Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a Geometria de Imersões Isométricas no Espaço Hiperbólico com Aplicação de Gauss Prescrita

por

André Felipe Araujo Ramalho

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

R165s Ramalho, André Felipe Araujo.
Sobre a geometria de imersões isométricas no espaço hiperbólico com aplicação de Gauss Prescrita / André Felipe Araújo Ramalho. – Campina Grande, 2017.
87 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez".
Referências.

1. Espaço Hiperbólico. 2. Subvariedades Completas. 3. Vetor Curvatura Média Paralelo. 4. Aplicação de Gauss. 5. Hipersuperfícies Tipo-Espaço. 6. Hipersuperfícies Totalmente Umbílicas. 7. Subvariedades Pseudo-Umbílicas. 8. Subvariedades Mínimas. I. Velásquez, Marco Antonio Lázaro. II. Título.

CDU 51(043)

Sobre a Geometria de Imersões Isométricas no Espaço Hiperbólico com Aplicação de Gauss Prescrita

por

André Felipe Araujo Ramalho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros - UFC

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva - UFC

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2016

Resumo

Neste trabalho, estudamos a geometria de uma subvariedade M^n, $n \geq 2$, imersa isometricamente no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+p}$, $p \geq 1$, com algumas condições prescritas sobre sua aplicação de Gauss N. No caso $p = 1$, inicialmente, nosso objetivo é mostrar que uma hipersuperfície completa M^n, com curvatura média constante, é totalmente umbílica, desde que $N(M^n)$ esteja contida em uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica do espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Em seguida, mostramos outro resultado para a mesma conclusão, mas, desta vez, supomos que M^n tenha curvatura escalar limitada por baixo e que $N(M^n)$ esteja contida em uma certa região de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ determinada por algum vetor a do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$. Por fim, no caso $p > 1$, estabelecemos condições suficientes para garantir que uma subvariedade completa M^n, com vetor curvatura média paralelo, seja pseudo-umbílica. Em particular, concluímos que, diante de tais condições, M^n é uma subvariedade mínima de uma pequena hiperesfera de $\mathbb{H}^{n+p}$.

Palavras-chave: Espaço Hiperbólico; subvariedades completas; vetor curvatura média paralelo; aplicação de Gauss; hipersuperfícies tipo-espaço; hipersuperfícies totalmente umbílicas; subvariedades pseudo-umbílicas; subvariedades mínimas.

Abstract

In this work we study the geometry of a submanifold M^n, $n \geq 2$, isometrically immersed in the hyperbolic space, $\mathbb{H}^{n+p}$, $p \geq 1$, with some prescribed conditions on the behavior of its Gauss application. In the case $p = 1$, initially our goal is to show that a complete hypersurface M^n with constant mean curvature is totally umbilical, provided that $N(M^n)$ lies in a totally umbilical spacelike hypersurface of the de Sitter space $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Next, we show another result for the same conclusion but this time we assume that M^n has scalar curvature bounded from below and that $N(M^n)$ is contained in a certain region of $\mathbb{S}_1^{n+1}$ determined by some vector a of the Lorentz-Minkowski space $\mathbb{L}^{n+2}$. Finally, in the case $p > 1$ we establish sufficient conditions to guarantee a complete submanifolds M^n with parallel nonzero mean curvature vector must be pseudo-umbilical. In particular, we conclude that M^n is a minimal submanifold of a small hypersphere of $\mathbb{H}^{n+p}$.

Keywords: Hyperbolic space; complete submanifolds; parallel mean curvature vector; Gauss mapping; spacelike hypersurfaces; totally umbilical hypersurfaces; pseudo-umbilical submanifolds; minimal submanifolds.

Agradecimentos

A Deus:
Por tanto que eu não ousaria tentar colocar em palavras.

À minha mãe:
Se as oportunidade fossem flores, minha mãe seria uma exímia jardineira, fazendo brotar, em terra árida, um belo jardim regado a suor. Não possuo mérito algum que não tenha sido fomentado por seus esforços, ensinamentos e exemplos.

Aos meus irmãos:
Meus melhores e mais antigos amigos.

À minha esposa:
Com quem eu tenho dividido muitos bons momentos e cuja companhia tem sido inexoravelmente constante nos momentos mais difíceis.

Aos professores:
Exemplos de dedicação ao trabalho, não raras vezes, vão, no exercício do seu ofício, além da mera obrigação. Muitas vezes, as atitudes destes me motivaram a estudar um pouco mais. Não podendo citar a todos, gostaria de registrar meus agradecimentos ao professor Marco Antonio Lázaro Velásquez, por ter sido sobremaneira paciente, solícito e acessível ao me orientar na realização deste trabalho; aos professores Abdênago Alves de Barros, Jonatan Floriano da Silva e Henrique Fernandes de Lima, por terem-se disposto a participar da avaliação do mesmo, por suas correções e sugestões que, além de melhorar o presente trabalho, me serviram de lição; Ao professor Fábio Reis dos Santos, pela prestatividade ao me tirar várias dúvidas; Ao professor Antônio Pereira Brandão Júnior, pelas lições de álgebra; ao professor Daniel Cordeiro de Morais Filho,

pelas reflexões propostas no período em que estive vinculado ao grupo PET-Matemática UFCG e aos demais professores da Unidade Acadêmica de Matemática. Muito tenho aprendido com todos.

Aos colegas:
Bravos companheiros sem os quais a jornada que cuminou neste trabalho tornar-se-ia muito menos prazerosa. Gostaria de registrar um agredecimento especial a Jogli Gidel da Silva, pelas muitas dúvidas sanadas.

Aos funcionários da Unidade Acadêmica de Matemática:
Por criarem um ambiente propício.

Dedicatória

À Juarez.

Conteúdo

Introdução 9

1 Preliminares **13**

1.1 Espaços munidos com um produto escalar 13

1.2 Variedades semi-Riemannianas 15

1.2.1 Métricas semi-Riemannianas e a conexão de Levi-Civita 15

1.2.2 Alguns operadores diferenciáveis 17

1.2.3 Geodésicas e a aplicação exponencial 20

1.2.4 Curvatura 22

1.3 Orientação temporal 24

2 Imersões isométricas **26**

2.1 A segunda forma fundamental 26

2.2 Os espaços hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ e de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ 32

2.3 Hipersuperfícies totalmente umbílicas 38

2.4 Hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ 39

2.5 Hipersuperfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^{n+1}$ 45

3 Resultados Auxiliares **50**

3.1 Uma fórmula do tipo-Simons 50

3.2 O Laplaciano de algumas funções suportes 57

4 Hipersuperfícies em $\mathbb{H}^{n+1}$ com aplicação de Gauss prescrita **62**

5 Sobre a geometria de subvariedades imersas em $\mathbb{H}^{n+p}$ **71**

Bibliografia **85**

Introdução

Seja $\mathbb{Q}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante. Consideremos uma imersão $x : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana M^n em $\mathbb{Q}^{n+1}$ e denotemos por $N : M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}$ sua aplicação de Gauss. Quando $\mathbb{Q}^{n+1}$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e x é um gráfico completo de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, sua aplicação de Gauss está contida em um hemisfério aberto da esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$. O comportamento da aplicação de Gauss fornece consequências profundas para uma imersão. Por exemplo, um dos teoremas mais célebres da teoria de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ é o teorema de Bernstein [6], que estabelece que os únicos gráficos mínimos completos em $\mathbb{R}^3$ são os planos. Este resultado foi estendido sob a hipótese mais fraca de que a imagem da aplicação de Gauss $N(M^2)$ de M^2 está em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^2$, como podemos observar na obra de Barbosa e do Carmo [5]. Independentemente, de Giorgi [11] e Simons [22] mostraram que uma hipersuperfície mínima compacta M^n de $\mathbb{S}^{n+1}$ deve ser uma esfera totalmente geodésica desde que a imagem da sua aplicação de Gauss $N(M^n)$ esteja contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Esse resultado foi estendido por Nomizu e Smyth, em [18], para hipersuperfícies de curvatura média constante de $\mathbb{S}^{n+1}$, onde provam que uma variedade Riemanniana orientável conexa e compacta M^n de dimensão $n \geq 2$ imersa na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, com curvatura média constante, é uma hiperesfera se a imagem da aplicação de Gauss $N(M^n)$ encontra-se em um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Mais recentemente, usando o modelo de Lorentz do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, Aquino e de Lima [3] mostraram que uma hipersuperfície completa M^n com curvatura média constante, que está contida em uma bola geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$ e tal que a imagem da aplicação de Gauss $N(M^n)$ se situa em uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica do espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, deve ser uma esfera geodésica totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$. Além disso, no caso de M^n estar contida entre duas horoesferas (hiperesferas) de $\mathbb{H}^{n+1}$, determinadas por algum vetor tipo-luz (tipo-espaço) a do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$, e com a imagem da aplicação de Gauss $N(M^n)$ contida em uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, determinada por a, os autores provaram que M^n deve ser uma horoesfera (hiperesfera) de $\mathbb{H}^{n+1}$.

Nesta dissertação, inicialmente, mostramos uma extensão dos resultados de [3], mencionados acima, devida a Barros, Aquino e de Lima [4], onde eles são usuários de uma fórmula adequada tipo-Simons, devida a Nomizu e Smyth [19] juntamente com o bem conhecido princípio de máximo generalizado de Omori-Yau [20, 23]. Mais precisamente, mostramos o seguinte resultado (cf. Teorema 4.3):

As únicas hipersuperfícies completas com curvatura média constante imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$ cuja imagem da aplicação de Gauss está contida em uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}$ são as totalmente umbílicas.

Por outro lado, em [17], Montiel provou que se uma hipersuperfície tipo-espaço completa M^n no espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ com curvatura média constante $H \geq 1$ é tal que a imagem da sua aplicação de Gauss $N(M^n)$ está contida no fecho de um domínio interior delimitado por uma horoesfera de $\mathbb{H}^{n+1}$, então sua curvatura média é, de fato, igual a 1. Quando $n = 2$, isso implica que M^2 é também uma superfície totalmente umbílica e, portanto, a imagem da sua aplicação de Gauss é exatamente uma horoesfera de $\mathbb{H}^3$. No segundo teorema de [4], os autores estabelecem uma espécie de resultado dual para o de Montiel mencionado acima. Para isso, eles utilizaram, como principal ferramenta analítica, uma extensão do clássico teorema de Hopf sobre uma variedade Riemanniana completa e não-compacta, devida a Yau [24].

No que se segue, denotamos por $v^\top$ a componente tangencial de um vetor $v \in \mathbb{L}^{n+2}$ em relação a uma imersão $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ e, de acordo com a terminologia estabelecida em [17], dizemos que a imagem de sua aplicação de Gauss N está contida no fecho de um domínio delimitado por uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, determinada por algum vetor $v \in \mathbb{L}^{n+2}$, quando a função ângulo $\langle N, v\rangle$

não muda de sinal em M^n. Assim, estabelecemos e mostramos o seguinte resultado (cf. Teorema 4.5):

As únicas hipersuperfícies completas, com curvatura média constante, imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$, tais que a curvatura escalar é limitada inferiormente e cuja aplicação de Gauss está contida no fecho de um domínio delimitado por uma hipersuperfície tipo-tempo totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, determinada por algum vetor $v \in \mathbb{L}^{n+2}$, com $v^\top$ tendo norma integrável segundo Lebesgue, são as totalmente umbílicas.

Uma outra temática desta dissertação diz respeito ao estudo realizado por de Lima, dos Santos e Velásquez, em [14], sobre a geometria de subvariedades completas n-dimensionais imersas, com vetor curvatura média não-nulo paralelo (isto é, o vetor curvatura média é paralelo como uma seção do fibrado normal), no espaço hiperbólico $(n+p)$-dimensional $\mathbb{H}^{n+p}$. Neste contexto, os autores utilizaram uma técnica desenvolvida por Alías e Romero [2] conjuntamente com a aplicação de uma extensão adequada de um princípio de máximo generalizado de Yau [24] devido a Caminha, em [9], para provar a seguinte resultado (cf. Teorema 5.7):

Seja M^n uma variedade completa, imersa em $\mathbb{H}^{n+p} \subset \mathbb{L}^{n+p+1}$, com vetor curvatura média paralelo não-nulo e curvatura escalar normalizada limitada inferiormente. Suponha que existe um vetor fixo $a \in \mathbb{L}^{n+p+1}$ tal que $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$, a^N não se anula em M^n e a^N é colinear com $\mathbf{H}$. Então, M^n é pseudo-umbílica e, em particular, M^n é uma subvariedade mínima de uma pequena hiperesfera de $\mathbb{H}^{n+p}$.

Aqui, $a^\top$ e a^N indicam, respectivamente, as componentes tangencial e normal do vetor a em relação à imersão $M^n \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+p}$, e $\mathcal{L}^1(M)$ representa o espaço das funções integráveis segundo Lebesgue na subvariedade M^n. Além disso, lembramos que uma subvariedade M^n de $\mathbb{H}^{n+p}$ é chamada pseudo-umbílica quando seu vetor curvatura média é uma direção umbilílica.

Observamos que, quando $p = 1$, as noções de vetor curvatura média paralelo e de pseudo-umbílica coincidem, respectivamente, com os conceitos de curvatura média constante e de totalmente umbílica. Além disso, observamos também que a hipótese de que a^N não se anula em M^n equivale à função ângulo $\langle N, a\rangle$ ter um sinal estrito sobre M^n, onde N representa a aplicação de Gauss de $M^n \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$. Consequentemente, o Teorema 5.7 pode ser considerado como uma extensão do Teorema 4.5.

Este trabalho apresenta-se com a seguinte organização: No Capítulo 1, estabelecemos as notações e os fatos preliminares que serão utilizados no decorrer do texto. No Capítulo 2, fazemos um estudo da teoria de hipersuperfícies Riemannianas imersas em ambientes Riemannianos ou Lorentzianos. A seguir, na Seção 3.1 do Capítulo 3, estabelecemos uma fórmula do tipo-Simons devida a Nomizu e Smyth [19] que, juntamente com as fórmulas do Laplaciano de algumas funções suportes obtidas na Seção 3.2 do mesmo capítulo, vai permitir-nos mostrar, no Capítulo 4, os resultados descritos acima, com relação a hipersuperfícies imersas no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Finalmente, no Capítulo 5, enunciamos e mostramos o resultado de subvariedades em $\mathbb{H}^{n+p}$ supracitado.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, temos como objetivo estabelecer as notações que serão utilizadas nos demais capítulos deste trabalho, bem como os fatos básicos da teoria de imersões isométricas dos quais faremos uso posteriormente. Para maiores detalhes, indicamos, como referências, [13] e [21].

Iniciamos com uma exposição sobre formas bilineares simétricas e produto escalar num espaço vetorial de dimensão finita; logo após, definimos o que é uma variedade semi-Riemanniana e, então, apresentamos os conceitos de conexão e curvatura.

No que segue, $\mathcal{V}$ sempre denotará um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica b sobre $\mathcal{V}$ é uma função bilinear $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ tal que $b(v, w) = b(w, v)$ para quaisquer $v, w \in \mathcal{V}$

1.1 Espaços munidos com um produto escalar

Uma forma bilinear simétrica b sobre $\mathcal{V}$ é dita

(a) *positiva definida*, se $b(v, v) > 0$ para todo $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$.

(b) *negativa definida*, se $b(v, v) < 0$ para todo $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$.

(c) *não-degenerada*, se $b(v, w) = 0$ para todo $w \in \mathcal{V}$ implica em $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$, então a restrição $b|_{\mathcal{W}\times\mathcal{W}} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica sobre $\mathcal{W}$. Definimos o *índice* de b como a maior dimensão de um subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tal que $b|_{\mathcal{W}\times\mathcal{W}}$ é negativa definida.

Definição 1.1. *Um produto escalar sobre um espaço vetorial real de dimensão finita $\mathcal{V}$ é uma forma bilinear simétrica $b : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ que é não-degenerada. Diremos que $\mathcal{V}$ é um espaço com produto escalar se ele é munido com um produto escalar, e definimos o índice de $\mathcal{V}$ como sendo o índice de seu produto escalar.*

Se $\mathcal{V}$ é um espaço com produto escalar b e $\mathcal{W}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$, dizemos que $\mathcal{W}$ é *não-degenerado* se a restrição $b|_{\mathcal{W}\times\mathcal{W}} : \mathcal{W}\times\mathcal{W} \to \mathbb{R}$ for não-degenerada. Definimos o *complemento ortogonal* $\mathcal{W}^\perp$ de $\mathcal{W}$ em $\mathcal{V}$ por

$$\mathcal{W}^\perp = \{v \in \mathcal{V} \ ; \ b(v,w) = 0 \ \text{ para todo } \ w \in \mathcal{W}\}.$$

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos relevantes sobre espaços vetoriais munidos com um produto escalar (cf. [21], Lemas 2.19, 2.22 e 2.23).

Lema 1.2. *Uma forma bilinear simétrica b é não-degenerada se, e somente se, sua matriz com respeito a uma (e então a toda) base de $\mathcal{V}$ for invertível*

Lema 1.3. *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço com produto escalar e $\mathcal{W}$ um subespaço de $\mathcal{V}$. Temos:*

(a) *se $\mathcal{W}$ é não-degenerado, então $dim(\mathcal{W}) + dim(\mathcal{W}^\perp) = dim(\mathcal{V})$ e $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$;*

(b) *$\mathcal{W}$ é não-degenerado se, e somente se, $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$. Em particular, $\mathcal{W}$ é não-degenerado se e só se $\mathcal{W}^\perp$ for não-degenerado.*

No que segue, supomos que $\mathcal{V}$ é um espaço com produto escalar $b = \langle , \rangle$. Em relação a $\langle , \rangle$, dizemos que $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ é:

(i) *tipo-tempo*, quando $\langle v, v\rangle < 0$;

(ii) *tipo-luz*, quando $\langle v, v\rangle = 0$;

(iii) *tipo-espaço*, quando $\langle v, v\rangle > 0$.

Um subespaço não-degenerado $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ será dito *tipo-tempo*, *tipo-luz* ou *tipo-espaço* se todos os seus elementos forem tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço, respectivamente. Se $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o *sinal* $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

A *norma* de $v \in \mathcal{V}$ é $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v\rangle}$, e v é *unitário* se $|v| = 1$. É bem conhecido em Álgebra Linear que todo espaço vetorial real $\mathcal{V}$ munido com um produto escalar $\langle , \rangle$ admite uma base ortonormal. Assim, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma tal base, teremos que $\langle e_i, e_j\rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se } i = j \\ 0 & , \quad \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Nesse contexto, é possível estabelecer o seguinte resultado (cf. [21], Lemas 2.25 e 2.26).

Lema 1.4. *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço com produto escalar $\langle , \rangle$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{V}$. Então*

(a) *todo $v \in \mathcal{V}$ admite uma única representação da forma* $v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i\rangle e_i$;

(b) *o número de elementos com sinais negativos em $(\epsilon_1, \dots \epsilon_n)$ é igual ao índice de $\mathcal{V}$.*

1.2 Variedades semi-Riemannianas

Voltando nossa atenção, a partir de agora, às variedades diferenciáveis, passamos a estabelecer a noção de métrica, bem como algumas das suas principais consequências, que serão importantes para entender nosso cenário de trabalho.

1.2.1 Métricas semi-Riemannianas e a conexão de Levi-Civita

Definição 1.5. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade diferenciável. Uma métrica semi-Riemanniana em $\overline{M}^{n+1}$ é uma correspondência que associa, a cada $p \in \overline{M}^{n+1}$, um produto escalar $\langle , \rangle_p$ no espaço tangente $T_p\overline{M}$, com índice constante ν (isto é, cada $T_p\overline{M}$ tem índice ν), e que é diferenciável no seguinte sentido: se $x_1, \dots, x_{n+1}$ são as funções coordenadas de um sistema de coordenadas de $\overline{M}^{n+1}$, definido em um aberto $\mathcal{U}$, então as funções*

$$p \mapsto \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \right\rangle_p$$

são diferenciáveis em $\mathcal{U}$, para cada $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$. Uma variedade semi-Riemanniana é um par $(\overline{M}^{n+1}, \langle , \rangle)$, onde $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade diferenciável e $\langle , \rangle$ é uma métrica semi-Riemanniana em $\overline{M}^{n+1}$.

No que segue, por simplificação de notação, escreveremos $\overline{M}^{n+1}$ para o par $(\overline{M}^{n+1}, \langle , \rangle)$. Quando o índice ν de $\langle , \rangle$ é zero, $\overline{M}^{n+1}$ é simplesmente uma *variedade Riemanniana.* Por outro lado, quando $\nu = 1$, $\overline{M}^{n+1}$ é denominada uma *variedade Lorentziana.*

Exemplo 1. *Para cada número inteiro $\nu \in \{0, \ldots, n+1\}$, seja $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu}$ o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com o produto escalar*

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n+1-\nu} v_i w_i - \sum_{i=n-\nu+2}^{n+1} v_i w_i,$$

onde $v = (v_1, \ldots, v_{n+1})$ e $w = (w_1, \ldots, w_{n+1})$. Do item (b) do Lema 1.4, obtemos que $\langle , \rangle$ tem índice ν. Neste contexto, $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu}$ é chamado espaço semi-Euclidiano de índice ν e de dimensão $(n+1)$. Quando $\nu = 0$, $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu}$ torna-se simplesmente o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Quando $\nu = 1$, $\mathbb{R}^{n+1}_{1}$ é chamado espaço de Lorentz-Minkowski e é frequentemente denotado por $\mathbb{L}^{n+1}$.

Denotemos, a partir de agora, por $\mathfrak{X}(\overline{M})$, o conjunto dos campos de vetores de classe C^{∞} em $\overline{M}^{n+1}$ e por $C^{\infty}(\overline{M})$ o anel das funções reais de classe C^{∞} definidas em $\overline{M}^{n+1}$.

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, nosso objetivo, agora, é definir um outro campo de vetores que seja a derivada de Y na direção de X. Há um caminho natural para fazer isso em $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu}$.

Definição 1.6. *Sejam $x_1, \ldots, x_{n+1}$ as coordenadas em $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu}$. Se X e $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ são campos de vetores em $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu}$, o campo de vetores*

$$D_X Y = \sum_{i=1}^{n+1} X(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

é chamado derivada covariante de Y com relação a X.

Uma vez que esta última definição utiliza as coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu}$, não é óbvio como estendê-la a uma variedade semi-Riemanniana arbitrária. Começamos, portanto, axiomatizando suas propriedades.

Definição 1.7. *Uma conexão afim $\overline{\nabla}$ em uma variedade diferenciável $\overline{M}^{n+1}$ é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \overline{\nabla}: & \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) & \to & \mathfrak{X}(\overline{M}) \\ & (X, Y) & \mapsto & \overline{\nabla}_X Y \end{array}$$

tal que

(*i*) $\overline{\nabla}_{(fX+gY)}Z = f\,\overline{\nabla}_X Z + g\,\overline{\nabla}_Y Z$,

(*ii*) $\overline{\nabla}_X(Y+Z) = \overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_X Z$,

(*iii*) $\overline{\nabla}_X(fY) = f\,\overline{\nabla}_X Y + X(f)Y$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ *e todos* $f, g \in C^\infty(\overline{M})$. *O campo* $\overline{\nabla}_X Y$ *é chamado derivada covariante de* Y *na direção* X *com relação a* $\overline{\nabla}$.

Uma conexão afim está diretamente ligada à métrica, desde que acrescentemos uma compatibilidade com a métrica e outra propriedade relacionada ao colchete de Lie. Mais precisamente temos a seguinte

Proposição 1.8 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade semi-Riemanniana* $\overline{M}^{n+1}$, *existe uma única conexão afim* $\overline{\nabla}$, *chamada conexão de Levi-Civita, verificando*

(*i*) $[X, Y] = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X$ ($\overline{\nabla}$ *é simétrica*),

(*ii*) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X Z\rangle$ ($\overline{\nabla}$ *é compatível com a métrica*),

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. *A conexão de Levi-Civita é caracterizada pela seguinte equação*

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad -\langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

chamada fórmula de Koszul.

Demonstração. A fórmula de Koszul mostra que $\overline{\nabla}$ é unicamente determinada pela métrica $\langle , \rangle$. Assim, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência, defina $\overline{\nabla}$ por (1.1). É imediato verificar que $\overline{\nabla}$ é uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica. □

1.2.2 Alguns operadores diferenciáveis

A seguir, estenderemos os conceitos de gradiente, divergente, Hessiano e Laplaciano para uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$. Para isso, precisamos da noção de referencial ortonormal.

Definição 1.9. *Para um conjunto aberto* U *de uma variedade semi-Riemanniana* $\overline{M}^{n+1}$, *dizemos que uma coleção de campos vetoriais* $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ *em* U *é chamado um referencial ortonormal local em* U *quando* $\langle E_i, E_j\rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$ *em todo ponto de* U *e todos* $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$, *onde* ϵ_i *denota o sinal de* E_i.

Se U é o domínio de um sistema de coordenada em $\overline{M}^{n+1}$, com campos coordenados $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right\}$, então é imediato verificar que a aplicação do processo de ortogonalização de Gramm-Schmidt a tais campos nos fornece um referencial ortonormal local em U.

Definição 1.10. *O gradiente de uma função $f \in C^\infty(\overline{M})$, o qual denotaremos por $\overline{\nabla} f$, é um campo vetorial metricamente equivalente à diferencial df.*

Assim, $\langle \overline{\nabla} f, X\rangle = df(X) = X(f)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Em termos de um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ temos

$$\overline{\nabla} f = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i E_i(f) E_i,$$

onde $E_i(f) = \langle \overline{\nabla} f, E_i\rangle$.

Definição 1.11. *Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, definimos a divergência de X como a função* $\operatorname{div} X : \overline{M}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}\{Y(p) \to \overline{\nabla}_Y X(p)\}, \quad p \in \overline{M}^{n+1}.$$

Em um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$, podemos escrever

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{E_i} X, E_i\rangle.$$

Definição 1.12. *O Hessiano de uma função $f \in C^\infty(\overline{M})$, denotado por* $\operatorname{Hess} f$, *é definido como sendo a aplicação $C^\infty(\overline{M})$-bilinear* $\operatorname{Hess} f : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \to C^\infty(\overline{M})$ *dada por*

$$(\operatorname{Hess} f)(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_X (\overline{\nabla} f), Y\rangle.$$

O próximo resultado nos fornece algumas propriedades do Hessiano de uma função.

Proposição 1.13. *Para toda $f \in C^\infty(\overline{M})$ e quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ temos*

(a) $(\operatorname{Hess} f)(X, Y) = X(Y(f)) - (\overline{\nabla}_X Y) f$,

(b) $(\operatorname{Hess} f)(X, Y) = (\operatorname{Hess} f)(Y, X)$.

Demonstração. Para o item (a), como $\langle \overline{\nabla} f, Y\rangle = Y(f)$ então

$$\begin{aligned} X(Y(f)) &= X\langle \overline{\nabla} f, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla} f), Y\rangle + \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}_X Y\rangle \\ &= (\operatorname{Hess} f)(X, Y) + (\overline{\nabla}_X Y) f. \end{aligned}$$

Agora, para o item (b), lembremos que o colchete dos campos X e Y é definido por

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

mas por outro lado, da simetria da conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, temos

$$[X,Y](f) = (\overline{\nabla}_X Y)f - (\overline{\nabla}_Y X)f.$$

Logo, do item (a),

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}f)(X,Y) - (\mathrm{Hess}f)(Y,X) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &\quad -\{(\overline{\nabla}_X Y)f - (\overline{\nabla}_Y X)f\} = 0.\end{aligned}$$

□

Definição 1.14. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana. O operador Laplaciano $\Delta : C^\infty(\overline{M}) \to C^\infty(\overline{M})$ de $\overline{M}^{n+1}$ é definido por $\Delta f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}f)$, para toda $f \in C^\infty(\overline{M})$.*

Observemos que o Laplaciano também pode ser visto como um divergente, especificamente, com ajuda de um rererencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$, temos

$$\Delta f = \sum_{i}^{n+1} \epsilon_i (\mathrm{Hess}f)(E_i, E_i) = \sum_{i}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{E_i}(\overline{\nabla} f), E_i\rangle = \mathrm{div}(\overline{\nabla} f). \tag{1.2}$$

Proposição 1.15. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, $f, g \in C^\infty(\overline{M})$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então*

(i) $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y$,

(ii) $\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}X + \langle \overline{\nabla} f, X\rangle$,

(iii) $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle$,

(iv) $\Delta(\phi \circ f) = \phi'(f)\Delta f + \phi''(f)|\overline{\nabla} f|^2$.

Demonstração.

(i) Seja $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ um referencial ortonormal local definido em algum conjunto aberto de $\overline{M}^{n+1}$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(X+Y) &= \sum_{i=i}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{E_i}(X+Y), E_i\rangle = \sum_{i=i}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{E_i} X + \overline{\nabla}_{E_i} Y, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=i}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{E_i} X, E_i\rangle + \sum_{i=i}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{E_i} Y, E_i\rangle = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y.\end{aligned}$$

(ii) Além disso,

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(fX) &= \sum_{i=i}^{n+1}\epsilon_i\langle\overline{\nabla}_{E_i}(fX),E_i\rangle = \sum_{i=i}^{n+1}\epsilon_i\langle E_i(f)X+f\overline{\nabla}_{E_i}(X),E_i\rangle\\ &= \left\langle X,\sum_{i=i}^{n+1}\epsilon_iE_i(f)E_i\right\rangle + f\sum_{i=i}^{n+1}\epsilon_i\langle\overline{\nabla}_{E_i}(X),E_i\rangle = \langle X,\overline{\nabla}f\rangle + f\mathrm{div}X.\end{aligned}$$

(iii) Por outro lado, dos itens anteriores e de (1.2),

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= \mathrm{div}(\overline{\nabla}(fg)) = \mathrm{div}(g\overline{\nabla}f+f\overline{\nabla}g)\\ &= \mathrm{div}(g\overline{\nabla}f)+\mathrm{div}(f\overline{\nabla}g) = g\Delta f+f\Delta g+2\langle\overline{\nabla}f,\overline{\nabla}g\rangle.\end{aligned}$$

(iv) Finalmente,

$$\begin{aligned}\Delta(\phi\circ f) &= \mathrm{div}(\overline{\nabla}(\phi\circ f)) = \mathrm{div}(\phi'(f)\overline{\nabla}f)\\ &= \phi'(f)\mathrm{div}(\overline{\nabla}f)+\langle\overline{\nabla}(\phi'(f)),\overline{\nabla}f\rangle\\ &= \phi'(f)\Delta f+(\phi''(f))\langle\overline{\nabla}f,\overline{\nabla}f\rangle.\end{aligned}$$

□

1.2.3 Geodésicas e a aplicação exponencial

Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana e $\alpha : I \to \overline{M}^{n+1}$ uma curva diferenciável definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Dizemos que Z é um campo vetorial ao longo de α se a correspondência $I \ni t \mapsto Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$ é diferenciável. O conjunto de todos os campos vetoriais ao longo de α será denotado por $\mathfrak{X}(\alpha)$.

Proposição 1.16. *Se $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, então existe uma única função $Z \to Z' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ satisfazendo:*

(i) $(aZ_1+bZ_2)' = aZ_1'+bZ_2'$, *para todos $a,b \in \mathbb{R}$;*

(ii) $(hZ)' = \dfrac{dh}{dt}Z+hZ'$, *para qualquer $h \in C^\infty(I)$;*

(iii) $(V|_\alpha)'(t) = \overline{\nabla}_{\alpha'(t)}(V)$, *para todo $t \in I$ e qualquer $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$;*

(iv) $\dfrac{d}{dt}\langle Z_1,Z_2\rangle = \langle Z_1',Z_2\rangle+\langle Z_1,Z_2'\rangle$, *para quaisquer $Z_1,Z_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$.*

A prova da Proposição 1.16 tem como chave utilizar um sistema de coordenadas $x_1,\ldots,x_{n+1}$ para $\overline{M}^{n+1}$. Após alguns cálculos, é possível obter a expressão

$$Z' = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{dZ^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_i Z^i\overline{\nabla}_{\alpha'}\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

de onde segue a unicidade. Para a existência, basta definirmos Z' de acordo com (1.3). Através de cálculos diretos, mostramos que as quatro propriedades são satisfeitas localmente e, pela unicidade, obtemos a independência do sistema de coordenadas.

A noção de paralelismo surge, agora, de maneira natural.

Definição 1.17. *Um campo vetorial Z ao longo de uma curva $\alpha : I \to \overline{M}^{n+1}$ é chamado paralelo quando $(Z)'(t) = 0$, para todo $t \in I$*

A proposição a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [13], nos fornece o importante conceito de transporte paralelo.

Proposição 1.18. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $\alpha(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e. $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V, ao longo de α, tal que $V(t_0) = V_0$ ($V(t)$ é chamado o* transporte paralelo *de $V(t_0)$ ao longo de α).*

Definição 1.19. *Uma curva $\alpha : I \to \overline{M}^{n+1}$ é dita geodésica se $(\alpha')' = 0$.*

Da equação (1.3) obtemos que $(\alpha')' = 0$ equivale a

$$\frac{d^2(x_k \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n+1} \Gamma_{ij}^k(\alpha) \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x_j \circ \alpha)}{dt} = 0, \quad k \in \{1, \ldots, n+1\}, \tag{1.4}$$

onde $x_1, ..., x_{n+1}$ é um sistema de coordenadas de $\overline{M}^{n+1}$ e Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel associados a conexão $\overline{\nabla}$. Em (1.4) temos um sistema de $n+1$ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, o que nos fornece alguns resultados de existência e unicidade, como os seguintes.

Proposição 1.20. *Se $\alpha, \beta : I \to \overline{M}^{n+1}$ são geodésicas tais que $\alpha'(a) = \beta'(a)$, para algum ponto $a \in I$, então $\alpha = \beta$.*

Proposição 1.21. *Dado $v \in T_p\overline{M}$, existe uma única geodésica α_v tal que*

(i) $\alpha_v'(0) = v$;

(ii) α_v *é maximal, i.e., tem domínio maximal.*

Definição 1.22. *Seja $v \in U \subset T_p\overline{M}$ tal que a geodésica α_v é definida ao menos em $[0, 1]$. A função*

$$\begin{array}{rccc} \exp_p : & U & \to & \overline{M}^{n+1} \\ & v & \mapsto & \exp_p(v) = \alpha_v(1) \end{array}$$

é chamada aplicação exponencial.

A prova do próximo resultado é uma aplicação direta do Teorema da Função Inversa (cf. [13], Proposição 2.9).

Proposição 1.23. *Para cada* $p \in \overline{M}^{n+1}$, *existe uma vizinhança* $U_p \subset T_p\overline{M}$ *na qual* $\exp_p$ *é um difeomorfismo sobre uma vizinhança* V_p *em* $\overline{M}^{n+1}$.

O próximo resultado garante, localmente, a existência de uma referencial ortonormal cujas derivadas covarientes num ponto é zero, o qual será usado no próximo capítulo para obter fórmulas para poder estabelecer e mostrar os resultados principais deste trabalho.

Lema 1.24 (Referencial Geodésico)**.** *Sejam* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade semi-Riemanniana de dimensão* $n+1$ *e índice* ν. *Então, para cada* $p \in \overline{M}^{n+1}$, *existe um referencial ortonormal local* $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ *ao redor de uma vizinhança de* p *verificando* $(\overline{\nabla}_{E_i}E_j)|_p = 0$ *para todo* $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$. *Este referencial será dito geodésico.*

Demonstração. Dado $p \in M^n$, consideremos $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM e $U_p \subset T_p\overline{M}$ tal que $\exp_p : U_p \to V_p$ seja um difeomorfismo. Construiremos o referencial geodésico local em V_p da seguinte forma: dado $q \in V_p$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tomemos a geodésica α_{e_i} tal que $\alpha'_{e_i}(0) = e_i$ e consideremos os campos E_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, como sendo o transporte paralelo de e_i ao longo de α_{e_i}. Isto define o nosso referencial ortonormal local. A fim de mostrar que ele é geodésico, fixado $j \in \{1, \dots, n\}$, tomemos a geodésica α_{e_j} tal que $\alpha'_{e_j}(0) = e_j$. Nestas condições, em p, temos:

$$0 = \left(E_i|_{\alpha_{e_j}}\right)' = \nabla_{\alpha'_{e_j}} E_i = \nabla_{E_j} E_i,$$

onde, na primeira identidade, utilizamos o fato de E_i ser o transporte paralelo de e_i e, na segunda identidade, utilizamos o item (iii) da Proposição 1.16.

□

No caso de variedades Riemannianas, temos o seguinte conceito de completitude.

Definição 1.25. *Uma variedade Riemanniana* $\overline{M}^{n+1}$ *é (geodesicamente) completa se para todo* $p \in \overline{M}^{n+1}$, *a aplicação exponencial,* $\exp_p$, *está definida para todo* $v \in T_p\overline{M}$, *i.e., se toda geodésica começando em* p *está definida para todos os valores do parâmetro* $t \in \mathbb{R}$.

1.2.4 Curvatura

As propriedades da conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ garantem o seguinte resultado.

Proposição 1.26 ([21], Lema 3.35). *Se $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, então a aplicação $\overline{R} : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \to \mathfrak{X}(\overline{M})$, dada para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ por*

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z, \tag{1.5}$$

é $C^\infty(\overline{M})$-trilinear, sendo denominada o tensor de curvatura de $\overline{M}^{n+1}$.

Sempre que $p \in \overline{M}^{n+1}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$ gerarem um subespaço de dimensão 2 não-degenerado de $T_p\overline{M}$, segue do item (a) do Lema 1.3 que $\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2 \neq 0$. Faz sentido, portanto, a seguinte

Definição 1.27. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana, $p \in \overline{M}^{n+1}$ e $\sigma \subset T_p\overline{M}$ um subespaço de 2-dimensional não-degenerado de $T_p\overline{M}$. O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v,w)v, w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

independe da base escolhida $\{v, w\}$ de σ, e é denominado curvatura seccional de $\overline{M}^{n+1}$ em p, segundo σ.

Uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ tem *curvatura seccional constante em um ponto* $p \in \overline{M}^{n+1}$ se os números $K(\sigma)$ da definição acima independerem do subespaço 2-dimensional não-degenerado $\sigma \subset T_p\overline{M}$ considerado.

Aproximando subespaços 2-dimensionais degenerados de $T_p\overline{M}$ através de subespaços 2-dimensionais não-degenerados, pode-se mostrar que o fato de $\overline{M}^{n+1}$ ter curvatura seccional constante determina seu tensor curvatura $\overline{R}$. Mais precisamente (cf. [21], Corolário 3.43), se $\overline{M}^{n+1}$ tiver curvatura seccional constante c, então

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\,\{\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\}\,, \tag{1.6}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Completamos esta seção definindo as curvaturas de Ricci e escalar de uma variedade semi-Riemanniana. Estas são obtidos por meio de traços sobre o tensor de curvatura e desempenham um papel importante no estudo da geometria de uma variedade semi-riemanniana.

Definição 1.28. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana, p um ponto de $\overline{M}^{n+1}$, $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança de p e ϵ_i o sinal de E_i.*

(a) *A aplicação $C^\infty(\overline{M})$-bilinear $\overline{\mathrm{Ric}} : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \to C^\infty(\overline{M})$, definida, em p, por*

$$\overline{\mathrm{Ric}}(X,Y)(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{R}(X,E_i)Y, E_i\rangle(p), \tag{1.7}$$

é chamada curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$.

(b) *A função $\overline{\mathrm{S}} : \overline{M}^{n+1} \to \mathbb{R}$, definida, em p, por*

$$\overline{\mathrm{S}}(p) = \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j \overline{\mathrm{Ric}}(E_j, E_j)(p), \tag{1.8}$$

é chamada curvatura escalar de $\overline{M}^{n+1}$.

(c) *A função $\overline{\mathcal{S}} : \overline{M}^{n+1} \to \mathbb{R}$, definida, em p, por*

$$\overline{\mathcal{S}}(p) = \frac{1}{(n+1)n} \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j \overline{\mathrm{Ric}}(E_j, E_j)(p), \tag{1.9}$$

é chamada curvatura escalar normalizada de $\overline{M}^{n+1}$.

É imedito verificar que a definição de $\overline{\mathrm{Ric}}$, $\overline{\mathrm{S}}$ e $\overline{\mathcal{S}}$ não dependem do referencial ortonormal escolhido.

Definição 1.29. *Diremos que a curvatura de Ricci de uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ é limitada inferiormente se existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{\mathrm{Ric}}(X,X) \geq \kappa\langle X, X\rangle$ para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.*

1.3 Orientação temporal

Agora, sejam $\mathcal{V}$ um espaço com produto escalar $\langle , \rangle$ de índice 1 e

$$\mathcal{T} = \{u \in \mathcal{V}\,;\ \langle u, u\rangle < 0\}$$

o conjunto de todos os vetores tipo tempo de $\mathcal{V}$. Para cada $u \in \mathcal{T}$, definimos o *cone tipo-tempo* de $\mathcal{V}$ contendo u por $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{T}\,;\ \langle u, v\rangle < 0\}$.

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos sobre cones tipo-tempo (cf. Lema 5.26 e Proposição 5.30 de [21]).

Lema 1.30. *Nas notações acima, se $v, w \in \mathcal{T}$, então*

(a) *o subespaço $\{v\}^\perp$ é tipo-espaço e $\mathcal{V} = span\{v\} \oplus span\{v\}^\perp$. Assim, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $\mathcal{C}(v)$ e $\mathcal{C}(-v)$;*

(b) *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)* $|\langle v, w\rangle| \geq |v||w|$, *com igualdade se e só se* v *e* w *forem colineares;*

(c) *se* $v \in \mathcal{C}(u)$ *para algum* $u \in \mathcal{T}$, *então* $w \in \mathcal{C}(u) \Leftrightarrow \langle v, w\rangle < 0$. *Portanto,* $w \in \mathcal{C}(v) \Leftrightarrow v \in \mathcal{C}(w) \Leftrightarrow \mathcal{C}(v) = \mathcal{C}(w)$.

Para o que segue, precisaremos também da seguinte

Definição 1.31. *Uma variedade de Lorentz* $\overline{M}^{n+1}$ é temporalmente orientável *se existir uma aplicação* τ *que associa a cada* $p \in \overline{M}^{n+1}$ *um cone tipo-tempo* τ_p *em* $T_p\overline{M}$, *a qual é suave no seguinte sentido: para cada* $p \in \overline{M}^{n+1}$ *existe uma vizinhança aberta* U *de* p *e um campo* $V \in \mathfrak{X}(U)$ *tais que* $V(q) \in \tau_q$ *para todo* $q \in U$.

O resultado a seguir torna operacional a definição anterior.

Proposição 1.32 ([21], Lema 5.32)**.** *Uma variedade de Lorentz* $\overline{M}^{n+1}$ *é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo de vetores tipo-tempo* $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Sempre que uma variedade de Lorentz $\overline{M}^{n+1}$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação τ como na Definição 1.31, ou de um campo de vetores tipo-tempo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ a ela correspondente, será denominada uma *orientação temporal* para $\overline{M}^{n+1}$.

Seja τ uma orientação temporal para $\overline{M}^{n+1}$ e $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $Y(q) \in \tau_q$ (respectivamente, $-Y(q) \in \tau_q$) para todo $q \in \overline{M}^{n+1}$, dizemos que Y *aponta para o futuro* (respectivamente, *aponta para o passado*). Sendo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ uma orientação temporal para $\overline{M}^{n+1}$, segue do item (c) do Lema 1.30 que um campo vetorial tipo-tempo Y sobre $\overline{M}^{n+1}$ aponta para o futuro (respectivamente, para o passado) se, e somente se, $\langle Y, V\rangle < 0$ (respectivamente, $\langle Y, V\rangle > 0$).

Capítulo 2

Imersões isométricas

Consideremos a seguinte situação: seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M^n em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, isto é $dx_p : T_pM \to T_{x_p}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M^n$. A métrica semi-Riemanniana de $\overline{M}^{n+1}$ induz, de maneira natural, uma métrica semi-Riemanniana em M^n: se $v_1, v_2 \in T_pM$, definimos $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dx_p(v_1), dx_p(v_2) \rangle_{x(p)}$. Nesse contexto, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ passa a ser uma imersão isométrica de M^n em $\overline{M}^{n+1}$. Neste capítulo, o objetivo principal é estudar todas as relações possíveis entre as geometrias de M^n e $\overline{M}^{n+1}$.

2.1 A segunda forma fundamental

Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana n-dimensional e orientada M^n em uma variedade semi-Riemanniana $(n+1)$-dimensional $\overline{M}^{n+1}$ de índice $\nu \in \{0, 1\}$. Quando $\nu = 0$, $\overline{M}^{n+1}$ será sempre assumida orientável, e, quando $\nu = 1$, $\overline{M}^{n+1}$ será sempre uma variedade de Lorentz temporalmente orientável. No caso $\nu = 1$, se a métrica induzida em M^n via $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ for Riemanniana, então dizemos que M^n é uma *hipersuperfície tipo-espaço* de $\overline{M}^{n+1}$. Para o caso $\nu = 1$ precisaremos do seguinte resultado.

Proposição 2.1. *Se $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em uma variedade Lorentz temporalmente orientável $\overline{M}^{n+1}$, então M^n admite um campo de vetores normais unitários (suave) N, apontando para o futuro. Em particular, M^n é orientável.*

Demonstração. Seja $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ o campo de vetores tipo-tempo que dá a orientação temporal de $\overline{M}^{n+1}$, e observemos que, para todo $p \in \overline{M}^{n+1}$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $\mathcal{C}(V(p))$ e $\mathcal{C}(-V(p))$ (vide item (a) do Lema 1.30).

Escolha, em cada $p \in M^n$, um vetor unitário $N(p) \in (T_pM)^\perp$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$, se necessário, podemos supor que $N(p) \in \mathcal{C}(V(p))$. Esse procedimento define unicamente um campo de vetores normal unitário N definido em M^n, apontando para o futuro, e tudo o que nos resta é mostrar que N é suave.

Para isso, fixemos $p \in M^n$ e consideremos um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ definido em uma vizinhança aberta e conexa $\mathcal{U}$ de p em M^n. Então

$$\overline{N} = V - \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i \rangle E_i$$

é um campo de vetores suave e normal a M^n em $\mathcal{U}$, com

$$\begin{aligned}
\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle &= \Big\langle V - \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle E_i, V - \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle E_i \Big\rangle \\
&= \langle V, V\rangle - 2\sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle \langle V, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle^2 \langle E_i, E_i\rangle \\
&= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle E_i - \langle V, N\rangle N, \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle E_i - \langle V, N\rangle N \Big\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle^2 \langle E_i, E_i\rangle + \langle V, N\rangle^2 \langle N, N\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle^2 - \langle V, N\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle V, E_i\rangle^2 \;=\; -\langle V, N\rangle^2 < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{N}(q) \in \mathcal{C}(V(p))$ para cada $q \in \mathcal{U}$, e $N = \frac{\overline{N}}{|\overline{N}|}$, suave como deselhado. $\square$

Assim, ao longo deste trabalho, dada uma hipersuperfície $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ como descrita acima, imersa em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ de índice $\nu \in \{0, 1\}$, sempre existe um campo de vetores normais unitários N globalmente definido em M^n. Seja $\epsilon_N = \langle N, N\rangle$ o sinal de N. Assim, $\epsilon_N = 1$ ou $\epsilon_N = -1$, dependendo de $\nu = 0$ ou $\nu = 1$, respectivamente.

Denotemos por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente. A *segunda forma fundamental* de $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M)^\perp \\
(X, Y) &\mapsto \mathrm{II}(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp,
\end{aligned}$$

onde $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ denota o conjunto de campos vetoriais de $\overline{M}^{n+1}$ que são ortogonais aos campos vetorias definidos em M^n, e sua *fórmula de Gauss* por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X,Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{2.1}$$

onde $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^{\top}$. Como N é campo normal unitário, $\mathrm{II}(X,Y) = \beta N$, para algum $\beta \in C^{\infty}(M)$. Veja que $\langle \mathrm{II}(X,Y), N\rangle = \beta \langle N, N\rangle = \beta\, \epsilon_N$. Assim,

$$\mathrm{II}(X,Y) = \frac{1}{\epsilon_N} \langle \mathrm{II}(X,Y), N\rangle N, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{2.2}$$

e (2.1) pode ser escrito como

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\epsilon_N} \langle \mathrm{II}(X,Y), N\rangle N, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.3}$$

Por outro lado, $\langle N, Y\rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, implica que

$$\begin{aligned} 0 = X\left(\langle N, Y\rangle\right) = \langle \overline{\nabla}_X N, Y\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X N, Y\rangle + \langle N, \nabla_X Y + \mathrm{II}(X,Y)\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X N, Y\rangle + \langle N, \mathrm{II}(X,Y)\rangle, \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde na penúltima igualdade foi usado (2.1). Assim, obtemos a *equação de Weingarten* de $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, dada por

$$\langle \overline{\nabla}_X N, Y\rangle = -\langle N, \mathrm{II}(X,Y)\rangle, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.4}$$

O *operador de forma* $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e o *vetor curvatura média* $\mathbf{H} \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ de $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, na direção do campo normal unitário N, são definidos por

$$\langle A(X), Y\rangle = \langle \mathrm{II}(X,Y), N\rangle, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{2.5}$$

$$\mathbf{H} = HN,$$

respectivamente, onde

$$H = \frac{\epsilon_N}{n} \operatorname{tr}(A) \in C^{\infty}(M) \tag{2.6}$$

é a função *curvatura média* de $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$.

Logo, de (2.5) e (2.3), obtemos que a fórmula de Gauss de $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, dada em (2.1), pode ser escrita como

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\epsilon_N} \langle A(X), Y\rangle N, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.7}$$

Agora, de (2.4) e (2.5) obtemos

$$\langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle A(X), Y \rangle, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.8}$$

Daí, $A(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^\top$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Mas, observando que

$$0 = X\left(\langle N, N \rangle\right) = 2\langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, pois $\langle N, N \rangle = \epsilon_N$, obtemos $\overline{\nabla}_X N = (\overline{\nabla}_X N)^\top$. Assim, o operador de forma de $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é dado por

$$A(X) = -\overline{\nabla}_X N, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.9}$$

Dada uma hipersuperfície $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ (como descrita acima), uma pergunta que aparece naturalmente é a seguinte:

Como se relacionam as geometrias de M^n e $\overline{M}^{n+1}$?

O próximo resultado nos fornece uma resposta a essa pergunta, em termos dos tensores de curvatura de M^n e $\overline{M}^{n+1}$, e do operador de forma de $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$.

Proposição 2.2. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ de índice $\nu \in \{0, 1\}$. Seja também N o seu campo de vetores normais unitários e $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o seu correspondente operador de forma. Se R e $\overline{R}$ denotam os tensores de curvatura de M^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente, então para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

(a) (Equação de Gauss)

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^\top \\ &\quad + \epsilon_N \left\{\langle A(X), Z \rangle A(Y) - \langle A(Y), Z \rangle A(X)\right\}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

(b) (Equação de Codazzi)

$$\left(\overline{R}(X,Y)N\right)^\top = -(\nabla A)(Y,X) + (\nabla A)(X,Y), \tag{2.11}$$

onde

$$\begin{array}{rccccl} \nabla A : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) & & \\ & (X,Y) & \mapsto & (\nabla A)(X,Y) & = & \nabla_Y(A(X)) - A(\nabla_Y X) \end{array} \tag{2.12}$$

é a derivada covariante do operador de forma A.

Demonstração. De (2.7),

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \epsilon_N \langle A(X), Y\rangle N, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.13}$$

Logo, de (1.5) e (2.13) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle &= \langle \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z, W\rangle - \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z, W\rangle + \langle \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z, W\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z, W\rangle + \epsilon_N \langle \overline{\nabla}_Y \langle A(X), Z\rangle N, W\rangle \\
&\quad -\langle \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z, W\rangle - \epsilon_N \langle \overline{\nabla}_X \langle A(Y), Z\rangle N, W\rangle \\
&\quad \langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\rangle + \epsilon_N \langle A([X,Y], Z)\rangle \underbrace{\langle N, W\rangle}_{0} \\
&= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W\rangle + \epsilon_N \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle \underbrace{\langle N, W\rangle}_{0} \\
&\quad +\epsilon_N \langle \overline{\nabla}_Y \langle A(X), Z\rangle N, W\rangle \\
&\quad -\langle \nabla_X \nabla_Y Z, W\rangle \\
&\quad +\epsilon_N \langle A(X), \nabla_Y Z\rangle \underbrace{\langle N, W\rangle}_{0} \\
&\quad -\epsilon_N \langle \overline{\nabla}_X \langle A(Y), Z\rangle N, W\rangle \\
&\quad +\langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\rangle \\
&= \langle R(X,Y)Z, W\rangle \\
&\quad +\epsilon_N \left(Y\langle A(X), Z\rangle \underbrace{\langle N, W\rangle}_{0} + \langle A(X), Z\rangle \langle \overline{\nabla}_Y N, W\rangle \right) \\
&\quad -\epsilon_N \left(X\langle A(Y), Z\rangle \underbrace{\langle N, W\rangle}_{0} + \langle A(Y), Z\rangle \langle \overline{\nabla}_X N, W\rangle \right),
\end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Agora, de (2.8),

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle &= \langle R(X,Y)Z, W\rangle \\
&\quad -\epsilon_N \langle A(X), Z\rangle A(Y), W\rangle \\
&\quad +\epsilon_N \langle A(Y), Z\rangle \langle A(X), W\rangle \\
&= \langle R(X,Y)Z - \epsilon_N \left\{ \langle A(X), Z\rangle A(Y) \right. \\
&\quad \left. + \langle A(Y), Z\rangle \langle A(X) \right\}, W\rangle,
\end{aligned}$$

e a equação (2.10) fica estabelecida.

Por outro lado, de (2.2) e (2.5) segue que

$$\mathrm{II}(X,Y) = \epsilon_N \langle A(X), Y\rangle N, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.14}$$

Logo, de (1.5), (2.1) e (2.14),

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)Z, N\rangle &= \langle \left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\top} + \left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp}, N\rangle = \langle \left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp}, N\rangle \\
&= \langle \left(\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z\right)^{\perp} - \left(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z\right)^{\perp} + \left(\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z\right)^{\perp}, N\rangle \\
&= \langle \left(\overline{\nabla}_Y \nabla_X Z\right)^{\perp} + \left(\overline{\nabla}_Y \mathrm{II}(X,Z)\right)^{\perp} \\
&\quad - \left(\overline{\nabla}_X \nabla_Y Z\right)^{\perp} - \left(\overline{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,Z)\right)^{\perp} + \mathrm{II}([X,Y],Z), N\rangle \\
&= \langle \mathrm{II}(Y, \nabla_X Z) + \left(\overline{\nabla}_Y \mathrm{II}(X,Z)\right)^{\perp} \\
&\quad -\mathrm{II}(X, \nabla_Y Z) - \left(\overline{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,Z)\right)^{\perp} + \mathrm{II}([X,Y],Z), N\rangle \\
&= \langle \mathrm{II}(Y, \nabla_X Z), N\rangle + \langle \overline{\nabla}_Y \mathrm{II}(X,Z), N\rangle \\
&\quad -\langle \mathrm{II}(X, \nabla_Y Z), N\rangle - \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,Z), N\rangle \\
&\quad +\langle \mathrm{II}([X,Y],Z), N\rangle \\
&= \epsilon_N \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle \underbrace{\langle N, N\rangle}_{\epsilon_N} + \epsilon_N \langle \overline{\nabla}_Y \langle A(X), Z\rangle N, N\rangle \\
&\quad -\epsilon_N \langle A(X), \nabla_Y Z\rangle \underbrace{\langle N, N\rangle}_{\epsilon_N} + \epsilon_N \langle \overline{\nabla}_X \langle A(Y), Z\rangle N, N\rangle \\
&\quad +\epsilon_N \langle A([X,Y]), Z\rangle \underbrace{\langle N, N\rangle}_{\epsilon_N} \\
&= \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle - \langle A(X), \nabla_Y Z\rangle + \langle A([X,Y]), Z\rangle \\
&\quad +\epsilon_N \left(Y(\langle A(X), Z\rangle) \underbrace{\langle N, N\rangle}_{\epsilon_N} + \langle A(X), Z\rangle \underbrace{\langle \overline{\nabla}_Y N, N\rangle}_{0} \right) \\
&\quad -\epsilon_N \left(X(\langle A(Y), Z\rangle) \underbrace{\langle N, N\rangle}_{\epsilon_N} + \langle A(Y), Z\rangle \underbrace{\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle}_{0} \right) \\
&= \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle - \langle A(X), \nabla_Y Z\rangle + \langle A([X,Y]), Z\rangle \\
&\quad +Y(\langle A(X), Z\rangle) - X(\langle A(Y), Z\rangle) \\
&= \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle - \langle A(X), \nabla_Y Z\rangle + \langle A([X,Y]), Z\rangle \\
&\quad +\langle \nabla_Y A(X), Z\rangle + \langle A(X), \nabla_Y Z\rangle \\
&\quad -\langle \nabla_X A(Y), Z\rangle - \langle A(Y), \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle \{\nabla_Y A(X) - A(\nabla_Y X)\} - \{\nabla_X A(Y) - A(\nabla_X Y)\}, Z\rangle,
\end{aligned}
$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Assim,

$$
\langle \nabla A(X,Y) - \nabla A(Y,X)), Z\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, N\rangle = -\langle \overline{R}(X,Y)N, Z\rangle,
$$

e a equação (2.11) também fica estabelecida. $\square$

Em particular, quando a variedade ambiente $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, da Proposição 2.2 podemos obter que as equações que descrevem as geometrias de M^n e $\overline{M}^{n+1}$ tornam-se mais simples, como nos estabelece o seguinte resultado.

Corolário 2.3. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}_c^{n+1}$, de índice $\nu \in \{0,1\}$ e curvatura seccional constante c. Seja também N o seu campo de vetores normais unitários e $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o seu correspondente operador de forma. Se R denota o tensor de curvatura de M^n então para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

(a) *(Equação de Gauss)*

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z, W\rangle &= c\{\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle\} \\ &\quad +\epsilon_N \{\langle A(X),Z\rangle\langle A(Y),W\rangle \\ &\quad -\langle A(Y),Z\rangle\langle A(X),W\rangle\}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

(b) *(Equação de Codazzi)*

$$\nabla A(Y,X) = \nabla A(X,Y), \tag{2.16}$$

onde ∇A é a derivada covariante de A definida em (2.12).

Demonstração. Como $\overline{M}_c^{n+1}$ possui curvatura seccional constante c, então seu tensor curvatura $\overline{R}$ (vide equação (1.6)) é dado por

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\{\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\}, \quad \forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.17}$$

Substituindo (2.17) em (2.10) obtemos (2.15).

Por outro lado, de (2.11),

$$\langle -(\nabla A)(Y,X) + \nabla A(X,Y), N\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, N\rangle = 0, \quad \forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

pois de (2.17) segue que $\overline{R}(X,Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$. Agora, (2.16) segue diretamente. □

2.2 Os espaços hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ e de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$

Consideremos o espaço de Lorenzt-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$, com $n \geq 0$ (vide Exemplo 1), a saber, o espaço $\mathbb{R}^{n+2}$ munido com o produto escalar

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i - v_{n+2} w_{n+2},$$

onde $v = (v_1, \ldots, v_{n+2})$ e $w = (w_1, \ldots, w_{n+2})$. No que segue, para cada $\delta \in \{-1, 1\}$, consideremos o seguinte subconjunto

$$\mathbb{M}_\delta^{n+1} = \{\, p \in \mathbb{L}^{n+2}\,;\, \langle p,p\rangle = \delta \,\}.$$

Proposição 2.4. *$\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ é uma subvariedade $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{L}^{n+2}$, cujo espaço tangente em cada ponto $p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}$ é o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{L}^{n+2}$ que são ortogonais a p. Além disso, $\mathbb{M}_{-1}^{n+1}$ tem índice zero e $\mathbb{M}_1^{n+1}$ tem índice 1.*

Demonstração. Basta mostrar que δ é um valor regular da função

$$\begin{array}{rcl} G : \mathbb{L}^{n+2} & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & G(p) = \langle p, p \rangle, \end{array}$$

pois $\mathbb{M}_\delta^{n+1} = G^{-1}(\{\delta\})$. Para isso, sejam $p \in \mathbb{L}^{n+2}$, $v \in T_p(\mathbb{L}^{n+2})$ e considere uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{L}^{n+2}$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad} G(p), v \rangle &= dG_p(v) = \frac{d}{dt}(G \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle\Big|_{t=0} = 2\langle \alpha'(0), \alpha(0) \rangle = \langle 2p, v \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle , \rangle$ é não-degenerado e $v \in T_p(\mathbb{L}^{n+2})$ é arbitrario,

$$\operatorname{grad} G(p) = 2p, \quad \forall p \in \mathbb{L}^{n+2}. \tag{2.18}$$

Observemos que $\operatorname{grad} G(p) = 0$ se, e somente se, $p = 0$. Porém, isso não acontece para os pontos que pertencem a $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$. Assim, δ é valor regular de G e, portanto, $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ é subvariedade de $\mathbb{L}^{n+2}$, cuja dimensão é

$$\dim(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) = \dim(\mathbb{L}^{n+2}) - \dim(\mathbb{R}) = n + 1.$$

Além disso,

$$T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) = \ker\{\, dG_p : T_p(\mathbb{L}^{n+2}) \to \mathbb{R} \,\}, \quad \forall p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}. \tag{2.19}$$

Agora, observando de (2.18) que

$$v \in \ker\{\, dG_p \,\} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = dG_p(v) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \langle \operatorname{grad} G(p), v \rangle = \langle 2p, v \rangle,$$

então obtemos de (2.19) que

$$T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) = \{\, v \in \mathbb{L}^{n+2} \,;\, \langle p, v \rangle = 0 \,\}, \ \forall p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}, \tag{2.20}$$

como desejado.

Por outro lado, se $w \in T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \cap \operatorname{Span}\{\operatorname{grad} G(p)\}$ então de (2.18) e (2.20) obtemos respectivamente que $\langle w, p \rangle = 0$ e $w = \beta \operatorname{grad} G(p)$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Daí,

$$0 = \langle w, p \rangle = \beta \langle \operatorname{grad} G(p), p \rangle = 2\beta \langle p, p \rangle = 2\beta\delta.$$

Isso implica que $\beta = 0$, pois $\delta \neq 0$. Logo, $w = 0$ e

$$T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \cap \operatorname{Span}\{\operatorname{grad} G(p)\} = \{0\}.$$

Assim,

$$T_p(\mathbb{L}^{n+2}) = T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \oplus \mathrm{Span}\{\mathrm{grad}\, G(p)\}, \quad \forall p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}. \tag{2.21}$$

Como $\langle p, p\rangle = \delta \in \{-1, 1\}$ e $\mathrm{grad}\, G(p) = 2p$ então $\mathrm{Span}\{\mathrm{grad}\, G(p)\}$ tem índice ν igual a 1 ou 0, dependendo se $\delta = -1$ ou $\delta = 1$, respectivamente. Em particular, $\mathrm{Span}\{\mathrm{grad}\, G(p)\}$ é não-degenerado. Segue que,

$$\mathrm{Span}\{\mathrm{grad}\, G(p)\}^\perp = T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$$

também é não-degenerado. Logo, de (2.21), segue que

$$\begin{aligned} 1 \;=\; \mathrm{ind}(T_p(\mathbb{L}^{n+2})) &= \mathrm{ind}(T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1})) + \mathrm{ind}(\mathrm{Span}\{\mathrm{grad}\, G(p)\}) \\ &= \mathrm{ind}(T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1})) + \nu, \end{aligned} \tag{2.22}$$

para todo $p \in \mathbb{M}_\delta^{n+1}$. Portanto, de (2.22) podemos concluir que $\mathrm{ind}(\mathbb{M}_{-1}^{n+1}) = 0$ e $\mathrm{ind}(\mathbb{M}_1^{n+1}) = 1$. □

No espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$ podemos obter um modelo para o *espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}$ que será bastante apropriado aos nossos propósitos. Especificamente,

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{\, p \in \mathbb{L}^{n+2}\, ;\, \langle p, p\rangle = -1\, ,\;\; p_{n+2} \geq 0\,\},$$

ou seja, $\mathbb{H}^{n+1} = \{\, p \in \mathbb{M}_{-1}^{n+1}\, ;\, p_{n+2} \geq 1\,\}$. Assim, da Proposição 2.4, obtemos que $\mathbb{H}^{n+1}$ é uma subvariedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{L}^{n+2}$, cujo espaço tangente em cada ponto $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ é dado por

$$T_p(\mathbb{H}^{n+1}) = \{\, v \in \mathbb{L}^{n+2}\, ;\, \langle p, v\rangle = 0\,\}.$$

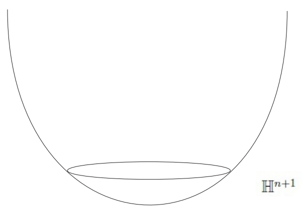

Figura 2.1: Espaço Hiperbólico

Por outro lado, o espaço *de Sitter* é denotado e definido por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{\, p \in \mathbb{L}^{n+2}\, ;\, \langle p, p\rangle = 1\,\},$$

isto é, $\mathbb{S}_1^{n+1} = \mathbb{M}_1^{n+1}$. Logo, usamos novamente a Proposição 2.4 para obter que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma subvariedade de Lorentz $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{L}^{n+2}$, cujo espaço tangente em cada ponto $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ é dado por

$$T_p(\mathbb{S}_1^{n+1}) = \{\, v \in \mathbb{L}^{n+2}\,;\ \langle p, v\rangle = 0\,\}.$$

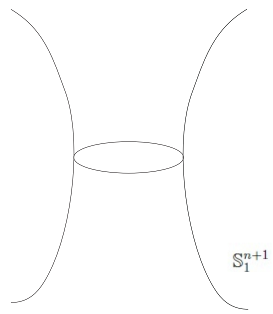

Figura 2.2: Espaço de Sitter

Ao longo desta seção, usaremos $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ para denotar indistintamente ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ ou o espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ de acordo com $\delta = -1$ ou $\delta = 1$, respectivamente.

Consideremos agora a aplicação inclusão $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$. De (2.18) e (2.21) obtemos que a correspondência

$$\mathbb{M}_\delta^{n+1} \ni p \longmapsto \overline{N}_p = \frac{\operatorname{grad} G(p)}{|\operatorname{grad} G(p)|} = \frac{2p}{\sqrt{|\langle 2p, 2p\rangle|}} = p \tag{2.23}$$

define um campo normal unitário globalmente definido em $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$. Assim, a aplicação $\overline{N} : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \to \mathbb{M}_\delta^{n+1}$ definida por (2.23) é chamada *aplicação de Gauss* de $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$.

Sejam ∇^0 e $\overline{\nabla}$, respectivamente, as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+2}$ e $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$. A *segunda forma fundamental* de $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ é dada por

$$\begin{array}{rccccc} \overline{\mathrm{II}}: & \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) & \to & \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})^\perp & & \\ & (X, Y) & \mapsto & \overline{\mathrm{II}}(X, Y) & = & (\nabla^0_X Y)^\perp, \end{array}$$

e sua *fórmula de Gauss* por

$$\nabla^0_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \overline{\mathrm{II}}(X, Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}), \tag{2.24}$$

onde $\overline{\nabla}_X Y = (\nabla^0_X Y)^\top$.

Sendo $\overline{N}$ um campo normal unitário em $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$, então $\overline{\mathrm{II}}(X,Y) = \beta\overline{N}$, para alguma função $\beta \in C^\infty(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$. Veja que $\langle\,\overline{\mathrm{II}}(X,Y), \overline{N}\,\rangle = \beta\langle\,\overline{N}, \overline{N}\,\rangle = \beta\delta$. Assim,

$$\overline{\mathrm{II}}(X,Y) = \frac{1}{\delta}\,\langle\,\overline{\mathrm{II}}(X,Y), \overline{N}\,\rangle\overline{N}, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}),$$

e (2.24) pode ser escrito como

$$\nabla^0_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \frac{1}{\delta}\,\langle\,\overline{\mathrm{II}}(X,Y), \overline{N}\,\rangle\overline{N}, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \tag{2.25}$$

Por outro lado, $\langle\overline{N}, Y\rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$, implica que

$$\begin{aligned} 0 = X\langle\overline{N}, Y\rangle &= \langle\nabla^0_X\overline{N}, Y\rangle + \langle\overline{N}, \nabla^0_X Y\rangle \\ &= \langle\nabla^0_X\overline{N}, Y\rangle + \langle\overline{N}, \overline{\nabla}_X Y + \overline{\mathrm{II}}(X,Y)\rangle \\ &= \langle\nabla^0_X\overline{N}, Y\rangle + \langle\overline{N}, \overline{\mathrm{II}}(X,Y)\rangle, \end{aligned}$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$, onde na penúltima igualdade foi usado (2.24). Assim, obtemos a *equação de Weingarten* de $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, dada por

$$\langle\nabla^0_X\overline{N}, Y\rangle = -\,\langle\overline{N}, \overline{\mathrm{II}}(X,Y)\rangle, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \tag{2.26}$$

O *operador de forma* $\mathcal{A} : \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}) \to \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ e o *vetor curvatura média* $\overline{\mathbf{H}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})^\perp$ de $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, na direção do campo normal unitário $\overline{N}$, são definidos por

$$\langle\mathcal{A}(X), Y\rangle = \langle\overline{\mathrm{II}}(X,Y), \overline{N}\rangle, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}), \tag{2.27}$$

$$\overline{\mathbf{H}} = \overline{H}\,\overline{N}, \tag{2.28}$$

respectivamente, onde

$$\overline{H} = \frac{\delta}{n+1}\mathrm{tr}\,(\mathcal{A}) \in C^\infty(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$$

é a *curvatura média* de $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$.

Logo, de (2.27) e (2.25) obtemos que a fórmula de Gauss de $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, dada em (2.24), pode ser escrita como

$$\nabla^0_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \frac{1}{\delta}\,\langle\mathcal{A}(X), Y\rangle\overline{N}, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \tag{2.29}$$

Agora, de (2.26) e (2.27) obtemos

$$\langle\nabla^0_X\overline{N}, Y\rangle = -\langle\mathcal{A}(X), Y\rangle, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}).$$

Daí, $\mathcal{A}(X) = -(\nabla^0_X \overline{N})^\top$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$. Mas observando que

$$0 = X\langle \overline{N}, \overline{N}\rangle = 2\langle \nabla^0_X \overline{N}, \overline{N}\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$, pois $\langle \overline{N}, \overline{N}\rangle = \delta$, obtemos $\nabla^0_X \overline{N} = (\nabla^0_X \overline{N})^\top$. Assim, o operador de forma de $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ é dado por

$$\mathcal{A}(X) = -\nabla^0_X \overline{N}, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \tag{2.30}$$

Para obter uma expressão mais explícita de $\mathcal{A}$, substituimos (2.23) em (2.30), obtendo

$$\mathcal{A}(v) = -\nabla^0_v \overline{N} = -\nabla^0_v p = -v, \quad \forall\, v \in T_p(\mathbb{M}_\delta^{n+1}),$$

ou ainda,

$$\mathcal{A}(X) = -X, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1}). \tag{2.31}$$

Se R^0 e $\overline{R}$ denotam os tensores de curvatura de $\mathbb{L}^{n+2}$ e $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$, respectivamente, então a *equação de Gauss* de $\iota : \mathbb{M}_\delta^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ é dada por

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= (R^0(X,Y)Z)^\top \\ &\quad +\delta\,\langle \mathcal{A}(X), Z\rangle \mathcal{A}(Y) - \delta\,\langle \mathcal{A}(Y), Z\rangle \mathcal{A}(X),\end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$. Sendo os coeficientes da métrica do espaço $\mathbb{L}^{n+2}$ constantes, o tensor curvatura R^0 é identicamente nulo. Logo,

$$\overline{R}(X,Y)Z = \delta\,\langle \mathcal{A}(X), Z\rangle \mathcal{A}(Y) - \delta\,\langle \mathcal{A}(Y), Z\rangle \mathcal{A}(X), \tag{2.32}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$.

Com toda essa discussão, estamos em condições de estabelecer e mostrar o seguinte resultado.

Proposição 2.5. *Com a métrica induzida de $\mathbb{L}^{n+2}$,*

(a) $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *tem curvatura seccional constante igual a* 1 *e curvatura média, na direção do campo normal unitário* $\overline{N}$ *definido em (2.23), igual a* -1.

(b) $\mathbb{H}^{n+1}$ *tem curvatura seccional constante igual a* -1 *e curvatura média, na direção do campo normal unitário* $\overline{N}$ *definido em (2.23), igual a* 1.

Demonstração. De (2.32) e (2.31) segue que

$$\overline{R}(X,Y)Z = \delta\{\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\},$$

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^{n+1}_\delta)$. Assim, $\mathbb{M}^{n+1}_\delta$ tem curvatura seccional constante igual a δ.

Por outro lado, observando de (2.31) que $\mathcal{A} = -\mathrm{Id}_{\mathfrak{X}(\mathbb{M}^{n+1}_\delta)}$, obtemos

$$\mathrm{tr}(\mathcal{A}) = -(n+1).$$

Logo, de (2.28), $\overline{\mathbf{H}} = -\delta\overline{N}$. Assim, a curvatura média $\overline{H}$ de $\mathbb{M}^{n+1}_\delta$ na direção de $\overline{N}$ é constante igual a $-\delta$. □

2.3 Hipersuperfícies totalmente umbílicas

Definição 2.6. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ de índice $\nu \in \{0,1\}$. Seja também N o seu campo de vetores normais unitários e $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o seu correspondente operador de forma. Um ponto $p \in M^n$ é chamado umbílico se existe $\lambda(p) \in \mathbb{R}$ tal que $A_p = \lambda(p)\,\mathrm{Id}_{T_pM}$. Dizemos que $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é totalmente umbílica se todos os pontos de M^n são umbílicos, isto é, se existe $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que $A = \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathfrak{X}(M)}$.*

Em cada $p \in M^n$, temos que $A_p : T_pM \to T_pM$ é um operador auto-adjunto. Logo, A_p é diagonalizável. Em particular, existe uma base ortonormal $\{e_1,\dots,e_n\}$ de T_pM tal que a matriz associada a A_p é diagonal.

Definição 2.7. *A aplicação auto-adjunta*

$$\Phi_p = A_p - \lambda(p)\,\mathrm{Id}_{T_pM} : TpM \to T_pM,$$

onde $\lambda(p)$ é o único número real tal que $\mathrm{tr}(\Phi_p) = 0$, é chamado operador sem traço de $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$.

Observemos de (2.6) que

$$\mathrm{tr}(\Phi_p) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0 = \mathrm{tr}(A_p) - n\lambda(p) \quad\Leftrightarrow\quad \lambda(p) = \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(A_p) = \frac{1}{\epsilon_N}\,H(p).$$

Assim, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é totalmente umbílica se uma (e portanto totas) das seguintes afirmações é válida em cada ponto $p \in M^n$:

$$\begin{aligned}
\Phi_p = 0 \quad &\Leftrightarrow\quad \Phi_p(e_1),\quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^n |\Phi_p(e_i)|^2 = 0,\\
&\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^n \langle \Phi_p(e_i), \Phi_p(e_i)\rangle = 0, \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^n \langle \Phi_p^2(e_i), e_i\rangle = 0,\\
&\Leftrightarrow\quad \mathrm{tr}(\Phi_p^2) = 0.
\end{aligned}$$

Em geral,

$$\operatorname{tr}(\Phi^2) = \sum_{i=1}^{n} \langle \Phi^2(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \Phi(e_i), \Phi(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\Phi(e_i)|^2 \geq 0,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é qualquer referencial ortonormal local de $x(M^n)$. Assim, obtemos o seguinte

Proposição 2.8. $\operatorname{tr}(\Phi^2) \geq 0$, *e a igualdade acontece se, e somente se,* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *é totalmente umbílica.*

Observando que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\Phi^2) &= \operatorname{tr}\left(\left(A - \frac{H}{\epsilon_N} \operatorname{Id}_{\mathfrak{X}(M^n)}\right)^2\right) \\
&= \operatorname{tr}(A^2) - \frac{2H}{\epsilon_N} \operatorname{tr}(A) + H^2 \operatorname{tr}\left(\operatorname{Id}_{\mathfrak{X}(M^n)}\right) \\
&= \operatorname{tr}(A^2) - 2nH^2 + nH^2 \\
&= \operatorname{tr}(A^2) - nH^2, \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

a última proposição pode ser escrita da seguinte forma.

Proposição 2.9. $\operatorname{tr}(A^2) - nH^2 \geq 0$, *e a igualdade acontece se, e só se,* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *é totalmente umbílica.*

2.4 Hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$

Nosso objetivo agora é estudar alguns exemplos de hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas no espaço de-Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Para isso, fixemos um vetor $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ e denotemos $c = \langle a, a \rangle \in \{-1, 0, 1\}$.

Observemos que, quando $\delta = 1$ em (2.21),

$$\mathbb{L}_1^{n+2} \cong T_p(\mathbb{L}_1^{n+2}) = T_p(\mathbb{S}_1^{n+1}) \oplus \operatorname{Span}\{p\}, \quad \forall p \in \mathbb{S}_1^{n+1}.$$

Logo, existem $a^*(p) \in T_p(\mathbb{S}_1^{n+1})$ e $\beta(p) \in \mathbb{R}$ de forma que $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ pode ser escrito como $a = a^*(p) + \beta(p)p$. Mas como

$$\langle a, p \rangle = \underbrace{\langle a^*(p), p \rangle}_{0} + \beta(p) \underbrace{\langle p, p \rangle}_{1} = \beta(p)$$

então

$$a = a^*(p) + \langle a, p\rangle p.$$

Agora, consideremos a função

$$\begin{array}{rcccl} f_a & : & \mathbb{S}_1^{n+1} & \to & \mathbb{R} \\ & & p & \mapsto & f_a(p) = \langle p, a\rangle, \end{array} \tag{2.34}$$

e, dado $\tau \in \mathbb{R}$, consideremos

$$\mathcal{M}^n_{c,\tau} = f_a^{-1}(\{\tau\}) = \{\, p \in \mathbb{S}_1^{n+1}\,;\, \langle p, a\rangle = \tau \,\}.$$

Em primeiro lugar, tentemos determinar para que valores de τ o conjunto $\mathcal{M}^n_{c,\tau}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Para isso, usaremos que se $\nabla f_a(p) \neq 0$ e $\langle \nabla f_a(p), \nabla f_a(p)\rangle < 0$ em todo $p \in f_a^{-1}(\{\tau\})$, então $\mathcal{M}^n_{c,\tau}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço.

Sejam $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, $v \in T_p(\mathbb{S}_1^{n+1})$ e considere uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Logo, de (2.4),

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_a(p), v\rangle &= d(f_a)_p(v) = \frac{d}{dt}(f_a(\alpha(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\langle \alpha(t), a\rangle\Big|_{t=0} = \langle \alpha'(0), a\rangle = \langle v, a\rangle \\ &= \langle v, a^*(p)\rangle + \langle a, p\rangle \underbrace{\langle v, p\rangle}_{0} = \langle a^*(p), v\rangle. \end{aligned}$$

Como $v \in T_p(\mathbb{S}_1^{n+1})$ é arbitrário e $\langle , \rangle$ é não-degenerado, $\nabla f_a(p) = a^*(p)$, para todo $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$. Em particular, se $p \in f_a^{-1}(\{\tau\})$, então, de (2.4) e (2.34), obtemos

$$\nabla f_a(p) = a - \tau p. \tag{2.35}$$

Assim, $\mathcal{M}^n_{c,\tau}$ será uma hipersuperfície tipo-espaço de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ quando

$$\begin{aligned} 0 > \langle \nabla f_a(p), \nabla f_a(p)\rangle &= \langle a - \tau p, a - \tau p\rangle \\ &= \underbrace{\langle a, a\rangle}_{c} - 2\tau \underbrace{\langle a, p\rangle}_{\tau} + \tau^2 \underbrace{\langle p, p\rangle}_{1} \\ &= c - \tau^2, \end{aligned} \tag{2.36}$$

ou equivalentemente, quando $\tau^2 > c$.

Para o que segue, a desigualdade $\tau^2 > c$ será considerada sempre válida. Denotemos por $\varphi : \mathcal{M}^n_{c,\tau} \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ a imersão isométrica de $\mathcal{M}^n_{c,\tau}$ em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e, seguindo a mesma notação da última seção, seja $\iota : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ a aplicação inclusão de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ em $\mathbb{L}^{n+2}$. As conexões de Levi-Civita de $\mathcal{M}_{c,\tau}^n$, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$ serão denotadas por ∇, $\overline{\nabla}$ e ∇^0, respectivamente. Observemos de (2.35) e (2.23) que as correspondentes aplicações de Gauss de $\varphi : \mathcal{M}_{c,\tau}^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ e $\iota : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ são dadas por

$$\begin{array}{rcll} N & : & \mathcal{M}_{c,\tau}^n & \to \mathbb{H}^{n+1} \\ & & p & \mapsto N(p) = \dfrac{\nabla f_a(p)}{|\nabla f_a(p)|} = \dfrac{a - \tau p}{\sqrt{\tau^2 - c}} \end{array} \tag{2.37}$$

e

$$\begin{array}{rcll} \overline{N} & : & \mathbb{S}_1^{n+1} & \to \mathbb{S}_1^{n+1} \\ & & p & \mapsto \overline{N}(x) = p, \end{array}$$

respectivamente. De (2.36) e (2.37) podemos observar que

$$\langle N, N \rangle = -1$$

Denotemos por $A : \mathfrak{X}\left(\mathcal{M}_{c,\tau}^n\right) \to \mathfrak{X}\left(\mathcal{M}_{c,\tau}^n\right)$ e $\mathcal{A} : \mathfrak{X}\left(\mathbb{S}_1^{n+1}\right) \to \mathfrak{X}\left(\mathbb{S}_1^{n+1}\right)$ os operadores de forma de $\varphi : \mathcal{M}_{c,\tau}^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ na direção de N e $\iota : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ na direção do campo $\overline{N}$, respectivamente. De (2.31),

$$\mathcal{A} = -\mathrm{Id}_{\mathfrak{X}\left(\mathbb{S}_1^{n+1}\right)}. \tag{2.38}$$

Procuremos agora uma expressão explícita para A.

De (2.7) obtemos que a fórmula de Gauss para $\varphi : \mathcal{M}_{c,b}^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ é dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle A(X), Y \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,b}^n). \tag{2.39}$$

Da fórmula de Gauss para $\iota : \mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, dada em (2.29), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_X^0 Y &= \overline{\nabla}_X Y + \langle \mathcal{A}(X), Y \rangle \varphi \\ &= \nabla_X Y - \langle A(X), Y \rangle N - \langle X, Y \rangle \varphi, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n), \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde na última igualdade foi usado (2.39) e (2.38). De (2.9),

$$A(X) = -\overline{\nabla}_X N, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n). \tag{2.41}$$

Mas como N é um campo vetorial tangente a $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então de (2.40) obtemos

$$\nabla_X^0 N = \overline{\nabla}_X N - \underbrace{\langle A(X), N \rangle}_{0} N - \underbrace{\langle X, N \rangle}_{0} \varphi = \overline{\nabla}_X N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{c,\tau}^n).$$

Assim, (2.41) fica da forma

$$A(X) = -\nabla^0_X N, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n_{c,\tau}). \tag{2.42}$$

Substituindo (2.37) em (2.42),

$$\begin{aligned} A(X) &= -\frac{1}{\sqrt{\tau^2 - c}}\, \nabla^0_X (a - \tau p) \\ &= \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - c}}\, \nabla^0_X p \;=\; \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - c}}\, X, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n_{c,\tau}). \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir de todo nosso estudo que $\varphi : \mathcal{M}^n_{c,\tau} \to \mathbb{S}_1^{n+1}$, com $\tau^2 > c$, é uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica, com curvatura média H constante igual a

$$H = -\frac{1}{n}\, \mathrm{tr}(A) = \frac{-\tau}{\sqrt{\tau^2 - c}}.$$

Passamos agora a fazer um estudo dos valores de τ e

$$H^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2 - c}$$

em função de $c = \langle a, a \rangle \in \{-1, 0, 1\}$.

(i) Se $c = 0$ (*o que corresponde a um corte de* $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *por um plano degenerado de* $\mathbb{L}^{n+2}$) então $\tau^2 > 0$. Segue que $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $H^2 = 1$. Tomemos por exemplo $a = (0, \ldots, 0, 1, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$. Então um ponto em $\mathcal{M}^n_{c,\tau} = \{\, p \in \mathbb{S}_1^{n+1}\, ;\, \langle p, a \rangle = \tau \,\}$ verifica

$$\begin{cases} p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = 1, \\ p_{n+1} - p_{n+2} = \tau. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} 1 = p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 &\geq p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 \\ &= (p_{n+1} - p_{n+2})\,(p_{n+1} + p_{n+2}) \\ &= \tau(p_{n+1} + p_{n+2}), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} p_1^2 + \cdots + p_n^2 &= 1 - \left(p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2\right) \\ &= 1 - \tau\,(p_{n+1} + p_{n+2}) \;\geq\; 1 - 1 \;=\; 0, \end{aligned}$$

ou seja, $p_1^2 + \cdots + p_n^2 \in [0, +\infty)$. Logo, podemos identificar $\mathcal{M}^n_{c,\tau}$ com $\mathbb{R}^n$.

(ii) Se $c = 1$ (*o que corresponde a um corte de* $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *por um plano tipo-tempo de* $\mathbb{L}^{n+2}$) então $\tau^2 > 1$. Segue que $\tau \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e $H^2 = \dfrac{\tau^2}{\tau^2 - 1} \in (1, +\infty)$. Por exemplo, se consideramos $a = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{L}^{n+2}$ então qualquer ponto em $\mathcal{M}^n_{c,\tau} = \{\, p \in \mathbb{S}_1^{n+1}\,;\ \langle p, a\rangle = \tau \,\}$ satisfaz

$$\begin{cases} p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 &= 1, \\ p_1 &= \tau. \end{cases}$$

Logo,

$$p_2^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 \;=\; 1 - \tau^2 \;<\; 0.$$

Assim, podemos identificar $\mathcal{M}^n_{c,\tau}$ com $\mathbb{H}^n(\sqrt{\tau^2 - 1}) \subset \mathbb{L}^{n+1}$, onde

$$\mathbb{H}^n(\sqrt{\tau^2 - 1}) = \{p \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle p, p\rangle = 1 - \tau^2, p^2_{n+2} \geq 0\}.$$

(iii) Se $c = -1$ (*o que corresponde a um corte de* $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *por um plano tipo-espaço de* $\mathbb{L}^{n+2}$) então $\tau^2 > -1$. Neste caso, $\tau \in \mathbb{R}$ e $H^2 = \dfrac{\tau^2}{\tau^2 + 1} \in [0, 1)$. Por exemplo, se escolhemos $a = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$ então um ponto $p \in \mathcal{M}^n_{c,\tau} = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}\,;\ \langle p, a\rangle = \tau \,\}$ verifica

$$\begin{cases} p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 &= 1, \\ p_{n+2} &= -\tau. \end{cases}$$

Logo,

$$p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 \;=\; 1 + \tau^2.$$

Assim, podemos identificar $\mathcal{M}^n_{c,\tau}$ com $\mathbb{S}^n(\sqrt{1 + \tau^2}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Pode ser mostrado que tais hipersuperfícies são essencialmente as únicas hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, como afirma o seguinte resultado.

Proposição 2.10 ([1], Teorema 1.5.1)**.** *Seja $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$, $n \geq 2$, uma hipersuperfície tipo-espaço conexa e totalmente umbílica. Então*

(a) *sua curvatura média H é constante.*

(b_1) *Se $H^2 \in [0, 1)$ então existem $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ e $\tau \in \mathbb{R}$ tais que $\langle a, a\rangle = -1$ e*

$$x(M^n) \subseteq \left\{\, p \in \mathbb{S}_1^{n+1}\,;\ \langle p, a\rangle = \tau \,\right\} = \mathbb{S}^n\left(\sqrt{1 + \tau^2}\right).$$

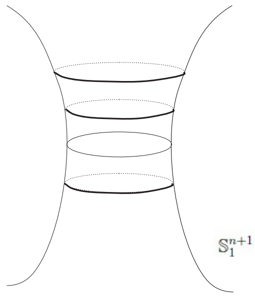

Figura 2.3: Item (b_1): Esferas geodésicas

(b_2) *Se $H^2 = 1$ então existem $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ e $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que $\langle a, a\rangle = 0$ e*

$$x(M^n) \subseteq \left\{\, p \in \mathbb{S}^{n+1}_1\, ;\ \langle p, a\rangle = \tau \,\right\} = \mathbb{R}^n.$$

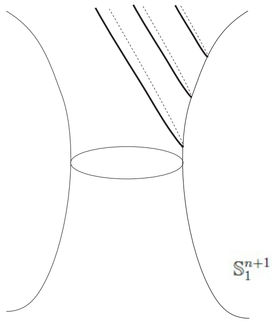

Figura 2.4: Item (b_2): Hiperplanos

(b_3) *Se $H^2 \in (1, +\infty)$ então existem $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ e $\tau \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ tais que $\langle a, a\rangle = 1$ e*

$$x(M^n) \subseteq \left\{\, p \in \mathbb{S}^{n+1}_1\, ;\ \langle p, a\rangle = \tau \,\right\} = \mathbb{H}^n\left(\sqrt{\tau^2 - 1}\right).$$

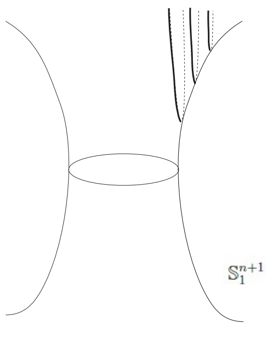

Figura 2.5: Item (b_3): Hiperbólicos

2.5 Hipersuperfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^{n+1}$

Aqui fazemos um estudo análogo ao da última subseção para determinar algumas hipersuperfícies totalmente umbílicas no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$.

Fixemos um vetor $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ e seja $c = \langle a, a\rangle \in \{-1, 0, 1\}$. Consideremos a função

$$\begin{array}{rccl} g_a : & \mathbb{H}^{n+1} & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & g_a(p) = \langle p, a\rangle. \end{array}$$

Usando a relação

$$\mathbb{L}^{n+2} \cong T_p(\mathbb{L}^{n+2}) = T_p(\mathbb{H}^{n+1}) \oplus \mathrm{Span}\{p\}, \quad \forall p \in \mathbb{H}^{n+1},$$

obtida de (2.21) fazendo $\delta = -1$, podemos estabelecer que

$$\nabla g_a(p) = a + \langle p, a\rangle\, p, \quad \forall p \in \mathbb{H}^{n+1}.$$

Em particular, para $p \in \mathcal{N}^n_{c,\varrho} = g_a^{-1}(\{\varrho\}) = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}\,;\, \langle p, a\rangle = \varrho\}$, onde $\varrho \in \mathbb{R}$, temos

$$\nabla g_a(p) = a + \varrho\, p. \tag{2.43}$$

Logo, $\mathcal{N}^n_{c,\varrho}$ será uma hipersuperfície orientada de $\mathbb{H}^{n+1}$ quando

$$\begin{aligned} 0 < \langle \nabla g_a(p), \nabla g_a(p)\rangle &= \langle a + \varrho p, a + \varrho p\rangle \\ &= \underbrace{\langle a, a\rangle}_{c} + 2\varrho \underbrace{\langle a, p\rangle}_{\varrho} + \varrho^2 \underbrace{\langle p, p\rangle}_{-1} \\ &= c + \varrho^2, \end{aligned}$$

ou equivalentemente, quando $\varrho^2 > -c$.

No que segue, $\varrho^2 > -c$ sempre será válida. Seja $\varphi : \mathcal{N}^n_{c,\varrho} \to \mathbb{H}^{n+1}$ a imersão isométrica de $\mathcal{N}^n_{c,\varrho}$ em $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ a aplicação inclusão de $\mathbb{H}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+2}_1$. Denotemos as conexões de Levi-Civita de $\mathcal{N}^n_{c,\varrho}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$ por ∇, $\overline{\nabla}$ e ∇^0, respectivamente. Observemos de (2.43) e (2.23) que as correspondentes aplicações de Gauss de $\varphi : \mathcal{N}^n_{c,\varrho} \to \mathbb{H}^{n+1}$ e $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ são dadas por

$$\begin{array}{rccl} N : & \mathcal{N}^n_{c,\varrho} & \to & \mathbb{S}^{n+1}_1 \\ & p & \mapsto & N(p) = \dfrac{\nabla g_a(p)}{|\nabla g_a(p)|} = \dfrac{a + \varrho\, p}{\sqrt{\varrho^2 + c}} \end{array} \tag{2.44}$$

e

$$\begin{array}{rcccl} \overline{N} & : & \mathbb{H}^{n+1} & \to & \mathbb{H}^{n+1} \\ & & p & \mapsto & \overline{N}(x) = p, \end{array}$$

respectivamente. De (2.44) e (2.44) podemos observar que

$$\langle N, N\rangle = 1$$

Denotemos por $A : \mathfrak{X}\left(\mathcal{N}^n_{c,\varrho}\right) \to \mathfrak{X}\left(\mathcal{N}^n_{c,\varrho}\right)$ e $\mathcal{A} : \mathfrak{X}\left(\mathbb{H}^{n+1}\right) \to \mathfrak{X}\left(\mathbb{H}^{n+1}\right)$ os operadores de forma de $\varphi : \mathcal{N}^n_{c,\varrho} \to \mathbb{H}^{n+1}$ na direção de N e $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ na direção do campo $\overline{N}$, respectivamente. De (2.31),

$$\mathcal{A} = -\mathrm{Id}_{\mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})}. \tag{2.45}$$

Procuremos agora uma expressão explícita para A.

De (2.7) obtemos que a fórmula de Gauss para $\varphi : \mathcal{N}^n_{c,\varrho} \to \mathbb{H}^{n+1}$ é dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle A(X), Y\rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}^n_{c,\varrho}). \tag{2.46}$$

Da fórmula de Gauss para $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, dada em (2.29), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^0_X Y &= \overline{\nabla}_X Y + \langle \mathcal{A}(X), Y\rangle\varphi \\ &= \nabla_X Y + \langle A(X), Y\rangle N + \langle X, Y\rangle\varphi, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}^n_{c,\varrho}), \end{aligned} \tag{2.47}$$

onde na última igualdade foi usado (2.46) e (2.45). De (2.9),

$$A(X) = -\overline{\nabla}_X N, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}^n_{c,\varrho}). \tag{2.48}$$

Mas como N é um campo vetorial tangente a $\mathbb{H}^{n+1}$, então, de (2.47), obtemos

$$\nabla^0_X N = \overline{\nabla}_X N + \underbrace{\langle A(X), N\rangle}_{0} N + \underbrace{\langle X, N\rangle}_{0}\varphi = \overline{\nabla}_X N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}^n_{c,\varrho}).$$

Assim, (2.48) fica da forma

$$A(X) = -\nabla^0_X N, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}^n_{c,\varrho}). \tag{2.49}$$

Substituindo (2.44) em (2.49),

$$\begin{aligned} A(X) &= -\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + c}}\,\nabla^0_X(a + \varrho p) \\ &= -\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + c}}\,\nabla^0_X p = -\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + c}}\,X, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}^n_{c,\varrho}). \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que $\varphi : \mathcal{N}^n_{c,\varrho} \to \mathbb{H}^{n+1}$, com $\varrho^2 > -c$, é uma hipersuperfície totalmente umbílica, com curvatura média H constante igual a

$$H = \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(A) = \frac{-\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + c}}.$$

Passamos agora a fazer um estudo dos valores de ϱ e

$$H^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + c}$$

em função de $c = \langle a, a\rangle \in \{-1, 0, 1\}$.

(i) Se $c = 0$ (*o que corresponde a um corte de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *por um plano degenerado*) então $\varrho^2 > 0$. Segue que $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $H^2 = 1$. Tomemos por exemplo $a = (0, \ldots, 0, 1, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$. Logo, um ponto em $\mathcal{N}^n_{c,\varrho} = \{\, p \in \mathbb{H}^{n+1}\,;\, \langle p, a\rangle = \varrho\,\}$ verifica

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 & = & -1, \\ p_{n+1} - p_{n+2} & = & \varrho. \end{array}\right.$$

Como

$$\begin{array}{rcl} -1 = p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 & \geq & p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 \\ & = & (p_{n+1} - p_{n+2})\,(p_{n+1} + p_{n+2}) \\ & = & \varrho(p_{n+1} + p_{n+2}), \end{array}$$

então

$$\begin{array}{rcl} p_1^2 + \cdots + p_n^2 & = & -1 - \left(p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2\right) \\ & = & -1 - \varrho\,(p_{n+1} + p_{n+2}) \;\geq\; -1 + 1 \;=\; 0, \end{array}$$

ou seja, $p_1^2 + \cdots + p_n^2 \in [0, +\infty)$. Logo, podemos identificar $\mathcal{N}^n_{c,\varrho}$ com $\mathbb{R}^n$ e, neste caso, dentro da nomenclatura que existe na literatura, $\mathcal{N}^n_{c,\varrho}$ correspondem às chamadas *horoesferas* de $\mathbb{H}^{n+1}$.

(ii) Se $c = 1$ (*o que corresponde a um corte de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *por um plano tipo-tempo de* $\mathbb{L}^{n+2}$) então $\varrho^2 > -1$. Segue que $\varrho \in \mathbb{R}$ e $H^2 = \dfrac{\varrho^2}{\varrho^2 + 1} \in [0, 1)$. Por exemplo, se consideramos $a = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{L}^{n+2}$ então qualquer ponto em $\mathcal{N}^n_{c,\varrho} = \{\, p \in \mathbb{H}^{n+1}\,;\, \langle p, a\rangle = \varrho\,\}$ satisfaz

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 & = & -1, \\ p_1 & = & \varrho. \end{array}\right.$$

Logo,

$$p_2^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 \;=\; -1 - \varrho^2 \;<\; 0.$$

Assim, podemos identificar $\mathcal{N}^n_{c,\varrho}$ com $\mathbb{H}^n(\sqrt{\varrho^2+1}) \subset \mathbb{L}^{n+1}$.

(*iii*) Se $c = -1$ (*o que corresponde a um corte de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *por um plano tipo-espaço de* $\mathbb{L}^{n+1}$) então $\varrho^2 > 1$. Neste caso, $\tau \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ e $H^2 = \dfrac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \in (1, +\infty)$. Por exemplo, se escolhemos $a = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$ então um ponto em $\mathcal{N}^n_{c,\varrho} = \{\, p \in \mathbb{H}^{n+1}\,;\, \langle p, a\rangle = \varrho \,\}$ verifica

$$\begin{cases} p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 &=\; -1, \\ \qquad\qquad\qquad\quad p_{n+2} &=\; -\varrho. \end{cases}$$

Logo,

$$p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 \;=\; -1 + \varrho^2 \;>\; 0.$$

Assim, podemos identificar $\mathcal{N}^n_{c,\varrho}$ com $\mathbb{S}^n(\sqrt{\varrho^2-1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

De forma similar ao que acontece na Proposição 2.10, pode ser mostrado que tais hipersuperfícies são as únicas hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$, como estabelece o seguinte resultado.

Proposição 2.11. *Seja* $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, $n \geq 2$, *uma hipersuperfície orientada, conexa e totalmente umbílica. Então*

(*a*) *sua curvatura média* H *é constante.*

(b_1) *Se* $H^2 \in (1, +\infty)$ *então existem* $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ *e* $\varrho \in \mathbb{R}$ *tais que* $\langle a, a\rangle = -1$ *e*

$$x(M^n) \subseteq \{\, p \in \mathbb{H}^{n+1}\,;\, \langle p, a\rangle = \varrho \,\} = \mathbb{S}^n\left(\sqrt{\varrho^2-1}\right).$$

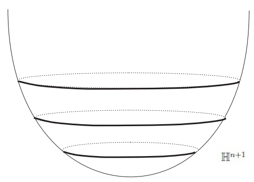

Figura 2.6: Item (b_1): Esferas geodésicas

(b_2) *Se $H^2 = 1$ então existem $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ e $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que $\langle a, a \rangle = 0$ e*

$$x(M^n) \subseteq \left\{ p \in \mathbb{H}^{n+1} \,;\, \langle p, a \rangle = \varrho \right\} = \mathbb{R}^n.$$

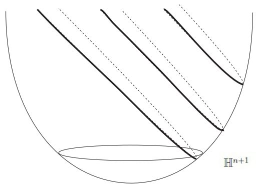

Figura 2.7: Item (b_2): Horoesferas

(b_3) *Se $H^2 \in [0, 1)$ então existem $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ e $\varrho \in \mathbb{R}$ tais que $\langle a, a \rangle = 1$ e*

$$x(M^n) \subseteq \left\{ p \in \mathbb{H}^{n+1} \,;\, \langle p, a \rangle = \varrho \right\} = \mathbb{H}^n \left(\sqrt{\varrho^2 + 1} \right).$$

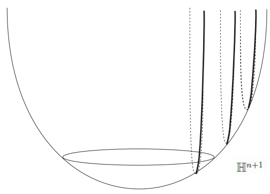

Figura 2.8: Item (b_3): Hiperesferas

Capítulo 3

Resultados Auxiliares

3.1 Uma fórmula do tipo-Simons

Seja $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientável M^n no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, com curvatura média contante H e conexão de Levi-Civita ∇. O objetivo de esta seção é encontrar uma expressão para o Laplaciano da função

$$\begin{array}{rccl} u : & M^n & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & u(p) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}\left(A_p^2\right), \end{array}$$

onde $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ denota o operador de forma de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, expressão que é conhecida como fórmula do tipo-Simons e que foi obtida por K. Nomizu e B. Smyth em [18]. Para atingir esse objetivo, precisamos introduzir algumas definições e estabelecer algumas propriedades.

Inicialmente, observemos que a formula de Codazzi de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, dada em (2.16), pode ser escrita da forma

$$\nabla_X(A(Y)) - \nabla_Y(A(X)) = A([X,Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.1}$$

Proposição 3.1. *A derivada covariante ∇A de A, definida em* (2.12), *verifica*

(a) $\nabla A(X,Y) = \nabla A(Y,X)$,

(b) $\langle \nabla A(X,Y), Z\rangle = \langle \nabla A(Y,Z), X\rangle$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Para estabelecer o item (a), de (3.1) temos

$$\begin{aligned}\nabla A(X,Y) &= \nabla_Y(A(X)) - A(\nabla_Y X) \;=\; \nabla_X(A(Y)) - A([X,Y]) - A(\nabla_Y X)\\ &= \nabla_X(A(Y)) - A(\nabla_X Y) + A(\nabla_Y X) - A(\nabla_Y X)\\ &= \nabla_X(A(Y)) - A(\nabla_X Y) \;=\; \nabla A(Y,X),\end{aligned}$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Por outro lado, de (2.12) obtemos

$$\begin{aligned}\langle \nabla A(X,Y), Z\rangle &= \langle \nabla_Y(A(X)) - A(\nabla_Y X), Z\rangle\\ &= \langle \nabla_Y(A(X)), Z\rangle - \langle A(\nabla_Y X), Z\rangle\\ &= Y(\langle A(X), Z\rangle) - \langle A(X), \nabla_Y Z\rangle - \langle \nabla_Y X, A(Z)\rangle\\ &= Y(\langle X, A(Z)\rangle) - \langle X, A(\nabla_Y Z)\rangle - Y\langle X, A(Z)\rangle + \langle X, \nabla_Y(A(Z))\rangle\}\\ &= \langle \nabla A(Y,Z), X\rangle.\end{aligned}$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, o que demostra o item (b). $\square$

Definição 3.2. *Se $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é o operador de forma de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, então a segunda derivada covariante de A é a aplicação $\nabla^2 A : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por*

$$\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla_Z(\nabla A(X,Y)) - \nabla A(\nabla_Z X, Y) - \nabla A(X, \nabla_Z Y) \qquad (3.2)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇A é a derivada covariante de A definida em (2.12).

Proposição 3.3. *A segunda derivada covariante $\nabla^2 A$ definida em* (3.2) *verifica*

(a) $\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla^2 A(Y,X,Z)$,

(b) $\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla^2 A(X,Z,Y) - R(Z,Y)AX + A(R(Z,Y)X)$,

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde R é o tensor curvarura de M^n definido em (1.5).

Demonstração. O item (a) segue diretamente do item (a) da Proposição 3.1. Para o item (b), de (3.2) e (2.12) temos para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ que

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Y,Z) &= \nabla_Z\nabla_Y(A(X)) - \nabla_Z(A(\nabla_Y X)) - \nabla_Y(A(\nabla_Z X))\\ &\quad + A(\nabla_Y\nabla_Z X) - \nabla_{\nabla_Z Y}(A(X)) + A(\nabla_{\nabla_Z Y} X).\end{aligned}$$

Trocando Y por Z na última expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Z,Y) &= \nabla_Y\nabla_Z(A(X)) - \nabla_Y(A(\nabla_Z X)) - \nabla_Z(A(\nabla_Y X))\\ &\quad + A(\nabla_Z\nabla_Y X) - \nabla_{\nabla_Y Z}(A(X)) + A(\nabla_{\nabla_Y Z} X).\end{aligned}$$

Portanto, tendo em conta (1.5), obtemos

$$\nabla^2 A(X,Y,Z) - \nabla^2 A(X,Z,Y) = -R(Z,Y)AX + A(R(Z,Y)X).$$

$\square$

Definição 3.4. *Dada uma aplicação $C^\infty(M)$-bilinear e simétrica $T : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, definimos o traço de T como sendo a aplicação $\mathrm{tr}(T) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} T(E_i, E_i), \tag{3.3}$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal em M^n.

Proposição 3.5. *Seja $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é o operador de forma de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$. Então*

$$\mathrm{tr}(\nabla A) = \nabla(\mathrm{tr}(A)).$$

Demonstração. Fixe $p \in M^n$ e considere um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ definida em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p tal que $A_q(E_i|_q) = \mu_i(p)E_i|_q$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, para todo $q \in \mathcal{U}$ e algumas funções $\mu_1, \ldots, \mu_n \in C^\infty(\mathcal{U})$. Logo, para $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla(\mathrm{tr}(A)), X\rangle &= X(\mathrm{tr}(A)) = X\left(\sum_{i=1}^{n}\langle A(E_i), E_i\rangle\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(A(E_i)), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle A(E_i), \nabla_X E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(A(E_i)), E_i\rangle + \mu_i\sum_{i=1}^{n}\langle E_i, \nabla_X E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(A(E_i)), E_i\rangle + \frac{\mu_i}{2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{X(\langle E_i, E_i\rangle)}_{0}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por outro lado, de (3.3) e do item (b) da Proposição 3.1,

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{tr}(\nabla A), X\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla A(E_i, E_i), X\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla A(E_i, X), E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(A(E_i)), E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle A(\nabla_X E_i), E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(A(E_i)), E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X E_i, A(E_i)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(A(E_i), E_i)\rangle + \mu_i\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X E_i, E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X(A(E_i), E_i)\rangle + \frac{\mu_i}{2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{X(\langle E_i, E_i\rangle)}_{0}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $X \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$. Assim, o resultado desejado segue de (3.4) e (3.5). □

Definição 3.6. *Seja $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o operador de forma de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos o tensor*

$$\begin{aligned}
\Gamma_X :\ \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M)\\
(Y, Z) &\mapsto \Gamma_X(Y, Z) = \nabla^2 A(Y, Z, X).
\end{aligned}$$

Proposição 3.7. *Com as notações da Definição 3.6,*

$$\mathrm{tr}(\Gamma_X) = n\nabla_X(\nabla H),$$

onde H é a curvatura média de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$.

Demonstração. Fixe $p \in M^n$ e, tendo em conta o Lema 1.24, consideremos um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ (definido em uma vizinhança de p) que seja geodésico em p, isto é, tal que $(\nabla_{E_j} E_i)|_p = 0$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, se $X = \sum_{j=1}^n X_j E_j$, então, em p, temos

$$\nabla A(E_i, \nabla_X E_i) = \nabla A\left(E_i, \nabla_{\sum_{j=1}^n X_j E_j} E_i\right) = \sum_{j=1}^n X_j \nabla A\left(E_i, \nabla_{E_j} E_i\right) = 0. \tag{3.6}$$

Portanto, das Definições 3.2, 3.4 e 3.6 e da equação (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\Gamma_X) &= \sum_{i=1}^n \Gamma_X(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla^2 A(E_i, E_i, X) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_X(\nabla A(E_i, E_i)) - 2\sum_{i=1}^n \underbrace{\nabla A(E_i, \nabla_X E_i)}_{0} \\
&= \nabla_X\left(\sum_{i=1}^n \nabla A(E_i, E_i)\right) \\
&= \nabla_X(\mathrm{tr}(\nabla A)) \;=\; \nabla_X(\nabla(\mathrm{tr}A)) \;=\; n\nabla_X(\nabla H),
\end{aligned}$$

onde nos usamos a Proposição 3.5 na penúltima igualdade. □

Definição 3.8. *Seja $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o operador de forma de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$. Definimos o Laplaciano de A como sendo a aplicação*

$$\begin{aligned}
\Delta A : \; \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\
X &\mapsto \Delta A(X) \;=\; \mathrm{tr}\left\{(Y, Z) \mapsto \nabla^2 A(X, Y, Z)\right\}.
\end{aligned}$$

Proposição 3.9. *Sejam $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o operador de forma e H a curvatura média de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$. Então, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\Delta A(X) = n\nabla_X(\nabla H) + nHX - (n + |A|^2)A(X) + nHA^2(X),$$

onde $|A|$ é a norma de Hilbert-Schmidt de A, dada em (3.10).

Demonstração. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal local definido em algum conjunto aberto de M^n. Logo, da Definição 3.8, da Proposição 3.3 e da Proposição 3.7

temos

$$
\begin{aligned}
\Delta A(X) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 A(X, E_i, E_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 A(E_i, X, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 A(E_i, E_i, X) - \sum_{i=1}^{n} R(E_i, X)A(E_i) + \sum_{i=1}^{n} A(R(E_i, X)E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Gamma_X(E_i, E_i) - \sum_{i=1}^{n} R(E_i, X)A(E_i) + \sum_{i=1}^{n} A(R(E_i, X)E_i) \\
&= \mathrm{tr}(\Gamma_X) - \sum_{i=1}^{n} R(E_i, X)A(E_i) + \sum_{i=1}^{n} A(R(E_i, X)E_i) \\
&= n\nabla_X(\nabla H) - \sum_{i=1}^{n} R(E_i, X)A(E_i) + \sum_{i=1}^{n} A(R(E_i, X)E_i), \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde R denota tensor curvatura de M^n.

Agora, da equação de Gauss de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, dada em (2.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{n} R(E_i, X)A(E_i) &= \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, A(E_i)\rangle X - \sum_{i=1}^{n} \langle X, A(E_i)\rangle E_i \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \langle A(E_i), A(E_i)\rangle A(X) + \sum_{i=1}^{n} \langle A(X), A(E_i)\rangle A(E_i) \\
&= \mathrm{tr}(A)X - \sum_{i=1}^{n} \langle A(X), E_i\rangle E_i - \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, A^2(E_i)\rangle A(X) \\
&\quad + A\left(\sum_{i=1}^{n} \langle A^2(X), E_i\rangle E_i\right) \\
&= nHX - A(X) - \mathrm{tr}(A^2)A(X) + A(A^2(X)), \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

De forma semelhante, novamente de (2.15),

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} A(R(E_i, X)E_i) &= A\left(-\sum_{i=1}^{n} \langle E_i, E_i\rangle X\right) + A\left(\sum_{i=1}^{n} \langle X, E_i\rangle E_i\right) \\
&\quad + A\left(\sum_{i=1}^{n} \langle A(E_i), E_i\rangle A(X)\right) - A\left(\sum_{i=1}^{n} \langle A(X), E_i\rangle A(E_i)\right) \\
&= -\mathrm{tr}\left(\mathrm{Id}|_{\mathfrak{X}(M)}\right) A(X) + A(X) + \mathrm{tr}(A)A^2(X) \\
&\quad - A^2\left(\sum_{i=1}^{n} \langle A(X), E_i\rangle E_i\right) \\
&= -nAX + A(X) + nHA^2(X) - A^2(A(X)), \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Finalmente, substituindo (3.9) e (3.8) em (3.7), obtemos o resultado. □

Antes de mostrarmos o próximo resultado, precisaremos das seguintes noções.

Definição 3.10. *Sejam $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $S : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ duas aplicações $C^\infty(M)$-lineares. O produto interno de A e B é definido como sendo a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \langle T, S\rangle : M^n & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \langle T, S\rangle(p) = \mathrm{tr}(T_p \circ S_p^*), \end{array}$$

onde S_p^* denota o operador adjunto de S_p. A norma induzida por esse produto interno é definida como sendo a norma $|T|$ de uma aplicação $C^\infty(M)$-linear $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, frequentemente chamada de norma de Hilbert-Schmidt de T isto é, $|T|$ é dada pela expressão $|T|^2 = \langle T, T\rangle = \mathrm{tr}(T \circ T^*)$.

Em particular, quando $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é uma aplicação $C^\infty(M)$-linear e autoadjunta, a norma de Hilbert-Schmidt de T é dada por

$$|T|^2 = \mathrm{tr}(T^2) = \sum_{i=1}^{n} \langle T^2(E_i), E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle T(E_i), T(E_i)\rangle, \tag{3.10}$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local definido em algum conjunto aberto de M^n.

Definição 3.11. *Sejam $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ duas aplicações $C^\infty(M)$-bilineares. O produto interno de A e B é definida como sendo a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \langle A, B\rangle : M^n & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \langle A, B\rangle(p) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \langle A_p(E_i, E_j), B_p(E_i, E_j)\rangle_p, \end{array} \tag{3.11}$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM. A norma induzida por este produto interno define a norma de uma aplicação $C^\infty(M)$-bilinear.

Observemos imediatamente que, da Álgebra Linear, o produto interno acima está bem definido, isto é, não depende da base ortonormal escolhida.

Proposição 3.12. *Seja $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o operador de forma de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$. Então*

$$\Delta(|A|^2) = 2\langle A, \Delta A\rangle + 2|\nabla A|^2,$$

onde $|A|$ é a norma de Hilbert-Schmidt de A dada em (3.10).

Demonstração. Fixe $p \in M^n$ e, tendo em conta o Lema 1.24, considere um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ (definido em alguma vizinhança de p) que seja geodésico em p, isto é tal que $(\nabla_{E_j}E_i)|_p = 0$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, em p temos

$$
\begin{aligned}
\Delta(|A|^2) &= \sum_{i=1}^{n} E_i\left(E_i\left(|A|^2\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\left(E_i\left(\sum_{j=1}^{n}\langle A^2(E_j), E_j\rangle\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E_i\left(E_i\left(\langle A(E_j), A(E_j)\rangle\right)\right) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} E_i\left(\langle \nabla_{E_i}(A(E_j)), A(E_j)\rangle\right) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}(A(E_j)), A(E_j)\rangle \\
&\quad +2\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(A(E_j)), \nabla_{E_i}(A(E_j))\rangle. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Além disso, em p, também temos

$$
\begin{aligned}
2\langle \Delta A, A\rangle &= 2\sum_{j=1}^{n}\langle \Delta A(E_j), A(E_j)\rangle \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n}\nabla^2 A(E_j, E_i, E_i), A(E_j)\right\rangle \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}(\nabla A(E_j, E_i)) - \nabla A(\underbrace{\nabla_{E_i}E_j}_{0}, E_i) - \nabla A(E_j, \underbrace{\nabla_{E_i}E_i}_{0}), A(E_j)\right\rangle \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}\left(\nabla_{E_i}(A(E_j)) - A(\nabla_{E_i}E_j)\right), A(E_j)\right\rangle \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}\big(\nabla_{E_i}(A(E_j))\big) - \nabla_{E_i}(A(\nabla_{E_i}E_j)), A(E_j)\right\rangle \\
&= 2\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}\big(\nabla_{E_i}(A(E_j))\big), A(E_j)\right\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}(A(\nabla_{E_i}E_j)), A(E_j)\right\rangle\Big) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}\big(\nabla_{E_i}(A(E_j))\big), A(E_j)\right\rangle \\
&\quad -2\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla_{\underbrace{\nabla_{E_i}E_j}_{0}}(A(E_i)) - A([E_i, \underbrace{\nabla_{E_i}E_j}_{0}]), A(E_j)\right\rangle \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}(A(E_j)), A(E_j)\right\rangle, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

onde na penúltima igualdade usamos a expressão dada em (3.1).

Por outro lado, da Definição 3.11, temos

$$\begin{aligned}
2|\nabla A|^2(p) &= 2\langle \nabla A, \nabla A\rangle(p)\\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla A(E_i,E_j), \nabla A)(E_i,E_j)\rangle_p\\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_j}(A(E_i)) - A(\underbrace{\nabla_{E_j}E_i}_{0}), \nabla_{E_j}(A(E_i)) - A(\underbrace{\nabla_{E_j}E_i}_{0})\rangle_p\\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_j}(A(E_i)), \nabla_{E_j}(A(E_i))\rangle_p. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue diretamente de substituir as expressões (3.13) e (3.14) na equação (3.12). □

Finalmente, depois de todo estudo desenvolvido acima, estamos em condições de enunciar e mostrar a fórmula do tipo Simons que comentamos no inicio deste capítulo.

Proposição 3.13. *Seja $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperície como curvatura média constante H. Se $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é o operador de forma de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ então*

$$\frac{1}{2}\Delta(|A|^2) = -n|A|^2 - |A|^4 + n^2H^2 + nH\,\mathrm{tr}(A^3) + |\nabla A|^2,$$

onde $|A|$ é a norma de Hilbert-Schmidt de A dada em (3.10).

Demonstração. Sendo H constante, então das Proposições 3.13 e 3.9 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|A|^2) &= \langle A, \Delta A\rangle + |\nabla A|^2\\
&= \langle A, nH - (n+|A|^2)A + nHA^2\rangle + |\nabla A|^2\\
&= nH\langle A, \mathrm{Id}|_{\mathfrak{X}(\mathrm{M})}\rangle - (n+|A|^2)\langle A, A\rangle + nH\langle A, A^2\rangle + |\nabla A|^2\\
&= nH\,\mathrm{tr}(A) - (n+|A|^2)|A|^2 + nH\,\mathrm{tr}(A^3) + |\nabla A|^2\\
&= n^2H^2 - n|A|^2 - |A|^4 + nH\,\mathrm{tr}(A^3) + |\nabla A|^2.
\end{aligned}$$

□

3.2 O Laplaciano de algumas funções suportes

O objetivo desta seção é calcular os Laplacianos de duas funções suportes que estão relacionadas a uma imersão isométrica $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana orientável M^n no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, expressões que serão utilizados no próximo capítulo para obter alguns dos resultados principais deste trabalho.

Para isso, seja N o campo de vetores normais unitários globalmente definido em M^n, e denotemos por $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o correspondente operador de forma de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$. Observemos que N pode ser considerado como a aplicação

$$N : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1},$$

onde $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é o espaço de Sitter. As conexões de Levi-Civita de M^n, $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$ serão denotadas por ∇, $\overline{\nabla}$ e ∇^0, respectivamente.

De (2.7), (2.29) e (2.31) obtemos que a formula de Gauss para M^n em $\mathbb{H}^{n+1}$ é dada por

$$\nabla^0_X Y = \nabla_X Y + \langle A(X), Y\rangle N + \langle X, Y\rangle x, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.15}$$

Por outro lado, como $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp} \bigcap \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ então, de (2.9) e (2.29), obtemos

$$A(X) = -\overline{\nabla}_X N = -\nabla^0_X N, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.16}$$

No que segue, para um vetor fixo $v \in \mathbb{L}^{n+2}$, consideremos a *funcão altura*

$$\begin{array}{rcccl} l_v & : & M^n & \to & \mathbb{R} \\ & & p & \mapsto & l_v(p) \;=\; \langle x(p), v\rangle \end{array} \tag{3.17}$$

e a *função ângulo*

$$\begin{array}{rcccl} f_v & : & M^n & \to & \mathbb{R} \\ & & p & \mapsto & f_v(p) \;=\; \langle N(p), v\rangle, \end{array} \tag{3.18}$$

funções naturalmente associadas à imersão isométrica $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$.

No nosso próximo resultado, estudamos e colecionamos varias expressões de alguns operadores diferenciáveis (estudados na Seção 1.2.2) agindo nas funções suportes definidas acima em (3.17) e (3.18).

Proposição 3.14. *Com as notações estabelecidas acima,*

(*a*) $\nabla l_v = v^{\top}$ *e* $\nabla f_v = -A(v^{\top})$;

(*b*) $(\mathrm{Hess}\, l_v)(X, Y) = f_v\langle A(X), Y\rangle + l_v\langle X, Y\rangle$, *para todos* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;

(*c*) $\Delta\, l_v = nHf_v + nl_v$;

(*d*) $(\mathrm{Hess} f_v)(X, Y) = -\langle \nabla A(X, v^{\top}), Y\rangle - f_v\langle A(X), A(Y)\rangle - l_v\langle X, A(Y)\rangle$, *para quaisquer* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;

(*e*) $\Delta f_v = -n\langle v^{\top}, \nabla H\rangle - |A|^2 f_v - nHl_v$;

onde $v^\top$ *é a projeção ortogonal de* $v \in \mathbb{L}^{n+2}$ *sobre o conjunto de campos de vetores definidos em* M^n*, que é dado por*

$$v^\top = v - f_v N + l_v\, x, \tag{3.19}$$

A *é o operador de forma de* $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *dada em* (3.15)*,* H *é a curvatura média de* $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *definida em* (2.6) *e* $|A|$ *é a norma de Hilbert-Schmidt de* A *dada em* (3.10)*.*

Demonstração. Para poder obter as expressões dos gradientes das funções l_v e f_v, observemos que

$$\langle \nabla l_v, X\rangle = X(l_v) = X\left(\langle x, v\rangle\right) = \langle \nabla^0_X x, v\rangle = \langle X, v\rangle = \langle v^\top, X\rangle$$

e, de (3.16),

$$\langle \nabla f_v, X\rangle = X(f_v) = X\left(\langle N, v\rangle\right) = \langle \nabla^0_X N, v\rangle = -\langle AX, v\rangle = \langle -A(v^\top), X\rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Segue que

$$\nabla l_v = v^\top \quad \text{e} \quad \nabla f_v = -A(v^\top), \tag{3.20}$$

e o item (a) ficou estabelecido.

Agora, da Definição 1.12, da primeira equação de (3.20), de (3.15), (3.19) e (3.16) obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}\, l_v)(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla l_v, Y\rangle \;=\; \langle \nabla^0_X \nabla l_v, Y\rangle \;=\; \langle \nabla^0_X v^\top, Y\rangle \\
&= \langle \nabla^0_X (v - f_v N + l_v\, x), Y\rangle \\
&= -\langle \nabla^0_X (f_v N), Y\rangle + \langle \nabla^0_X (l_v\, x), Y\rangle \\
&= -X(f_v)\underbrace{\langle N, Y\rangle}_{0} - f_v \langle \nabla^0_X (N), Y\rangle \\
&\quad + X(l_v)\underbrace{\langle x, Y\rangle}_{0} + l_v \langle \nabla^0_X (x), Y\rangle \\
&= f_v \langle A(X), Y\rangle + l_v \langle X, Y\rangle,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o que demonstra o item (b).

Para o item (c), se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local definido em um conjunto aberto de M^n, da Definição 1.14 e de (3.21) segue que

$$\begin{aligned}
\Delta\, l_v &= \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\, l_v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Hess}\, l_v)(E_i, E_i) \\
&= f_v \sum_{i=1}^{n} \langle A(E_i), E_i\rangle + l_v \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, E_i\rangle \\
&= f_v\, \mathrm{tr}(A) + n l_v \;=\; nH f_v + n l_v.
\end{aligned}$$

Para obter o item (d), da Definição 1.12, da segunda equação de (3.20), da equação de Codazzi de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, dada em (2.16), e de (3.21) obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hess} f_v)(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla f_v, Y\rangle = \langle \nabla_X(-A(v^\top)), Y\rangle \\
&= -\langle \nabla A(v^\top, X) + A(\nabla_X(v^\top)), Y\rangle \\
&= -\langle \nabla A(X, v^\top), Y\rangle - \langle A(\nabla_X(v^\top)), Y\rangle \\
&= -\langle \nabla A(X, v^\top), Y\rangle - \langle \nabla_X(v^\top), A(Y)\rangle \\
& \quad -\langle \nabla A(X, v^\top), Y\rangle - (\mathrm{Hess}\, l_v)(X, A(Y)) \\
&= -\langle \nabla A(X, v^\top), Y\rangle - f_v\langle A(X), A(Y)\rangle - l_v\langle X, A(Y)\rangle, \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Para o item (e) restante, considerando novamente um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de M^n, da Definição 1.14, de (3.22) e de (2.12) segue que

$$\begin{aligned}
\Delta f_v &= \mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f_v) \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathrm{Hess} f_v)(E_i, E_i) \\
&= -\sum_{i=1}^n \langle \nabla A(E_i, v^\top), E_i\rangle - f_v \sum_{i=1}^n \langle A(E_i), A(E_i)\rangle - l_v \sum_{i=1}^n \langle E_i, A(E_i)\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^n \langle \nabla A(E_i, v^\top), E_i\rangle - |A|^2 f_v - l_v\, \mathrm{tr}(A) \\
&= -\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{v^\top} A(E_i) - A(\nabla_{v^\top} E_i), E_i\rangle - |A|^2 f_v - nHl_v. \\
&= -\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{v^\top} A(E_i), E_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle A(\nabla_{v^\top} E_i), E_i\rangle - |A|^2 f_v - nHl_v. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Agora, se exigimos que o referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ diagonalize o operador de forma A (que sempre é possível), com autovalores $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ respectivamente, então

$$\langle A(\nabla_{v^\top} E_i), E_i\rangle = \langle \nabla_{v^\top} E_i, A(E_i)\rangle = \mu_i \underbrace{\langle \nabla_{v^\top} E_i, E_i\rangle}_{0} = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

onde foi usado que

$$\langle E_i, E_k\rangle = \delta_{ik} \quad \Rightarrow \quad 0 = X(\langle E_i, E_k\rangle) = 2\langle \nabla_X E_i, E_k\rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \qquad (3.24)$$

Assim, em (3.23) temos

$$
\begin{aligned}
\Delta f_v &= -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{v^\top} A(E_i), E_i \rangle - |A|^2 f_v - nHl_v \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \Big\langle \nabla_{\left(\sum_{j=1}^{n} \langle v^\top, E_j\rangle E_j\right)} A(E_i), E_i \Big\rangle - |A|^2 f_v - nHl_v \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \langle v^\top, E_j\rangle \langle \nabla_{E_j} A(E_i), E_i \rangle - |A|^2 f_v - nHl_v. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Finalmente, usando novamente (3.24) na análise da expressão

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_j} A(E_i), E_i \rangle &= E_j \left(\langle A(E_i), E_i \rangle \right) - \langle A(E_i), \nabla_{E_j} E_i \rangle \\
&= E_j \left(\langle A(E_i), E_i \rangle \right) - \mu \underbrace{\langle E_i, \nabla_{E_j} E_i \rangle}_{0},
\end{aligned}
$$

então, de (3.25), obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta f_v &= -\sum_{i,j=1}^{n} \langle v^\top, E_j \rangle E_j \left(\langle A(E_i), E_i \rangle \right) - |A|^2 f_v - nHl_v \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \langle v^\top, E_j \rangle \left(E_j \left(\sum_{j=1}^{n} \langle A(E_i), E_i \rangle \right) \right) - |A|^2 f_v - nHl_v \\
&= -n \sum_{j=1}^{n} \langle v^\top, E_j \rangle \left(E_j \left(H \right) \right) - |A|^2 f_v - nHl_v \\
&= -n \Big\langle v^\top, \sum_{j=1}^{n} E_j \left(H \right) E_j \Big\rangle - |A|^2 f_v - nHl_v \\
&= -n \langle v^\top, \nabla H \rangle - |A|^2 f_v - nHl_v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Capítulo 4

Hipersuperfícies em $\mathbb{H}^{n+1}$ com aplicação de Gauss prescrita

Neste capítulo, vamos mostrar os resultados principais com relação às hipersuperfícies imersas no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, descritos na introdução desta dissertação. De forma mais precisa, vamos mostrar dois resultados de rigidez para hipersuperfícies completas $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ com curvatura média constante, desde que sua aplicação de Gauss $N : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ verifique algum comportamento adequado. Neste sentido, nosso primeiro resultado requer como hipótese que a imagem da aplicação normal de Gauss $N(M)$ esteja contida numa hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica do espaço de Sitter $\mathbb{S}^{n+1}$ (veja Teorema 4.3); enquanto que no segundo vamos solicitar que M^n tenha curvatura escalar limitada inferiormente e que $N(M^n)$ esteja contida no fecho de um domínio delimitado por uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}$ determinada por algum vetor a no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$, tal que a componente tangencial de a com respeito a M^n possua norma integrável segundo Lebesgue (vide Teorema 4.5).

Para alcançar nossos objetivos, precisamos de dois resultados que seguidamente passamos a enunciar. O primeiro deles é uma caracterização de hipersuperficies totalmente umbílilicas em uma forma espacial semi-Riemanniana devida a Kim et al. [15].

Lema 4.1. *Seja M^n uma hipersuperfície semi-Riemanniana completa e conexa imersa numa variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}(c)$ com curvatura seccional constante c. Suponhamos que $\overline{M}^{n+1}(c)$ possui um campo vetorial conforme cuja componente tangencial*

$V^\top$ em M^n é um campo conforme. Então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(i) M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica;

(ii) A restrição de V a M^n se reduz a um campo de vetores tangentes em M^n.

Aqui, lembremos que um campo suave de vetores V definido sobre uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ é chamado *conforme* se

$$\mathcal{L}_V\langle\,,\rangle = 2\psi\langle\,,\rangle,$$

para alguma função $\psi \in C^\infty(\overline{M})$, onde $\mathcal{L}_V\langle\,,\rangle$ denota a derivada de Lie da métrica de $\overline{M}^{n+1}$ na direção do campo V definida por

$$\mathcal{L}_V\langle Y, Z\rangle = V(\langle Y, Z\rangle) - \langle [V, Y], Z\rangle - \langle Y, [V, Z]\rangle, \tag{4.1}$$

para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Nesse contexto, ψ e chamado *fator conforme* de V .

O segundo resultado que precisamos é o bem conhecido princípio de máximo generalizado de Omori-Yau [20, 23], cujos detalhes da demonstração podem ser encontrados em [7].

Lema 4.2. *Seja M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional, completa e conexa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente e seja $u : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave limitada superiormente em M^n. Então existe uma sequência $\{p_k\}_{k\geq 1}$ em M^n tal que*

$$\lim_k u(p_k) = \sup_M u, \quad \lim_k |\nabla u|(p_k) = 0 \quad e \quad \limsup_k \Delta u(p_k) \leq 0.$$

Estamos agora em condições de enunciar e provar nosso primeiro resultado de rigidez, o qual corresponde ao Teorema 1.1 de [4] .

Teorema 4.3. *As únicas hipersuperfícies completas com curvatura média constante imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$ cuja imagem da aplicação de Gauss está contida em uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}$ são as totalmente umbílicas.*

Demonstração. Seja $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma tal hiprsuperfície e denotemos, respectivamente, por A e H o operador de forma e a curvatura média de M^n com respeito a um campo de vetores normais unitários N globalmente definido em M^n. Da caracterização das hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{S}^{n+1}$ estudada na Seção 2.4 e pela nossa hipótese a respeito da imagem da aplicação de Gauss $N(M^n)$, obtemos a existência de $v \in \mathbb{L}^{n+2} \setminus \{0\}$ e $\tau \in \mathbb{R}$ tais que a função ângulo $f_v : M^n \to \mathbb{R}$ definida em (3.18) satisfaz $f_v = \langle N, v\rangle = \tau$, com $\tau > \langle v, v\rangle$.

Analisemos primeiro o que acontece quando $\tau = 0$. Neste caso, inicialmente, afirmamos que $H = 0$. De fato, como $f_v = 0$ e H é constante, então, ao longo de M^n, do item (e) da Proposição 3.14, obtemos $-nHl_v = 0$. Agora, supondo, por contradição, que $H \neq 0$, segue que $l_v = 0$. Uma vez que $v^\top = v - f_v N + l_v x$, então, da primeira equação do item (a) da Proposição 3.14, concluímos que $v = v^\top = \nabla l_v = 0$, o que é uma contradição, pois $v \in \mathbb{L}^{n+2} \setminus \{0\}$.

Agora afirmamos que $v^\top$ é um campo de vetores conforme em M^n. De fato, como $f_v = 0$, então, do ítem (b) da Proposição 3.14, obtemos que o Hessiano da função altura $l_v : M^n \to \mathbb{R}$, definida em (3.17), satisfaz $(\operatorname{Hess} l_v)(Y, Z) = l_v\langle Y, Z\rangle$, para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, de (4.1), segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\nabla l_v}(\langle Y, Z\rangle) &= \nabla l_v(\langle Y, Z\rangle) - \langle [\nabla l_v, Y], Z\rangle - \langle Y, [\nabla l_v, Z]\rangle \\
&= \langle \nabla_{\nabla l_v} Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{\nabla l_v} Z\rangle \\
&\quad -\langle \nabla_{\nabla l_v} Y - \nabla_Y \nabla l_v, Z\rangle - \langle Y, \nabla_{\nabla l_v} Z - \nabla_Z \nabla l_v\rangle \\
&= \langle \nabla_{\nabla l_v} Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{\nabla l_v} Z\rangle - \langle \nabla_{\nabla l_v} Y, Z\rangle \\
&\quad +\langle \nabla_Y \nabla l_v, Z\rangle - \langle Y, \nabla_{\nabla l_v} Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z \nabla l_v\rangle \\
&= \langle \nabla_Y \nabla l_v, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z \nabla l_v\rangle \\
&= (\operatorname{Hess} l_v)(Y, Z) + (\operatorname{Hess} l_v)(Z, Y) \ = \ 2l_v\langle Y, Z\rangle,
\end{aligned}
$$

para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Desse modo, da primeira equação do item (a) da Proposição 3.14, concluímos que $\nabla l_v = v^\top$ é um campo de vetores conforme em M^n.

Observemos também que a segunda conlusão do Lema 4.1 não acontece, pois, caso aconteça $v = v^\top$, então, novamente, de $v^\top = v - f_v N + l_v x$, obteríamos $l_v = 0$ em M^n (lembre que $f_v = 0$), o que, por sua vez, implicaria $v = v^\top = \nabla l_v = 0$, chegando a uma contradição, pois $v \in \mathbb{L}^{n+2} \setminus \{0\}$.

Portanto, aplicando o Lema 4.1, como $H = 0$ neste caso, podemos concluir que M^n é uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$.

No que segue, assumimos que $\tau \neq 0$. Se $H = 0$, então M^n é totalmente geodésica e o resultado segue. Suponhamos então $H \neq 0$. Como $f_v = \tau$ e H são constantes ao longo de M^n, então o item (e) da Proposição 3.14 nos garante que

$$|A|^2 = -\frac{nH}{\tau}\, l_v. \tag{4.2}$$

Segue que

$$\frac{\tau}{H}\, l_v = -\frac{\tau^2}{nH^2}\, |A|^2.$$

Observemos que, das equações (3.10) e (2.33), podemos obter $|A|^2 = |\Phi|^2 + nH^2$, onde Φ é o operador sem traço de M^n dado na Definição 2.7. Assim,

$$\frac{\tau}{H}\, l_v = -\frac{\tau^2}{nH^2}\, |A|^2 = -\frac{\tau^2}{nH^2}\, |\Phi|^2 - \frac{\tau^2}{nH^2} nH^2 = -\frac{\tau^2}{nH^2}\, |\Phi|^2 - \tau^2.$$

Diante disso, a função altura l_v satisfaz $|l_v| \geq \beta$, para alguma constante positiva β. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que l_v é uma função estritamente positiva ao longo de M^n.

Afirmamos que a função altura l_v é limitada superiormente. De fato, como a curvatura média H é constante e $v^\top = \nabla l_v$ (vide o primeiro item da Propoisição 3.14), obtemos, de (4.2), que

$$v^\top(|A|^2) = -\frac{nH}{\tau} v^\top(l_v) = -\frac{nH}{\tau} \langle \nabla l_v, v^\top \rangle = -\frac{nH}{\tau} \langle \nabla l_v, \nabla l_v \rangle = -\frac{nH}{\tau} |\nabla l_v|^2. \quad (4.3)$$

Agora, escolhemos um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M^n$ que seja geodésico em algum ponto $p \in \mathcal{U}$. Observemos que, sendo f_v constante em M^n, da segunda equação do item (a) da Propoisição 3.14, temos $A(v^\top) = -\nabla f_v = 0$. Logo, a equação de Codazzi (2.16) nos dá

$$\begin{aligned}
v^\top\left(|A|^2\right) &= \sum_{i=1}^n v^\top(\langle A(E_i), A(E_i)\rangle) \;=\; 2\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{v^\top} A(E_i), A(E_i)\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^n \langle \nabla A(E_i, v^\top) + A(\nabla_{v^\top} E_i), A(E_i)\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^n \langle \nabla A(v^\top, E_i) + A(\nabla_{v^\top} E_i), A(E_i)\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \underbrace{A(v^\top)}_{0} - A(\nabla_{E_i} v^\top) + \underbrace{A(\nabla_{v^\top} E_i)}_{\text{zero em } p}, A(E_i)\rangle \\
&= -2\sum_{i=1}^n \langle A(\nabla_{E_i} v^\top), A(E_i)\rangle \;=\; -2\sum_{i=1}^n \langle A^2\left(\nabla_{E_i} v^\top\right), E_i\rangle),
\end{aligned} \quad (4.4)$$

onde usamos que ∇A é a derivada covariante de A definida em (2.12). Por outro lado, do estudo da equação (3.21), podemos obter que $\nabla_{E_i} v^\top = \tau A(E_i) + l_v E_i$. Logo, de (4.3) e (4.4),

$$\begin{aligned}
\frac{nH}{\tau} |\nabla l_v|^2 &= 2\sum_{i=1}^n \langle A^2\left(\nabla_{E_i} v^\top\right), E_i\rangle) \;=\; 2\sum_{i=1}^n \langle A^2(\tau A(E_i) + l_v E_i), E_i\rangle \\
&= 2\left(\tau \sum_{i=1}^n \langle A^3(E_i), E_i\rangle + l_v \sum_{i=1}^n \langle A^2(E_i), E_i\rangle\right) \\
&= 2\left(\tau \sum_{i=1}^n \langle A^3(E_i), E_i\rangle + l_v \sum_{i=1}^n \langle A(E_i), A(E_i)\rangle\right) \\
&= 2\left(\tau \operatorname{tr}(A^3) + l_v |A|^2\right),
\end{aligned}$$

o que implica

$$\operatorname{tr}(A^3) = \frac{nH}{2\tau^2} |\nabla l_v|^2 - \frac{l_v |A|^2}{\tau},$$

o que, por sua vez, nos garante que

$$nH\mathrm{tr}\,(A^3) = \frac{n^2H^2}{2\tau^2}\,|\nabla l_v|^2 - \frac{nH}{\tau} l_v\,|A|^2. \tag{4.5}$$

Agora, de (4.2) e (4.5), obtemos

$$nH\mathrm{tr}\,(A^3) = |A|^4 + \frac{n^2H^2}{2\tau^2}|\nabla l_v|^2. \tag{4.6}$$

Por outro lado, como H é constante e $f_v = \tau$, segue de (4.2) e do item (c) da Proposição 3.14 que

$$\begin{aligned}\Delta|A|^2 &= -\frac{nH}{\tau}\,\Delta l_v \;=\; -\frac{nH}{\tau}\,(nH\tau + nl_v) \;=\; -n^2H^2 - \frac{n^2H}{\tau}\,l_v \\ &= \; n\left(-nH^2 - \frac{nH}{\tau}\,l_v\right) \;=\; n\left(-nH^2 + |A|^2\right) \;=\; n|\Phi|^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Além disso, da fórmula tipo-Simons obtida na Proposição 3.13, temos

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = -n|A|^2 - |A|^4 + n^2H^2 + nH\mathrm{tr}\left(A^3\right) + |A|^2. \tag{4.8}$$

Assim, usando (4.7) e substituindo (4.6) em (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}|\Phi|^2 &= \frac{1}{2}\Delta|A|^2 \\ &= -n|A|^2 - |A|^4 + n^2H^2 + \left(|A|^4 + \frac{n^2H^2}{2\tau^2}\,|\nabla l_v|^2\right) + |\nabla A|^2 \\ &= -n|A|^2 + n^2H^2 + \frac{n^2H^2}{2\tau^2}\,|\nabla l_v|^2 + |\nabla A|^2, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que

$$|\Phi|^2 = \frac{nH^2}{3\tau^2}\,|\nabla l_v|^2 + \frac{2}{3n}\,|\nabla A|^2. \tag{4.9}$$

Observemos que vale a identidade

$$|\nabla l_v|^2 + \tau^2 - l_v^2 = \langle v, v\rangle, \tag{4.10}$$

pois

$$\begin{aligned}\langle \nabla l_v, \nabla l_v\rangle &= \langle v^\top, v^\top\rangle \;=\; \langle v - f_v\,N + l_v\,x, v - f_v\,N + l_v\,x\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - f_v\,\underbrace{\langle v, N\rangle}_{f_v} + l_v\,\underbrace{\langle v, x\rangle}_{l_v} - f_v\,\underbrace{\langle N, v\rangle}_{f_v} + f_v^2\,\underbrace{\langle N, N\rangle}_{1} \\ &\quad - f_v\,l_v\,\underbrace{\langle N, x\rangle}_{0} + l_v\,\underbrace{\langle x, v\rangle}_{l_v} - l_v f_v\,\underbrace{\langle x, N\rangle}_{0} + l_v^2\,\underbrace{\langle x, x\rangle}_{-1} \\ &= \langle v, v\rangle - f_v^2 + l_v^2 - f_v^2 + f_v^2 + l_v^2 - l_v^2 \;=\; \langle v, v\rangle - \tau^2 + l_v^2. \end{aligned}$$

De (4.9) e (4.10),

$$|A|^2 - nH^2 = |\Phi|^2 = \frac{nH^2}{3\tau^2}\left(\langle v, v\rangle - \tau^2 + l_v^2\right) + \frac{2}{3n}|\nabla A|^2,$$

o que, juntamente com (4.2), implica

$$\begin{aligned} -\frac{nH}{\tau}l_v &= \frac{nH^2}{3\tau^2}\left(\langle v, v\rangle - \tau^2 + l_v^2\right) + \underbrace{\frac{2}{3n}|\nabla A|^2}_{\geq 0} + nH^2 \\ &\geq \frac{nH^2}{3\tau^2}\langle v, v\rangle - \frac{nH^2}{3} + \frac{nH^2}{3\tau^2}l_v^2 + nH^2. \end{aligned}$$

Sendo l_v estritamente positiva,

$$\begin{aligned} -\frac{H}{\tau} &\geq \frac{H^2}{3\tau^2}\frac{\langle v, v\rangle}{l_v} - \frac{H^2}{3l_v} + \frac{H^2}{3\tau^2}l_v + \frac{H^2}{l_v} \\ &= \frac{H^2}{3\tau^2}\frac{\langle v, v\rangle}{l_v} + \frac{2}{3l_v}H^2 + \frac{H^2}{3\tau^2}l_v \\ &= \left(\frac{H^2}{3\tau^2}\langle v, v\rangle + \frac{2}{3}H^2\right)\frac{1}{l_v} + \frac{H^2}{3\tau^2}l_v. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora estamos em posição de provar que a função altura l_a é limitada superiormente. Suponhamos, por contradição, que exista uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k\geq 1}$ em M^n tal que $l_v(q_k) \to +\infty$ quando $k \to +\infty$. Logo, da desigualdade (4.11), podemos obter

$$\lim_k l_v(q_k) \leq -\frac{3\tau}{H},$$

o que é uma contradição. Consequentemente, l_v é limitada superiormente e, assim, concluímos nossa afirmação.

Além disso, podemos usar (4.2) para cocluir que $|A|^2$ é também limitada. Por outro lado, da equação de Gauss de M^n, dada em (2.15), temos que a curvatura de Ricci de M^n, denotada por Ric, verifica

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = -(n-1)\langle X, Y\rangle + nH\langle AX, Y\rangle - \langle AX, AY\rangle, \tag{4.12}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, pois, se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança de M^n, então, da expressão dada em (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X, Y) &= \sum_{i=1}^{n}\langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\big(- \langle X, Y\rangle\langle E_i, E_i\rangle + \langle E_i, Y\rangle\langle X, E_i\rangle \\ &\qquad + \langle AX, Y\rangle\langle A(E_i), E_i\rangle - \langle A(E_i), Y\rangle\langle AX, E_i\rangle\big) \\ &= -n\langle X, Y\rangle + \langle X, Y\rangle + \langle AX, Y\rangle \mathrm{tr}(A) - \sum_{i=1}^{n}\langle E_i, AY\rangle\langle AX, E_i\rangle \\ &= -(n-1)\langle X, Y\rangle + nH\langle AX, Y\rangle - \langle AX, AY\rangle, \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwuarz, de (4.12), temos

$$\mathrm{Ric}(X, X) \geq \left(1 - n - n|H||A| - |A|^2\right)|X|^2 \tag{4.13}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Como $|A|^2$ é limitada e H é constante, da Definição 1.29 e de (4.13), concluímos que Ric_M é limitado inferiormente. Então podemos aplicar o Lema 4.2 para obter uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k\geq 1}$ em M^n tal que

$$\lim_k |\Phi|^2(p_k) = \sup_M |\Phi|^2 \quad e \quad \limsup_k \Delta|\Phi|^2(p_k) \leq 0.$$

Como $\Delta|\Phi|^2 = n|\Phi|^2$, obtemos

$$0 \geq \limsup_k \Delta|\Phi|^2(p_k) = n \sup_k |\Phi|^2 \geq 0.$$

Logo, $\sup_M |\Phi|^2 = 0$ e, assim, $|\Phi|^2 = 0$ ao longo de M^n, o que significa, segundo a Proposição 2.8, que M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$. $\square$

Antes de apresentarmos a prova do nosso segundo resultado, citaremos uma extensão do clássico princípio de máximo de Hopf para uma variedade Riemanniana completa M^n, devido a Yau [24]. De agora em diante, $\mathcal{L}^1(M)$ representa o espaço de funções em M^n que são integráveis segundo Lebesgue.

Lema 4.4. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional completa e $u \in C^\infty(M)$. Se $\Delta u \geq 0$ (ou $\Delta u \leq 0$) em M^n e $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(M)$, então u é harmônica em M^n.*

No que se segue, de acordo com a terminologia estabelecida em [17], dizemos que a imagem da aplicação de Gauss $N(M^n)$ de uma hipersuperfície $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *está contida no fecho de um domínio delimitado por uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ determinada por algum vetor $v \in \mathbb{L}^{n+2}$* se a função ângulo $\langle N, v\rangle$ não muda de sinal em M^n.

Estamos agora em condições de estabelecer nosso segundo resultado de rigidez, o qual corresponde ao Teorema 1.2 de [4] .

Teorema 4.5. *As únicas hipersuperfícies completas com curvatura média constante imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$ tais que a curvatura escalar é limitada inferiormente e cuja aplicação de Gauss está contida no fecho de um domínio delimitado por uma hipersuperfície tipo-tempo totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ determinada por algum vetor $v \in \mathbb{L}^{n+2}$, com $v^\top$ tendo norma integrável segundo Lebesgue, são as totalmente umbílicas.*

Demonstração. Seja $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma tal hipersuperfície. Inicialmente, observamos que nossa hipótese sobre a aplicação de Gauss $N : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ nos remete ao fato de que, para algum vetor $v \in \mathbb{L}^{n+2}$, a função ângulo $f_v = \langle N, v\rangle$ não muda de sinal em M^n.

Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de M^n. Considerando a Hessiana da função altura $l_v = \langle x, v\rangle$ como uma aplicação $C^\infty(M)$-linear, do item (b) da Proposição 3.14, obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Hess}\, l_v|^2 &= \sum_{i=1}^n \langle (\mathrm{Hess}\, l_v)(E_i), (\mathrm{Hess}\, l_v)(E_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle f_v A(E_i) + l_v E_i, f_v A(E_i) + l_v E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n f_v^2 \langle A(E_i), A(E_i)\rangle + 2\sum_{i=1}^n f_v l_v \langle A(E_i), E_i\rangle + \sum_{i=1}^n l_v^2 \langle E_i, E_i\rangle \\
&= f_v^2 |A|^2 + 2 f_v l_v\, \mathrm{tr}(A) + n l_v^2 \\
&= f_v^2 \left(|\Phi|^2 + nH^2\right) + 2 f_v l_v\, nH + n l_v^2 \\
&= |\Phi|^2 f_v^2 + nH^2 f_v^2 + 2 f_v l_v\, nH + n l_v^2 \\
&= |\Phi|^2 f_v^2 + \frac{1}{n}(nHf_v + n l_v)^2 \\
&= |\Phi|^2 f_v^2 + \frac{1}{n}(\Delta l_v)^2,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde Φ é o operador sem traço de M^n e, na última igualdade, foi aplicado o item (c) da Proposição 3.14.

Além disso, como a curvatura média H de M^n é constante, temos, pelos itens (c) e (e) da Proposição 3.14,

$$\Delta(f_v + Hl_v) = -|\Phi|^2 f_v. \tag{4.15}$$

Assim, $\Delta(f_v + Hl_v)$ não muda de sinal em M^n.

Por outro lado, de (1.8) e (4.12), obtemos imediatamente que a curvatura escalar de M^n, a qual será denotada por S, satisfaz

$$\mathrm{S} = n(1-n) + n^2 H^2 - |A|^2.$$

Logo, como S é limitada inferiormente e H é constante, então $|A|$ é limitada em M^n. Assim, como $|v^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$ então, do item (a) da Proposição 3.14, temos que a norma de $\nabla(f_v + Hl_v) \in \mathfrak{X}(M)$ verifica

$$|\nabla(f_v + Hl_v)| = |-A(v^\top) + Hv^\top| \leq (|A| + |H|)|v^\top| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Consequentemente, do Lema 4.4, podemos concluir que a função $f_a + Hl_a$ é harmônica e, voltando à expressão (4.15), temos que $|\Phi|^2 f_v = 0$ em M^n.

Por outro lado, se g denota a métrica Riemanniana induzida de M^n, então, de (3.10), obtemos que a norma de Hilbert-Schmith da aplicação $\operatorname{Hess} l_v - \frac{1}{n}\Delta l_v\, g$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{Hess} l_v - \frac{1}{n}\Delta l_v\, g\right|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle (\operatorname{Hess} l_v)(E_i) - \frac{1}{n}\Delta l_v\, E_i, (\operatorname{Hess} l_v)(E_i) - \frac{1}{n}\Delta l_v\, E_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle (\operatorname{Hess} l_v)(E_i), (\operatorname{Hess} l_v)(E_i)\right\rangle \\
&\quad -\frac{2}{n}\Delta l_v \sum_{i=1}^{n}\left\langle (\operatorname{Hess} l_v)(E_i), E_i\right\rangle + \left(-\frac{1}{n}\Delta l_v\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\langle E_i, E_i\rangle \\
&= |\operatorname{Hess} l_v|^2 - \frac{2}{n}\Delta l_v \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} l_v) + n\left(-\frac{1}{n}\Delta l_v\right)^2 \\
&= |\operatorname{Hess} l_v|^2 - \frac{2}{n}(\Delta l_v)^2 + \frac{1}{n}(\Delta l_a)^2 \\
&= |\operatorname{Hess} l_v|^2 - \frac{1}{n}(\Delta l_v)^2, \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

onde foi considerado um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em uma vizinhança de M^n.

Agora, como $|\Phi|^2 f_v = 0$ ao longo de M^n, podemos juntar (4.14) e (4.16) para concluir que

$$\operatorname{Hess} l_v = \frac{1}{n}(\Delta l_v)\, g.$$

Logo, de (4.1), segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\nabla l_v}(\langle Y, Z\rangle) &= \nabla l_v(\langle Y, Z\rangle) - \langle [\nabla l_v, Y], Z\rangle - \langle Y, [\nabla l_v, Z]\rangle \\
&= \langle \nabla_{\nabla l_v} Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{\nabla l_v} Z\rangle - \langle \nabla_{\nabla l_v} Y, Z\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_Y \nabla l_v, Z\rangle - \langle Y, \nabla_{\nabla l_v} Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z \nabla l_v\rangle \\
&= \langle \nabla_Y \nabla l_v, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z \nabla l_v\rangle \\
&= (\operatorname{Hess} l_v)(Y, Z) + (\operatorname{Hess} l_v)(Z, Y) \;=\; \frac{2}{n}(\Delta l_v)\langle Y, Z\rangle,
\end{aligned}$$

para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, da primeira equação do item (a) da Proposição 3.14. concluímos que $\nabla l_v = v^\top$ é um campo de vetores conforme em M^n e, como v não pode ser um vetor tangente à hipersuperfície M^n, segue do Lema 4.1 que M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$. $\square$

Capítulo 5

Sobre a geometria de subvariedades imersas em $\mathbb{H}^{n+p}$

O objetivo deste capítulo é estudar a geometria das subvariedades n-dimensionais completas com vetor curvatura média paralelo não-nulo imersas no espaço hiperbólico $(n+p)$-dimensional $\mathbb{H}^{n+p}$, que estamos considerando como sendo uma quádrica do espaço de Lorentz-Minkowski $(n+p+1)$-dimensional $\mathbb{L}^{n+p+1}$.

Antes disso, precisamos estabelecer algumas notações e certos fatos básicos a respeito da teoria de subvariedades, os quais podem ser encontrados em [12] (veja também [13] e [21]).

Ao longo deste capítulo, consideraremos uma imersão $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+p} \subset \mathbb{L}^{n+p+1}$ de uma variedade Riemanniana M^n no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+p}$. As conexões de Levi-Chivita de $\mathbb{L}^{n+p+1}$, $\mathbb{H}^{n+p}$ e M^n serão denotadas, respectivamente, por ∇°, $\overline{\nabla}$ e ∇; enquanto que $\nabla^{\perp}$ representará a *conexão normal* de M^n em $\mathbb{H}^{n+p}$, a qual é definida por

$$\begin{array}{rccl} \nabla^{\perp}: & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)^{\perp} & \to & \mathfrak{X}(M)^{\perp} \\ & (X,\xi) & \mapsto & \nabla^{\perp}_X\xi \;=\; \left(\overline{\nabla}_X\xi\right)^{\perp}, \end{array}$$

onde $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ denota o conjunto de campos de vetores de $\mathbb{H}^{n+p}$ que são ortogonais aos campos de vetores definidos em M^n.

Sejam $II : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ a *segunda forma fundamental* de M^n em $\mathbb{H}^{n+p}$ e $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o *operador de forma* associado a um certo $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$. Observemos que, para cada $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, A_ξ é um endomorfismo auto-adjunto em cada espaço tangente T_xM, $x \in M^n$. Além disso, A_ξ e II estão relacionados por

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle II(X,Y), \xi\rangle, \tag{5.1}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Recordamos que a fórmula de Gauss de $\mathbb{H}^{n+p}$ em $\mathbb{L}^{n+p+1}$ é dada por

$$\nabla^\circ_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \langle X, Y\rangle x, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+p}), \tag{5.2}$$

onde x denota o vetor posição de $\mathbb{L}^{n+p+1}$. Por sua vez, a *fómula de Gauss* da imersão $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+p}$ é dada por

$$\overline{\nabla}_x Y = \nabla_X Y + II(X,Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{5.3}$$

Logo, de (5.2) e (5.3), obtemos que a fórmula de Gauss de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+p}$ pode ser escrita da forma

$$\nabla^\circ_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y) + \langle X, Y\rangle x, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{5.4}$$

Por outro lado, a *fórmula de Weingartein* de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+p}$ é dada por

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi, \tag{5.5}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Mas, como $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp \cap \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+p})$, então, de (5.2) e (5.5), obtemos que a fórmula de Weingartein de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+p}$ admite a expressão

$$\nabla^\circ_X \xi = \overline{\nabla}_X \xi + \underbrace{\langle \xi, X\rangle}_{0} x = -A_\xi(X) + \nabla^\perp_X \xi, \tag{5.6}$$

para $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Sendo $\mathbb{H}^{n+p}$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante igual a -1, o tensor curvatura R de M^n pode ser escrito, em termos da segunda forma fundamental II de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+p}$, por meio da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z, W\rangle &= \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle \\ &\quad + \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle - \langle II(X,W), II(Y,Z)\rangle,\end{aligned} \tag{5.7}$$

para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, chamada *equação de Gauss* de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+p}$. Além disso, a *equação de Codazzi* de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+p}$ é dada por

$$(\nabla_X A_\xi)(Y) = (\nabla_Y A_\xi)(X),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, onde

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X A_\xi : \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ Y & \mapsto & (\nabla_X A_\xi)(Y) \; = \; \nabla_X(A_\xi(Y)) - A_\xi(\nabla_Y X) - A_{\nabla_X^{\perp}\xi}(Y) \end{array}$$

é a *derivada covariante* de A_ξ na direção de $X \in \mathfrak{X}(M)$.

O vetor curvatura média $\mathbf{H}$ de $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+p}$ é definido por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(II). \tag{5.8}$$

Lembremos que M^n é chamada *mínima* quando $\mathbf{H} \equiv 0$. Dizemos que M^n tem *vetor curvatura média paralelo* se

$$\nabla_X^{\perp}\mathbf{H} = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Além disso, uma subvariedade M^n de $\mathbb{H}^{n+p}$ com $\mathbf{H} \neq 0$ é chamada *pseudo-umbílica* se $\mathbf{H}$ é uma *direção umbílica* para M^n, mais explicitamente, quando existe uma função não-nula $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle A_{\mathbf{H}}(X), Y\rangle = \langle II(X,Y), \mathbf{H}\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 5.1. *Com as mesmas notações estabelecidas acima,*

$$\operatorname{tr}\left(A_{\boldsymbol{H}}^2\right) \geq \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(A_{\boldsymbol{H}}\right)^2,$$

acontecendo a igualdade se, e somente se, $\boldsymbol{H}$ é uma direção umbílica para M^n.

Demonstração. Denotemos por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de $A_{\mathbf{H}}$. Consideremos os seguintes vetores de $\mathbb{R}^{n^2}$:

$$u = (\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n \text{ vezes}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{n \text{ vezes}}, \underbrace{\lambda_n, \ldots, \lambda_n}_{n \text{ vezes}})$$

e

$$v = (\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n}_{n \text{ vezes}}).$$

Temos

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \lambda_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \lambda_2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \cdots + \lambda_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \\ &= \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right)\operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right) = \operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}^2\right). \end{aligned}$$

Além disso,

$$|u|^2 = n\lambda_1^2 + n\lambda_2^2 + \cdots + n\lambda_n^2 = n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = n\mathrm{tr}\left(A_{\mathbf{H}}^2\right)$$

e

$$|v|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}_{n \text{ vezes}} = n\mathrm{tr}\left(A_{\mathbf{H}}^2\right).$$

Logo, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\mathrm{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right)^2 = \langle u, v\rangle \leq |u||v| = |u|^2 = n\mathrm{tr}\left(A_{\mathbf{H}}^2\right)$$

ou, equivalentemente, $\mathrm{tr}\left(A_{\mathbf{H}}^2\right) \geq \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right)^2$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores u e v são linearmente dependentes, o que equivale a $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$. Neste caso, $A_{\mathbf{H}} = \lambda \mathrm{Id}$ e, portanto, $\mathbf{H}$ é uma direção umbílica para M^n. $\square$

Antes de apresentar a principal ferramenta analítica (o Lema 5.3, a seguir) a ser usada na demonstração do resultado central deste capítulo, enunciaremos uma consequência do conhecido Teorema de Stokes: o Teorema da Divergência para o caso em que a variedade Riemanniana M^n é fechada (Teorema 5.2), que será útil na demonstração do Lema 5.3. Aos leitores que não estiverem familiarizados com os conceitos de formas diferenciáveis e de integração sobre variedades diferenciáveis, recomendamos a leitura de [25].

Teorema 5.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana orientável fechada e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo suave definido em M^n, então*

$$\int_M \mathrm{div}(X)dM = 0,$$

onde dM denota o elemento volume de M^n.

No que segue, como foi estabelecido anteriormente, $\mathcal{L}^1(M)$ representa o espaço de funções em uma variedade Riemanniana M^n que são integráveis segundo Lebesgue.

Lema 5.3. *Seja X um campo vetorial suave em uma variedade Riemanniana n-dimensional completa, orientada e não compacta, M^n, tal que* $\mathrm{div}(X)$ *não muda de sinal em M^n. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então* $\mathrm{div}(X) = 0$.

O Lema 5.3 desempenha um papel central na demontração do resultado principal deste capítulo. Por este motivo, apresentaremos sua demonstração, devida a Caminha [9]. Este resultado pode ser considerado como uma extensão do seguinte princípio de máximo de Hopf para variedades riemannianas completas, devido a Yau [24].

Lema 5.4. *Seja M^n uma variedade Riemanniana, orientada completa e não-compacta. Se $u \in \mathcal{C}^2(M)$ é uma função subharmônica tal que $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(M)$ então u é harmônica.*

Na mencionada extensão, ∇u é substituído por um campo vetorial suave X com norma integrável. O Lema 5.4, por sua vez, é uma aplicação de uma versão do Teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas e não-compactas, enunciado a seguir, e também devido a Yau [24].

Lema 5.5. *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada completa e não-compacta e seja ω uma $(n-1)$-forma diferencial definida em M^n tal que $\int_M |\omega| < \infty$. Então existe uma sequência de domínios $B_i \subset B_{i+1}$ tais que $M^n = \bigcup_i B_i$ e*

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Neste sentido, o Lema 5.3 é uma consequência adequada de um resultado de Yau [24] e pode ser considerado como uma extensão do princípio de máximo de Hopf para variedades riemannianas completas. Passemos à sua demonstração.

Demonstração. Se M^n é fechada, o resultado segue do Lema 5.2. Mostraremos então o caso em que M^n é completa. Uma vez que $\mathrm{div}X$ não muda de sinal, suponhamos, sem perda da generalidade que $\mathrm{div}X \geq 0$. Consideremos ω, uma $(n-1)$-forma suave definida sobre M^n dada por $\omega = i_X(dM)$, onde $i_X(dM)$ denota a contração da n-forma dM na direção do campo vetorial X.

Afirmação: $d\omega = (\mathrm{div}X)dM$.

De fato, seja $p \in M^n$ um ponto fixo e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal e geodésico em p. Neste referencial, podemos escrever $X = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, onde $f_i = \langle X, e_i\rangle$. Sejam ω_i, $i = 1, \ldots, n$, formas diferenciais de grau um definidas em uma vizinhança de p por $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$. Um cálculo simples e direto nos permite verificar que o elemento de volume de M^n é escrito como segue

$$dM = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

Pondo $\theta_i = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n$, é possível escrever

$$i_X(dM) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \theta_i. \tag{5.9}$$

Tomando a derivada em (5.9), decorre que

$$d\omega = d(i_X(dM)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i \tag{5.10}$$

Sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de T_pM, temos que $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ é uma base para o espaço das 1-formas, então

$$df_i = \sum_{j=1}^{n} df_i(e_j)\omega_j.$$

Mas considerando que $\omega_i \wedge \omega_i = 0$, vem

$$\begin{aligned}
(-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i &= (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=1}^{n} df_i(e_j)\omega_j \right) \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\
&= (-1)^{i+1} df_i(e_i)\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \qquad (5.11) \\
&= df_i(e_i)\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_n.
\end{aligned}$$

Desde que $df_i(e_i) = e_i(f_i)$, de (5.11) obtemos

$$(-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i = e_i(f_i) dM. \tag{5.12}$$

Logo das igualdades (5.10) e (5.12), temos

$$d\omega = d(i_X(dM)) = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i(f_i) \right) dM + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i$$

Sendo o referencial geodésico, quando avaliamos em p, temos que $d\theta_i = 0$, pois

$$\begin{aligned}
d\omega_k(e_i, e_j) &= e_i\omega_k(e_j) - e_j\omega_k(e_i) - \omega_k([e_i, e_j]) \\
&= \omega_k(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i),
\end{aligned}$$

e além disso, $e_i(f_i) = e_i\langle X, e_i\rangle = \langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle$.

Portanto,

$$d\omega(p) = d(i_X(dM))(p) = \left(\sum_j \langle \nabla_{e_j} X, e_j\rangle(p) \right) dM = \mathrm{div}X(p) dM,$$

uma vez que o ponto p foi escolhido arbitrariamente, temos mostrado o afirmado.

Por outro lado,

$$|\omega|^2 = |i_X(dM)|^2 = \sum_j \langle X, e_j\rangle^2 = |X|^2.$$

Assim, estamos em condições de usar o Lema 5.4 para garantir a existência de uma sequência de domínios $B_i \subset B_{i+1}$ tais que $M^n = \bigcup_i B_i$ e

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B_i} d\omega = \lim_{i\to\infty} \int_{B_i} (\mathrm{div}X) dM = 0.$$

Sendo $\mathrm{div}X \geq 0$, devemos ter $\mathrm{div}X = 0$, que é o resultado desejado. $\square$

No próximo lema apresentaremos um resultado de B.Y. Chen [10], o qual nos fornece condições para que uma subvariedade pseudo-umbílica seja mínima. Para isso, lembremos que uma *subvariedade esférica* de $\mathbb{H}^{n+p}$ é dada pela interseção de $\mathbb{H}^{n+p}$ e um subespaço afim $\Pi \subset \mathbb{L}^{n+p+1}$. Tal subvariedade será *totalmente geodésica* se Π passa pela origem de $\mathbb{L}^{n+p+1}$. Além disso, as hipersuperfícies esféricas de $\mathbb{H}^{n+p}$ são chamadas de *hiperesferas*, as hipersuperfícies totalmente geodésicas de $\mathbb{H}^{n+p}$ são chamadas de *grandes hiperesferas* e, por sua vez, as hipersuperfícies esféricas de $\mathbb{H}^{n+p}$ que não são totalmente geodésicas são chamadas de *pequenas hiperesferas*.

Lema 5.6. *Seja M^n uma subvariedade pseudo-umbílica imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+p}$. Se M^n possui vetor curvatura média paralelo não-nulo, então M^n é uma subvariedade mínima de uma pequena hiperesfera de $\mathbb{H}^{n+p}$.*

Demonstração. Seja M^n uma subvariedade pseudo-umbílica com vetor curvatura média paralelo não nulo. Então, $H = |\mathbf{H}|$ é uma constante não nula. Sendo $\mathbf{H}$ paralelo, o campo unitário ξ na direção de $\mathbf{H}$ também o é, ou seja,$\nabla^{\perp}_X\xi = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Consideremos o campo vetorial

$$Y(p) = x(p) + \frac{1}{H}\xi_p,$$

onde x é o vetor posição de M^m em $\mathbb{H}^{n+p}$. Seja X um vetor tangente a M^n em $\mathbb{H}^{n+p}$. Temos

$$\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X x + \overline{\nabla}_X \frac{1}{H}\xi = X + \underbrace{X\left(\frac{1}{H}\right)}_{0}\xi + \frac{1}{H}\left(\underbrace{\nabla^{\perp}_X\xi}_{0} - A_\xi X\right) = X - \frac{1}{H}A_\xi X.$$

Como M é pseudo-umbílica,temos $A_\xi = H\mathrm{Id}$. Assim, Y é constante. Isto mostra que M está contida em uma hiperesfera S de $\mathbb{H}^{n+p}$, com centro $Y = C$ e raio $\frac{1}{H}$. Agora, como o vetor curvatura média $\mathbf{H}$ de M^n em $\mathbb{H}^{n+p}$ é paralelo a ξ, e ξ é paralelo ao raio $x - C$, segue que $\mathbf{H}$ é sempre perpendicular a S. Assim, M é minimal na hiperesfera S. $\square$

Por fim, estamos em condições de enunciar e demostrar o último dos resulados principais desta dissertação, o qual corresponde ao Teorema 1 de [14]. Para atingir esse objetivo, dado um vetor $a \in \mathbb{L}^{n+p+1} \setminus \{0\}$, $a^\top \in \mathfrak{X}(M)$ e $a^N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ denotarão as componentes tangencial e normal de a com respeito a uma subvariedade imersa $M^n \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+p}$, respectivamente.

Teorema 5.7. *Seja M^n uma variedade completa imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+p} \subset \mathbb{L}^{n+p+1}$ com vetor curvatura média paralelo não-nulo e curvatura escalar normalizada* *limitada inferiormente. Suponha que existe um vetor fixo* $a \in \mathbb{L}^{n+p+1} \setminus \{0\}$ *tal que* $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$, a^N *não se anula em* M^n *e* a^N *é colinear com* $\mathbf{H}$. *Então,* M^n *é pseudo-umbílica e, em particular,* M^n *é uma subvariedade mínima de uma pequena hiperesfera de* $\mathbb{H}^{n+p}$.

Demonstração. Inicialmente, afirmamos que a norma da segunda forma fundamental II de M^n em $\mathbb{H}^{n+p}$ satisfaz

$$|II|^2 = \sum_{i,j} |II(E_i, E_j)|^2 = n^2\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle - n(n-1)(\mathcal{S}+1), \tag{5.13}$$

onde $\mathcal{S}$ denota a curvatura escalar normalizada de M^n, a qual é dada em (1.9).

De fato, se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal definido em uma vizinhança de M^n, então, da equação de Gauss (5.7), obtemos que a curvatura de Ricci de M^n, denotada por Ric e estabelecida em (1.7), verifica

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)X, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(\langle E_i, X\rangle^2 - \langle X, X\rangle\langle E_i, E_i\rangle \\
&\qquad + \langle II(X,X), II(E_i,E_i)\rangle - \langle II(X,E_i), II(X,E_i)\rangle\big) \\
&= \langle X, X\rangle - n\langle X, X\rangle + \langle II(X,X), \mathrm{tr}(II)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle II(X,E_i), II(X,E_i)\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, considerando $X = E_j$, temos

$$\sum_{i=1}^{n}\langle II(E_j,E_i), II(E_j,E_i)\rangle = (1-n)\langle E_j, E_j\rangle + n\langle II(E_j,E_j)\mathbf{H}) - \mathrm{Ric}(E_j,E_j).$$

Somando em $j \in \{1, \ldots, n\}$ e usando as expressões dadas em (3.11) e (5.8),

$$\begin{aligned}
|II|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\langle II,(E_i,E_j), II(E_i,E_j)\rangle &= -(n-1)n + n\langle \mathrm{tr}(II), \mathbf{H}\rangle) - \sum_{j}^{n}\mathrm{Ric}(E_j,E_j). \\
&= -n(n-1) + n^2\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle - n(n-1)\mathcal{S},
\end{aligned}$$

o que mostra (5.13).

Por outro lado, como M^n possui vetor curvatura média $\mathbf{H}$ paralelo, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$X(\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle) = 2\langle \underbrace{\nabla^\perp_X \mathbf{H}}_{0}, \mathbf{H}\rangle = 0,$$

o que nos implica que $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle$ é constante em M^n. Consequentemente, como também estamos supondo que M^n tem curvatura escalar normalizada $\mathcal{S}$ limitada inferiormente, de (5.13), podemos concluir que II é limitada em M^n. Isso, por sua vez, nos garante, por (5.1), que A_ξ também é limitada em M^n, qualquer que seja $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Observemos agora que, ao longo de M^n, o vetor $a \in \mathbb{L}^{n+p+1} \setminus \{0\}$ admite a expressão

$$a = a^\top + a^N - \langle a, x \rangle x, \tag{5.14}$$

onde x denota o vetor posição de $\mathbb{L}^{n+p+1}$. Tomando a derivada covariante em (5.14), das fórmulas de Gauss (5.4) e de Weingarten (5.6), obtemos, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, que

$$\begin{aligned}
0 = \nabla^\circ_X a \;=\; & \nabla^\circ_X \left(a^\top + a^N - \langle a, x \rangle x\right) \\
= \; & \nabla^\circ_X (a^\top) + \nabla^\circ_X (a^N) - \nabla^\circ_X (\langle a, x \rangle x) \\
= \; & \nabla_X a^\top + II(X, a^\top) + \langle X, a^\top \rangle x - A_{a^N}(X) + \nabla^\perp_X (a_{a^N}) \\
& - X\left(\langle a, x \rangle\right) x - \langle a, x \rangle \underbrace{\nabla^\circ_X x}_{X} \\
= \; & \nabla_X a^\top + II(Z, a^\top) + \langle X, a^\top \rangle x - A_{a^N}(X) + \nabla^\perp_x (a^N) \\
& - \langle \underbrace{\nabla^\circ_X a}_{0}, x \rangle x - \langle a, \underbrace{\nabla^\circ_X x}_{X} \rangle x - \langle a, x \rangle X \\
= \; & \nabla_X a^\top + II(X, a^\top) - A_{a^N}(X) + \nabla^\perp_X (a^N) - \langle a, X \rangle x,
\end{aligned}$$

o que pode ser escrito da forma

$$\nabla_X a^\top - A_{a^N}(X) - \langle a, x \rangle X = -\nabla^\perp_X (a^N) - II(X, a^\top).$$

Mas isso só é verdade quando

$$\nabla_X a^\top = A_{a^N}(X) + \langle a, x \rangle X \tag{5.15}$$

e

$$\nabla^\perp_X (a^N) = -II(X, a^\top), \tag{5.16}$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$.

No que segue, denotemos por $\operatorname{div}(X)$ a divergência em M^n de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, estabelecida na Definição 1.11.

Seja $\{E_1, \ldots, E_n, \xi_1, \ldots, \xi_p\}$ um referencial ortonormal adaptado de M^n em $\mathbb{H}^{n+p}$, definido em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M^n$, mais precisamente, esse referencial é tal que $E_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $\xi_j \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})^\perp$ para $j \in \{1, \ldots, p\}$. Logo, de (5.15), (5.5) e (5.8), obtemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(a^\top) &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i} a^\top, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle A_{a^N}(E_i), E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle a, x\rangle\langle E_i, E_i\rangle \\
&= \operatorname{tr}(A_{a^N}) - n\langle a, x\rangle \;=\; \operatorname{tr}\left(A_{\sum_{j=1}^{p}\langle a^N, \xi_j\rangle \xi_j}\right) + n\langle a, x\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{p}\langle a^N, \xi_j\rangle \operatorname{tr}\left(A_{\xi_j}\right) + n\langle a, x\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\langle a^N, \xi_j\rangle\langle A_\xi(E_i), E_i\rangle + n\langle a, x\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\langle a^N, \xi_j\rangle\langle II(E_i, E_i), \xi_j\rangle + n\langle a, x\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{p}\langle a^N, \xi_j\rangle\left\langle \sum_{i=1}^{n} II(E_i, E_i), \xi_j\right\rangle + n\langle a, x\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle a^N, \xi_j\rangle\langle \operatorname{tr}(II), \xi_j\rangle + n\langle a, x\rangle \\
&= n\sum_{j=1}^{n}\langle a^N, \xi_j\rangle\langle \mathbf{H}, \xi_j\rangle + n\langle a, x\rangle \\
&= n\left\langle \mathbf{H}, \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\langle a^N, \xi_j\rangle \xi_j}_{a^N}\right\rangle + n\langle a, x\rangle \\
&= n\langle \mathbf{H}, a\rangle + n\langle a, x\rangle. \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

Além disso, da análise realizada acima para obter a expressão (5.17), podemos observar que

$$\operatorname{tr}(A_\xi) = n\langle \mathbf{H}, \xi\rangle, \;\; \forall \xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp. \qquad (5.18)$$

Por outro lado, de (5), podemos obter

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\nabla_{a^\top}A_\xi) &= \sum_{i=1}^{n}\Big\langle(\nabla_{a^\top}A_\xi)(E_i),E_i\Big\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big\langle\nabla_{a^\top}(A_\xi(E_i))-A_\xi(\nabla_{a^\top}E_i)-A_{\nabla^\perp_{a^\top}\xi}(E_i),E_i\Big\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{a^\top}(A_\xi(E_i)),E_i\rangle\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\langle A_\xi(\nabla_{a^\top}E_i),E_i\rangle-\sum_{i=1}^{n}\langle A_{\nabla^\perp_{a^\top}\xi}(E_i),E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{a^\top}(A_\xi(E_i)),E_i\rangle\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{a^\top}E_i,A_\xi(E_i)\rangle+\operatorname{tr}(A_{\nabla^\perp_{a^\top}\xi})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{a^\top}(A_\xi(E_i)),E_i\rangle\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{a^\top}E_i,A_\xi(E_i)\rangle+n\langle\mathbf{H},\nabla^\perp_{a^\top}\xi\rangle,
\end{aligned}\tag{5.19}$$

onde, na última igualdade, usamos (5.18). Logo, considerando (em adição) que $\{E_1,\ldots,E_n\}$ seja tal que $A_\xi(E_i)=\lambda_i^\xi E_i$, para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$, em (5.19), temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\nabla_{a^\top}A_\xi) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{a^\top}(\lambda_i^\xi E_i),E_i\rangle-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^\xi\underbrace{\langle\nabla_{a^\top}E_i,E_i\rangle}_{0}+n\langle\mathbf{H},\nabla^\perp_{a^\top}\xi\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}a^\top(\lambda_i^\xi)\langle E_i,E_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^\xi\underbrace{\langle\nabla_{a^\top}E_i,E_i\rangle}_{0}\\
&\quad -n\langle\nabla^\perp_{a^\top}\mathbf{H},\xi\rangle+a^\top(\underbrace{n\langle\mathbf{H},\xi\rangle}_{\operatorname{tr}A_\xi})\\
&= \sum_{i=1}^{n}a^\top(\lambda_i^\xi)-n\langle\nabla^\perp_{a^\top}\mathbf{H},\xi\rangle-a^\top\left(\sum_{i=1}^{n}\langle A_\xi(E_i),E_i\rangle\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}a^\top(\lambda_i^\xi)-n\langle\nabla^\perp_{a^\top}\mathbf{H},\xi\rangle-\sum_{i=1}^{n}a^\top\Big(\lambda_i^\xi\langle E_i,E_i\rangle\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}a^\top(\lambda_i^\xi)-n\langle\nabla^\perp_{a^\top}\mathbf{H},\xi\rangle-\sum_{i=1}^{n}a^\top\Big(\lambda_i^\xi\Big)\\
&= -n\langle\nabla^\perp_{a^\top}\mathbf{H},\xi\rangle,
\end{aligned}\tag{5.20}$$

onde, mais uma vez, usamos (5.18) na terceira igualdade.

Agora, utilizando a equação de Codazzi (5.4) e as expressões dadas em (5.15) e (5.20), podemos obter

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(A_\xi(a^\top)\right) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\left(A_\xi(a^\top)\right), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \left(\nabla_{E_i} A_\xi\right)\left(a^\top\right) + A_\xi\left(\nabla_{E_i} a^\top\right) + A_{\nabla^\perp_{E_i}\xi}\left(a^\top\right), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \left(\nabla_{a^\top} A_\xi\right)(E_i), E_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle A_\xi\left(\nabla_{E_i} a^\top\right), E_i\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \langle A_{\nabla^\perp_{E_i}\xi}\left(a^\top\right), E_i\rangle \\
&= \operatorname{tr}\left(\nabla_{a^\top} A_\xi\right) + \sum_{i=1}^n \langle \left(A_\xi \circ A_{a^N}\right)(E_i), E_i\rangle \\
&\quad + \langle a, x\rangle \sum_{i=1}^n \langle A_\xi(E_i), E_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle II\left(a^\top, E_i\right), \nabla^\perp_{E_i}\xi\rangle \\
&= n\langle \nabla^\perp_{a^\top}\mathbf{H}, \xi\rangle + \operatorname{tr}\left(A_\xi \circ A_{a^N}\right) \\
&\quad + \langle a, x\rangle \operatorname{tr}\left(A_\xi\right) + \sum_{i=1}^n \langle II\left(a^\top, E_i\right), \nabla^\perp_{E_i}, \xi\rangle. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Considerando $\xi = \mathbf{H}$ em (5.21) e usando, novamente, que M^n possui vetor curvatura média paralelo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(A_{\mathbf{H}}\left(a^\top\right)\right) &= n\langle \underbrace{\nabla^\perp_{a^\top}\mathbf{H}}_{0}, \mathbf{H}\rangle + \operatorname{tr}\left(A_{a^N} \circ A_{\mathbf{H}}\right) \\
&\quad + \langle a, x\rangle \operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right) + \sum_{i=1}^n \langle II\left(a^\top, E_i\right), \underbrace{\nabla^\perp_{E_i}\mathbf{H}}_{0}\rangle \\
&= \operatorname{tr}\left(A_{a^N} \circ A_{\mathbf{H}}\right)_\langle a, x\rangle \operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right). \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

De (5.17) e (5.18) podemos destacar que

$$\langle a, x\rangle = \frac{1}{n}\operatorname{div}\left(a^\top\right) - \langle a, \mathbf{H}\rangle = \frac{1}{n}\operatorname{div}\left(a^\top\right) - \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(A_{a^N}\right). \qquad (5.23)$$

Assim, substituindo (5.23) em (5.22),

$$\operatorname{div}\left(A_{\mathbf{H}}\left(a^\top\right)\right) = \operatorname{tr}\left(A_{a^N} \circ A_{\mathbf{H}}\right) + \frac{1}{n}\operatorname{div}\left(a^\top\right)\operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right) - \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right)\operatorname{tr}\left(A_{a^N}\right). \qquad (5.24)$$

Observemos também que

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right) a^\top\right) = \operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right)\operatorname{div}\left(a^\top\right), \qquad (5.25)$$

pois, usando mais uma vez (5.18), temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})\, a^{\top}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\left(\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})\, a^{\top}\right), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\left(\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})\right)\langle a^{\top}, E_i\rangle + \operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}}) \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i} a^{\top}, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\left(n\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle\right)\langle a^{\top}, E_i\rangle + \operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}}) \operatorname{div}\left(a^{\top}\right) \\
&= 2n \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle \nabla^{\perp}_{E_i}\mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle}_{0}\langle a^{\top}, E_i\rangle + \operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}}) \operatorname{div}\left(a^{\top}\right).
\end{aligned}$$

Agora, consideremos o campo de vetores

$$X = \left(A_{\mathbf{H}} - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})\operatorname{Id}\right)\left(a^{\top}\right) \in \mathfrak{X}(M),$$

onde Id denota o operador identidade em $\mathfrak{X}(M)$. Logo, das equações (5.24) e (5.25),

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \operatorname{div}\left(A_{\mathbf{H}}(a^{\top})\right) - \frac{1}{n}\operatorname{div}\left(\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})\, a^{\top}\right) \\
&= \operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_{\mathbf{H}}) + \operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})\frac{1}{n}\operatorname{div}\left(a^{\top}\right) \\
&\quad -\frac{1}{n}\operatorname{tr}(A_{a^N})\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}}) - \operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})\frac{1}{n}\operatorname{div}\left(a^{\top}\right) \\
&= \operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_{\mathbf{H}}) - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A_{a^N})\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}}).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Como estamos supondo que a^N não é nula em M^n e a^N é colinear com $\mathbf{H}$, então existe $\beta \in C^{\infty}(M)$ com sinal estrito em M^n tal que $a^N = \beta\mathbf{H}$. Logo, de (5.26),

$$\operatorname{div} X = \beta\left\{\operatorname{tr}\left(A^2_{\mathbf{H}}\right) - \frac{1}{n\operatorname{tr}}(A_{\mathbf{H}})^2\right\}. \tag{5.27}$$

Sabemos, da Proposição (5.1), que $\operatorname{tr}(A^2_{\mathbf{H}}) \geq \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})^2$, com igualdade se, e somente se, $\mathbf{H}$ é uma direção umbílica para M^n. Segue então de (5.27) que $\operatorname{div}X$ nâo muda de sinal ao longo de M^n. Além disso, como $|a^{\top}| \in \mathcal{L}^1(M)$, $|A_{\mathbf{H}}|$ é limitada (uma vez que II é limitada) e $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle$ é contante em M^n, então, de (5.18), temos

$$\begin{aligned}
|X| = \left|\left(A_{\mathbf{H}} - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})\operatorname{Id}\right)\left(a^{\top}\right)\right| &= \left|\left(A_{\mathbf{H}} - \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle \operatorname{Id}\right)\left(a^{\top}\right)\right| \\
\leq (\,|A_{\mathbf{H}}| + |\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle|\,)\, |a^{\top}| \in \mathcal{L}^1(M).
\end{aligned}$$

Assim, o Lema 5.3 nos garante que $\operatorname{div}X = 0$. Logo, voltando a expressão (5.27), obtemos que

$$\beta\left\{\operatorname{tr}\left(A^2_{\mathbf{H}}\right) - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A_{\mathbf{H}})^2\right\} = 0$$

em M^n, mas, como β tem sinal estrito em M^n, devemos ter

$$\operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}^2\right) - \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(A_{\mathbf{H}}\right)^2 = 0.$$

Portanto, a Proposição 5.1 nos garante que $\mathbf{H}$ é uma direção umbílica para M^n. Por último, do Lema 5.6, concluímos que M^n é também uma subvariedade mínima de uma pequena hiperesfera de $\mathbb{H}^{n+p}$. □

Observação 5.1. *Quando $p = 1$, as noções de vetor curvatura média paralelo e de pseudo-umbílica coincidem, respectivamente, com os conceitos de curvatura média constante e de totalmente umbílica. Além disso, observamos também que a hipótese de que a^N não se anula em M^n equivale à função ângulo $\langle N, a\rangle$ ter um sinal estrito sobre M^n, onde N representa a aplicação de Gauss de $M^n \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$. Consequentemente, o Teorema 5.7 pode ser considerado como uma extensão do Teorema 4.5.*

Bibliografia

[1] J.A. Aledo, *Hipersuperficies Espaciales Completas de Curvatura Media Constante en el Espacio de De Sitter*, Tesina de Licenciatura, Universidad De Murcia (1998).

[2] L.J. Alías and A. Romero, *Integral formulas for compact spacelike n-submanifolds in de Sitter spaces. Applications to the parallel mean curvature vector case.* Manuscripta Math. **87** (1995), 405-416.

[3] C.P. Aquino and H.F. de Lima, *On the Gauss map of complete CMC hypersurfaces in the hyperbolic space*, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), no. 2, 862-869.

[4] H.F de Lima, C.P. Aquino and A.A. Barros. *Complete CMC hypersurfaces in the hyperbolic space with prescribed Gauss mapping.* Proceedings of the American Mathematical Society **142** (2014), 3597-3604.

[5] J.L. Barbosa and M. do Carmo, *Stable minimal surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 581-583.

[6] S. Bernstein, *Sur les surfaces d´efinies au moyen de leur courbure moyenne ou totale* (French), Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (3) **27** (1910), 233-256.

[7] K. Bezerra, *Um Teorema de Rigidez para Hipersuperfícies Completas CMC em Variedades de Lorentz.* Dissertação de Mestrado, UFC (2009).

[8] F. R. dos Santos, *Sobre a Geometria de Imersões Riemannianas.* Tese de Doutorado, UFCG (2015)

[9] A. Caminha, *The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces*, Bull. Brazilian Math. Soc. **42** (2011), 277-300.

[10] B.Y. Chen, *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*, World Scientific, New Jersey, 1984.

[11] E. de Giorgi, *Una estensione del teorema di Bernstein* (Italian), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **19** (1965), 79-85.

[12] M. Dacjczer *Submanifolds an Isometric Imersions*, Publish or Perish, inc. Houston, (1990).

[13] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, (2008).

[14] H.F. de Lima, F. R. Santos and Marco A. L. Velásquez. *On the geometry of complete submanifolds immersed in the hyperbolic space*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **22** (2015), 707-713.

[15] D. Kim, S. Kim, Y. Kim and S. Park, *Conformal vector fields and totally umbilic hypersurfaces*, Bull. Korean Math. Soc. **39** (2002), no. 4, 671-680

[16] R. López and S. Montiel, *Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space*, Calc. Var. Partial Differential Equations **8** (1999), 177-190.

[17] S. Montiel, *Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter spaces*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 915–938.

[18] K. Nomizu and B. Smyth, *On the Gauss mapping for hypersurfaces of constant mean curvature in the sphere*, Comment. Math. Helv. **44** (1969), 484-490.

[19] K. Nomizu and B. Smyth, *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. Differential Geometry **3** (1969), 367-377.

[20] H. Omori, *H. Isometric immersions of Riemannian manifolds*. J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 205-214.

[21] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983).

[22] J. Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62-105.

[23] S.T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*. Comm. Pure Appl. Math., **28** (1975), 201-228.

[24] S.T. Yau, *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their aplications to geometry*. Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 659-670.

[25] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Text in Matematics, Springer, New York (2002)