + \int_0^{a} f^{-1}(r) dr \right] dw \\
&= -\frac{a^2 2\tau \|J\|_{L^1}}{2} + \int_{S^1} \left[\int_0^{a} f^{-1}(r) dr \right] dw \\
&= \left(-\frac{a^2 \|J\|_{L^1}}{2} + \int_0^{a} f^{-1}(r) dr \right) 2\tau,
\end{aligned}$$

usando (**h3**) concluímos que

$$F(\overline{u}) < F(0) = 0. \tag{3.15}$$

Com a notação das observações anteriores, temos o seguinte resultado

Teorema 3.6. *A solução de (3.6) com condição inicial $\overline{u} = b$, tende para uma solução de equilíbrio não trivial.*

Prova. Dos Teoremas 3.5 e 1.5, temos que o ω-limite da bola de centro em 0 e raio $R+\epsilon$ em $L^2(S^1)$, onde $R = (\|J\|_\infty 2\tau M + h)\sqrt{2\tau}$, é um conjunto compacto invariante maximal. Da observação 3.6, segue que as órbitas positivas são pré-compactas, o que implica que $\{T(t)\overline{u}, t \geq 0\}$ está contido em um compacto.

Portanto, do Teorema 1.6 (Princípio de Invariância de La Salle), temos que $T(t)\overline{u}$ tende para uma solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.

Como o funcional de Liapunov F é não-crescente ao longo das órbitas e $F(\overline{u}) < F(0)$, temos que a solução trivial $u \equiv 0$ não está contida em $\omega(\overline{u})$ pela relação (3.15). Portanto, exite uma solução de equilíbrio não trivial para o fluxo gerado pela equação (3.6).

■

3.4 Exemplo

Nesta seção, consideramos os protótipos para f e $\bar{J}$ adaptados de [6] para ilustrar os resultados das seções anteriores para um caso particular de (3.1). Sejam f e $\bar{J}$ funções dadas por $f(x) = \tanh(x)$ e $\bar{J}(x) = 3e^{-1/(1-x^2)}$, se $|x| < 1$ e $\bar{J}(x) = 0$ se $|x| \geq 1$.

Considerando $\bar{J}^\tau$ como a extensão periódica de período 2τ da restrição de $\bar{J}$ ao intervalo $[\tau, -\tau], \tau > 1$, podemos reescrever (3.1) no espaço $\mathbb{P}_{2\tau}$, como

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + \int_{-\tau}^{\tau} 3e^{\frac{-1}{1-(x-y)^2}} \tanh(y)dy + h. \tag{3.16}$$

Definindo $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ por $\varphi(x) = e^{i\frac{\pi}{\tau}x}$ e para $u \in \mathbb{P}_{2\tau}$,$v : S^1 \to \mathbb{R}$ por $v(\varphi(x)) = u(x)$ e escrevemos $J(\varphi(x)) = \bar{J}\tau^(x)$, já vimos que a equação (3.16) é equivalente a

$$\frac{\partial u(w,t)}{\partial t} = -u(w,t) + \int_{S^1} 3J(wz^{-1})\tanh(u(z))dz + h, \tag{3.17}$$

onde $dz = \frac{\tau}{\pi}d\theta$, onde $d\theta$ denota a integração com relação ao comprimento de arco.

Devemos ainda verificar que as funções f e J verificam as hipóteses (**h1**)-(**h2**). De fato,

(I) f é evidentemente de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. $f'(x) = \operatorname{sech}^2(x)$ também é localmente Lipschitz, basta ver que $|f'(x) - f'(y)| \leq \sup_{c\in I}|f''(c)||x-y|$, para algum intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. Como $\cosh(x)$ é limitado inferiormente por 1, temos que $|f'(x)| < 1$, para todo x em $\mathbb{R}$. Considerando $k_1 = 1$, teremos

$$0 < |f'(x)| < k_1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(II) Também vemos que f é uma função não-decrescente, tomando valores entre -1 e $S_{max} = 1$, e que para $0 < s < S_{\max}$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^s f^{-1}(r) \right| &= \left| \int_0^s \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \right| \\
&= \ln(2) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Podemos então afirmar a existência de *variedades invariantes*, como nos Teoremas 3.1 a 3.4, e de um *conjunto atrator compacto maximal global* (dado pelo Teorema 3.5) para (3.17).

Mais ainda, de (I) segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq \max_{c \in \mathbb{R}} |f'(c)||x - y| \leq |x - y|.$$

Em particular, como $f(0) = 0$, teremos

$$|f(x)| \leq |x|.$$

Por último, veja que

$$\int_0^a \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1-a^2) + a \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right],$$

para $a \in [0, 1)$. Escolhendo a suficientemente próximo de 0, obtemos,

$$\int_0^a \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx \leq \frac{a^2 \|J\|_{L^1}}{2}, \tag{3.18}$$

ou seja, a hipótese (**h3**) também é satisfeita para um valor de a escolhido convenientemente.

Observação 3.8. *Se considerarmos no modelo (3.16) a constante h igual a 0, basta escolher no Teorema 3.6 o seguinte valor*

$$\overline{u} \equiv \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+0,25}{1-0,25}\right).$$

que teremos $a = 0,25$, e tal valor torna a válida a relação (3.18). Nesse caso, temos a existência de uma solução de equilíbrio não trivial para a equação (3.17).

Observação 3.9. *Se nós tivéssemos tomado, por exemplo,*

$$\bar{J}(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)}, \text{ se } |x| < 1, \\ \\ 0, \text{ se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

no protótipo (3.16), não poderíamos garantir a existência de uma solução de equilíbrio não trivial, pois teríamos $k_1\|J\|_{L^1} < 1$ e, pela Observação 3.7, $u \equiv 0$ seria a única solução de equilíbrio para o modelo da campos neurais quando $h = 0$.

*Uma condição necessária para que (3.17) admita uma solução de equilíbrio não trivial nesse caso, é que $\|J\|_{L^1} \geq 1$. De fato, para que o protótipo verifique a condição **(h3)** devemos ter*

$$\|J\|_{L^1} \geq \frac{1}{a^2}\ln(1-a^2) + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right), \forall a \in (0,1). \tag{3.19}$$

Pode-se provar que o lado direito de (3.19) é limitado inferiormente por 1 quando $a \in (0,1)$.

Apêndice A

Elementos de Cálculo Diferencial em Espaços de Banach

A.1 Derivada de Gâteaux

Nesta seção abordaremos alguns conceitos de cálculo em espaços de Banach. Para tanto, seguiremos [9], [17] e [24].

Definição A.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais. Considere um operador $f : X \to Y$. Dados x e η em X, se*

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t} \tag{A.1}$$

existe, dizemos que f é Gâteaux diferenciável em x na direção η, e $Df(x)(\eta) \in Y$ é chamada a derivada de Gâteaux de f em x na direção η.

Diz-se que f e Gâteaux diferenciável em x quando f é Gâteaux diferenciável para toda direção $\eta \in X$.

Denotaremos por $\pounds[X, Y]$ o espaço dos operadores $T : X \to Y$.

O operador $Df(x) : X \to Y$ que atribui para cada $\eta \in X$ o vetor $Df(x)(\eta) \in Y$ é denominada derivada de Gâteaux de f em x. O operador $Df : X \to \pounds[X, Y]$ é chamada a derivada de Gâteaux de f. Iremos agora estudar algumas propriedades de tais operadores.

Proposição A.1. *A derivada de Gâteaux de f em x é um operador homogêneo.*

Prova. Temos

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\alpha\eta) - f(x)}{t\alpha} = \frac{1}{\alpha} Df(x)(\alpha\eta),$$

e portanto, $\alpha Df(x)(\eta) = Df(x)(\alpha\eta)$.

■

O exemplo seguinte mostrará que a existência da derivada de Gateaux de um dada função f não implica na sua continuidade.

Exemplo A.4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x_1^3}{x_2}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Temos

$$Df(0)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{t^3 n_1^3}{t n_2} - 0 \right] = \lim_{t\to 0} \frac{t n_1^3}{\eta_2} = 0,$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(\eta_1, 0)\}$. Podemos ver que, nesse caso, $Df(0)$ existe mas f não é contínua em 0.

A proposição a seguir será importante para trabalharmos com estimativas para funções que possuem derivada de Gateaux.

Proposição A.2. *Sejam X um espaço vetorial e Y um espaço vetorial normado. Considere um operador $f : X \to Y$. Dados $x, y \in X$, suponha f Gâteaux diferenciável para cada ponto de $\{x + t(y - x); 0 \leq t \leq 1\}$ na direção $y - x$. Então para cada $\delta \in Y'$ valem:*

(i) $\delta(f(y) - f(y)) = \delta(Df(x + \theta(y - x))(y - x))$, para algum $0 < \theta < 1$;

(ii) $\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{0<\theta<1} \|Df(x + \theta(y - x))(y - x)\|$.

Prova. Definindo $g(t) = \delta(f(x+t(y-x))$, temos que $g'(t) = \delta(Df(x+t(y-x))(y-x))$. Usando o Teorema do Valor Médio, $\exists\, \theta$, $1 < \theta < 1$, tal que $g(1) - g(0) = g'(\theta)$. Temos então

$$\delta(f(y)) - \delta(f(x)) = \delta(Df(x + \theta(y - x))(y - x)).$$

Da linearidade de δ segue que

$$\delta(f(y) - f(x)) = \delta(Df(x + \theta(y - x))(y - x)),$$

provando (i). Pelo Teorema de Hahn-Banach (ver Corolário C.2) existe $\delta \in Y'$ tal que $\|\delta\| = 1$ e $\delta(f(y) - f(y) = \|f(y) - f(x)\|$. Combinando com (i) temos

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &= \delta(Df(x + \theta(y - x))(y - x) \\ &\leq \|\delta\| \|Df(x + \theta(y - x))(y - x)\| \\ &= \|Df(x + \theta(y - x))(y - x)\| \\ &\leq \sup_{0<\theta<1} \|Df(x + \theta(y - x))(y - x)\|, \end{aligned}$$

o que prova (ii).

■

A.2 Derivada de Fréchet

Tratamos nesta seção de um conceito de derivada em espaços de Banach um pouco mais elaborado, a chamada derivada de Fréchet. Para isto, seguimos [24], [9] e [17].

Definição A.2. *Considere $f : X \to Y$, onde X e Y são espaços lineares normados. Dado $x \in X$, se existe um operador linear $f'(x) \in \pounds[X, Y]$ tal que*

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{\|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = 0, \quad \Delta x \in X, \tag{A.2}$$

então f é diferenciável segundo Fréchet e $f'(x)$ é chamada de derivada de Fréchet de f em x.

Observe que a derivada de Fréchet é um operador linear contínua, o que não ocorre necessariamente com a derivada de Gâteaux $Df(x)$.

A próxima proposição mostrará que a existência da derivada de Fréchet para uma função f implica na sua continuidade, o que não era garantido no caso da derivada de

Gâteaux.

Proposição A.3. *Seja $\epsilon > 0$ dado. Se $f : X \to Y$ é Fréchet diferenciável em x, então f é contínua em x.*

Prova. Observe que

$$\begin{aligned} \|f(x+\Delta x) - f(x)\| - \|f'(x)(\Delta x)\| &\leq \|f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)(\Delta x)\| \\ &\leq \bar{\epsilon}\|\Delta x\|, \end{aligned}$$

onde $\bar{\epsilon}$ é tal que $\bar{\epsilon} \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. O que implica

$$\begin{aligned} \|f(x+\Delta x) - f(x)\| &\leq \bar{\epsilon}\|\Delta x\| + \|f'(x)(\Delta x)\| \\ &\leq (\bar{\epsilon} + \|f'(x)\|)\|\Delta x\|. \end{aligned}$$

Então dado $\epsilon > 0$, considere $\delta = \dfrac{\epsilon}{\bar{\epsilon} + \|f'(x)\|}$, temos

$$\|f(x+\Delta x) - f(x)\| \leq \epsilon.$$

■

Observação A.1. *A existência da derivada de Fréchet implica na existência da derivada de Gâteaux. Com efeito, se $f'(x)$ existe, temos*

$$\lim_{\|t\Delta x\| \to 0} \frac{\|f(x+t\Delta x) - f(x) - f'(x)(t\Delta x)\|}{\|t\Delta x\|} = 0.$$

Como $t \to 0$ implica $\|t\Delta x\| \to 0$, temos que

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(x+t\Delta x) - f(x) - f'(x)(t\Delta x)}{t} \right\| = 0,$$

ou, se maneira equivalente,

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(x+t\Delta x) - f(x)}{t} - f'(x)(\Delta x) \right\| = 0.$$

Portanto,

$$\|Df(x)(\Delta x) - f'(x)(\Delta x)\| = 0.$$

Logo, $Df(x) = f'(x)$.

Observação A.2. *Se $f : X \to Y$ é Fréchet diferenciável, então pela Proposição 1.3 segue que*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{0<\theta<1} \|Df(x + \theta(y - x))\| \|y - x\|.$$

Observação A.3. *A derivada de Fréchet é única. De fato, suponha que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são duas derivadas de Fréchet para f em x, usando a desigualdade triangular e a Observação A.1., temos*

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| \leq \|f_1(x) - Df(x)\| + \|Df(x) - f_2(x)\|.$$

Portanto,

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| = 0,$$

ou seja, $f_1(x) = f_2(x)$.

Proposição A.4. *Se $Df(x)$ é um operador limitado, então $f'(x)$ existe se e somente se, a convergência do limite em (A.2) é uniforme com respeito a todo $\eta \in X$ tal que $\|\eta\| = 1$.*

Prova. De fato, pela Observação A.1, se $f'(x)$ existe então esta será igual à derivada de Gâteaux $Df(x)$. Desse modo, segue que

$$\lim_{\|t\eta\| \to 0} \frac{\|f(x + t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)\|}{\|t\eta\|} = 0,$$

o que implica,

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x + t\eta) - f(x) - Df(x)(t\eta)}{t} \right\| = 0.$$

Sendo $Df(x)$ um operador linear, resulta

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t} - Df(x)(\eta) \right\| = 0.$$

Portanto,

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t}$$

Reciprocamente, suponha que a convergência em (A.2) é uniforme para todo η tal que $\|\eta\| = 1$. Então temos

$$Df(x)(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t},$$

o que implica em

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(x+t\eta)-f(x)-Df(x)(t\eta)}{t}\right\| = 0.$$

Daí,

$$\lim_{\|t\eta\|\to 0}\frac{\|f(x+t\eta)-f(x)-Df(x)(t\eta)\|}{|t|\|\eta\|} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{\|t\eta\|\to 0}\frac{\|f(x+t\eta)-f(x)-Df(x)(t\eta)\|}{\|t\eta\|} = 0$$

Como $Df(x)$ é um operador linear limitado, temos que $f'(x)$ e $Df(x) = f'(x)$.

■

Proposição A.5. *Sejam X e Y espaços lineares normados. Considere $f : X \to Y$ Gâteaux diferentiável para todo $x \in X$. Suponha $Df : X \to \pounds[X,Y]$ e Df contínuo em x. Então $f'(x)$ existe e $f'(x)$ e contínua em x.*

Prova. Usando o Corolário C.2 do Teorema de Hanh-Banach (vide apêndice C) e o ítem (i) da Proposição 1.2 temos

$$\begin{aligned}\|f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta)\| &= \delta(f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta))\\ &\leq |\delta(Df(x+\theta\eta)(\eta)-Df(x)(\eta))|\end{aligned}$$

para algum θ no intervalo $(0,1)$. Daí,

$$\begin{aligned}\|f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta)\| &\leq \|\delta\|\|Df(x+\theta\eta)(\eta)-Df(x)(\eta)\|\\ &\leq \|Df(x+\theta\eta)-Df(x)\|\|\eta\|.\end{aligned}$$

Da continuidade de Df em x, seque, para todo $\epsilon > 0$ que, $\|Df(x+\theta\eta)-Df(x)\|\|\eta\| \leq \epsilon\|\eta\|$. Se $\|\eta\| < r$, para um dado $r > 0$, temos

$$\|f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta)\| < \epsilon\|\eta\|,$$

quando $\|\eta\| < r$. Logo

$$\frac{\|f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta)\|}{\|\eta\|} < \epsilon,$$

de onde segue que

$$\lim_{\|\eta\|\to 0}\frac{\|f(x+\eta)-f(x)-Df(x)(\eta)\|}{\|\eta\|} = 0.$$

Consequentemente,

$$f'(x) = Df(x).$$

Como Df contínua em x, tem-se que f' é contínua em x.

$\blacksquare$

A.3 Convolução de Funções

Estudaremos agora convolução de funções e algumas de suas propriedades. Para esta seção, seguimos as referências: [9], [15] e [16].

Definição A.3. *Dadas duas funções mensuráveis $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

para todo x tal que a integral exista.

Proposição A.6. *Assumindo que todas as integrais em questão existam, tem-se:*

(i) $f * g = g * f$;

(ii) $f * (g + h) = f * g + f * h$;

(iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Prova (Veja [9], p.20, Proposição 1.10.)

$\blacksquare$

Teorema A.1. (Veja [16], p. 342.) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ é limitada para todo $i \in \mathbb{N}$, então $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\dfrac{\partial (f * g)}{\partial x_i} = f * \left(\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right), \forall i \in \mathbb{N}$.*

Prova. Pela Proposição A.6 tem-se

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

Como a função que associa $x \in \mathbb{R}^n$ à $\frac{\partial}{\partial x_i} g(x-y)f(y)$ é contínua. Da regra de Leibniz (ver [9]), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (f * g)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} g(x-y)f(y)dy \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} * f \right)(x) \\
&= \left(f * \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \right)(x), \forall i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

■

Teorema A.2. (Desigualdade de Young Generalizada, [15]) *Sejam $X = \mathbb{R}^n$, $C > 0$ e seja K uma função mensurável sobre $X \times X$ tal que*

$$sup_{x \in X} \int_X |K(x,y)|dy \leq C, sup_{y \in X} \int_X |K(x,y)|dx \leq C,$$

Se $f \in L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, a função Tf definida por

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)dy$$

está bem definida (a menos de um conjunto de medida nula), $Tf \in L^p(X)$ e $Tf \leq C\|f\|_p$.

Prova. Sejam $1 < p < \infty$ e q o expoente conjugado de p, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Temos

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &\leq \int_X |K(x,y)f(y)|dy \\
&= \int_X |K(x,y)|^{1/q}(|K(x,y)|^{1/p}|f(y)|)dy.
\end{aligned}$$

Da desigualdade Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &\leq \left(\int_X |K(x,y)|dy \right)^{1/q} \left(\int_X |K(x,y)||f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\
&\leq C^{1/q} \left(\int_X |K(x,y)||f(y)|^p dy \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

elevando ambos os membros à p, integrando e usando o Teorema de Fubini, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_X |Tf(x)|^p dx &\leq C^{p/q} \int_X \int_X |K(x,y)||f(y)|^p dy dx \\
&\leq C^{p/q+1} \int_X |f(y)|^p dy.
\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\|Tf\| \leq C^{1/q+1/p}\|f\|_p = C\|f\|_p,$$

provando-se então o caso $1 < p < \infty$. A demonstração para o caso $p = 1$ é similar e requer somente a hipótese $\int_X |K(x,y)|dx \leq C$, e o caso $p = \infty$ é trivial.

■

Teorema A.3. (Desigualdade de Young) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq \infty$, então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Prova Tomando $K(x,y) = f(x-y)$, temos

$$Tg(x) = \int_X f(x-y)g(y)dy = (f * g)(x),$$

então basta aplicar o Teorema 1.2.

Apêndice B

Os Espaços L^p

Nesta seção, faremos uma breve revisão de conceitos de teoria da Medida. Nesta seção, serviram de base as referências [17] e [25].

Definição B.1. *Uma σ-**álgebra** no conjunto X é uma família Σ de subcinjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\emptyset, X \in \Sigma$;

(b) Se $A \in \Sigma$, *então* $A^c := X - A \in \Sigma$;

(c) Se $A_n \in \Sigma$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

O par (X, σ) é chamado de *espaço mensurável.* Cada elemento da σ-álgebra é chamado de *conjunto mensurável.*

Se F é uma coleção de subconjuntos de X, então a interseção de todas as σ-álgebras que contém F é também uma σ-álgebras, que denotaremos por $\Sigma(F)$.

Quando (Σ, τ) é um espaço topológico, a σ-álgebra $\Sigma(\tau)$ é chamada de *σ-álgebra de Borel de X* e será denotada por $B = B(X)$.

Definição B.2. *Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma função $f : (X, \Sigma) \to \mathbb{R}$ é **mensurável** se $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo boreliano A de $\mathbb{R}$.*

Observação B.3. *Pode-se mostrar que f será mensurável se, e somente se, $f^{-1}((-\infty, \alpha])$ pertence a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.* (veja [17], pag.362).

Em um espaço mensurável (X, Σ) é possível introduzir um conceito chamado de *medida*, que é uma função definida em Σ, tomando valores em $\mathbb{R}$ e que apresenta uma série de propriedades definidas a seguir.

Definição B.4. *Uma* ***medida*** *no espaço mensurável* (X, Σ) *é uma função* $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ *e que satisfaz as seguintes condições:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de* Σ, *então*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

O termo (X, Σ, μ) é chamado de espaço de medida.

Proposição B.5. *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Então:*

(a) Se $A, B \in \Sigma$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(b) Se $A, B \in \Sigma, A \subset B$ e $\mu(A) < \infty$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$;

(c) Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, então $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mu(A_n)$;

(d) Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}, A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, então $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}) = \lim_n \mu(A_n)$.

(e) Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas a funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ tais que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

será denotado por $L_p(X, \Sigma, \mu)$.

Observe que, em geral, $\| \cdot \|$ não é uma norma em $L_p(X, \Sigma, \mu)$, pois podemos ter $\|f\|_p = 0$ sem f ser identicamente nula.

Se (X, Σ, μ) é um espaço de medida, podemos introduzir uma relação de equivalência dizendo que duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ são equivalentes se existe um conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x), \forall x \notin A$, ou seja, se $f = g$ μ-quase sempre.

O conjunto quociente

$$L_p(X, \Sigma, \mu) := \{[f] : f \in L_p(X, \Sigma, \mu)\},$$

com as operações $[f]+[g] = [f+g]$ e $c[f] = [cf]$, tornam $L_p(X, \Sigma, \mu)$ um espaço vetorial. Definindo $\|[f]\|_p := \|f\|_p$, temos que $(L_p(X, \Sigma, \mu), \|.\|_p)$ é um espaço vetorial normado.

Pode-se provar que na verdade $(L_p(X, \Sigma, \mu), \|.\|_p)$ é um espaço de Banach, como veremos no próximo teorema.

Considere agora o espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ de todas as funções que são limitadas μ-quase sempre. Se $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ e $N \in \Sigma$ é um conjunto de medida nula, defini-se

$$S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\} \text{ e}$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\}.$$

Observe que novamente podemos ter $\|f\|_\infty = 0$ sem que f seja identicamente nula. Construindo classes de equivalência de maneira análoga ao caso em $1 \leq p < \infty$, definimos $L_\infty(X, \varSigma, \mu)$ como o conjunto das classes de equivalência de funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ que são limitadas μ-quase sempre. Se para $[f] \in L_\infty(X, \varSigma, \mu)$ definirmos

$$\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty,$$

temos que $(L_\infty(X, \varSigma, \mu), \| \cdot \|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Teorema B.6. *Se $1 \leq p \leq \infty$, então $(L_p(X, \Sigma, \mu), \|.\|_p)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|[f]\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } 1 \leq p < \infty \text{ e}$$

$$\|[f]\|_\infty = \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \text{ se } p = \infty,$$

onde $N \in \Sigma$ tem medida nula e $S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\}$

Prova. (Vide [17], págs. 10 e 11.)

Teorema B.7.(Desigualdade Hölder para integrais.) *Sejam* $f \in L_p(X,\Sigma,\mu)$ *e* $g \in L_q(X,\Sigma,\mu)$, *então* $fg \in L_1(X,\Sigma,\mu)$ *e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

.

Prova. O caso $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_p = 0$ é trivial. Considere $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Será mostrado primeiramente que para quaisquer a e b positivos, temos

$$a^{\frac{1}{q}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \tag{B.1}$$

Para tanto, considere para cada $0 < \alpha < 1$ a seguinte função:

$$\begin{aligned} f_\alpha : (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^\alpha - \alpha t. \end{aligned}$$

Observe que f assume um máximo em $t = 1$ e que portanto $t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha)$ para todo $t > 0$. Tomando $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$ conclui-se (B.1). Para os casos em que $a = 0$ ou $b = 0$, (B.1) também se verifica, basta tomar

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \text{ e } b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

.

■

Teorema B.8. (Desigualdade de Minkowski para integrais.) *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* (X,Σ,μ) *um espaço e medida. Se* $f, g \in L_p(X,\Sigma,\mu)$ *então* $f+g \in L_p(X,\Sigma,\mu)$ *e*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{B.2}$$

Prova. Veja que quando $p = 1$ ou $\|f+g\|_p = 0$, o resultado é claro. Podemos supor então $\|f+g\|_p \neq 0$ e $p > 1$ para todo $x \in X$, desse modo temos

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &\leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq (2\max\{|f(x)|,|g(x)|\})^p \\ &= 2^p(2\max\{|f(x)|,|g(x)|\})^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{aligned}$$

de onde seque que $f+g \in L_p(X,\Sigma,\mu)$. Iremos agora provar (B.2). Veja que

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &= |f(x)+g(x)| \cdot |f(x)+g(x)|_{p-1} \\ &\leq |f(x)+g(x)|^{p-1} \cdot (|f(x)|+|g(x)|) \\ &= |f(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1}, \end{aligned} \tag{B.3}$$

para todo $x \in X$. Tomando $q > 1$ tal que $1/p + 1/q = 1$ temos $(p-1)q = p$, e portanto $|f+g|^{p-1} = |f+g|^{\frac{p}{q}} \in L_q(X, \Sigma, \mu)$. Usando a Desigualdade Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu &\leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \\
\int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu &\leq \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

somando as desigualdades acima e usando (B.3), tem-se

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right],$$

e dividindo ambos os membros por

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

chega-se ao resultado.

■

Apêndice C

Alguns Resultados de Análise Funcional.

Exibiremos agora alguns resultados clássicos de Análise Funcional, e para isto serviram como referências: [22],[17] , e [14].

C.1 Teorema do Ponto Fixo de Contrações

Uma função $f : M \to N$ entre dois espaços métricos M é N é chamada contração, quando existe um número real k, $0 < k < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.

Toda contração é uma aplicação uniformemente contínua. Um ponto $x \in M$ chama-se ponto fixo de uma aplicação $f : M \to M$ quando $f(x) = x$.

Dado $f : M \to M$, escreveremos $f^2(x) = f(f(x)), f^3(x) = f(f^2(x))$ e assim sucessivamente.

Teorema C.1. *Toda contração $f : M \to M$ de um espaço métrico completo M, possui um único ponto fixo. Dado qualquer ponto $x_0 \in M$, a sequência $f(x_0)$,$f^2(x_0)$,...,$f^(x_0)$,... converge para o ponto fixo de f.*

Prova. Tomando um $x_0 \in M$ arbitrário e escrevendo $x_n = f^n(x_0)$.

Será mostrado que (x_n) é uma sequência de Cauchy. De fato, temos $d(f(x), f(y)) \leq$

$kd(x,y)$ o que implica em $d(x_n, x_{n+1}) = d(f^n(x_0), f^n(x_1)) \leq k^n d(x_0, x_1)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x-n, x_{n+1}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq (k^n + ... + k^{n+p-1}) \cdot d(x_0, x_1) = \\ &= k^n(1 = k + \cdots + k^{p-1}) \cdot d(x-0, x_1) < \\ &< \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$,k^n tende para zero e em consequência, o diâmetro do conjunto $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ tende para zero e portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como M é completo, seque que existe $x = \lim x_n, x \in M$. Temos então

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x,$$

ou seja,x é ponto fixo de f. Resta mostrar que a unicidade. Observe que se $f(x) = x$ e $f(y) = y$ então, $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x,y)$ e daí temos $(k-1)d(x,y) \geq 0$. Como $k - 1 < 0$ devemos ter $d(x,y) = 0$, o que implica em $x = y$.

■

C.2 Teorema de Hahn-Banach

Teorema C.2. (Teorema de Hahn-Banach-caso real) *Sejam E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a|p(x) \textit{ para todo } a \in \mathbb{K} \textit{e todo } x \in E, \textit{ e}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \textit{ para quaisquer } x, y \in E$$

Sejam também G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então existe um funcional linear $\overline{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ que estende φ, isto é $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e que satisfaz $|\overline{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Prova. (Vide [17], pp. 58-59, Teorema 3.1.2).

Corolário C.1. *Seja G um subspaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja $\varphi : G \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\overline{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Prova. Aplique o Teorema C.2. com $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$.

■

Corolário C.2. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$,$x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\|\varphi(x_0)\| = \|x_0\|$.*

Prova. Aplique o Corolário C.1 para $G = [x_0]$ e $\varphi(ax_0) = a\|x_0\|$.

■

C.3 Espaços de Sobolev $W^{1,p}$

Abordaremos nesta seção alguns resultados de análise funcional em espaços de Sobolev, desde das a definições básicas até o teorema de imersão compacta de Rellich-Kondrachov. Para tanto, seguiremos [14].

Antes de definir propriamente os espaços de Sobolev, faz-se necessário enfraquecer a noção de derivada parcial.

Observação C.1. *Denotaremos por C_c^∞ o espaço das funções $\phi : U \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido em U. As funções $\phi \in C_c^\infty$ recebem também o nome de* ***funções teste****.*

Observação C.2. *Denotaremos também por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ como multiíndice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n = k$, de modo que, dada uma função $\phi \in C^k(U)$ tem-se*

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} ... \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \phi$$

Definição C.1. *Suponha $u, v \in L^1_{loc}$ e α um multi-índice. Dizemos que v e a α^{th}-derivada parcial fraca de u e escrevemos $D^\alpha u = v$ se*

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx,$$

para todas as funções teste $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e seja k um inteiro não negativo. Iremos trabalhar agora certos espaços de funções, cujas derivadas fracas de várias ordens estão contidas em vários espaços L_p.

Definição C.2. *O espaço de Sobolev* $W^{k,p}(U)$ *consiste de todas a funções mensuráveis* $u : U \to \mathbb{R}$ *tais que para cada multi-índice* α *com* $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ *existe no sentido fraco e pertence a* L_p.

Se $p = 2$, escreve-se também

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \quad (k = 0, 1, ...).$$

Definição C.3. *Se* $u \in W^{k,p}(U)$, *defini-se sua norma por*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} ess\sup_U |D^\alpha u| & (p = \infty) \end{cases}$$

Definição C.4. *O fecho do conjunto* $C_c^\infty(U)$ *em* $W^{k,p}(U)$ *é denotado por* $W_0^{k,p}(U)$

Pode-se compreender o espaço $W_0^{k,p}(U)$ como o conjunto das funções de $W^{k,p}(U)$ tais que "$D^\alpha u = 0$ em ∂U"para todo $|\alpha| \leq k - 1$. É costume também se escrever

$$H_0^k(U) = W_0^{k,2}(U)$$

Teorema C.3. *Para cada* $k = 1, ...$ *e* $1 \leq p \leq \infty$, *o espaço de Sobolev* $W^{k,p}(U)$ *é um espaço de Banach.*

Prova. (Vide [14], pp. 262 e 263.)

■

Nos próximos teoremas mostraremos que se uma função u pertence a um espaço $W^{1,p}(U)$ então u pertence automaticamente a outros tipos de espaços de funções.

Definição C.5. *Se $1 \leq p < n$, o conjugado Sobolev de p é*

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Observe que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad p^* > p.$$

Teorema C.4. (Inequação Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). Assuma $1 \leq p < n$. existe uma constante C, dependendo unicamente de p e n, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Prova. (Ver [14], p.277, Teorema 1).

■

A inequação de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev mostrou que $W^{1,p}(U)$ está imerso em $L^{p^*}(U)$ para $1 \leq p < n$, $p^* = \frac{pn}{n-p}$. O próximo teorema ira afirmar que de fato $W^{1,p}(U)$ está *compactamente imerso* em $L^q(U)$ para $1 \leq q < p^*$.

Definição C.6. *Sejam X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$. Dizemos que X está **compactamente imerso** em Y, e escrevemos*

$$X \subset\subset Y,$$

se,

(i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X (u \in X)$para aguma constante C;

(ii) cada sequência em Xé pré-compacta em Y.

Mais precisamente, a condição (ii) implica que se uma sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência em X com $\sup_k \|u\|_x < \infty$, então alguma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge em Y para algum limite u:

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{k_j} - u\|_Y = 0.$$

Teorema C.5. (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov). *Seja U um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e ∂U é C^1. Suponha $1 \leq p < n$. Então*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

Prova. (Veja [14], p.287-288, Teorema 1).

∎

C.4 Operadores de Fredholm

Nesta seção, serão expostos alguns resultados sobre os chamados operadores de Fredholm. Tais operadores tem forte relação com a teoria espectral de operadores lineares compactos autoadjuntos em espaços de Banach, desse modo é necessária também uma breve exposição sobre tais operadores. Para isso, serviram como referências: [1] [17].

Dado um operador $L : E \to F$, entre espaços vetoriais E e F, definimos seu *conúcleo* como sendo o espaço quociente F/ImL, que denotaremos por $\text{coKer}L$.

Definição C.6. (Operador de Fredholm) *Um operador linear $L : E \to F$ é dito de Fredholm se KerL e coKerL tem dimensão finita. Neste caso, seu índice é o inteiro*

$$ind\ L = \dim Ker\ L - \dim coKer\ L.$$

Observação C.3. *Se E e F tem dimensão finita então L será necessáriamente de Fredholm. De fato, pelo Teorema do Núcleo e Imagem, tem-se* $\dim E = \dim KerL +$

$\dim ImL$, *e consequentemente;*

$$\begin{aligned} ind\ L &= \dim Ker\ L - \dim coKer\ L \\ &= \dim E - \dim Im\ L - (\dim F - dimIm\ L) \\ &= \dim E - \dim F. \end{aligned}$$

Também é fácil ver que um isormofismo é um operador de Fredholm de índice 0.

Será mostrado no restante desta seção que se $K : E \to E$ é um operador compacto, então $I - K$ é um operador de Fredholm de índice 0, onde I é a identidade.

Antes precisamos definir com mais detalhes o que é um operador compacto entre espaços de Banach.

Definição C.7. *Seja $K : E \to F$ um operador linear (não necessariamente limitado), onde E e F são espaços de Banach. Dizemos que K é compacto se leva conjunto limitados de E em conjuntos relativamente compacto de F, isto é, $\overline{K(A)}$ é compacto para qualquer subconjunto limitado A*

Teorema C.6. *Se $K : E \to E$ é um oprador compacto, então $I - K$ é um operador de Fredholm e, além disso,*

$$ind\ (I - K) = ind\ I = 0$$

Prova. (Veja [1], p. 38, Teorema 2.3.11).

■

A seguir lembraremos o conceito de operador adjunto em espaços com produto interno.

Definição C.8. (Operador adjunto em espaços de Hilbert). *Seja $T : H_1 \to H_2$ um operador limitado, onde H_1 e H_2 são espaços de Hilbert. Então operador T^* de T é um operador $T^* : H_2 \to H_1$ tal que,*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,, \forall x \in H_1, \forall y \in H_2.$$

Dado um espaço de Hilbert H, temos que um operador $L : H \to H$ será dito ser *autoadjunto* se $\langle Lx, y\rangle = \langle x, Ly\rangle\,, \forall x, y \in H$.

Iremos agora abordar algumas noções de teoria espectral para operadores auto-adjuntos.

A seguir, $L(E)$ denotará o conjunto dos operadores lineares limitados de E em E.

Definição C.9. (Espectro de um operador) *Seja $L \in L(E)$. Um **valor regular** de L é um número $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que o operador $L - \lambda I$ é inversível em $L(E)$. O conjunto de todos os valores regulares de L, denotado por $\rho(L)$, é chamado de **conjunto resolvente** de L. Seu complementar $\sigma(E) = \mathbb{K} - \rho(L)$, é chamado de **espectro** de L. Dizemos que λ é um **valor espectral** de L se $\lambda \in \sigma(L)$. Para $\lambda \in \rho(L)$, o operador $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$ é chamado de **resolvente** de L.*

Um **autovalor** de um operador L é um número $\lambda \in \rho(L)$ tal que $L - \lambda I$ não é injetor, ou seja, se λ é um autovalor de L, então existe um elemento $v \in E \setminus \{0\}$ tal que $Lv = \lambda v$, denotaremos o conjunto dos autovalores de L por $AV(L)$. O vetor v é chamado de **autovetor** L correspondente ao autovalor λ. O **auto-espaço** associado a um autovalor λ de L é o subespaço vetorial gerado pelos autovetores de L correspondentes aos autovalores de λ.

Se E tem dimensão finita, o espectro de um operador $L \in L(E)$ é composto pelos autovalores de L. Isso é consequência do fato de que todo operador linear em um espaço normado de dimensão finita é inversível se, e somente se, é injetor.

Em dimensão infinita podemos ter $\lambda \in \sigma(L)$ com $L - \lambda I$ injetor. Para ver isso, considere o espaço de Hilbert l^2 (espeço das sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $\sum_n |x_n|^2$ é convergente), e o operador shift à direita dado por $T : l^2 \to l^2, Tx = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$ para $x = (\xi_n)$. Veja que $0 \notin AV(L)$ e $0 \in \sigma(T)$ ($Ker\ L = \{0\}$ e $Im\ L \neq l^2$).

Para operadores compactos entre espaços de dimensão infinita, tem-se outro resultado relacionando *espectro* e conjunto de *autovalores*. A seguir denotaremos por $K(E)$ o conjunto dos operadores compactos de E em E.

Teorema C.7. *Seja $L \in K(E)$ com* $\dim\ E = \infty$*. Então,* $0 \in \sigma(L)$, $\sigma(L) \setminus \{0\} =$

$AV(L) \setminus \{0\}$ e uma das alternativas é verificada:

$*$ $\sigma(L) = \{0\}$, ou ;

$*$ $\sigma(L) \setminus \{0\}$ é finito, ou

$*$ $\sigma(L) \setminus \{0\}$ possui uma sequência convergindo para zero.

Prova. (Ver [17], p. 196-198, Teoremas 7.3.6 e 7.3.7.).

■

Para o caso em que um operador $L \in L(H)$ é autoadjunto, temos o seguinte resultado.

Teorema C.8. *Seja H um espaço de Hilbert. O espectro $\sigma(L)$ de um operador auto-adjunto $L \in L(H)$ é real.*

Prova. (Ver [17], p. 206, Teorema 7.5.3.)

■

Proposição C.1. *Sejam H um espaço de Hilbert e $L \in L(E)$ um operador compacto e autoadjunto. Então:*

(a) $\sigma(L) \neq \emptyset$

(b) Se $\sigma(L) = \{0\}$ então $T = 0$.

Prova. (Ver [17], p.207, Corolário 7.5.5).

■

C.5 Algumas Propriedades Espectrais

Antes enunciar um dos principais resultados desta seção, precisaremos de mais alguns resultados sobre teoria espectral em espaços de Banach. Seguiremos para isso, [21].

O resolvente $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ é uma função analítica de λ em uma vizinhança de cada ponto regular ν.

Seja K_L a classe de todas as funções de variáveis complexas que são analíticas por partes sobre o espectro $\sigma(L)$. Isso significa que uma função ϕ pertence à K_L se satisfaz as seguintes propriedades:

1) O domínio da definição D_ϕ de $\phi(\lambda)$ consiste de um número finito de componentes abertas cuja união contém o espectro $\sigma(L)$ de L, com cada componente contendo pelo menos um ponto do espectro;
2) A função $\phi(\lambda)$ é holomorfa por partes, isto é, holomorfa em cada componente do domínio de definição D_ϕ.

Existe um isomorfismo algébrico, pelo princípio de F.Riesz, entre a álgebra K_L e uma certa álgebra comutativa de operadores tais que a função $\phi(\lambda) \equiv \lambda$ corresponde ao operador L e $\phi(\lambda) = 1/(\lambda - z)$ $(z \notin \sigma(L))$ corresponde ao resolvente $R_z = (L - zI)^{-1}$.

A partir disso, define-se para $\phi(\lambda) \in K_L$

$$\phi(L) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_L} \phi(\lambda) R_\lambda d\lambda. \tag{C.1}$$

A correspondência $\phi(\lambda) \leftrightarrow \phi(L)$ é claramente linear e a propriedade multiplicativa segue tomando tomando $\phi_1(\lambda)I, \phi_2(\lambda)I$ como $F_1(\lambda)$ e $F_2(\lambda)$ na seguinte fórmula

$$\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} F_1(\lambda)R_\lambda d\lambda\right\} \cdot \left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} F_2(\lambda)R_\lambda d\lambda\right\} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} F_1(\lambda)R_\lambda f_2(\lambda) d\lambda,$$

onde $F_1(\lambda)$ e $F_2(\lambda)$ operadores funcionais analíticos por partes no espectro $\sigma(L)$.

A correspondência $\lambda \leftrightarrow L$ segue da relação

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_L} \lambda(L - \lambda I)^{-1} d\lambda = L,$$

Considere agora um operador L cujo espectro forma um conjunto desconexo. Um subconjunto fechado de $\sigma(L)$ cujo complementar em $\sigma(L)$ é também fechado é chamado de *conjunto espectral* . Suponha

$$\sigma(L) = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma_k(L)$$

onde os conjuntos $\sigma_k(L)$ $(k = 1, ..., m)$ são conjuntos espectrais disjuntos. Podemos assumir o contorno Γ_L consistindo de partes disjuntas Γ_k cada qual sendo o bordo de um domínio G_k contendo o correspondente conjunto espectral $\sigma_k(L)$.

Seja

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} 1 \text{ para } \lambda \in G_K, \\ 0 \text{ para } \lambda \in G_j, j \neq k. \end{cases}$$

As funções $\phi_k(\lambda)$ $(k = 1, ..., m)$ pertencem a K_A, e podemos, portanto, escrever

$$P_k = \phi_k(L) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_L} \phi_k(\lambda) R_\lambda d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_L} R_\lambda d\lambda, \tag{C.2}$$

de onde seguem as relações

$$\phi_k(\lambda)\phi_j(\lambda) = \delta_{kj}\phi_k(\lambda); \ \sum_{k=1}^{m} \phi_k(\lambda) \equiv 1$$

que estão claramente satisfeita no domínio $G = \bigcup_{k=1}^{m} G_k$. Também temos

$$P_k P_j = 0 \ (k \neq j); \quad P_k^2 = P_k; \ \sum_{k=1}^{m} P_k = I. \tag{C.3}$$

Assim, os operadores P_k formam uma decomposição da identidade em uma soma de projeções.

Da fórmula (C.2) segue que o operador P_k comuta com L, ou seja, $P_k L = L P_k$ $(k = 1, 2, ..., m)$.

A comutatividade das relações (C.3) é equivalente a afirmação de que cada subespaço $\beta_k = P_k\beta$ é invariante sob a ação de L. (ver [21], pag. 20).

O espectro $\sigma(L|\beta_k)$ da restrição de L ao subespaço β_k coincide com o conjunto espectral $\sigma_k(L)$.

O subespaço β é a soma direta $\beta_1 + ... + \beta_m$, como segue da última relação em (C.3).

Denotaremos a seguir a projeção P_k e o subespaço $\beta_k = P_k\beta$ de *projeção espectral e subespaço invariante*, respectivamente, correspondentes ao conjunto espetral $\sigma_k(L)$.

No caso em que o espectro do operador L não intersecta o eixo imaginário, $\sigma_-(L)$ e $\sigma_+(L)$ denotarão conjuntos espectrais de L contidos no interior dos semi-planos complexos esquerdo e direito respectivamente. Nessa situação, escrevemos $\sigma(L) = \sigma_+(L) \cup \sigma_-(L)$.

As correspondentes projeções espectrais serão denotadas por $P_- = P_-(L)$ e $P_+ = P_+(L)$ e serão denominadas de projeção espectral positiva e negativa, respectivamente.

Teorema C.9. *Sejam H um espaço de Hilbert e $L \in L(H)$ um operador de Fredholm auto-adjunto. Então existe uma única decomposição*

$$H = P_+(L) \oplus P_-(L) \oplus P_0(L),$$

tal que:

i. $P_0(L) = \ker L$

ii. $Im\ L = P_+(L) \oplus P_-(L)$,

iii. $P_+(L)$ *e* $P_-(L)$ *são subespaços fechados de* H *invariantes por* L,

iv. $P_+(L), P_-(L)$ *e* $\ker L$ *são dois a dois ortogonais e*

v. L *é positivo definido em* $P_+(L)$ *e negativo definido em* $P_-(L)$.

Prova. *(Ver [1], p. 71, Teorema 3.3.19 e p. 73, Proposição 3.4.1).*

■

Observação C.4. *Os operadores projeção são dados por*

$$\begin{aligned} P_+(L) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_+} R_\lambda d\lambda \\ P_-(L) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_-} R_\lambda d\lambda \\ P_0(L) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} R_\lambda d\lambda \end{aligned}$$

onde Γ_k, $(k = +, -, 0)$ é o contorno de um domínio G_k contendo os correspondentes conjuntos espectrais (Ver [21], pp 15-21).

Referências Bibliográficas

[1] J. d. J. M. Acevedo. *O fluxo espectral de caminhos de operadores de Fredholm auto-adjuntos em espaços de Hilbert*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, (2011).

[2] G. Aragão. *Equações Diferenciais Ordinárias em Espaços de Banach*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, (2006).

[3] J. Ball. Saddle point analysis for an ordinary differential equation in a banach space, and an application to dynamic buckling of a beam. *Nonlinear elasticity*, pages 93–160, 1973.

[4] R. T. T. Câmara. *Existência de Atrator Global para uma Equação de Evolução com Convolução*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2011).

[5] S. H. da Silva. Existence and upper semicontinuity of global attractors for neural fields in an unbounded domain. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2010(138):1–12, 2010.

[6] S. H. da Silva. Existence and upper semicontinuity of global attractors for neural network in a bounded domain. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 19(1):87–96, 2011.

[7] S. H. da Silva. Properties of an equation for neural fields in a bounded domain. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2012(42):1–9, 2012.

[8] S. H. da Silva. Lower semicontinuity of global attractors for a class of evolution equations type neural fields in a bounded domain. *arXiv preprint arXiv:1312.6745*, 2013.

[9] B. A. S. de Almeida. *Algumas Propriedades de Equações Diferenciais em Espaços de Banach e Aplicações a Campos Neurais*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Campina Grande, Campina Grande, (2015).

[10] J. D. C. . e H. R. Wilson. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophysical journal*, 12(1):1, 1972.

[11] A. L. P. e S. H. da Silva. Exponential trichotomies and continuity of invariant manifolds. *The São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, 5(2):111–134, 2011.

[12] A. L. e S.H. da Silva. Global attractors for neural fields in a weighted space. *Matemática Contemporânea*, 36:139–153, 2009.

[13] K.-J. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194. Springer Science & Business Media, 1999.

[14] L. C. Evans. Partial differential equations. *Graduate Studies in Mathematics*, 19, 1998.

[15] G. B. Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, 1995.

[16] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 2013.

[17] T. E. G. Botelho, D. Pellegrino. *Fundamentos da Análise Funcional*. SBM.

[18] J. Hale. *Ordinary Differential Equations,*2^a *ed.* Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.

[19] J. K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*. Number 25. American Mathematical Soc., 2010.

[20] D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, volume 840. Springer-Verlag New York, 1981.

[21] M. K. J.L. Daleckiĭ. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space (Translations of Mathematical Monographs v.43)*. American Mathematical Society, Providence.

[22] E. L. Lima. *Elementos de topologia geral*. Ao Livro Técnico, 1970.

[23] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.

[24] L. Rall. *Nonlinear Functional Analysis and Aplications*. Academic Press, 1971.

[25] M. B. Silva. *Comportamento Assintótico para Equação de Campos Neurais*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, (2011).

[26] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68. Springer Science & Business Media, 2012.