Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Resultados clássicos da equação ∞-laplaciano

por

Oliverio Pichardo Diestra †

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CNPq.

Resultados clássicos da equação ∞-laplaciano

por

Oliverio Pichardo Diestra

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco S.B. Albuquerque - UEPB

Alânnio B. Nóbrega

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nobrega - UFCG

Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Março/2020

D564r Diestra, Oliverio Pichardo.
Resultados clássicos da equação ∞-laplaciano / Oliverio Pichardo Diestra. – Campina Grande, 2020.
137 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.
"Orientação: Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves”.
Referências.

1. Análise. 2. Equação ∞-Laplaciano. 3. Métodos Variacionais. 4. Espaços de Sobolev. 5. Soluções de Viscosidade. I. Alves, Claudianor Oliveira. II. Título.

CDU 517(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Agradecimentos

- À **Deus**, quem torna possível a realização dos eventos em minha vida. Além disso, peço à Deus que me dê forças para que meus agradecimentos não sejam apenas palavras, mas também ações.

- Ao meu orientador Dr. **Claudianor Oliveira Alves** pela paciência, dedicação, apoio moral e financeiro.

- Ao Dr. **Marco A. Lázaro Velásquez** por ser como um pai nos últimos anos.

- Aos professores **Cuti** e **Montalvo** por me dar sua amizade e sua grande experiência.

- A **Fá** e **Geisita** que foram parte da força para superar os dois primeiros semestres do mestrado e **Renan**, o terceiro semestre. Muito obrigado por ser os ombros que não me deixaram cair.

- A minha família do Brasil: "mai" Tereza Maria de Jesus, "Don" José João Filho e "irmãos": Claudiana, Geraldo e Cícero. Eles são família em tempos de exílio e Coronavírus. (*Piu, piu!*)

- A Cícero por me dar uma amizade sincera, uma que me puxa pra realidade e uma que não elogia demais.

- A Pedro Fellype por dedicar seu tempo para me ajudar nos problemas de redação da dissertação.

- Aos colegas da Pós-Graduação na UFCG: Weiller Felipe, Daniela Enéas, Geovanny Patricio, José Lucas, Lucas da Silva, Lucas Siebra, Michelle Alessandra, Wallace Ferreira, Rose Martins e Ismael Sandro. Quero também externar minha gratidão a todos que compõem o PET-Matemática.

- A todos os funcionários da UAMat-UFCG. Em particular, Andrezza Freitas, Aninha e, em especial, a Gislayne por todas as vezes que conversamos e riamos.

- Aos Professores Dr. Francisco S.B. Albuquerque e Alânnio Barbosa Nobrega por terem aceitado me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

- A CNPq pelo incentivo financeiro.

Dedicatória

A mi mamita, María Y. Diestra Quispe, y a mi papote, Walter Pichardo Huaroc.

A Rosario B. Rodas Ramírez, uno de mis motivos para mejorar y llegar a ser el esposito adecuado para ella.

A César E. Torres Ledesma, mi mentor.

Resumo

Neste trabalho de dissertação estudamos a existência e unicidade de solução de viscosidade para problemas de Dirichlet homogêneos e não homogêneos envolvendo o operador ∞-laplaciano. As principais ferramentas usadas foram: métodos variacionais e método de Perron.

Palavras chave: Métodos variacionais, Espaços de Sobolev, Soluções de viscosidade.

Abstract

In this work we study existence and uniqueness of a viscosity solution of the homogeneous and non-homogeneous Dirichlet problems involving ∞-laplacian operator. The main tools used were: variational methods and Perron's method.

Keywords: Variational methods, Sobolev spaces, Viscosity solution.

Conteúdo

Notações

- N : número natural;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: produto interno em $\mathbb{R}^N$;
- $|\cdot|$: norma em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^N$ segundo a situação;
- Um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ é denominado domínio quando é aberto e conexo;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ será sempre um domínio limitado com fronteira suave;
- $\partial\Omega$: fronteira do conjunto Ω;
- $\overline{\Omega}$: fecho do conjunto Ω;
- $|\Omega|$: medida de Lebesgue do conjunto Ω;
- $B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| < \varepsilon\}$;
- $A \subset\subset \Omega$: A está compactamente contido em Ω;
- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$;
- $u\big|_A$: restrição da função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ao subconjunto $A \subset \Omega$;
- $C^k(\Omega)$: conjunto de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas até ordem k contínuas em Ω;
- $\nabla u(x)$: gradiente da função u em x;
- $D^2u(x)$: hessiana da função u em x;

- $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$;
- $\displaystyle\fint_\Omega H dx = \frac{\int_\Omega H dx}{\int_\Omega dx}$;
- $Lip(v, K) = \inf\{L \in \mathbb{R} : |v(x) - v(y)| \leq L|x - y|,\ \forall\, x, y \in K\}$, onde v é uma função de valor real definida sobre o conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$;
- $\mathbb{S}^N$: conjunto das $N \times N$-matrizes simétricas com coeficientes reais;
- Dados $X, Y \in \mathbb{S}^N$, temos que $X \leq Y$ denota a desigualdade:

$$\langle X\xi, \xi\rangle \leq \langle Y\xi, \xi\rangle,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N;$$

- $\to$: convergência forte;
- $\rightharpoonup$: convergência fraca;
- $f(t) = o(g(t))$ quando $t \to t_0$ desde que $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$;
- $f(t) \leq o(g(t))$ quando $t \to t_0$ desde que $\displaystyle\limsup_{t\to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} \leq 0$;
- $f(t) \geq o(g(t))$ quando $t \to t_0$ desde que $\displaystyle\liminf_{t\to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} \geq 0$;
- $p \approx \infty$: p é um valor real suficientemente grande;
- q.t.p. : quase toda parte;
- $\blacksquare$: fim de uma demonstração;
- $[\cdot]$: referência bibliográfica;

Introdução

A presente dissertação tem como objetivo introduzir alguns dos resultados clássicos para equações envolvendo o operador $\infty-$laplaciano. Para isso, utilizaremos a teoria de soluções de viscosidade, que foi obtida no final do século passado e inícios deste século. Além disso, tal tipo de solução foi motivada por suas diversas aplicações, por exemplo:

- Em Engenharia de Materiais[1]: no estudo da fluência por fenômenos de torção, isto é, a deformação permanente de materiais quando estes são sujeitos a torções constantes.

- Em Macroeconomia: modelos de evolução da distribuição de renda e riqueza e seu efeito sobre os agregados macroeconômicos, que são os resultados obtidos através da mensuração da atividade econômica de um país ou região como um todo. Veja o artigo [1] publicado pelo matemático Lions, o economista Moll e outros matemáticos.

Daqui em diante, o subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave. Especificamente, vamos tratar dois problemas:

1. Mostrar existência e unicidade de um tipo de solução para o problema infinito-laplaciano, ou ∞-laplaciano, homogêneo com condições de fronteira tipo Dirichlet, isto é:

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_∞}$$

[1]Ver Kawohl [18].

onde $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função lipschitziana. Além disso, mostrar algumas propriedades e caracterizações das soluções.

2. Mostrar existência e unicidade de alguma classe de soluções para o problema infinito-laplaciano não homogêneo com condições de fronteira tipo Dirichlet, isto é:
$$\begin{cases} \Delta_\infty u = F, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\infty,F}$}$$
onde $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tal que $\inf_{\Omega} F > 0$ ou $\sup_{\Omega} F < 0$. Também, provar algumas propriedades e caracterizações das soluções.

Nos problemas citados anteriormente, Δ_∞ denota um operador diferencial definido sobre funções $w : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega)$ por:
$$\Delta_\infty w = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Em seguida, apresentamos os fatos que deram origem ao estudo da equação ∞-laplaciano e à ferramenta para estudar os problemas (P_∞) e $(P_{\infty,F})$, que como veremos é a teoria de soluções de viscosidade. Um problema clássico de análise real é estender funções lipschitzianas, ou seja:

Problema de extensão lipschitziana: Dada uma função de valor real g definida sobre um subconjunto E de um espaço métrico S tal que g é lipschitziana em E, devemos determinar uma aplicação $u : S \to \mathbb{R}$, denominada extensão lipschitziana de g, tal que

$(i)\, u$ é lipschitziana em S, $\quad (ii)\, Lip(u, S) = Lip(g, E)$, $\quad$ e $\quad (iii)\, u = g$ em E.

Em particular, consideremos $E = \partial U$ e $S = \overline{U}$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$.

Em 1933 e 1934, nos artigos [26, 29], os matemáticos McShane e Whitney mostraram que as funções:
$$\begin{aligned} \mathcal{MW}^*(g) : \overline{U} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\mathcal{MW}^*(g))(x) = \inf_{y \in \partial U} \{g(y) + Lip(g, \partial U)|x - y|\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{MW}_*(g) : \overline{U} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\mathcal{MW}^*(g))(x) = \sup_{z\in\partial U}\{g(z) - Lip(g,\partial U)|x-z|\} \end{aligned}$$

são soluções para o problema de extensão lipschitziana.

Por sua vez, em 1967, Gunnar Aronsson publicou o artigo "Extension of functions satisfying Lipschitz conditions" que deu origem ao estudo da equação ∞-laplaciana, [3]. Na Seção 1 de seu artigo, foi mostrado que se u é uma solução do problema de extensão lipschitziana, então[2]:

$$\mathcal{MW}_*(g) \leq u \leq \mathcal{MW}^*(g), \text{ em } \overline{U}.$$

Pela desigualdade anterior, as funções $\mathcal{MW}^*(g)$ e $\mathcal{MW}_*(g)$ são denominadas extensão lipschitziana maximal de g e extensão lipschitziana minimal de g, respectivamente, ou simplesmente, extensões lipschitzianas extremas.

Se as extensões lipschitzianas extremas são iguais, então o problema de extensão lipschitziana tem uma única solução, porém nem sempre acontece que $\mathcal{MW}_*(g) = \mathcal{MW}^*(g)$. Portanto, a falta de unicidade é um problema importante que os matemáticos começaram a estudar[3].

Por outro lado, as extensões maximal e minimal não satisfazem as seguintes propriedades[4]:

(1) (*comparação*) se $g_1 \leq g_2$ em ∂U, tem-se que $\mathcal{MW}_*(g_1) \leq \mathcal{MW}_*(g_2)$ e $\mathcal{MW}^*(g_1) \leq \mathcal{MW}^*(g_2)$,

(2) (*estabilidade*) dado V um subconjunto aberto de U, temos que $\mathcal{MW}_*\left(\mathcal{MW}_*(\bar{g})\big|_{\partial V}\right) = \mathcal{MW}_*(\bar{g})$ e $\mathcal{MW}^*\left(\mathcal{MW}^*(\bar{g})\big|_{\partial V}\right) = \mathcal{MW}^*(\bar{g})$, onde $\bar{g} = g\big|_V$, e

(3) (*localidade*) para cada $V \subset\subset U$, temos que $Lip(\mathcal{MW}_*(g), V) = Lip(\mathcal{MW}_*(g), \partial V)$ e $Lip(\mathcal{MW}^*(g), V) = Lip(\mathcal{MW}^*(g), \partial V)$,

Os fatos acima levam à seguinte questão: é possível encontrar uma extensão lipschitziana que tenha as propriedades de comparação, estabilidade e localidade? Além disso, fixando uma condição de fronteira, essa extensão especial poderia ser única?

[2] Ver [3, Teorema 1].
[3] Ver [28, Exemplo 1].
[4] Ver [28, pág. 5,6].

Na Seção 3 do artigo [3], Aronsson definiu a classe de funções lipschitzianas absolutamente minimizantes em U, que foi denotada por $\mathbf{AML}(U)$. Os elementos de $\mathbf{AML}(U)$ são funções contínuas de valor real u definidas em U tais que

$$Lip(u, V) = Lip(u, \partial V),\ \forall\, V \subset\subset U.$$

As funções que são elementos do conjunto $\mathbf{AML}(U)$ possuem a propriedade de ser local, ou seja, $u \in \mathbf{AML}(V)$ quando $u \in \mathbf{AML}(U)$ e $V \subset\subset U$. Porém, a propriedade das funções que pertencem a $\mathbf{AML}(U)$ não envolve condições de fronteira, é apenas uma propriedade de funções contínuas definidas em conjuntos abertos.

Apesar da última afirmação do parágrafo anterior, podemos reformular o problema de extensão lipschitziana como:

Problema modificado de extensão lipschitziana: Dada uma função lipschitziana de valor real g definida sobre ∂U, determinar uma aplicação contínua $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ tal que

$$(i)\, u \in \mathbf{AML}(U), \quad \text{e} \quad (ii)\, u = g \text{ em } \partial U.$$

As soluções do problema acima são denominadas extensões lipschitzianas absolutamente minimizantes de g. Aronsson foi o primeiro a provar um resultado de existência para o problema modificado de extensão lipschitziana e que toda solução dela também resolve o problema de extensão lipschitziana, sempre que U seja limitado[5].

Também, dados um subconjunto convexo e limitado $D \subset \mathbb{R}^N$ e uma função w que pertence a $C^1(D) \cap C(\overline{D})$, Aronsson demonstrou que:

$$Lip(w, \overline{D}) = \||\nabla w|\|_\infty,$$

portanto, o problema de minimização do funcional $Lip(\cdot, \overline{D})$ é equivalente ao problema de minimização do funcional $H(\cdot) = \||\nabla \cdot|\|_\infty$ sobre o espaço $C^1(D) \cap C(\overline{D})$. Logo, a ideia de Aronsson foi considerar o funcional $H(\cdot)$ como "limite" de uma sequência de funcionais $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre funções suficientemente suaves como

$$J_n(w) = \left(\int_D |\nabla w|^{2n} dx \right)^{\frac{1}{2n}}.$$

[5] Ver [3, Teorema 10].

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, a equação de Euler-Lagrange associado ao funcional J_n é

$$\Delta_{2n} u = 0,$$

onde u é um minimizador do funcional J_n. Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 = \Delta_{2n} u &= div(|\nabla u|^{2n-2} \nabla u) \\ &= \nabla \cdot (|\nabla u|^{2n-2} \nabla u) \\ &= \nabla(|\nabla u|^{2n-2}) \cdot \nabla u + |\nabla u|^{2n-2} \nabla \cdot \nabla u \\ &= |\nabla u|^{2n-2} \Delta u + (2n-2)|\nabla u|^{2n-4} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{|\nabla u|^2 \Delta u}{2n-2} + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{1}$$

quando $|\nabla u| \neq 0$. Fazendo $n \to \infty$ na equação (1), Aronsson derivou a equação diferencial parcial não linear[6]:

equação de Aronsson-Euler

$$\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

Além disso, notemos que se $u \in C^2(\Omega)$, o operador Δ_∞ tem as seguintes formas:

$$\Delta_\infty u = \langle D^2 u \nabla u, \nabla u \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla u, \nabla |\nabla u|^2 \rangle.$$

Posteriormente, dada Ω uma região arbitraria em $\mathbb{R}^N$, Aronsson provou que se $u \in C^2(\Omega)$, vale que u é uma extensão lipschitziana absolutamente minimizante em U se, e somente se, $\Delta_\infty u = 0$ em Ω [7].

No ano de 1968, Aronsson [4] mostrou no Teorema 12 que o problema (P_∞) com $N = 2$ possui no máximo uma solução clássica (isto é, de classe C^2), em um domínio limitado. Além disso, nos últimos teoremas de seu artigo, fixou condições para os quais o problema (P_∞) não tem solução clássica[8].

[6] Ver [3, Seção 3].
[7] Ver [3, Teorema 8].
[8] Ver [4, Teorema 13 e Teorema 14].

Depois de 15 anos, em 1983, Aronsson [5] considerou a condição de fronteira $g(x,y) = |x|^{\frac{4}{3}} - |y|^{\frac{4}{3}}$ para o problema (P_∞) com $\Omega = B(0,r)$, onde $r > 0$. Em tal artigo, Aronsson exibiu uma solução não clássica:

$$\begin{array}{rccl} u: & \overline{\Omega} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & u(x,y) = |x|^{\frac{4}{3}} - |y|^{\frac{4}{3}}. \end{array}$$

Em conclusão, quando $N > 2$, a questão da unicidade da solução, cuja existência Aronsson provou, foi um problema em aberto por 26 anos.

Os matemáticos pensaram em definir uma solução fraca para os problemas que envolvem o operador ∞-laplaciano e determinar a unicidade dela. A principal dificuldade em estabelecer uma definição para ela é a ausência de estrutura divergente no operador Δ_∞, pois o método usual para definir uma solução fraca de equações não lineares consiste de multiplicar a equação por uma função teste suave e integrar por partes, e portanto, precisa ter forma divergente.

Por outro lado, no inicio do anos 80, os matemáticos Crandall e Lions [12] definiram um novo tipo de solução para a equação de Hamilton-Jacobi, equação de primeira ordem do tipo $F(x, u, \nabla u) = 0$, que posteriormente foi estendida a uma vasta classe de equações diferenciais parciais fortemente não lineares. Em sua publicação "Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations" de 1983, eles denominaram àquelas soluções como **soluções de viscosidade**. A definição de solução de viscosidade faz uso de funções teste suaves e de um procedimento para fazer as derivadas que aparecem na equação incidirem sobre as funções teste. A origem do termo 'viscosidade' no nome das soluções de Crandall-Lions é motivado pelo método de viscosidade evanescente[9]. Além disso, Ishii [16] introduziu o Método de Perron na Teoria de Solução de Viscosidade, que é uma ferramenta poderosa para provar a existência de soluções. Jensen, Ishii, Caffarelli, Crandall, Evans, Lions, Souganidis foram desenvolvedores da Teoria de Solução de Viscosidade no caso de segunda ordem. Os principais resultados da teoria estão resumidas em [11].

No ano de 1993 foi dada a primeira prova de unicidade para o problema (P_∞) por Jensen [17]. Ele usou a Teoria de Solução de Viscosidade e a Teoria dos Espaços de Sobolev. Depois, em 2008, Lu e Wang [24] demonstraram a existência e unicidade

[9] Ver [23, Seção 3.1].

de solução de viscosidade do problema $(P_{\infty,F})$.

Esta dissertação está baseado principalmente no livro de Lindqvist [22] e organizada da seguinte forma:

Capítulo 1: Neste Capítulo, mostramos que o problema:

$$\begin{cases} \Delta_p u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_p}$$

onde $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ e $N < p < \infty$, possui uma única solução fraca denotada por u_p. Uma vez encontrada a solução para $p > N$, estudamos o comportamento da solução fraca do problema (P_p) quando $p \to \infty$, e usando o Teorema de Ascoli-Arzelá asseguramos que existe uma subsequência (u_{p_k}) de (u_p) e uma função $u_\infty \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $u_{p_k} \to u_\infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}$.

Além disso, provamos que a função u_∞ é uma solução para o problema L^∞-variacional[10] e que satisfaz uma desigualdade tipo Harnack quando é não negativa. Os resultados apresentados foram desenvolvidos por Jensen [17].

Capítulo 2: Este Capítulo é dedicado ao estudo da existência de solução de viscosidade do problema (P_∞) seguindo as ideias dadas por Jensen [17]. Primeiro garantimos que o problema:

$$\begin{cases} \Delta_p u = -\varepsilon^{p-1}, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P^+_{p,\varepsilon}$}$$

onde $\varepsilon \geq 0$, $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ e $N < p < \infty$, possuem uma única solução fraca denotada por $u_p^{(\varepsilon)}$. Aplicando o Teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma função denotada por $u_\infty^{(\varepsilon)}$ tal que é limite de alguma subsequencia de $(u_p^{(\varepsilon)})$ quando $p \to \infty$.

Em seguida, provamos que $u_\infty^{(\varepsilon)}$ é uma solução de viscosidade em Ω com $u_\infty = g$ em $\partial\Omega$ do problema:

$$\begin{cases} \max\{\varepsilon - |\nabla u|, \Delta_\infty u\} = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\infty,\max}$}$$

isto é, $\max\{\varepsilon - |\nabla u_\infty^{(\varepsilon)}|, \Delta_\infty u_\infty^{(\varepsilon)}\} = 0$ no sentido de viscosidade[11] e $u_\infty^{(\varepsilon)} = g$ em $\partial\Omega$. Em particular, se $\varepsilon = 0$, o problema $(P_{\infty,\max})$ torna-se (P_∞), e portanto, o problema

[10] Ver Teorema 1.5 desta dissertação.

[11] Ver Teorema 2.18 desta dissertação.

(P_∞) possui como solução de viscosidade em Ω, com valor de fronteira g, a função $u_\infty^{(0)} = u_\infty$. Por outro lado, de maneira semelhante, demonstra-se que existe uma solução de viscosidade para:

$$\begin{cases} \min\{|\nabla u| - \varepsilon, \Delta_\infty u\} = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_{\infty,\min}$}$$

Capítulo 3: Tendo em vista que no Capítulo 2 mostramos que o problema (P_∞) tem uma solução de viscosidade, então, neste Capítulo estudaremos algumas caracterizações e propriedades para aquelas soluções de viscosidade.

Capítulo 4: Neste Capítulo, estudamos os conceitos e resultados desenvolvidos por Crandall, Ishii & Lions [11] e também por Koike [19] que serão úteis para demonstrar a unicidade de solução de viscosidade do problema (P_∞).

Capítulo 5: Para nosso quinto capítulo, abordaremos a unicidade de solução de viscosidade do problema (P_∞).

Capítulo 6: Por fim, seguindo as ideias de Lindqvist [22, Capítulo 10] e o artigo de Lu & Wang [24, Seções 2 e 3], estudamos alguns resultados de existência e unicidade de solução de viscosidade para o problema $(P_{\infty,F})$. As principais ferramentas utilizadas são o Método de Perron e um Principio de Comparação para soluções de viscosidade.

Por último, o apêndice traz resultados importantes que foram usados ao longo desta dissertação.

Capítulo 1

Limite de soluções da equação p-laplaciano

Neste capítulo, vamos desenvolver as ideias de Jensen [17] seguindo a estrutura dada por Lindqvist [22]. Jensen provou que uma solução do problema (P_∞) pode ser aproximado a partir da solução de (P_p). Portanto, primeiro demonstraremos que o problema (P_p) possui uma única solução e depois estudaremos o comportamento dela quando $p \to \infty$.

1.1 A equação p-laplaciano

Consideremos a equação p-laplaciano com condição de fronteira tipo Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta_p u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_p}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ e $N < p < \infty$.

Aqui, entendemos por uma solução fraca de (P_p), uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0,$$

para cada $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $u = g$ em $\partial\Omega$ no sentido do traço, isto é, $u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Notemos o seguinte fato:

Proposição 1.1 *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, u satisfaz*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \le \int_\Omega |\nabla v|^p dx, \quad com\ v - u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.1}$$

se, e somente se,

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla\varphi\rangle dx = 0, \quad onde\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.2}$$

Demonstração. [(1.1)⇒(1.2)] Dado $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, fixe $v = u + \varepsilon\varphi$, onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$v - u = u + \varepsilon\varphi - u = \varepsilon\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Então, por hipótese,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \le \int_\Omega |\nabla (u + \varepsilon\varphi)|^p dx, \ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{1.3}$$

Agora, consideremos a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varepsilon &\mapsto h(\varepsilon) = \int_\Omega |\nabla (u + \varepsilon\varphi)|^p dx. \end{aligned}$$

Já que a função h atinge seu minimo em $\varepsilon = 0$, tem-se

$$h'(0) = 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla\varphi\rangle dx = 0, \ \text{ onde } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

[(1.2)⇒(1.1)] Seja $v - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pela Proposição B.6,

$$\int_\Omega |\nabla v|^p dx \ge \int_\Omega |\nabla u|^p dx + p \int_\Omega \langle\, |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla (v - u)\rangle dx. \tag{1.4}$$

Tomando $\varphi = v - u$, por hipótese, temos

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla (v - u)\rangle dx = 0, \tag{1.5}$$

pois $v - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De (1.4) e (1.5),

$$\int_\Omega |\nabla v|^p dx \ge \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \ \text{ com } v - u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

■

Pelo Teorema 1.1, observamos que para mostrar a existência de solução fraca do problema (P_p) é suficiente demonstrar a existência de um minimizador para um funcional adequado associado ao problema (P_p). Vejamos, então, a existência de tal minimizante.

Proposição 1.2 *Seja $p > N$. Se $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, então existe uma única função $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ com $u = g$ em $\partial\Omega$ que minimiza o funcional energia:*

$$\begin{array}{rcl} I_p : E & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & I_p(v) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p dx, \end{array}$$

onde $E = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \, : \, v = g \text{ em } \partial\Omega\}$.

Demonstração. Primeiro vejamos que o funcional I_p tem um minimizador. Podemos considerar

$$m = \inf_{v \in E} \int_\Omega |\nabla v|^p dx,$$

pois $\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p dx \geq 0$. Já que $g \in E$, temos que

$$0 \leq m \leq I_p(g) < \infty.$$

Além disso, existe uma sequência $(v_i) \subset E$ tal que

$$|||\nabla v_i|||^p_{L^p(\Omega)} = I_p(v_i) < m + \frac{1}{i}\,, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

pois $m = \inf\limits_{v \in E} I_p(v)$. Já que $v_i - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $i \in \mathbb{N}$, podemos aplicar o Teorema de Poincaré (veja Teorema A.11) com $w = v_i - g$. Então,

$$\begin{aligned} ||v_i - g||_{L^p(\Omega)} &\leq c|||\nabla(v_i - g)|||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq c(|||\nabla v_i|||_{L^p(\Omega)} + |||\nabla g|||_{L^p(\Omega)}) \\ &= c((I_p(v_i))^{\frac{1}{p}} + |||\nabla g|||_{L^p(\Omega)}) \\ &\overset{(1.6)}{<} c((m+1)^{\frac{1}{p}} + |||\nabla g|||_{L^p(\Omega)}). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Segue-se daí que

$$\begin{aligned} ||v_i||_{L^p(\Omega)} &= ||v_i - g + g||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq ||v_i - g||_{L^p(\Omega)} + ||g||_{L^p(\Omega)} \\ &\overset{(1.7)}{<} c((m+1)^{\frac{1}{p}} + |||\nabla g|||_{L^p(\Omega)}) + ||g||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq c(m+1)^{\frac{1}{p}} + \max\{1, c\}(|||\nabla g|||_{L^p(\Omega)} + ||g||_{L^p(\Omega)}) \\ &\leq c(m+1)^{\frac{1}{p}} + \max\{1, c\}||g||_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty. \end{aligned}$$

Logo, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$||v_i||_{L^p(\Omega)} < M, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

De (1.6) e (1.8),

$$|||\nabla v_i|||_{L^p(\Omega)} + ||v_i||_{L^p(\Omega)} < (m+1)^{\frac{1}{p}} + M, \tag{1.9}$$

ou seja, existe $\overline{M} \in \mathbb{R}$ tal que

$$||v_i||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \overline{M}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e a sequência (v_i) é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$, existe[1] $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e uma subsequência (v_k) tais que

$$v_k \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad \nabla v_k \rightharpoonup \nabla u \text{ em } (L^p(\Omega))^N. \tag{1.10}$$

Assim, $u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pois $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço fracamente fechado. Já que $p > N$, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov[2], temos que $u \in C(\overline{\Omega})$. Da análise feita, obtemos que:

$$u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad u = g \text{ em } \partial\Omega. \tag{1.11}$$

Por outro lado, de (1.10),

$$I_p(u) \leq \liminf_{k \to \infty} I_p(v_k) = m,$$

pois I_p é um funcional fracamente semicontínuo inferiormente. Logo,

$$\inf_{v \in E} I_p(v) = m \leq I_p(u) \leq m = \inf_{v \in E} I_p(v),$$

e portanto,

$$I_p(u) = \min_{v \in E} I_p(v).$$

Em conclusão, existe $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ com $u = g$ em $\partial\Omega$ tal que u é minimizador de I_p.

Para unicidade, suponha que as funções u_1 e u_2 são minimizadores do funcional energia I_p. Como a função:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto h(t) = |t|^p \end{aligned}$$

[1] Ver [7, Teorema 3.18].

[2] Ver Teorema A.8 do Apêndice.

é convexa quando $p \geq 1$, então

$$\left|\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}\right|^p \leq \left|\frac{|\nabla u_1| + |\nabla u_2|}{2}\right|^p \leq \frac{|\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p}{2}. \tag{1.12}$$

Suponhamos que $\nabla u_1 \neq \nabla u_2$ em um conjunto de medida positiva A. Então, a desigualdade acima é estrita no conjunto A. Além disso, notemos que

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{g + g}{2} = g, \text{ em } \partial\Omega,$$

logo,

$$\frac{u_1 + u_2}{2} \in E,$$

pois $\frac{u_1 + u_2}{2} \in W^{1,p}(\Omega)$. Consequentemente,

$$I_p(u_1) \leq I_p\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \overset{(1.12)}{<} \int_\Omega \frac{|\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p}{2} dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1|^p dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_2|^p dx. \tag{1.13}$$

Por outro lado, já que u_2 é um minimizador de I_p, temos também

$$\begin{aligned} I_p(u_1) &\overset{(1.13)}{<} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1|^p dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_2|^p dx \\ &< \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1|^p dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1|^p dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u_1|^p dx \\ &= I_p(u_1), \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Sendo assim, $\nabla u_1 = \nabla u_2$, q.t.p. em Ω. Daí,

$$||u_1 - u_2||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0,$$

pois $u_1 - u_2 = g - g = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto, $u_1 = u_2$. ■

Como uma imediata consequência das proposições 1.1 e 1.2 temos o seguinte teorema.

Teorema 1.3 *O problema (P_p) possui uma única solução fraca denotada por u_p.*

1.2 Construção da função u_∞

Seja $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função lipschitziana, isto é, existe $L > 0$ tal que

$$|g(z) - g(y)| \leq L|z - y|, \, \forall \, x, z \in \partial\Omega.$$

Se $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função lipschitziana com constante Lipschitz L e $u = g$ em $\partial\Omega$, então, para cada $y, z \in \partial\Omega$ e $x \in \overline{\Omega}$,

$$u(x) \geq u(z) - L|x - z| = g(z) - L|x - z|,$$

e

$$u(x) \leq u(y) + L|x - y| = g(y) + L|x - y|.$$

Dessa forma,

$$g(z) - L|x - z| \leq u(x) \leq g(y) + L|x - y|.$$

Sendo assim,

$$\max_{z\in\partial\Omega}\{g(z) - L|x - z|\} \leq u(x) \leq \min_{y\in\partial\Omega}\{g(y) + L|x - y|\}, \, \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

As funções

$$\begin{aligned} g_1 : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_1(x) = \max_{z\in\partial\Omega}\{g(z) - L|x - z|\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_2 : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_2(x) = \min_{y\in\partial\Omega}\{g(y) + L|x - y|\}. \end{aligned}$$

são extensões lipschitzianas de g, ou seja[3]:

- para qualquer $x \in \partial\Omega$, tem-se $g_1(x) = g(x)$ e $g_2(x) = g(x)$, e
- g_1 e g_2 são funções lipschitzianas tais que as constantes Lipschitz de g, g_1 e g_2 são iguais.

Por outro lado, pelo Teorema de Rademacher[4], a função g é diferenciável q.t.p., onde $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é a extensão lipschitziana de g. Além disso, Aronsson mostrou que[5]:

$$||\nabla g||_{L^\infty(\Omega)} \leq L \;\text{ e }\; g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega). \tag{1.14}$$

[3]Ver Proposição B.3 do Apêndice.
[4]Ver Teorema B.2 do Apêndice.
[5]Ver [3].

Agora, analisemos o funcional energia

$$I_p(v) = \int_\Omega |\nabla v|^p dx \tag{1.15}$$

em $W^{1,p}(\Omega)$ com $v - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$. O objetivo de fazer isto é estudar o comportamento das soluções minimizantes quando $p \to \infty$.

Antes de continuar, enfatizamos que só é necessário analisar o caso em que p é suficientemente grande. Além disso, lembremos que se $p > N$, o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é formado por funções contínuas.

Segue-se do Teorema 1.3 que existe um único minimizador u_p para o funcional I_p tal que

$$u_p \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad \text{e} \quad u_p = g \text{ em } \partial\Omega.$$

Como u_p é um minimizador,

$$||\nabla u_p||_{L^p(\Omega)} \leq ||\nabla g||_{L^p(\Omega)} \leq ||\nabla g||_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \leq L|\Omega|^{\frac{1}{p}}. \tag{1.16}$$

Fixando $w_p = u_p - g$, temos

$$\begin{aligned} |u_p(x) - u_p(y)| &= |g(x) - g(y) - (g(x) - g(y)) + u_p(x) - u_p(y)| \\ &= |g(x) - g(y) + u_p(x) - g(x) - (u_p(y) - g(y))| \\ &= |g(x) - g(y) + w_p(x) - w_p(y)| \\ &\leq |g(x) - g(y)| + |w_p(x) - w_p(y)|, \end{aligned}$$

e aplicando o Teorema de Morrey[6], obtemos

$$\begin{aligned} |u_p(x) - u_p(y)| &\leq L|x-y| + \frac{2pN}{p-N}|x-y|^{1-\frac{N}{p}} ||\nabla w_p||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq L|x-y| + \frac{2pN}{p-N}|x-y|^{1-\frac{N}{p}} (||\nabla u_p||_{L^p(\Omega)}) + ||\nabla g||_{L^p(\Omega)}) \\ &\leq L|x-y| + \frac{2pN}{p-N}|x-y|^{1-\frac{N}{p}} (2L|\Omega|^{\frac{1}{p}}). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Para $p \approx \infty$ vale que

$$|u_p(x) - u_p(y)| \leq C_1|x-y| + C_2|x-y|^{\frac{1}{2}}, \tag{1.18}$$

onde C_1 e C_2 são constantes maiores que zero. De maneira semelhante, temos que

$$||u_p||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||g||_{L^\infty(\Omega)} + C, \;\text{ para }\; p \approx \infty, \tag{1.19}$$

[6]Ver Teorema A.12 do Apêndice.

onde $C > 0$ é uma constante.

De (1.18) e (1.19), tem-se $\{u_{p_n}\}_{p_n \geq p_0}$ é equicontínua e equilimitada. Portanto, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá[7], existe uma subsequência $(u_{p_k}) \subset (u_{p_n})_{p_n \geq p_0}$ tal que

$$u_{p_k} \to u_\infty \text{ uniformemente, quando } k \to \infty,$$

onde $u_\infty \in C(\overline{\Omega})$ e $u_\infty = g$ em $\partial\Omega$. Mais ainda, fazendo $p_k \to \infty$ en (1.17),

$$|u_\infty(x) - u_\infty(y)| \leq L|x-y| + 4NL|x-y| = C_3|x-y|, \tag{1.20}$$

onde $C_3 > 0$ é uma constante.

Por outro lado, se $p_k > s$, onde s é suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\fint_\Omega |\nabla u_{p_k}|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} &= \frac{\|\nabla u_{p_k}\|_{L^s(\Omega)}}{|\Omega|^{\frac{1}{s}}} \\
&\overset{\text{Teo. } A.5}{\leq} \frac{\|\nabla u_{p_k}\|_{L^{p_k}(\Omega)}}{|\Omega|^{\frac{1}{s}}} |\Omega|^{\frac{p_k - s}{sp_k}} \\
&= \frac{\|\nabla u_{p_k}\|_{L^{p_k}(\Omega)}}{|\Omega|^{\frac{1}{p_k}}} \\
&\overset{(1.16)}{\leq} \frac{L|\Omega|^{\frac{1}{p_k}}}{|\Omega|^{\frac{1}{p_k}}} = L.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$||\nabla u_{p_k}||_{L^s(\Omega)} \leq L_1,$$

onde $L_1 > 0$ é uma constante. Para cada $s > N$, existe uma subsequência (u_{p_k}), ainda denotada por ela mesma, tal que

$$\nabla u_{p_k} \rightharpoonup \nabla u_\infty \text{ em } (L^s(\Omega))^N.$$

Pela semicontinuidade inferior fraca do funcional,

$$\left(\int_\Omega |\nabla u_\infty|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla u_{p_k}|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Segue-se daí que

$$\left(\fint_\Omega |\nabla u_\infty|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq L.$$

Fazendo $s \to \infty$, obtemos

$$||\nabla u_\infty||_{L^\infty(\Omega)} \leq L \quad \text{e} \quad u_\infty \in W^{1,\infty}(\Omega).$$

Em decorrência, do estudo feito, fica provado o seguinte lema.

[7]Ver Teorema B.1 do Apêndice.

Lema 1.4 *Dado $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Existe uma subsequência (u_{p_k}) de (u_p) e uma função $u_\infty \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{p_k \to \infty} u_{p_k} = u_\infty \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Agora, vejamos que a função u_∞ é uma solução do problema L^∞-variacional.

Teorema 1.5 *(Existência)*
Seja $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Então existe uma função $u_\infty \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ com $u_\infty = g$ em $\partial\Omega$ tendo a propriedade de minimização em cada subdomínio $D \subset \Omega$, isto é,

$$||\nabla u_\infty||_{L^\infty(D)} \leq ||\nabla v||_{L^\infty(D)},$$

onde $v \in C(\overline{D}) \cap W^{1,\infty}(D)$ e $v = u_\infty$ em ∂D.

Demonstração. Seja $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Pelo Lema 1.4, existe $u_\infty \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{p_j \to \infty} u_{p_j} = u_\infty \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Basta mostrar que u_∞ tem a propriedade minimizadora em D. Para cada $j \in \mathbb{N}$, v_{p_j} denota uma solução fraca para

$$\Delta_{p_j} u = 0 \text{ em } D \ \text{ e } \ u = u_\infty \text{ em } \partial D.$$

Logo, aplicando a Proposição 1.1, v_{p_j} satisfaz

$$\int_D |\nabla v_{p_j}|^{p_j} dx \leq \int_D |\nabla v|^{p_j} dx \tag{1.21}$$

onde $v \in W^{1,p}(D)$ com $v = u_\infty$ em ∂D.

<u>Afirmação 1:</u> $\max\limits_{\overline{D}}(v_{p_j} - u_{p_j}) = \max\limits_{\partial D}(v_{p_j} - u_{p_j})$.
Observemos que

$$\alpha := \max_{\overline{D}}(v_{p_j} - u_{p_j}) \geq \max_{\partial D}(v_{p_j} - u_{p_j}) =: \beta.$$

Suponhamos que $\alpha > \beta$. Então,

$$\max_{\overline{D}}(v_{p_j} - u_{p_j}) > \frac{1}{2}\left(\max_{\overline{D}}(v_{p_j} - u_{p_j}) + \max_{\partial D}(v_{p_j} - u_{p_j})\right),$$

ou seja,

$$\alpha > \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Como v_{p_j} e u_{p_j} pertencem a $C(\overline{D})$, podemos considerar o seguinte conjunto

$$G = \left\{x \in D \,:\, v_{p_j}(x) - u_{p_j}(x) > \frac{\alpha + \beta}{2}\right\}.$$

Sendo assim, $G \subset D$ e $v_{p_j} = u_{p_j} + \frac{\alpha+\beta}{2}$ em ∂G. Além disso, v_{p_j} e $u_{p_j} + \frac{\alpha+\beta}{2}$ são soluções da equação p_j-laplaciana em G com os mesmos valores de fronteira. Pela unicidade estabelecida no Teorema 1.2,

$$v_{p_j} = u_{p_j} + \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{em} \quad G,$$

o que é uma contradição, pois $v_{p_j} - u_{p_j} > \frac{\alpha+\beta}{2}$ em G. Portanto,

$$\max_{\overline{D}}(v_{p_j} - u_{p_j}) = \max_{\partial D}(v_{p_j} - u_{p_j}).$$

<u>Afirmação 2:</u> $v_{p_j} \to u_\infty$ uniformemente em $\overline{D}$.
Notemos que

$$\|v_{p_j} - u_\infty\|_{L^\infty(D)} \leq \|v_{p_j} - u_{p_j}\|_{L^\infty(D)} + \|u_{p_j} - u_\infty\|_{L^\infty(D)}.$$

Além disso, pela Afirmação 1,

$$\begin{aligned}
\max_{\overline{D}}(v_{p_j} - u_{p_j}) &= \max_{\partial D}(v_{p_j} - u_{p_j}) \\
&= \max_{\partial D}(u_\infty - u_{p_j}) \\
&\leq \|u_\infty - u_{p_j}\|_{L^\infty(D)},
\end{aligned}$$

então,

$$\|v_{p_j} - u_{p_j}\|_{L^\infty(D)} \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Portanto, $v_{p_j} \to u_\infty$ uniformemente em $\overline{D}$. Mostrando assim a Afirmação 2.

Fixemos $s > 1$ suficientemente grande. Então, para $p_j > s$,

$$\left(\fint_D |\nabla v_{p_j}|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{\|\nabla v_{p_j}\|_{L^{p_j}(D)}}{|D|^{\frac{1}{p_j}}}.$$

Aplicando a desigualdade (1.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\fint_D |\nabla v_{p_j}|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} &\leq \frac{\|\nabla v\|_{L^{p_j}(D)}}{|D|^{\frac{1}{p_j}}} \\
&\leq \frac{\|\nabla v\|_{L^\infty(D)}|D|^{\frac{1}{p_j}}}{|D|^{\frac{1}{p_j}}} \\
&= \|\nabla v\|_{L^\infty(D)}, \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\nabla v_{p_j}\|_s \leq \|\nabla v\|_{L^\infty(D)}|D|^{\frac{1}{s}}.$$

Como $L^s(D)$ é um espaço de Banach reflexivo, existe uma subsequência (v_{p_j}), que ainda denotaremos como (v_{p_j}), tal que

$$\nabla v_{p_j} \rightharpoonup \nabla u_\infty \text{ em } (L^s(D))^N.$$

Pela semicontinuidade inferior fraca, encontramos

$$\begin{aligned} \left(\fint_D |\nabla u_\infty|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} &\leq \liminf_{j\to\infty} \left(\fint_D |\nabla v_{p_j}|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\overset{(1.22)}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \|\nabla v\|_{L^\infty(D)} \\ &= \|\nabla v\|_{L^\infty(D)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\|\nabla u_\infty\|_s}{|D|^{\frac{1}{s}}} \leq \|\nabla v\|_{L^\infty(D)}.$$

Fazendo $s \to \infty$, concluímos que

$$\|\nabla u_\infty\|_{L^\infty(D)} \leq \|\nabla v\|_{L^\infty(D)}.$$

Consequentemente, u_∞ tem a propriedade minimizadora em D. ■

Capítulo 2

Existência de solução de viscosidade para (P_∞)

No presente capítulo, continuaremos abordando o trabalho de Jensen [17] e Lindqvist [22] para garantir a existência de solução do problema (P_∞). Para isso, primeiro estudaremos a existência e unicidade de solução fraca $u_p^{(\varepsilon)}$ do problema $(P_{p,\varepsilon}^{+})$. Logo após, analisamos o comportamento de $u_p^{(\varepsilon)}$ quando $p \to \infty$. Em seguida, comprovaremos que a função $u_\infty^{(\varepsilon)}$, que é limite de alguma subsequência de $(u_p^{(\varepsilon)})$, é uma solução de viscosidade de $(P_{\infty,\max})$. Ao tomarmos $\varepsilon = 0$ em $(P_{\infty,\max})$, demonstramos que $u_\infty^{(0)} = u_\infty$ é uma solução de viscosidade de (P_∞).

Também, de maneira semelhante, mostramos que o problema $(P_{\infty,\min})$ possui solução de viscosidade.

2.1 Soluções de viscosidade

A existência de derivadas de segunda ordem no operador Δ_∞ gera dificuldades, pois Aronsson [5] mostrou que nem sempre as soluções da equação $\Delta_\infty u = 0$ pertencem a $C^2(\Omega)$. A teoria de soluções de viscosidade permite provar que certas funções que não são de classe C^2 são soluções de problemas que envolvem o operador ∞-laplaciano.

Primeiro veremos uma motivação para definir solução de viscosidade para a equação $\Delta_p v = 0$, para $2 \leq p \leq \infty$. Para isso, consideremos uma função auxiliar de classe C^2 definida da seguinte forma:

Definição 2.1 *Sejam $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \Omega$.*

- *Dizemos que $\phi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por baixo*[1]*, se existe $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tal que*
$$u(x) - \phi(x) > 0 = u(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

- *Dizemos que $\varphi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por cima*[2]*, se existe $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tal que*
$$u(x) - \varphi(x) < 0 = u(x_0) - \varphi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

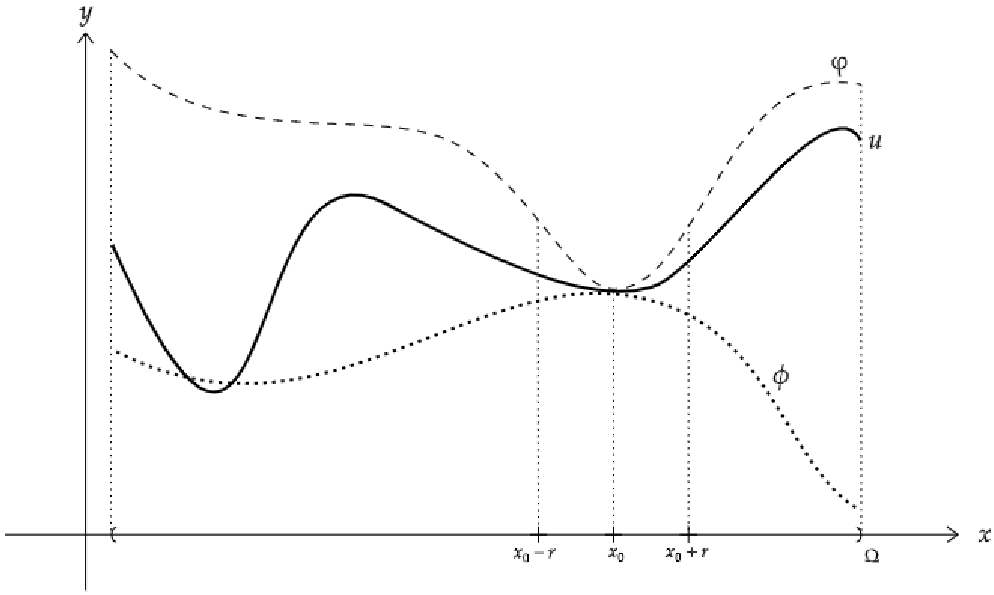

Figura 2.1: Definição 2.1

Notemos que se a desigualdade da última definição vale em todo Ω, ou seja,

$$u(x) - \phi(x) > 0 = u(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in \Omega \setminus \{x_0\},$$

então $\phi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por baixo. Do mesmo jeito, se acontece

$$u(x) - \varphi(x) < 0 = u(x_0) - \varphi(x_0),\ \forall\, x \in \Omega \setminus \{x_0\},$$

tem-se que $\varphi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por cima.

A seguinte proposição nos permite observar que podemos fazer que as derivadas da equação $\Delta_p v = 0$ incidam sobre as funções ϕ e φ.

[1] Ver Figura 2.1.
[2] Ver Figura 2.1.

Proposição 2.2 *Se $u \in C^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por baixo, então*

$$\begin{aligned} \Delta u(x_0) &\geq \Delta \phi(x_0), \\ \Delta_p u(x_0) &\geq \Delta_p \phi(x_0), \\ \Delta_\infty u(x_0) &\geq \Delta_\infty \phi(x_0). \end{aligned}$$

De forma análoga, temos que se $u \in C^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por cima, então

$$\begin{aligned} \Delta u(x_0) &\leq \Delta \varphi(x_0), \\ \Delta_p u(x_0) &\leq \Delta_p \varphi(x_0), \\ \Delta_\infty u(x_0) &\leq \Delta_\infty \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Demonstração. De fato, da hipótese,

$$\nabla(u - \phi)(x_0) = 0,$$

e

$$D^2(u - \phi)(x_0) \geq 0.$$

Dessa forma,

$$\nabla u(x_0) = \nabla \phi(x_0), \tag{2.1}$$

e

$$\langle D^2 u(x_0)\xi, \xi\rangle \geq \langle D^2 \phi(x_0)\xi, \xi\rangle, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Em particular, de (2.2),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) = \left\langle D^2 u(x_0) e_i, e_i \right\rangle \geq \left\langle D^2 \phi(x_0) e_i, e_i \right\rangle = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}(x_0), \ \forall\, i = 1, \cdots, N,$$

assim,

$$\Delta u(x_0) \geq \Delta \phi(x_0). \tag{2.3}$$

Agora, notemos que para $p = \infty$ vale

$$\Delta_\infty u(x_0) = \left\langle D^2 u(x_0) \nabla u(x_0), \nabla u(x_0) \right\rangle \overset{(2.2),(2.1)}{\geq} \left\langle D^2 \phi(x_0) \nabla \phi(x_0), \nabla \phi(x_0) \right\rangle = \Delta_\infty \phi(x_0). \tag{2.4}$$

Por outro lado, para $2 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned} \Delta_p u(x_0) &= (div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u))(x_0) \\ &= (\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u))(x_0) \\ &= (\langle \nabla(|\nabla u|^{p-2}), \nabla u\rangle + |\nabla u|^{p-2} \nabla \cdot \nabla u)(x_0) \\ &= (\langle \nabla(\langle \nabla u, \nabla u\rangle^{\frac{p-2}{2}}), \nabla u\rangle + |\nabla u|^{p-2} \Delta u)(x_0), \end{aligned}$$

assim,

$$
\begin{aligned}
\Delta_p u(x_0) &= \left(\left\langle \frac{p-2}{2}\langle \nabla u, \nabla u\rangle^{\frac{p-4}{2}} \nabla \langle \nabla u, \nabla u\rangle, \nabla u \right\rangle + |\nabla u|^{p-2}\Delta u\right)(x_0) \\
&= \left(\left\langle \frac{p-2}{2}|\nabla u|^{p-4}\nabla |\nabla u|^2, \nabla u \right\rangle + |\nabla u|^{p-2}\Delta u\right)(x_0) \\
&= \left((p-2)|\nabla u|^{p-4}\frac{1}{2}\left\langle \nabla |\nabla u|^2, \nabla u \right\rangle + |\nabla u|^{p-2}\Delta u\right)(x_0) \\
&= \left((p-2)|\nabla u|^{p-4}\Delta_\infty u + |\nabla u|^{p-2}\Delta u\right)(x_0) \\
&= (p-2)|\nabla u(x_0)|^{p-4}\Delta_\infty u(x_0) + |\nabla u(x_0)|^{p-2}\Delta u(x_0).
\end{aligned}
$$

Aplicando (2.1), (2.3) e (2.4) na identidade anterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta_p u(x_0) &= (p-2)|\nabla u(x_0)|^{p-4}\Delta_\infty u(x_0) + |\nabla u(x_0)|^{p-2}\Delta u(x_0) \\
&\geq (p-2)|\nabla \phi(x_0)|^{p-4}\Delta_\infty \phi(x_0) + |\nabla \phi(x_0)|^{p-2}\Delta \phi(x_0) \\
&= \Delta_p \phi(x_0).
\end{aligned}
$$

Consequentemente, se $u \in C^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por baixo, tem-se

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x_0) &\geq \Delta \phi(x_0), \\
\Delta_p u(x_0) &\geq \Delta_p \phi(x_0), \\
\Delta_\infty u(x_0) &\geq \Delta_\infty \phi(x_0).
\end{aligned}
$$

■

Como uma consequência da Proposição 2.2 temos as seguintes observações:

Observação 2.3 *Dado* $2 \leq p \leq \infty$.

- *Se u é uma supersolução clássica para a equação $\Delta_p v = 0$, isto é, $\Delta_p u \leq 0$ em Ω, temos que se $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por baixo, vale $\Delta_p \phi(x_0) \leq 0$, pois $\Delta_p \phi(x_0) \leq \Delta_p u(x_0)$.*

- *De maneira similar, mostra-se que se u é uma subsolução clássica para a equação $\Delta_p v = 0$, isto é, $\Delta_p u \geq 0$ em Ω, temos que se $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por cima, vale $\Delta_p \phi(x_0) \geq 0$, já que $\Delta_p \phi(x_0) \geq \Delta_p u(x_0)$.*

Note que as desigualdades $0 \geq \Delta_p \phi(x_0)$ e $0 \leq \Delta_p \phi(x_0)$ não dependem da existência de $\nabla u(x_0)$ e $D^2 u(x_0)$. Portanto, as desigualdades anteriores fazem sentido mesmo se u não pertence a $C^2(\Omega)$. Esta observação é importante para a definição que virá a seguir.

Definição 2.4 *Seja $2 \leq p \leq \infty$.*

(i) Uma função $u \in C(\Omega)$ é denominada ***supersolução de viscosidade*** *da equação $\Delta_p v = 0$ em Ω ($\Delta_p u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω ou $\infty-$superharmônica), se para cada $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por baixo temos*

$$\Delta_p \phi(x_0) \leq 0.$$

(ii) Uma função $u \in C(\Omega)$ é denominada ***subsolução de viscosidade*** *da equação $\Delta_p v = 0$ em Ω ($\Delta_p u \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω ou $\infty-$subharmônica), se para cada $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por cima tem-se*

$$\Delta_p \varphi(x_0) \geq 0.$$

(iii) Uma função $u \in C(\Omega)$ é denominada ***solução de viscosidade*** *da equação $\Delta_p v = 0$ em Ω ($\Delta_p u = 0$ no sentido de viscosidade em Ω ou $\infty-$harmônica), se u é uma supersolução e uma subsolução de viscosidade da equação $\Delta_p v = 0$ em Ω.*

A seguinte proposição proporciona uma equivalência entre as supersoluções e subsoluções de viscosidade da equação $\Delta_p v = 0$.

Proposição 2.5 *Sejam $2 \leq p \leq \infty$ e $u \in C(\Omega)$. Temos $\Delta_p u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω se, e somente se, $\Delta_p(-u) \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω.*

Demonstração. Comecemos provando que se $\Delta_p u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω, então $\Delta_p(-u) \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. Dados $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ que toca $-u$ em x_0 por cima, isto é, existe $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tal que

$$(-u)(x) - \varphi(x) < 0 = (-u)(x_0) - \varphi(x_0), \ \forall \, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\},$$

sendo assim,

$$u(x) - (-\varphi(x)) > 0 = u(x_0) - (-\varphi)(x_0), \ \forall \, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Portanto, $-\varphi \in C^2(\Omega)$ toca u em x_0 por baixo. Por hipótese, tem-se que

$$\Delta_p(-\varphi)(x_0) \leq 0,$$

ou seja,

$$\Delta_p \varphi(x_0) \geq 0.$$

Em consequência, $\Delta_p(-u) \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. A demonstração da recíproca é similar. ∎

Por motivos técnicos, vamos mostrar algumas equivalências importantes.

Proposição 2.6 *Dados* $2 \leq p \leq \infty$ *e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\Delta_p u \leq 0$ *(resp.,* $\Delta_p u \geq 0$*) no sentido de viscosidade em* Ω*,*

(ii) Para cada $x_0 \in \Omega$ *e* $\phi \in C^2(\Omega)$ *tal que* $u - \phi$ *possui um mínimo local estrito (resp., máximo local estrito) em* x_0*, tem-se*

$$\Delta_p \phi(x_0) \leq 0 \;\; (\textit{resp.}, \; \Delta_p \phi(x_0) \geq 0),$$

(iii) Para cada $x_0 \in \Omega$ *e* $\phi \in C^2(\Omega)$ *tal que* $u - \phi$ *possui um mínimo local (resp., máximo local) em* x_0*, temos*

$$\Delta_p \phi(x_0) \leq 0 \;\; (\textit{resp.}, \; \Delta_p \phi(x_0) \geq 0).$$

Demonstração. .

<u>Caso 1:</u> Supersolução.

$[(i) \Rightarrow (ii)]$ Dados $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \phi$ possui um mínimo local estrito em x_0, ou seja, existe $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tal que

$$u(x) - \phi(x) > u(x_0) - \phi(x_0), \; \forall \, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}. \tag{2.5}$$

Consideremos a função[3]:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\phi} : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tilde{\phi}(x) = \phi(x) + (u - \phi)(x_0), \end{array}$$

Notemos que $\tilde{\phi} \in C^2(\Omega)$. Além disso,

$$u(x_0) - \tilde{\phi}(x_0) = u(x_0) - \phi(x_0) - (u - \phi)(x_0) = 0$$

e, para cada $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$,

$$u(x) - \tilde{\phi}(x) = u(x) - \phi(x) - (u - \phi)(x_0) \stackrel{(2.5)}{>} 0.$$

Portanto,

$$u(x) - \tilde{\phi}(x) > 0 = u(x_0) - \tilde{\phi}(x_0), \; \forall \, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

[3]Ver Figura 2.2.

Assim, pela hipótese, obtemos $\Delta_p\tilde{\phi}(x_0) \leq 0$. Agora, observe que, para $2 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned}
\Delta_p\tilde{\phi}(x) &= \Delta_p(\phi(x) + (u-\phi)(x_0)) \\
&= div(|\nabla(\phi(x) + (u-\phi)(x_0))|^{p-2}\nabla(\phi(x) + (u-\phi)(x_0))) \\
&= div(|\nabla\phi(x)|^{p-2}\nabla\phi(x)) = \Delta_p\phi(x),
\end{aligned}$$

e, para $p = \infty$,

$$\begin{aligned}
\Delta_p\tilde{\phi}(x) &= \Delta_p(\phi(x) + (u-\phi)(x_0)) \\
&= \frac{1}{2}\langle\nabla(\phi(x) + (u-\phi)(x_0)), \nabla|\nabla(\phi(x) + (u-\phi)(x_0))|^2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\nabla\phi(x), \nabla|\nabla\phi(x)|^2\rangle = \Delta_p\phi(x).
\end{aligned}$$

Sendo assim, $\Delta_p\phi(x_0) \leq 0$.

$[(ii) \Rightarrow (i)]$ Dados $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por baixo. Então, $u - \phi$ possui um mínimo local estrito em x_0. Portanto, por hipótese, $\Delta_p u \leq 0$ no sentido de viscosidade.

$[(ii) \Rightarrow (iii)]$ Dados $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \phi$ possui um mínimo local em x_0, ou seja, existe $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tal que

$$u(x) - \phi(x) \geq u(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Agora, consideremos a função[4]:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi} : \Omega &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \bar{\phi}(x) = \phi(x) + (u-\phi)(x_0) - |x - x_0|^4,
\end{aligned}$$

De maneira similar à demonstração $[(i) \Rightarrow (ii)]$, obtemos que $\Delta_p\phi(x_0) \leq 0$.

$[(iii) \Rightarrow (ii)]$ Dados $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \phi$ possui um mínimo local estrito em x_0. Logo, $u - \phi$ possui um mínimo local em x_0. Então, por hipótese, $\Delta_p\phi(x_0) \leq 0$.

<u>Caso 2:</u> Subsolução.

Aplicando a Proposição 2.5 fica mostrada a equivalência entre (i), (ii) e (iii) para uma subsolução da equação $\Delta_p v = 0$. ■

Observe os seguintes fatos envolvendo as soluções de viscosidade:

[4]Ver Figura 2.2.

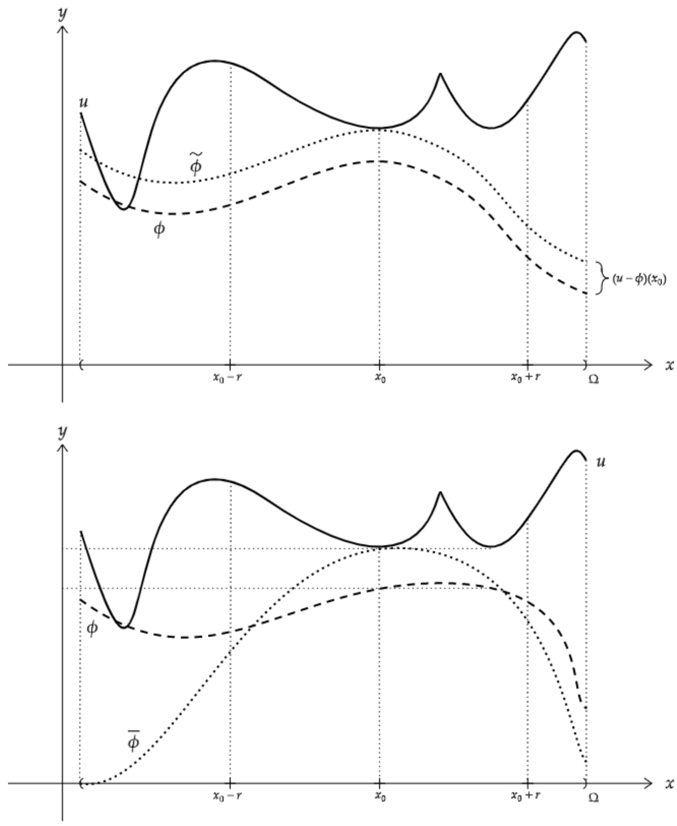

Figura 2.2: Funções $\tilde{\phi}$ e $\bar{\phi}$

- As funções ϕ e φ na Definição 2.4 são habitualmente denominadas funções teste.

- Cada ponto possui sua própria família de funções teste (que pode ser vazia). Quando não existe alguma função em $C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por baixo ou por cima, então não existe requerimento no ponto x_0.

- Dados $2 \leq p \leq \infty$ e $c \in \mathbb{R}$. Se $\Delta_p u = 0$ no sentido de viscosidade em Ω, então $u + c$ é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_p v = 0$ em Ω.

  Primeiro mostraremos que $\Delta_p(u + c) \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. De fato, dados $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca $u + c$ em x_0 por baixo, isto é, existe $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tal que

$$(u + c)(x) - \phi(x) > 0 = (u + c)(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\},$$

  ou seja,

$$u(x) - \phi(x) > 0 = u(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

  Pela hipótese e a última desigualdade,

$$\Delta_p \phi(x_0) \leq 0,$$

assim, $u+c$ é uma supersolução de viscosidade da equação $\Delta_p v = 0$ em Ω. De forma análoga, $\Delta_p(u+c) \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. Portanto, $u+c$ é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_p v = 0$ em Ω.

Na próximo teorema, observaremos que as definições de solução no sentido de viscosidade e clássico são equivalentes quando $u \in C^2(\Omega)$.

Teorema 2.7 *(Consistência)*
Dado $2 \leq p \leq \infty$. Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_p u = 0$ em Ω se, e só se, $\Delta_p u = 0$ vale pontualmente em Ω.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que a função u é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_p u = 0$ em Ω. Como u é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_p u = 0$ em Ω, então

$$\Delta_p u \leq 0 \text{ e } \Delta_p u \geq 0 \text{ no sentido de viscosidade em } \Omega.$$

Para cada $x_0 \in \Omega$, consideremos a função

$$\begin{aligned} \phi_{x_0} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi_{x_0}(x) = u(x) - |x - x_0|^4. \end{aligned}$$

Notemos que

$$u(x) - \phi_{x_0}(x) > 0 = u(x_0) - \phi_{x_0}(x_0), \ \forall\, x \in \Omega \setminus \{x_0\},$$

e portanto ϕ_{x_0} é uma função teste para u. Assim,

$$\Delta_p \phi_{x_0}(x_0) \leq 0, \ \forall\, x_0 \in \Omega,$$

pois $\Delta_p u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. Logo,

$$\Delta_p u(x_0) \leq 0, \ \forall\, x_0 \in \Omega, \tag{2.6}$$

pois $\Delta_p \phi_{x_0}(x_0) = \Delta_p u(x_0)$. De maneira similar, obtemos que

$$\Delta_p u(x_0) \geq 0, \ \forall\, x_0 \in \Omega, \tag{2.7}$$

pois $\Delta_p u \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. Segue-se de (2.6) e (2.7) que $\Delta_p u = 0$ pontualmente em Ω. Tomemos agora este último fato como hipótese e provemos que u é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_p u = 0$ em Ω. Já que $\Delta_p u = 0$ pontualmente em Ω, temos

$$\Delta_p u(x) \leq 0 \text{ e } \Delta_p u(x) \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Dados $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por baixo. Pela Proposição 2.2,

$$0 \geq \Delta_p u(x_0) \geq \Delta_p \phi(x_0).$$

Portanto, $\Delta_p u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. De maneira similar, mostra-se que $\Delta_p u \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. Em conclusão, u é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_p u = 0$ em Ω. ■

2.2 u_p é uma solução de viscosidade

Para demonstrar que a função u_∞ obtida no Lema 1.4 é uma solução de viscosidade de $\Delta_\infty v = 0$, primeiro provaremos que u_p é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_p v = 0$. No que segue, é suficiente considerar $N < p < \infty$.

Lema 2.8 *Dado $v \in C(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tal que $\Delta_p v \leq 0$ no sentido fraco, ou seja,*

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \varphi \rangle dx \geq 0,$$

para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Então, $\Delta_p v \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que v não é uma supersolução de viscosidade em Ω. Então, existem $x_0 \in \Omega$, $\phi \in C^2(\Omega)$ e $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tais que

$$v(x) - \phi(x) > 0 = v(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \quad \text{e} \quad \Delta_p \phi(x_0) > 0. \tag{2.8}$$

Como $\Delta_p \phi$ é contínua, existe $r > r_1 > 0$ tal que

$$\Delta_p \phi(x) > 0,\ \forall\, x \in B(x_0, r_1). \tag{2.9}$$

Assim, ϕ é uma subsolução clássica em $B(x_0, r_1)$. Definindo

$$\begin{aligned} \psi : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \psi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2} \min_{\partial B(x_0, r_1)} \{v - \phi\}. \end{aligned}$$

e denotando $m = \min_{\partial B(x_0,r_1)} \{v - \phi\}$, temos

$$\psi(x_0) = \phi(x_0) + \frac{1}{2}m \overset{(2.8)}{=} v(x_0) + \frac{1}{2}m \overset{(2.8)}{>} v(x_0). \tag{2.10}$$

Além disso, para cada $x \in \Omega$,

$$\Delta_p \psi(x) = \Delta_p \left(\phi(x) + \frac{1}{2}m \right) = \Delta_p \phi(x). \tag{2.11}$$

Segue-se de (2.9) e (2.11) que

$$\Delta_p \psi(x) = \Delta_p \phi(x) > 0, \ \forall\, x \in B(x_0, r_1).$$

Multiplicando por $(\psi - v)^+$ e integrando por partes a desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B(x_0,r_1)} \Delta_p \psi (\psi - v)^+ dx \\ &= -\int_{B(x_0,r_1)} \langle |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi, \nabla(\psi - v)^+ \rangle dx \\ &= -\int_{B(x_0,r_1)\cap\{\psi > v\}} \langle |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi, \nabla(\psi - v) \rangle dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Estendendo a função $(\psi - v)^+$ como zero em $\Omega \setminus B(x_0, r_1)$ e pelo fato $\Delta_p v \leq 0$ no sentido fraco, vale que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \langle\, |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla(\psi - v)^+ \rangle dx \\ &= \int_{B(x_0,r_1)} \langle\, |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla(\psi - v)^+ \rangle dx \\ &= \int_{B(x_0,r_1)\cap\{\psi > v\}} \langle\, |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla(\psi - v) \rangle dx \end{aligned} \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13),

$$\int_{B(x_0,r_1)\cap\{\psi > v\}} \langle |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi, \nabla(\psi - v) \rangle dx \leq 0$$

e

$$-\int_{B(x_0,r_1)\cap\{\psi > v\}} \langle\, |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla(\psi - v) \rangle dx \leq 0,$$

implicando em

$$\int_{B(x_0,r_1)\cap\{\psi > v\}} \langle |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi - |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla(\psi - v) \rangle dx \leq 0.$$

Pela Desigualdade de Tartar[5],

$$c_p \int_{B(x_0,r_1)\cap\{\psi>v\}} |\nabla\psi - \nabla v|^p dx \leq 0,$$

onde $c_p > 0$, ou seja,

$$\int_{B(x_0,r_1)} |\nabla(\psi - v)^+|^p dx \leq 0. \tag{2.14}$$

Observando que

$$(\psi - v)^+ \in W_0^{1,p}(B(x_0, r_1)), \tag{2.15}$$

pois $(\psi - v)^+ = 0$ em $\partial B(x_0, r_1)$, segue-se de (2.14) e (2.15) que

$$(\psi - v)^+ = 0 \ \text{ em } \ B(x_0, r_1),$$

e portanto,

$$\psi(x_0) = v(x_0),$$

o que é absurdo, pois, de (2.10), $\psi(x_0) > v(x_0)$. Em conclusão, v é uma supersolução de viscosidade em Ω. ∎

De maneira análoga, temos o seguinte resultado.

Lema 2.9 *Dado $v \in C(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$ tal que $\Delta_p v \geq 0$ no sentido fraco, então $\Delta_p v \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω.*

Pelos Lemas 2.8 e 2.9 fica demonstrado a seguinte proposição.

Proposição 2.10 *As funções u_p são soluções de viscosidade da equação $\Delta_p v = 0$.*

A seguir, mostraremos um lema que será útil no estudo da existência de solução de viscosidade do problema (P_∞).

Lema 2.11 *Suponhamos que $f_n \to f$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, $f_n, f \in C(\overline{\Omega})$ e $x_0 \in \Omega$. Além disso, seja $\phi \in C^2(\Omega)$ toca f em x_0 por baixo, em outras palavras, existe $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tal que*

$$f(x) - \phi(x) > 0 = f(x_0) - \phi(x_0), \ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Então, existe uma sequência (x_n) em Ω com $x_n \to x_0$ tal que

$$f_n(x_n) - \phi(x_n) = \min_{B(x_0,r)} \{f_n(x) - \phi(x)\}.$$

[5]Ver Proposição B.5 do Apêndice.

Demonstração. Como $\phi \in C^2(\Omega)$ toca f em x_0 por baixo, existe $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tal que

$$f(x) - \phi(x) > 0 = f(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Então,

$$\inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\} > 0, \tag{2.16}$$

onde $A(x_0, r, r/2) = B(x_0, r) \setminus B(x_0, r/2)$. Logo, podemos escolher

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\} > 0.$$

Como $f_n \to f$ uniformemente em $B(x_0, r)$, tem-se que existe $\bar{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{2} \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\},\ \ \forall\, x \in B(x_0, r),\ \forall\, n > \bar{n}_0. \tag{2.17}$$

Quando $x \in A(x_0, r, r/2)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\} &= \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\} - \frac{1}{2} \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\} \\ &\leq (f - \phi)(x) - \frac{1}{2} \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Logo, para quaisquer $x \in A(x_0, r, r/2)$ e $n > \bar{n}_0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\} &\overset{(2.18)}{\leq} (f - \phi)(x) - \frac{1}{2} \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\} \\ &\overset{(2.17)}{\leq} (f - \phi)(x) + (f_n - f)(x) \\ &= (f_n - \phi)(x). \end{aligned}$$

Segue-se daí que

$$0 < \frac{1}{2} \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f(x) - \phi(x)\} \leq \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f_n(x) - \phi(x)\},\ \forall\, n > \bar{n}_0,$$

Por outro lado, já que $f_n \to f$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $f(x_0) = \phi(x_0)$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) = \phi(x_0),$$

assim, $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x_0) - \phi(x_0)) = 0$. Portanto, existe $\bar{n}_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{n}_1 \geq \bar{n}_0$ e

$$f_n(x_0) - \phi(x_0) < \inf_{A(x_0,r,r/2)} \{f_n(x) - \phi(x)\},\ \ \forall\, n > \bar{n}_1,$$

Consequentemente, para cada $n > \bar{n}_1$, o valor no centro da bola $B(x_0, r)$ é menor que o ínfimo sobre $B(x_0, r) \setminus B(x_0, r/2)$. Então, existe $x_{n_1} \in \overline{B(x_0, r/2)}$ tal que

$$\inf_{B(x_0,r)} \{f_{n_1}(x) - \phi(x)\} = f_{n_1}(x_{n_1}) - \phi(x_{n_1}),$$

onde $n_1 > \bar{n}_1$. Fazendo o mesmo argumento para $\frac{r}{3}$, podemos obter $\bar{n}_2 \geq \bar{n}_1$ que satisfaz

$$f_n(x_0) - \phi(x_0) < \inf_{A(x_0,r,r/3)} \{f_n(x) - \phi(x)\}, \ \ \forall\, n > \bar{n}_2,$$

Então, existe $x_{n_2} \in \overline{B(x_0, \frac{r}{3})}$ tal que

$$\inf_{B(x_0,r)} \{f_{n_2}(x) - \phi(x)\} = f_{n_2}(x_{n_2}) - \phi(x_{n_1}),$$

onde $n_2 > \bar{n}_2$. Para concluir, para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos $r_i = \frac{r}{i+1}$. Logo, $x_{n_i} \to x_0$, pois $r_i \to 0$. Em conclusão, existe uma sequência (x_n) em Ω com $x_n \to x_0$ tal que

$$f_n(x_n) - \phi(x_n) = \min_{B(x_0,r)} \{f_n(x) - \phi(x)\}.$$

■

2.3 A equação p-laplaciano não homogênea

Nesta seção, dado $\varepsilon \geq 0$, estudaremos a equação p-laplaciano não homogênea com condição de fronteira tipo Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta_p u = -\varepsilon^{p-1}, & \text{em } \Omega, \\ \quad u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P^+_{p,\varepsilon}$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ e $N < p < \infty$.

Diremos que uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca do problema $(P^+_{p,\varepsilon})$ se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla\varphi\rangle dx = \varepsilon^{p-1} \int_\Omega \varphi dx,$$

para cada $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$ e $u = g$ em $\partial\Omega$ no sentido do traço, isto é, $u - g \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Teorema 2.12 *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, u satisfaz*

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega u dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v dx, \ \ com\ v - u \in W^{1,p}_0(\Omega), \tag{2.19}$$

se, e somente se,

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\varphi\rangle dx = \varepsilon^{p-1}\int_\Omega \varphi dx, \quad onde\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.20}$$

Demonstração. [(2.19)⇒(2.20)] Dado $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, escolhemos $v = u + t\varphi$, onde $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$v - u = u + t\varphi - u = t\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega u dx \overset{(2.19)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega (u+t\varphi)dx.$$

Considerando a função

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto F(t) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega (u+t\varphi)dx, \end{aligned}$$

observamos que F atinge seu mínimo em $t = 0$. Assim, $F'(0) = 0$, e portanto,

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\varphi\rangle dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega \varphi dx = 0,\ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

[(2.20)⇒(2.19)] De fato, dado v tal que $v - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v dx \\ &\overset{\text{Prop. } B.6}{\geq} \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx + p\int_\Omega \big\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla(v-u)\big\rangle\, dx\right) - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v dx \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega \big\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla(v-u)\big\rangle\, dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v dx \\ &\overset{(2.20)}{=} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \varepsilon^{p-1}\int_\Omega (v-u)dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v dx \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega u dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega u dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v dx, \text{ com } v - u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

■

Pelo último teorema, para mostrar a existência de solução fraca do problema $(P_{p,\varepsilon}^+)$ é suficiente demonstrar a existência de um minimizador para um funcional adequado associado ao problema $(P_{p,\varepsilon}^+)$.

Teorema 2.13 *Sejam $p > N$ e $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Fixando $\varepsilon \geq 0$, consideremos o funcional energia*

$$J_p(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v dx,$$

onde $v \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ com $v = g$ em $\partial\Omega$. Então, existe uma única função em $C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, denotada por $u_p^{(\varepsilon)}$, com valores de fronteira g tal que $u_p^{(\varepsilon)}$ minimiza o funcional energia J_p.

Demonstração. Em primeiro lugar, mostraremos que existe um minimizador para J_p. Notemos primeiramente que

$$\||\nabla(v-g)|\|_{L^p}^p \leq 2^p(\||\nabla v|\|_{L^p}^p + \||\nabla g|\|_{L^p}^p),$$

assim,

$$\||\nabla v|\|_{L^p}^p \geq \frac{1}{2^p}\||\nabla(v-g)|\|_{L^p}^p - \||\nabla g|\|_{L^p}^p. \tag{2.21}$$

Logo,

$$\begin{aligned} J_p(v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v dx \\ &\geq \frac{1}{2^p p}\int_\Omega |\nabla(v-g)|^p dx - \||\nabla g|\|_{L^p}^p - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v dx. \end{aligned}$$

Já que $v - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$J_p(v) \geq \frac{1}{2^p p}\|v-g\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p - \||\nabla g|\|_{L^p}^p - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega f dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega (v-g)dx.$$

Fazendo a seguinte identificação:

$$c_g = \||\nabla g|\|_{L^p}^p + \varepsilon^{p-1}\int_\Omega g dx, \tag{2.22}$$

e, usando a desigualdade de Hölder[6], ficamos com

$$J_p(v) \geq \frac{1}{2^p p}\|v-g\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p - c_g - \varepsilon^{p-1}|\Omega|^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |v-g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré[7] e denotando $\varepsilon^{p-1}|\Omega|^{\frac{1}{p}}$ por c_1,

$$J_p(v) \geq \frac{1}{2^p p}\|v-g\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p - c_g - c_1\|v-g\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

[6]Ver Teorema A.5 do Apêndice.
[7]Ver Teorema A.11 do Apêndice.

Considerando a função:

$$\begin{array}{rcl} h:[0,\infty] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h(t)=\dfrac{1}{2^p p}t^p - c_g - c_1 t, \end{array}$$

notamos que existe $l > 0$ tal que

$$J_p(v) \geq h(\|v-g\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}) \geq -l, \ \forall\, v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Dessa forma, podemos fixar

$$m = \inf_{v\in\mathbb{E}} J_p(v), \tag{2.23}$$

onde $\mathbb{E} = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v = g \text{ em } \partial\Omega\}$. De maneira similar ao Teorema 1.2, mostra-se que existe $u_p^{(\varepsilon)} \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ com valores de fronteira g tal que $u_p^{(\varepsilon)}$ é um minimizador de J_p.

Ora, para unicidade, suponhamos que v_1 e v_2 são minimizadores do funcional J_p. Notemos que

$$\left|\frac{\nabla v_1 + \nabla v_2}{2}\right|^p \leq \left|\frac{|\nabla v_1| + |\nabla v_2|}{2}\right|^p < \frac{|\nabla v_1|^p + |\nabla v_2|^p}{2}, \tag{2.24}$$

quando $\nabla v_1 \neq \nabla v_2$ q.t.p. em Ω, pois a função h definida como $h(t) = |t|^p$ para cada $t \in \mathbb{R}$ é convexa. Temos que

$$\begin{array}{rcl} J_p(v_1) & \leq & J_p\left(\dfrac{v_1+v_2}{2}\right) \\ & = & \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega \left|\frac{\nabla v_1 + \nabla v_2}{2}\right|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega \frac{v_1+v_2}{2}dx \\ & \overset{(2.24)}{<} & \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega \frac{|\nabla v_1|^p + |\nabla v_2|^p}{2}dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega \frac{v_1+v_2}{2}dx \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_1|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v_1 dx\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_2|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega v_2 dx\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}J_p(v_1) + \dfrac{1}{2}J_p(v_2) \\ & = & J_p(v_1), \end{array}$$

o que é absurdo. Portanto, $\nabla v_1 = \nabla v_2$ q.t.p. em Ω. Daí,

$$||v_1 - v_2||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0,$$

pois $v_1 - v_2 = g - g = 0$ em $\partial\Omega$. Logo, $v_1 = v_2$. ■

Portanto, pelos Teoremas 2.12 e 2.13 fica mostrado o seguinte teorema.

Teorema 2.14 *Para cada $\varepsilon \geq 0$, o problema $(P^+_{p,\varepsilon})$ possui uma única solução fraca denotada por $u_p^{(\varepsilon)}$.*

Agora, de forma similar ao Lema 1.4, garantiremos a existência de uma nova função importante.

Lema 2.15 *Sejam $\varepsilon \geq 0$ e $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Então, existem uma subsequência $(u_{p_k}^{(\varepsilon)})$ de $(u_p^{(\varepsilon)})$, onde $u_p^{(\varepsilon)}$ é a solução fraca do problema $(P^+_{p,\varepsilon})$, e uma função $u_\infty^{(\varepsilon)} \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{p_k \to \infty} u_{p_k}^{(\varepsilon)} = u_\infty^{(\varepsilon)}, \quad \textit{uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{2.25}$$

Demonstração. Do Teorema 2.13, existe uma única função $u_p^{(\varepsilon)} \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ com valores de fronteira g tal que u_p minimiza o funcional energia J_p. Denotemos $u_p^{(\varepsilon)}$ por u_p, pois ε está fixado. Como u_p é um minimizador para J_p e $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, então

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega u_p dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla g|^p dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega g dx,$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla g|^p dx + \varepsilon^{p-1}\int_\Omega (u_p - g) dx. \tag{2.26}$$

Além disso, aplicando as Desigualdades de Young[8] e de Friedrichs[9],

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (u_p - g)dx\right| &\leq \int_\Omega |u_p - g| dx \\
&= \int_\Omega (\lambda |u_p - g|)\lambda^{-1} dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{\lambda^p |u_p - g|^p}{p} dx + \int_\Omega \frac{\lambda^{-q}}{q} dx \\
&= \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |u_p - g|^p dx + \frac{\lambda^{-q}}{q}|\Omega| \\
&\leq \frac{\lambda^p}{p}(diam(\Omega))^p \int_\Omega |\nabla(u_p - g)|^p dx + \frac{\lambda^{-q}}{q}|\Omega| \\
&\leq \frac{(\lambda diam(\Omega))^p}{p} 2^p \left[\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega |\nabla g|^p dx\right] + \frac{\lambda^{-q}}{q}|\Omega|,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

[8] Ver Teorema A.4 do Apêndice.

[9] Ver Teorema A.14 do Apêndice.

onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Segue-se de (2.26) e (2.27) que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx\\
&\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla g|^p dx + \varepsilon^{p-1}\left(\frac{(\lambda diam(\Omega))^p}{p}2^p\left[\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega |\nabla g|^p dx\right] + \frac{\lambda^{-q}}{q}|\Omega|\right)\\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla g|^p dx + \frac{\varepsilon^{p-1}(2\lambda diam(\Omega))^p}{p}\left[\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega |\nabla g|^p dx\right] + \frac{\varepsilon^{p-1}\lambda^{-q}}{q}|\Omega|.
\end{aligned}
$$

Escolhendo λ tal que $\varepsilon^{p-1}(2\lambda diam(\Omega))^p = \dfrac{1}{2}$, obtemos

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla g|^p dx + \frac{1}{2p}\left[\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega |\nabla g|^p dx\right] + \frac{\varepsilon^{p-1}\lambda^{-q}}{q}|\Omega|.$$

Daí,

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2p}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \leq \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}\right)\int_\Omega |\nabla g|^p dx + \frac{\varepsilon^{p-1}\lambda^{-q}}{q}|\Omega|,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \leq \frac{3}{2p}\int_\Omega |\nabla g|^p dx + \frac{\varepsilon^{p-1}\lambda^{-q}}{q}|\Omega|.$$

Logo,

$$\||\nabla u_p|\|_{L^p(\Omega)} \leq (3|\Omega|)^{\frac{1}{p}}\||\nabla g|\|_{L^\infty(\Omega)} + \left(\frac{2p\varepsilon^{p-1}\lambda^{-q}|\Omega|}{q}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.28}$$

Notemos que

$$\limsup_{p\to\infty}\left(\frac{2p\varepsilon^{p-1}\lambda^{-q}|\Omega|}{q}\right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon, \tag{2.29}$$

pois,

$$\limsup_{p\to\infty} p^{\frac{1}{p}} = 1 \quad \text{e} \quad \limsup_{p\to\infty}\left(\frac{\lambda^{-q}}{q}\right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Por (2.28) e (2.29),

$$\limsup_{p\to\infty}\||\nabla u_p|\|_{L^p(\Omega)} \leq \||\nabla g|\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon.$$

Por outro lado, pelo Teorema A.12 e a Proposição A.13,

$$
\begin{aligned}
|u_p(x)-u_p(y)| &= |(u_p(x)-g(x))-(u_p(y)-g(y))+(g(x)-g(y))|\\
&\leq |(u_p-g)(x)-(u_p-g)(y)| + |(g(x)-g(y))|\\
&\leq \frac{2pN}{p-N}|x-y|^{1-\frac{N}{p}}\||\nabla(u_p-g)|\|_{L^p(\Omega)} + \||\nabla g|\|_{L^\infty(\Omega)}|x-y|.
\end{aligned}
$$

Assim, para $p\approx\infty$,

$$
\begin{aligned}
|u_p(x)-u_p(y)| &\leq 2N(|x-y|+|x-y|^{\frac{1}{2}})\||\nabla(u_p-g)|\|_{L^p(\Omega)} + \||\nabla g|\|_{L^\infty(\Omega)}|x-y|\\
&\leq c_1|x-y| + c_2|x-y|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas. Em consequência, (u_p) é equilimitada e equicontínua. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá[10], existe uma função contínua $u_\infty^{(\varepsilon)}$ e uma subsequência tal que

$$u_{p_j} \to u_\infty^{(\varepsilon)} \quad \text{uniformente em } \overline{\Omega}.$$

■

2.4 $u_p^{(\varepsilon)}$ é uma solução de viscosidade

Devido ao fato que podemos formular diferentes equações diferenciais, fazemos a seguinte definição geral para soluções de viscosidade.

Definição 2.16 *Consideremos uma função contínua* $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N \to \mathbb{R}$.

(i) Uma função $u \in C(\Omega)$ *é denominada* ***supersolução de viscosidade*** *da equação*

$$F(x, v, \nabla v, D^2 v) = 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

ou $F(x, u, \nabla u, D^2 u) \leq 0$ *no sentido de viscosidade em* Ω*, se para cada* $x_0 \in \Omega$ *e* $\phi \in C^2(\Omega)$ *que toca* v *em* x_0 *por baixo temos*

$$F(x_0, \phi(x_0), \nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0.$$

(ii) Uma função $u \in C(\Omega)$ *é denominada* ***subsolução de viscosidade*** *da equação*

$$F(x, v, \nabla v, D^2 v) = 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

ou $F(x, u, \nabla u, D^2 u) \geq 0$ *no sentido de viscosidade em* Ω*, se para cada* $x_0 \in \Omega$ *e* $\varphi \in C^2(\Omega)$ *que toca* v *em* x_0 *por cima tem-se*

$$F(x_0, \varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0.$$

(iii) Uma função $u \in C(\Omega)$ *é denominada* ***solução de viscosidade*** *da equação*

$$F(x, v, \nabla v, D^2 v) = 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

ou $F(x, u, \nabla u, D^2 u) = 0$ *no sentido de viscosidade em* Ω*, se* u *é uma supersolução e subsolução de viscosidade.*

Vejamos a função F correspondente a equação $\Delta_p u = 0$ para $2 \leq p \leq \infty$:

[10]Ver Teorema B.1 do Apêndice.

- Seja $2 \leq p < \infty$, considere-se a função

$$\begin{array}{rcl} F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N & \to & \mathbb{R} \\ (x,t,z,M) & \mapsto & F(x,t,z,M) = |z|^{p-2}\text{traço}(M) + (p-2)|z|^{p-4}\langle\, Mz, z\rangle, \end{array}$$

pois,

$$\Delta_p u = |\nabla u|^{p-2}\Delta u + (p-2)|\nabla u|^{p-4}\langle\, D^2u\nabla u, \nabla u\rangle.$$

- Para $p = \infty$, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N & \to & \mathbb{R} \\ (x,t,z,M) & \mapsto & F(x,t,z,M) = \langle\, Mz, z\rangle, \end{array}$$

pois,

$$\Delta_\infty u = \langle\, D^2u\nabla u, \nabla u\rangle.$$

Agora, mostraremos que a função $u_\infty^{(\varepsilon)}$ obtida no Lema 2.15 é uma solução de viscosidade para uma certa equação. Primeiro, observemos o seguinte lema.

Lema 2.17 *Fixando $\varepsilon \geq 0$, tem-se que para cada $p > N$, a função $u_p^{(\varepsilon)}$, que é solução fraca do problema $(P_{p,\varepsilon}^+)$, é uma solução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_p u = -\varepsilon^{p-1}$.*

Demonstração. Denotemos $u_p^{(\varepsilon)}$ por u_p. Como u_p minimiza o funcional energia J_p, então

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p, \nabla\varphi\rangle dx - \varepsilon^{p-1}\int_\Omega \varphi dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

ou seja, $\Delta_p u_p + \varepsilon^{p-1} \leq 0$ no sentido fraco.

<u>Afirmação 1:</u> u_p é uma supersolução de viscosidade da equação $\Delta_p u + \varepsilon^{p-1} = 0$.

Suponhamos, por absurdo, que u_p não é uma supersolução de viscosidade da equação $\Delta_p u + \varepsilon^{p-1} = 0$, isto é, existem $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ tais que existe $\delta > 0$ com $B(x_0, \delta) \subset \Omega$ e

$$u_p(x) - \phi(x) > 0 = u_p(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \quad \text{e} \quad \Delta_p\phi(x_0) + \varepsilon^{p-1} > 0. \tag{2.30}$$

Considerar

$$\begin{array}{rcl} F_p : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N & \to & \mathbb{R} \\ (x,t,z,M) & \mapsto & F(x,t,z,M) = |z|^{p-2}\text{traço}(M) + (p-2)|z|^{p-4}\langle\, Mz, z\rangle + \varepsilon^{p-1}, \end{array}$$

logo

$$F_p(x,u,\nabla u,D^2u)=\Delta_p u+\varepsilon^{p-1}.$$

Como F_p é contínua, tem-se que para algum raio $\delta > r > 0$ suficientemente pequeno vale

$$F_p(x,\phi(x),\nabla\phi(x),D^2\phi(x))>0,\ \forall\, x\in B(x_0,r),$$

pois $\Delta_p\phi(x_0)+\varepsilon^{p-1}>0$. Daí,

$$\Delta_p\phi(x)+\varepsilon^{p-1}>0,\ \forall\, x\in B(x_0,r), \tag{2.31}$$

assim, ϕ é uma subsolução clássica em $B(x_0,r)$ da equação $F_p(x,u(x),\nabla u(x),D^2u(x))=0$. Agora, definindo

$$\begin{array}{rcl}\psi:\Omega & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \psi(x)=\phi(x)+\dfrac{1}{2}\min\limits_{\partial B(x_0,r)}\{u_p-\phi\}.\end{array}$$

e denotando $m=\min\limits_{\partial B(x_0,r)}\{u_p-\phi\}$, temos

$$\psi(x_0)=\phi(x_0)+\frac{1}{2}m\overset{(2.30)}{=}u_p(x_0)+\frac{1}{2}m\overset{(2.30)}{>}u_p(x_0). \tag{2.32}$$

Além disso, para cada $x\in\Omega$,

$$\Delta_p\psi(x)=\Delta_p\left(\phi(x)+\frac{1}{2}m\right)=\Delta_p\phi(x). \tag{2.33}$$

Segue-se de (2.31) e (2.33) que

$$\Delta_p\psi(x)+\varepsilon^{p-1}=\Delta_p\phi(x)+\varepsilon^{p-1}>0,\ \forall\, x\in B(x_0,r).$$

Multiplicando por $(\psi-u_p)^+$ e integrando por partes a última desigualdade, temos

$$\begin{aligned}0 &\le \int_{B(x_0,r)}(\Delta_p\psi+\varepsilon^{p-1})(\psi-u_p)^+dx\\
&= \int_{B(x_0,r)}[\nabla\cdot(|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi)](\psi-u_p)^+dx+\int_{B(x_0,r)}\varepsilon^{p-1}(\psi-u_p)^+dx\\
&= -\int_{B(x_0,r)}\langle|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi,\nabla(\psi-u_p)^+\rangle dx+\int_{B(x_0,r)}\varepsilon^{p-1}(\psi-u_p)^+dx\\
&= -\left[\int_{B(x_0,r)\cap\{\psi>u_p\}}\langle|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi,\nabla(\psi-u_p)\rangle dx-\int_{B(x_0,r)\cap\{\psi>u_p\}}\varepsilon^{p-1}(\psi-u_p)dx\right].\end{aligned} \tag{2.34}$$

Estendendo a função $(\psi - u_p)^+$ como zero em $\Omega \backslash B(x_0, r)$ e pelo fato $F_p(x, u_p, \nabla u_p, D^2 u_p) \leq 0$ no sentido fraco, obtemos de maneira similar à desigualdade (2.34) que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega \langle\, |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p, \nabla(\psi - u_p)^+ \rangle dx - \int_\Omega \varepsilon^{p-1} (\psi - u_p)^+ dx \\ &= \int_{B(x_0,r)} \langle\, |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p, \nabla(\psi - u_p)^+ \rangle dx - \int_{B(x_0,r)} \varepsilon^{p-1} (\psi - u_p)^+ dx \\ &= \int_{B(x_0,r) \cap \{\psi > u_p\}} \langle\, |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p, \nabla(\psi - u_p) \rangle dx - \int_{B(x_0,r) \cap \{\psi > u_p\}} \varepsilon^{p-1} (\psi - u_p) dx. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Das desigualdades (2.34) e (2.35), tem-se que

$$\int_{B(x_0,r) \cap \{\psi > u_p\}} \langle |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi, \nabla(\psi - u_p) \rangle dx - \int_{B(x_0,r) \cap \{\psi > u_p\}} \varepsilon^{p-1} (\psi - u_p) dx \leq 0$$

e

$$- \int_{B(x_0,r) \cap \{\psi > u_p\}} \langle\, |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p, \nabla(\psi - u_p) \rangle dx + \int_{B(x_0,r) \cap \{\psi > u_p\}} \varepsilon^{p-1} (\psi - u_p) dx \leq 0,$$

assim,

$$\int_{B(x_0,r_1) \cap \{\psi > u_p\}} \langle |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi - |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p, \nabla(\psi - u_p) \rangle dx \leq 0.$$

Daí, de forma análoga ao Lema 2.8,

$$\psi \leq u_p \;\text{ em }\; B(x_0, r),$$

concluímos que u_p é uma supersolução de viscosidade em Ω.

Afirmação 2: u_p é uma subsolução de viscosidade da equação $\Delta_p u + \varepsilon^{p-1} = 0$.

Com um argumento similar à Afirmação 1, mostra-se que u_p é uma subsolução de viscosidade da equação $\Delta_p u + \varepsilon^{p-1} = 0$.

Em conclusão, das Afirmações 1 e 2, a função u_p é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_p u = -\varepsilon^{p-1}$. ■

2.5 $u_\infty^{(\varepsilon)}$ é uma solução de viscosidade

Nesta seção, provaremos que a função $u_\infty^{(\varepsilon)}$ é uma solução de viscosidade de uma equação que envolve o operador ∞-laplaciano. Assim, veremos que isto é suficiente para garantir que o problema (P_∞) possui pelo menos uma solução de viscosidade.

Teorema 2.18 *Para cada $\varepsilon \geq 0$, a função $u_\infty^{(\varepsilon)}$ é uma solução de viscosidade da equação*

$$\max\{\varepsilon - |\nabla v|, \Delta_\infty v\} = 0.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon \geq 0$, considerando a aplicação

$$\begin{array}{rcl} F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N & \to & \mathbb{R} \\ (x, t, z, M) & \mapsto & F(x, t, z, M) = \max\{\varepsilon - |z|, \langle\, Mz, z\rangle\}, \end{array}$$

na Definição 2.16, observamos que para mostrar o teorema temos que verificar:

I. $\max\left\{\varepsilon - |\nabla u_\infty^{(\varepsilon)}|, \Delta_\infty u_\infty^{(\varepsilon)}\right\} = F\left(x, u, \nabla u_\infty^{(\varepsilon)}, D^2 u_\infty^{(\varepsilon)}\right) \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω,

II. $\max\left\{\varepsilon - |\nabla u_\infty^{(\varepsilon)}|, \Delta_\infty u_\infty^{(\varepsilon)}\right\} = F\left(x, u, \nabla u_\infty^{(\varepsilon)}, D^2 u_\infty^{(\varepsilon)}\right) \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω.

Isto é:

I. para qualquer $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca $u_\infty^{(\varepsilon)}$ em x_0 por baixo, vale que

$$\max\{\varepsilon - |\nabla \phi(x_0)|, \Delta_\infty \phi(x_0)\} \leq 0,$$

II. para qualquer $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ que toca $u_\infty^{(\varepsilon)}$ em x_0 por cima, vale que

$$\max\{\varepsilon - |\nabla \varphi(x_0)|, \Delta_\infty \varphi(x_0)\} \geq 0.$$

Ou seja:

I. para qualquer $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca $u_\infty^{(\varepsilon)}$ em x_0 por baixo, vale que

$$\varepsilon \leq |\nabla \phi(x_0)| \quad \text{e} \quad \Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0,$$

II. para qualquer $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ que toca $u_\infty^{(\varepsilon)}$ em x_0 por cima, vale que

$$\varepsilon \geq |\nabla \varphi(x_0)| \quad \text{ou} \quad \Delta_\infty \varphi(x_0) \geq 0.$$

[I.] Seja $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ uma função que toca $u_\infty^{(\varepsilon)}$ por baixo em x_0. Então, existe $r > 0$ com $B(x_0, r) \subset \Omega$ tal que

$$u_\infty^{(\varepsilon)}(x) - \phi(x) > 0 = u_\infty^{(\varepsilon)}(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}. \tag{2.36}$$

Pelos Lemas 2.15 e 2.17, tem-se que existe uma subsequência $(u_{p_k}^{(\varepsilon)})$ de $(u_p^{(\varepsilon)}) \subset C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_{p_k}^{(\varepsilon)} \to u_\infty^{(\varepsilon)} \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}, \tag{2.37}$$

onde $u_p^{(\varepsilon)}$ é uma solução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_p u = -\varepsilon^{p-1}$. Segue-se de (2.36), (2.37) e do Lema 2.11 que existe uma sequência (x_k) com $x_k \to x_0$ tal que

$$u_{p_k}^{(\varepsilon)}(x_k) - \phi(x_k) = \min_{B(x_0,r)} (u_{p_k}^{(\varepsilon)} - \phi).$$

Pelo Lema 2.17 e de forma similar à Proposição 2.6, temos que

$$\Delta_{p_k}\phi(x_k) \leq -\varepsilon^{p_k-1}, \ \forall\, k \in \mathbb{N},$$

assim,

$$|\nabla\phi(x_k)|^{p_k-4}(|\nabla\phi(x_k)|^2\Delta\phi(x_k) + (p_k-2)\Delta_\infty\phi(x_k)) \leq -\varepsilon^{p_k-1}, \ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2.38}$$

Se $\varepsilon > 0$, então, pela desigualdade (2.38),

$$|\nabla\phi(x_k)| > 0, \tag{2.39}$$

pois se $|\nabla\phi(x_k)| = 0$, dá um absurdo. Agora, dividindo a desigualdade (2.38) por $(p_k-2)|\nabla\phi(x_k)|^{p_k-4}$ encontramos

$$\frac{|\nabla\phi(x_k)|^2}{(p_k-2)}\Delta\phi(x_k) + \Delta_\infty\phi(x_k) \leq \frac{-\varepsilon^3}{(p_k-2)}\left(\frac{\varepsilon}{|\nabla\phi(x_k)|}\right)^{p_k-4},$$

Fazendo $k \to \infty$, temos que

$$\Delta_\infty\phi(x_0) \leq \lim_{k\to\infty}\left[\frac{-\varepsilon^3}{(p_k-2)}\left(\frac{\varepsilon}{|\nabla\phi(x_k)|}\right)^{p_k-4}\right], \tag{2.40}$$

Agora, suponhamos, por absurdo, que $|\nabla\phi(x_0)| < \varepsilon$, então

$$\Delta_\infty\phi(x_0) = -\infty,$$

o que é absurdo, pois $\Delta_\infty\phi(x_0) \in \mathbb{R}$ para cada $x_0 \in \Omega$. Portanto,

$$|\nabla\phi(x_0)| \geq \varepsilon. \tag{2.41}$$

Por (2.40) e (2.41),

$$\Delta_\infty\phi(x_0) \leq 0.$$

Das últimas desigualdades, concluímos que se $\varepsilon > 0$, então

$$\varepsilon \leq |\nabla \phi(x_0)| \quad \text{e} \quad \Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0. \tag{2.42}$$

Por outro lado, seja $\varepsilon = 0$. Quando $|\nabla \phi(x_0)| = 0$, temos que

$$\Delta_\infty \phi(x_0) = \frac{1}{2}\langle \nabla \phi(x_0), \nabla |\nabla \phi(x_0)|^2 \rangle = 0,$$

e assim,

$$\varepsilon \leq |\nabla \phi(x_0)| \quad \text{e} \quad \Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0.$$

Além disso, se $|\nabla \phi(x_0)| > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\nabla \phi(x_k)| > 0, \ \forall\, k \geq k_0,$$

que juntamente com (2.38), implica que

$$\frac{\Delta \phi(x_k)}{(p_k - 2)} + \frac{\Delta_\infty \phi(x_k)}{|\nabla \phi(x_k)|^2} \leq 0, \ \forall\, k \geq k_0.$$

Fazendo $k \to \infty$, encontramos

$$\frac{\Delta_\infty \phi(x_0)}{|\nabla \phi(x_0)|^2} \leq 0,$$

assim,

$$\Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0,$$

pois $|\nabla \phi(x_0)| > 0$. Portanto, se $\varepsilon = 0$, vale que

$$\varepsilon \leq |\nabla \phi(x_0)| \quad \text{e} \quad \Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0. \tag{2.43}$$

Segue-se de (2.42) e (2.43) que

$$\varepsilon \leq |\nabla \phi(x_0)| \quad \text{e} \quad \Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0. \tag{2.44}$$

[II.] É verdadeiro que $\max\{\varepsilon - |\nabla u_\infty^{(\varepsilon)}|, \Delta_\infty u_\infty^{(\varepsilon)}\} \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω, pois a demonstração é similar a [I.]. ■

O próximo teorema resume a teoria o que foi desenvolvido até agora.

Teorema 2.19 *(Teorema de existência e unicidade para $(P_{\infty,\max})$ e (P_∞), Jensen [17]) Sejam $\varepsilon \geq 0$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana. A função $u_\infty^{(\varepsilon)}$, dada pelo Lema 2.15, é uma solução de viscosidade em Ω com $u_\infty = g$ em $\partial\Omega$ do problema*

$$\begin{cases} \max\{\varepsilon - |\nabla u|, \Delta_\infty u\} = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_{\infty,\max}$}$$

Em particular, se $\varepsilon = 0$, temos que o problema

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_\infty)$$

possui como solução de viscosidade em Ω com valor de fronteira g à função $u_\infty^{(0)} = u_\infty$, dada na Seção 1.2.

Tendo em vista que no Teorema 2.19 demonstramos que o problema (P_∞) tem solução de viscosidade, agora apresentaremos uma solução de viscosidade explicita da equação $\Delta_\infty v = 0$.

Exemplo 1 *A função*

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & u(x,y) = x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}, \end{array}$$

é uma solução de viscosidade de $\Delta_\infty v = 0$ em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{4}{3}y^{\frac{1}{3}}, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = 0, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}, \text{ em } (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{4}{9}y^{-\frac{2}{3}}, \text{ em } \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\setminus\{0\}). \end{aligned}$$

Logo, para cada $(x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times (\mathbb{R}\setminus\{0\})$,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty u(x,y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \\ &= \frac{4^3}{3^4}x^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}} + 0 + 0 - \frac{4^3}{3^4}y^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, u é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_\infty v = 0$ em $(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times (\mathbb{R}\setminus\{0\})$, pois $u \in C^2((\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times (\mathbb{R}\setminus\{0\}))$. Agora, tomemos um ponto $p_0 \in \{(x_0,0),(0,y_0)\}$

e $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ uma função que toca u por cima em p_0. Então, existe $r > 0$ com $B(p_0, r) \subset \Omega$ tal que

$$u(x) - \phi(x) < 0 = u(p_0) - \phi(p_0), \ \forall\, x \in B(p_0, r) \setminus \{p_0\}.$$

Em particular, tomando $p_0 = (x_0, 0)$, observamos que

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, 0), \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, 0)\right) = \nabla\phi(x_0, 0) = \nabla u(x_0, 0) = \frac{4}{3}(x_0^{\frac{1}{3}}, 0),$$

então,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty \phi(x_0, 0) &= (\phi_x(x_0, 0))^2 \phi_{xx}(x_0, 0) + 2\phi_x(x_0, 0)\phi_y(x_0, 0)\phi_{yx}(x_0, 0) \\ &\quad + (\phi_y(x_0, 0))^2 \phi_{yy}(x_0, 0) \\ &= \frac{4^2}{3^2} x_0^{\frac{2}{3}} \phi_{xx}(x_0, 0). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Como $(u - \phi)(p_0)$ é um máximo, tem-se que

$$(u - \phi)_{xx}(x_0, 0) \leq 0,$$

ou seja,

$$\phi_{xx}(x_0, 0) \geq u_{xx}(x_0, 0) = \frac{4}{9} x_0^{-\frac{2}{3}}. \tag{2.46}$$

Segue-se de (2.45) e (2.46) que

$$\Delta_\infty \phi(x_0, 0) = \frac{4^2}{3^2} x_0^{\frac{2}{3}} \phi_{xx}(x_0, 0) \geq \frac{4^3}{3^4} x_0^{\frac{2}{3}} x_0^{-\frac{2}{3}} = \frac{4^3}{3^4} > 0.$$

Em consequência, u é uma subsolução de viscosidade de $\Delta_\infty v = 0$ em $\mathbb{R} \times \{0\}$. De maneira similar, temos o fato anterior em $\{0\} \times \mathbb{R}$. Assim, temos que u é uma subsolução de viscosidade de $\Delta_\infty v = 0$ em $\mathbb{R}^2$. De forma análoga mostra-se que u é uma supersolução de viscosidade de $\Delta_\infty v = 0$ em $\mathbb{R}^2$. ∎

Agora, consideremos um problema similar ao problema $(P^+_{p,\varepsilon})$:

$$\begin{cases} \Delta_p u = \varepsilon^{p-1}, & \text{em } \Omega, \\ u = f, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P^-_{p,\varepsilon}$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $f \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ e $N < p < \infty$.

De maneira semelhante a análise feita para o problema $(P^+_{p,\varepsilon})$, definimos o que é uma solução fraca para $(P^-_{p,\varepsilon})$ e obtemos a existência e unicidade de solução fraca para o problema $(P^-_{p,\varepsilon})$.

Definição 2.20 *Uma função* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *é denominada solução fraca do problema* $(P^-_{p,\varepsilon})$ *em* Ω *se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\varphi\rangle dx = -\varepsilon^{p-1}\int_\Omega \varphi dx,$$

para cada $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$ *e* $u = f$ *em* $\partial\Omega$ *no sentido do traço, isto é,* $u - f \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Da mesma maneira que foi feita no Teorema 2.14 , obtém-se o próximo teorema.

Teorema 2.21 *Para cada* $\varepsilon \geq 0$*, o problema* $(P^-_{p,\varepsilon})$ *possui uma única solução fraca denotada por* $u^{(\varepsilon)}_p$.

Também obtemos um resultado semelhante ao Lema 1.4.

Lema 2.22 *Sejam* $\varepsilon \geq 0$ *e* $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$*. Então, existem uma subsequência* $(u^{(\varepsilon)}_{p_k})$ *de* $(u^{(\varepsilon)}_p)$*, onde* $u^{(\varepsilon)}_p$ *é a solução fraca do problema* $(P^-_{p,\varepsilon})$*, e uma função* $u^{(\varepsilon)}_\infty \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ *tal que*

$$\lim_{p_k\to\infty} u^{(\varepsilon)}_{p_k} = u^{(\varepsilon)}_\infty, \quad \textit{uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{2.47}$$

Por outra parte, logra-se provar que $u^{(\varepsilon)}_p$ e $u^{(\varepsilon)}_\infty$ são soluções de viscosidade das equações $\Delta_p u = \varepsilon^{p-1}$ e $\min\{|\nabla u| - \varepsilon, \Delta_\infty u\} = 0$, respectivamente.

Lema 2.23 *Fixando* $\varepsilon \geq 0$*, tem-se que para cada* $p > N$*, a função* $u^{(\varepsilon)}_p$*, que é solução fraca do problema* $(P^-_{p,\varepsilon})$*, é uma solução de viscosidade em* Ω *da equação* $\Delta_p u = \varepsilon^{p-1}$.

Com este último lema, demonstramos a existência de solução de viscosidade do problema $(P_{\infty,\min})$.

Teorema 2.24 *(Teorema de existência e unicidade para* $(P_{\infty,\min})$*, Jensen [17])*
Sejam $\varepsilon \geq 0$ *e* $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *uma função lipschitziana. A função* $u^{(\varepsilon)}_\infty$*, dada pelo Lema 2.15, é uma solução de viscosidade em* Ω *com* $u_\infty = g$ *em* $\partial\Omega$ *do problema*

$$\begin{cases} \min\{|\nabla u| - \varepsilon, \Delta_\infty u\} = 0, & \textit{em } \Omega, \\ u = g, & \textit{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_{\infty,\min}$}$$

O Teorema 2.24 é importante, pois ele será usado para mostrar a unicidade de solução de viscosidade do problema (P_∞).

Capítulo 3

Propriedades e caracterizações de u_∞

Neste Capítulo, abordaremos algumas caracterizações e propriedades para as soluções de viscosidade de $\Delta_\infty u = 0$. Como já é conhecido nos estudos fundamentais que as funções harmônicas e $p-$harmônicas satisfazem uma Fórmula da Média e uma desigualdade tipo Harnack, então o objetivo deste capítulo é provar que as funções $\infty-$harmônicas também possuem propriedades similares. Além disso, veremos uma caracterização das funções que são soluções de viscosidade de $\Delta_\infty u = 0$ com as funções cones.

3.1 Fórmula Assintótica da Média

Nesta seção, demonstraremos uma Fórmula da Média para a equação $\Delta_\infty u = 0$ mais fraca que a Fórmula da Média da equação $\Delta_p u = 0$ para $2 \leq p < \infty$. Primeiro lembremos esta última fórmula.

Teorema 3.1 *(Fórmula da média para a equação $\Delta u = 0$)*[1]
Uma função u é harmônica em um domínio Ω se, e somente se,

$$u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(x)dx + o(r^2), \text{ quando } r \to 0, \tag{3.1}$$

para cada $x_0 \in \Omega$.

[1] Ver [13].

Também, nas funções p-harmônicas (isto é, soluções da equação $\Delta_p u = 0$) ocorre a Fórmula da Média no sentido de viscosidade. Mas, para isso precisamos ver a seguinte definição.

Definição 3.2 *Dado $2 \leq p \leq \infty$. Uma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz*

$$u(x_0) = \frac{p-2}{p+N}\left[\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,r)}\{u\} + \min_{B(x_0,r)}\{u\}\right)\right] + \frac{2+N}{p+N}\fint_{B(x_0,r)} u(x)dx + o(r^2), \ \ se\ r \to 0, \tag{3.2}$$

no sentido de viscosidade em Ω se

(i) para qualquer $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por baixo temos que

$$-\phi(x_0) + \frac{p-2}{p+N}\left[\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,r)}\{\phi\} + \min_{B(x_0,r)}\{\phi\}\right)\right] + \frac{2+N}{p+N}\fint_{B(x_0,r)} u(x)dx + o(r^2) \leq 0,$$

*isto é, u é **supersolução de viscosidade** da equação (3.2), e*

(ii) para qualquer $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por cima temos que

$$-\phi(x_0) + \frac{p-2}{p+N}\left[\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,r)}\{\phi\} + \min_{B(x_0,r)}\{\phi\}\right)\right] + \frac{2+N}{p+N}\fint_{B(x_0,r)} u(x)dx + o(r^2) \geq 0,$$

*isto é, u é **subsolução de viscosidade** da equação (3.2).*

Teorema 3.3 *(Fórmula Assintótica da Média para a equação $\Delta_p u = 0$)*[2]
Sejam $2 \leq p \leq \infty$ e u uma função contínua em um domínio Ω. A seguinte igualdade

$$u(x) = \frac{p-2}{p+N}\left[\frac{1}{2}\left(\max_{B(x,r)}\{u(y)\} + \min_{B(x,r)}\{u(y)\}\right)\right] + \frac{2+N}{p+N}\fint_{B(x_0,r)} u(y)dy + o(r^2), \tag{3.3}$$

quando $r \to 0$, vale para cada $x \in \Omega$ no sentido de viscosidade em Ω se, e somente se,

$$\Delta_p u(x) = 0,$$

no sentido de viscosidade em Ω.

Notemos os seguintes fatos sobre a equação (3.3):

a) Tomando $p = 2$ em (3.3), obtemos a equação (3.1) no sentido de viscosidade em Ω.

[2] Manfredi, Parvianinen e Rossi [25]

b) Escolhendo $p = \infty$ em (3.3), temos a identidade:

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\max_{B(x,r)}\{u(y)\} + \min_{B(x,r)}\{u(y)\}\right) + o(r^2), \text{ quando } r \to 0, \tag{3.4}$$

no sentido de viscosidade em Ω. Veremos no Teorema 3.8 que a última identidade é a Fórmula Assintótica da Média para as funções $\infty-$harmônicas.

Observação 3.4 *A identidade (3.4) não é válida no sentido clássico para todas as funções que são soluções de viscosidade da equação $\Delta_\infty u = 0$. De fato, consideremos a função $\infty-$harmônica dada no Exemplo 1*[3]*:*

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & u(x,y) = x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}. \end{array}$$

Temos que

$$\max_{B((1,0),\varepsilon)}\{u(x_1,y_1)\} = u(1+\varepsilon,0) = |1+\varepsilon|^{\frac{4}{3}}. \tag{3.5}$$

Para determinar o mínimo, vamos trabalhar com coordenadas polares, ou seja,

$$x = \varepsilon\cos(\theta) \;\; e \;\; y = \varepsilon sen(\theta), \tag{3.6}$$

e resolver a equação:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\theta}u(1+\varepsilon\cos(\theta), \varepsilon sen(\theta)) &= \frac{d}{d\theta}(|1+\varepsilon\cos(\theta)|^{\frac{4}{3}} + |\varepsilon sen(\theta)|^{\frac{4}{3}}) \\ &= -\frac{4}{3}(1+\varepsilon\cos(\theta))^{\frac{1}{3}}\varepsilon sen(\theta) - \frac{4}{3}(\varepsilon sen(\theta))^{\frac{1}{3}}\varepsilon\cos(\theta). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon\cos(\theta))^{\frac{1}{3}} sen(\theta) &= -(\varepsilon sen(\theta))^{\frac{1}{3}}\cos(\theta) \\ (1+\varepsilon\cos(\theta))(sen(\theta))^3 &= -(\varepsilon sen(\theta))(\cos(\theta))^3 \\ 1+\varepsilon\cos(\theta) &= -\frac{\varepsilon(\cos(\theta))^3}{(sen(\theta))^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Aplicando a identidade trigonométrica $(sen(\theta))^2 = 1 - (cos(\theta))^2$ na equação (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon\cos(\theta))(1-(\cos(\theta))^2) &= -\varepsilon(\cos(\theta))^3 \\ 1-(\cos(\theta))^2 + \varepsilon\cos(\theta) - \varepsilon(\cos(\theta))^3 &= -\varepsilon(\cos(\theta))^3 \\ 1-(\cos(\theta))^2 + \varepsilon\cos(\theta) &= 0 \\ (\cos(\theta))^2 - \varepsilon\cos(\theta) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

[3]Ver pág.55.

Pela fórmula de Bhaskara, tem-se que

$$\cos(\theta) = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{4+\varepsilon^2}}{2},$$

assim,

$$\theta_\varepsilon = \arccos\left(\frac{\varepsilon \pm \sqrt{4+\varepsilon^2}}{2}\right).$$

Consideremos a solução

$$\begin{aligned} \min_{B((1,0),\varepsilon)}\{u(x_1,y_1)\} &= u(1+\varepsilon\cos(\theta_\varepsilon), \varepsilon sen(\theta_\varepsilon)) \\ &= \left(1+\frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon-\sqrt{4+\varepsilon^2})\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\varepsilon\sqrt{1-\frac{1}{4}(\varepsilon-\sqrt{4+\varepsilon^2})^2}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (3.8) \end{aligned}$$

Portanto, de (3.5) *e* (3.8),

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon^2}\left(u(1,0)-\frac{1}{2}\left(\max_{B(x,r)}\{u(x_1,y_1)\}+\min_{B(x,r)}\{u(x_1,y_1)\}\right)\right)\neq 0.$$

Porém, se a Fórmula Assintótica da Média vale no sentido clássico, tal limite deveria ser igual a zero, o que é absurdo. Mostrando assim que nem todas as funções $\infty-$*harmônicas satisfazem, no sentido clássico, a Fórmula Assintótica da Média para as funções* $\infty-$*harmônicas.*

Antes de demonstrar a Fórmula da Média para as funções $\infty-$harmônicas, veremos uma lema útil para isso.

Lema 3.5 *Se* $\phi \in C^2(\Omega)$ *e* $\nabla\phi(x_0) \neq 0$*, onde* $x_0 \in \Omega$*, então vale a seguinte identidade:*

$$\phi(x_0) = \frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}+\min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}\right) - \frac{\varepsilon^2}{2|\nabla\phi(x_0)|^2}\Delta_\infty\phi(x_0) + o(\varepsilon^2), \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Demonstração. Como $\nabla\phi(x_0) \neq 0$, tem-se que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\nabla\phi(x)| > 0, \ \forall\, x \in \overline{B(x_0,\varepsilon)}. \quad (3.9)$$

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange determinaremos os valores extremos de ϕ. De fato, temos

$$\begin{cases} \nabla\phi(x_1,x_2,\cdots,x_N) = \lambda\nabla g(x_1,x_2,\cdots,x_N), \\ g(x_1,x_2,\cdots,x_N) = \varepsilon^2, \end{cases}$$

onde $x_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,N})$ e $g(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{0,i})^2$. Daí,

$$\begin{cases} \nabla\phi(x) = 2\lambda(x - x_0), \\ \sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{0,i})^2 = \varepsilon^2. \end{cases} \tag{$S1$}$$

Logo,

$$x_i = \frac{\phi_{x_i}(x)}{2\lambda} + x_{0,i}, \ \forall\, i = 1, \cdots, N, \tag{3.10}$$

pois λ não pode ser igual a zero. Substituindo (3.10) em $(S1)$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(\phi_{x_i}(x))^2}{4\lambda^2} = \varepsilon^2,$$

assim,

$$\frac{1}{4\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{N}(\phi_{x_i}(x))^2 = \lambda^2,$$

ou seja,

$$\lambda = \pm\frac{|\nabla\phi(x)|}{2\varepsilon}. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.11) em (3.10), tem-se que

$$x_i = \pm\varepsilon\frac{\phi_{x_i}(x)}{|\nabla\phi(x)|} + x_{0,i}, \ \forall\, i = 1, \cdots, N.$$

Portanto, os pontos onde ϕ atinge seus valores extremos são

$$x = x_0 \pm \varepsilon\frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|}. \tag{3.12}$$

Também,

$$\frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|} = \frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|} + o(\varepsilon), \tag{3.13}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Por outro lado, seja $\bar{x}$ um ponto em Ω tal que

$$x + \bar{x} = 2x_0. \tag{3.14}$$

Fazendo a expansão de Taylor para ϕ,

$$\phi(y) = \phi(x_0) + \langle\nabla\phi(x_0), y - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)(y - x_0), y - x_0\rangle + o(|y - x_0|^2).$$

Se tomamos $y = x$ e depois $y = \bar{x}$ na última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\phi(x) + \phi(\bar{x}) &= 2\phi(x_0) + \langle \nabla\phi(x_0), x - x_0 + \bar{x} - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)(\bar{x} - x_0), \bar{x} - x_0 \rangle + o(\varepsilon^2) \\
&\overset{(3.14)}{=} 2\phi(x_0) + \langle \nabla\phi(x_0), 0 \rangle + \langle D^2\phi(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + o(\varepsilon^2) \\
&= 2\phi(x_0) + \langle D^2\phi(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + o(\varepsilon^2), \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Ora, escolhemos $x_1,\ x_2 \in \Omega$ tal que

$$\phi(x_1) = \min_{|y - x_0| = \varepsilon}\{\phi(y)\} \ \text{ e } \ \phi(x_2) = \max_{|y - x_0| = \varepsilon}\{\phi(y)\}. \qquad (3.16)$$

Notemos que

$$\phi(x_2) + \phi(x_1) \overset{(3.16)}{\leq} \max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}.$$

Por (3.17) e (3.15),

$$\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}\right) - \phi(x_0) \geq \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)(x_1 - x_0), x_1 - x_0 \rangle + o(\varepsilon^2), \quad (3.17)$$

quando $\varepsilon \to 0$. De maneira similar, temos que

$$\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}\right) - \phi(x_0) \overset{(3.15)}{\leq} \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)(x_2 - x_0), x_2 - x_0 \rangle + o(\varepsilon^2), \qquad (3.18)$$

quando $\varepsilon \to 0$. De (3.12), (3.17) e (3.18),

$$\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}\right) - \phi(x_0) \geq \frac{\varepsilon^2}{2}\left\langle D^2\phi(x_0)\frac{\nabla\phi(x_1)}{|\nabla\phi(x_1)|}, \frac{\nabla\phi(x_1)}{|\nabla\phi(x_1)|}\right\rangle + o(\varepsilon^2)$$

e

$$\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}\right) - \phi(x_0) \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\left\langle D^2\phi(x_0)\frac{\nabla\phi(x_2)}{|\nabla\phi(x_2)|}, \frac{\nabla\phi(x_2)}{|\nabla\phi(x_2)|}\right\rangle + o(\varepsilon^2),$$

quando $\varepsilon \to 0$. Pelas últimas desigualdades e (3.13), tem-se

$$\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}\right) - \phi(x_0) = \frac{\varepsilon^2}{2}\left\langle D^2\phi(x_0)\frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}, \frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}\right\rangle + o(\varepsilon^2),$$

ou seja,

$$\phi(x_0) = \frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}\right) - \frac{\varepsilon^2}{2}\left\langle D^2\phi(x_0)\frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}, \frac{\nabla\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|}\right\rangle + o(\varepsilon^2),$$

sendo assim,

$$\phi(x_0) = \frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\phi(y)\}\right) - \frac{\varepsilon^2}{2|\nabla\phi(x_0)|^2}\Delta_\infty\phi(x_0) + o(\varepsilon^2),$$

quando $\varepsilon \to 0$. ■

Definamos quando uma função contínua u satisfaz a equação (3.4) no sentido de viscosidade.

Definição 3.6 *A função $u \in C(\Omega)$ satisfaz*

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\max_{B(x,\varepsilon)}\{u(y)\} + \min_{B(x,\varepsilon)}\{u(y)\}\right) + o(\varepsilon^2), \text{ quando } \varepsilon \to 0, \tag{3.19}$$

no sentido de viscosidade em Ω se:

(i) $-\phi(x_0) + \frac{1}{2}\left(\max_{B(x,\varepsilon)}\{\phi(y)\} + \min_{B(x,\varepsilon)}\{\phi(y)\}\right) + o(\varepsilon^2) \leq 0$, *quando* $\varepsilon \to 0$,
*para qualquer $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por baixo, isto é, u é **super-solução de viscosidade** em Ω da equação (3.19). Além disso, se $\nabla\phi(x_0) = 0$, então ϕ também deve satisfazer*

$$D^2\phi(x_0) \leq 0.$$

(ii) $-\psi(x_0) + \frac{1}{2}\left(\max_{B(x,\varepsilon)}\{\psi(y)\} + \min_{B(x,\varepsilon)}\{\psi(y)\}\right) + o(\varepsilon^2) \geq 0$, *quando* $\varepsilon \to 0$,
*para qualquer $x_0 \in \Omega$ e $\psi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por cima, isto é, u é **subsolução de viscosidade** em Ω da equação (3.19). Além disso, se $\nabla\psi(x_0) = 0$, então ϕ também deve satisfazer*

$$D^2\psi(x_0) \geq 0.$$

Observação 3.7 *As restrições $\nabla\phi(x_0) = 0$ e $\nabla\psi(x_0) = 0$ são usadas da seguinte forma*

$$\lim_{y\to x_0}\frac{\phi(y)-\phi(x_0)}{|y-x_0|^2} \leq 0 \quad e \quad \lim_{y\to x_0}\frac{\psi(y)-\psi(x_0)}{|y-x_0|^2} \geq 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= \phi(x_0) + \langle\nabla\phi(x_0), y-x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)(y-x_0), y-x_0\rangle + o(|y-x_0|^2). \\
&= \phi(x_0) + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)(y-x_0), y-x_0\rangle + o(|y-x_0|^2). \\
&\leq \phi(x_0) + o(|y-x_0|^2), \text{ quando } \varepsilon \to 0,
\end{aligned}$$

já que $D^2\phi(x_0) \leq 0$. *Assim,*

$$\lim_{y\to x_0} \frac{\phi(y)-\phi(x_0)}{|y-x_0|^2} \leq 0.$$

De forma análoga, obtemos a outra desigualdade.

Agora, mostraremos a equivalência entre a identidade (3.4) no sentido de viscosidade e as funções $\infty-$harmônicas.

Teorema 3.8 *(Fórmula Assintótica da Média para as funções $\infty-$harmônicas)*[4]
Dado $u \in C(\Omega)$. *Temos* $\Delta_\infty u = 0$ *no sentido de viscosidade em* Ω *se, e só se, a equação* (3.19) *vale no sentido de viscosidade em* Ω.

Demonstração. Comecemos mostrando a equivalência das subsoluções de viscosidade da equação $\Delta_\infty u = 0$ e da identidade (3.19).

<u>Afirmação 1:</u> $\Delta_\infty u \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω se, e só se,

$$u(x) \leq \frac{1}{2}\left(\max_{B(x,\varepsilon)}\{u\} + \min_{B(x,\varepsilon)}\{u\}\right) + o(\varepsilon^2), \text{ quando } \varepsilon \to 0, \tag{3.20}$$

no sentido de viscosidade em Ω.

Dado $x_0 \in \Omega$ e $\psi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por cima.

<u>Caso 1:</u> $\nabla\psi(x_0) \neq 0$.

Pelo Lema 3.5,

$$\psi(x_0) = \frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi\}\right) - \frac{\varepsilon^2}{2|\nabla\psi(x_0)|^2}\Delta_\infty\psi(x_0) + o(\varepsilon^2), \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{3.21}$$

Suponhamos inicialmente que u é uma subsolução de viscosidade em Ω de $\Delta_\infty u = 0$, então

$$\Delta_\infty\psi(x_0) \geq 0, \tag{3.22}$$

daí, por (3.21) e (3.22),

$$\psi(x_0) \overset{(3.22)}{\leq} \frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi\}\right) + o(\varepsilon^2), \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Portanto, u é uma subsolução de viscosidade da equação (3.19). Tomemos agora este último fato como hipótese e demonstremos que u é uma subsolução de viscosidade da

[4] Manfredi, Parvianinen e Rossi [25]

equação $\Delta_\infty u = 0$. Notemos que

$$\psi(x_0) \leq \frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi\}\right) + o(\varepsilon^2), \text{ quando } \varepsilon \to 0, \tag{3.23}$$

assim, por (3.21) e (3.23),

$$\Delta_\infty \psi(x_0) \geq 0. \tag{3.24}$$

Portanto, quando $\nabla\psi(x_0) \neq 0$, temos que u é subsolução de viscosidade em x_0 de $\Delta_\infty u = 0$ se, e só se, u é subsolução de viscosidade em x_0 da equação (3.19).

<u>Caso 2:</u> $\nabla\psi(x_0) = 0$.

Neste caso, para mostrar que u é subsolução de viscosidade da equação (3.19) a partir da hipótese de que u é uma função $\infty-$subharmônica, precisamos a condição $D^2\psi(x_0) \geq 0$ para a função teste ψ. Logo, pela Observação 3.7,

$$\lim_{y\to x_0} \frac{\psi(y) - \psi(x_0)}{|y - x_0|^2} \geq 0. \tag{3.25}$$

Daí, consideremos o ponto $x_\varepsilon \in \Omega$ tal que

$$\psi(x_\varepsilon) = \min_{|x-x_0|\leq\varepsilon}\{\psi(x)\}. \tag{3.26}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi(x)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi(x)\}\right) - \psi(x_0)\right] \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi(x)\} - \psi(x_0)\right) + \frac{1}{2}\left(\min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi(x)\} - \psi(x_0)\right)\right] \\
&\geq \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi(x)\} - \psi(x_0)\right) \\
&\overset{(3.26)}{=} \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\psi(x_\varepsilon) - \psi(x_0)\right) \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\frac{\psi(x_\varepsilon) - \psi(x_0)}{|x_\varepsilon - x_0|^2}\right)|x_\varepsilon - x_0|^2 \\
&= \frac{1}{2}\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\psi(x_\varepsilon) - \psi(x_0)}{|x_\varepsilon - x_0|^2}\right)\frac{|x_\varepsilon - x_0|^2}{\varepsilon^2}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Já que $x_\varepsilon \in \overline{B(x_0,\varepsilon)}$ e de (3.25) e (3.27), obtemos

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi(x)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi(x)\}\right) - \psi(x_0)\right] \geq 0,$$

sendo assim,

$$\psi(x_0) \leq \frac{1}{2}\left(\max_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi(x)\} + \min_{B(x_0,\varepsilon)}\{\psi(x)\}\right) + o(\varepsilon^2), \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Segue-se daí que u é subsolução de viscosidade em x_0 da equação (3.19) quando $\nabla\psi(x_0) = 0$. Por outro lado, supondo que u é $\infty-$subharmônica, tem-se

$$\Delta_\infty \psi(x_0) = \frac{1}{2}\langle \nabla\psi, \nabla|\nabla\psi|^2\rangle(x_0) \geq 0,$$

pois $\nabla\psi(x_0) = 0$. Consequentemente, u é subsolução de viscosidade em Ω de $\Delta_\infty u = 0$.
Afirmação 2: $\Delta_\infty u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω se, e só se,

$$u(x) \geq \frac{1}{2}\left(\max_{B(x,\varepsilon)}\{u\} + \min_{B(x,\varepsilon)}\{u\}\right) + o(\varepsilon^2), \text{ quando } \varepsilon \to 0, \tag{3.28}$$

no sentido de viscosidade em Ω.
Pela Proposição 2.5 e a Afirmação 1, fica provado esta afirmação. ■

3.2 Comparação com cones

Nesta seção, apresentamos uma caracterização geométrica das soluções de viscosidade para a equação $\Delta_\infty u = 0$, denominada "Princípio de Comparação com Cones" e estabelecida por Crandall, Evans e Gariepy [9].

No que segue, vamos introduzir o conceito de cone e exibir uma de suas propriedades.

Definição 3.9 *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $a, b \in \mathbb{R}$. A função*

$$\begin{array}{rcl} C : \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C(x) = a + b|x - x_0|, \end{array}$$

*é denominada **cone** com vértice em $x_0 \in \mathbb{R}^N$.*

Proposição 3.10 *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $a, b \in \mathbb{R}$, a função cone com vértice em $x_0 \in \mathbb{R}^N$, denotada por C, é uma solução de viscosidade de $\Delta_\infty u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$.*

Demonstração. De fato,

$$|\nabla C(x)| = |b|, \ \forall\, x \neq x_0,$$

sendo assim,

$$\Delta_\infty C(x) = \frac{1}{2}\langle \nabla C(x), \nabla |\nabla C(x)|^2 \rangle = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}.$$

Portanto, C é uma solução clássica da equação $\Delta_\infty u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$. Então, pelo Teorema 2.7, $\Delta_\infty C = 0$ no sentido de viscosidade em $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$. ■

Um fato importante para as funções $\infty-$harmônicas é que elas podem ser caracterizadas através da comparação com cones. Para mostrar a comparação com cones, primeiro definamos o que venha a ser uma função satisfazendo o princípio de comparação com cones.

Definição 3.11 *Consideremos uma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$.*

(i) Dizemos que a função u satisfaz o ***princípio de comparação com cones por baixo*** *se para cada subdomínio $D \subset\subset \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus D$ e $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se que*

$$u(x) \geq C(x) = a + b|x - x_0|, \ \forall\, x \in \partial D,$$

implica

$$u(x) \geq C(x) = a + b|x - x_0|, \ \forall\, x \in D.$$

(ii) A função u satisfaz o ***princípio de comparação com cones por cima*** *se para cada subdomínio $D \subset\subset \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus D$ e $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se que*

$$u(x) \leq C(x) = a + b|x - x_0|, \ \forall\, x \in \partial D,$$

implica

$$u(x) \leq C(x) = a + b|x - x_0|, \ \forall\, x \in D.$$

(iii) A função u satisfaz o ***princípio de comparação com cones*** *se vale o princípio de comparação com cones por baixo e cima.*

Uma outra maneira de reescrever a última definição é da seguinte forma.

Definição 3.12 *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

(i) Diremos que a função u satisfaz o ***princípio de comparação com cones por baixo*** *quando para cada subdomínio $D \subset\subset \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus D$ e $b \in \mathbb{R}$, vale que*

$$u(x) - b|x - x_0| \geq \min_{\xi \in \partial D}\{u(\xi) - b|\xi - x_0|\}, \ \forall\, x \in D.$$

(ii) *A função u satisfaz o* ***princípio de comparação com cones*** *por cima quando para cada subdomínio $D \subset\subset \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus D$ e $b \in \mathbb{R}$, vale que*

$$u(x) - b|x - x_0| \leq \max_{\xi \in \partial D}\{u(\xi) - b|\xi - x_0|\}, \ \forall\, x \in D.$$

(iii) *A função u satisfaz o* ***princípio de comparação com cone*** *se vale o princípio de comparação com cones por baixo e cima.*

Ora, vejamos que as Afirmações 3.11 e 3.12 são equivalentes.

Proposição 3.13 *As Definições 3.11 e 3.12 são equivalentes.*

Demonstração. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

[Definição 3.11.(i) $\Rightarrow$ Definição 3.12.(i)] De fato, dados um subdomínio $D \subset\subset \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus D$ e $b \in \mathbb{R}$, temos que

$$u(x) - b|x - x_0| \geq \min_{\xi \in \partial D}\{u(\xi) - b|\xi - x_0|\}, \ \forall\, x \in \partial D,$$

ou seja,

$$u(x) \geq a + b|x - x_0|, \ \forall\, x \in \partial D,$$

onde $a = \min_{\xi \in \partial D}\{u(\xi) - b|\xi - x_0|\}$. E pela implicação da definição 3.11.(i), obtemos

$$u(x) \geq a + b|x - x_0|, \ \forall\, x \in D,$$

isto é,

$$u(x) - b|x - x_0| \geq \min_{\xi \in \partial D}\{u(\xi) - b|\xi - x_0|\}, \ \forall\, x \in D.$$

[Definição 3.12.(i) $\Rightarrow$ Definição 3.11.(i)] Dados um subdomínio $D \subset\subset \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus D$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$u(x) - b|x - x_0| \geq \min_{\xi \in \partial D}\{u(\xi) - b|\xi - x_0|\}, \ \forall\, x \in D. \tag{3.29}$$

Se vale a seguinte desigualdade:

$$u(x) \geq a + b|x - x_0|, \ \forall\, x \in \partial D, \tag{3.30}$$

temos que

$$u(x) - b|x - x_0| \overset{(3.29)}{\geq} \min_{\xi \in \partial D}\{u(\xi) - b|\xi - x_0|\} \overset{(3.30)}{\geq} a, \ \forall\, x \in D,$$

ou seja,

$$u(x) \geq a + b|x - x_0|, \; \forall \, x \in D.$$

[Definição 3.12.(ii) $\Leftrightarrow$ Definição 3.11.(ii)] A prova é análoga as demonstrações das duas últimas implicações.

[Definição 3.12.(iii) $\Leftrightarrow$ Definição 3.11.(iii)] A prova segue-se das equivalências:

(i) Definição 3.12.(i) $\Leftrightarrow$ Definição 3.11.(i)

(ii) Definição 3.12.(ii) $\Leftrightarrow$ Definição 3.11.(ii)

$\blacksquare$

Por conveniência do leitor, mostraremos a seguinte implicação para funções que satisfazem o princípio de comparação com cones por cima ou por baixo.

Lema 3.14 *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz o princípio de comparação com cones por cima, então para cada $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ tais que $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$ vale que*

$$u(x) \leq u(x_0) + \max_{\xi \in \partial B(x_0,r)} \left\{ \frac{u(\xi) - u(x_0)}{r} \right\} |x - x_0|, \tag{3.31}$$

para cada $x \in \overline{B(x_0, r)}$.

Demonstração. Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ tais que $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$. Como

$$\overline{B(x_0, r)} = \partial(B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cup (B(x_0, r) \setminus \{x_0\}),$$

então é suficiente provar que a desigualdade (3.31) vale para cada um dos subconjuntos.

<u>Afirmação 1:</u> A desigualdade (3.31) vale para cada $x \in \partial(B(x_0, r) \setminus \{x_0\})$.

Se $x = x_0$, obtemos que

$$u(x) = u(x_0) + \max_{\xi \in \partial B(x_0,r)} \left\{ \frac{u(\xi) - u(x_0)}{r} \right\} |x - x_0|.$$

Além disso, quando $x \in \partial B(x_0, r)$, tem-se que

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{|x - x_0|} \leq \max_{\xi \in \partial B(x_0,r)} \left\{ \frac{u(\xi) - u(x_0)}{|\xi - x_0|} \right\} = \max_{\xi \in \partial B(x_0,r)} \left\{ \frac{u(\xi) - u(x_0)}{r} \right\},$$

ou seja,

$$u(x) - u(x_0) \leq \max_{\xi \in \partial B(x_0,r)} \left\{ \frac{u(\xi) - u(x_0)}{r} \right\} |x - x_0|.$$

Portanto, como $\partial(B(x_0,r)\setminus\{x_0\}) = \partial B(x_0,r)\cup\{x_0\}$, temos a desigualdade (3.31) para cada $x \in \partial(B(x_0,r)\setminus\{x_0\})$.

Afirmação 2: A desigualdade (3.31) vale para qualquer $x \in B(x_0,r)\setminus\{x_0\}$.

Pela Afirmação 1, temos

$$u(x) \leq C(x) = a + b|x-x_0|, \; \forall\, x \in \partial(B(x_0,r)\setminus\{x_0\}),$$

onde $a = u(x_0)$ e $b = \max\limits_{\xi\in\partial B(x_0,r)}\left\{\dfrac{u(\xi)-u(x_0)}{r}\right\}$. Já que C é um cone com vértice em x_0 e $x_0 \notin B(x_0,r)\setminus\{x_0\}$, então,

$$u(x) \leq C(x) = a + b|x-x_0|, \; \forall\, x \in B(x_0,r)\setminus\{x_0\},$$

pois a função u satisfaz o princípio de comparação com cones por cima. Mostrando assim a Afirmação 2. ■

De maneira semelhante ao último lema, prova-se que:

Lema 3.15 *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz o princípio de comparação com cones por baixo, então para cada $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ tais que $B(x_0,r) \subset\subset \Omega$ vale que*

$$u(x) \geq u(x_0) + \min_{\xi\in\partial B(x_0,r)}\left\{\frac{u(\xi)-u(x_0)}{r}\right\}|x-x_0|,$$

para cada $x \in \overline{B(x_0,r)}$.

Afim de demonstrar a caracterização das funções $\infty-$harmônicas, primeiro garantiremos que se a função u é $\infty-$subharmônica ou $\infty-$superharmônica, então u satisfaz o princípio de comparação com cones por cima ou por baixo, respectivamente.

Teorema 3.16 *Se $\Delta_\infty u \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω, então u satisfaz o princípio de comparação com cones por cima.*

Demonstração. Sejam $\gamma > 0$ suficientemente pequeno, $b \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Consideremos a função

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \psi(x) = b|x-x_0| - \gamma|x-x_0|^2. \end{aligned}$$

Comecemos mostrando que para cada subdomínio $D \subset\subset \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N\setminus D$ e $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, vale que

$$u(x) - b|x-x_0| \leq \max_{\xi\in\partial D}\{u(\xi) - b|\xi-x_0|\}, \; \forall\, x \in D.$$

Notemos que, para $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$,

$$\nabla\psi(x) = \nabla(b|x-x_0| - \gamma|x-x_0|^2) = b\frac{x-x_0}{|x-x_0|} - 2\gamma(x-x_0), \tag{3.32}$$

e

$$\begin{aligned}(\nabla|\nabla\psi|^2)(x) &= \nabla\left|\left(\frac{b}{|x-x_0|} - 2\gamma\right)(x-x_0)\right|^2 \\ &= \nabla\left[b^2 - 4b\gamma|x-x_0| + 4\gamma^2|x-x_0|^2\right] \\ &= \nabla\left[(b-2\gamma|x-x_0|)^2\right] \\ &= -4\gamma\left(\frac{b-2\gamma|x-x_0|}{|x-x_0|}\right)(x-x_0). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Por (3.32) e (3.33), para cada $x \in (\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\})$, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_\infty\psi(x) &= \frac{1}{2}\langle\nabla\psi(x), \nabla|\nabla\psi(x)|^2\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle\left(\frac{b}{|x-x_0|} - 2\gamma\right)(x-x_0), -4\gamma\left(\frac{b-2\gamma|x-x_0|}{|x-x_0|}\right)(x-x_0)\right\rangle \\ &= -2\gamma(b-2\gamma|x-x_0|)^2 < 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Por outro lado, como a função ψ pertence a $C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\})$, tem-se que $u-\psi$ atinge seu máximo em $\overline{D}$, onde $D \subset\subset \Omega$ e $x_0 \notin D$. Agora, suponhamos, por absurdo, que $u-\psi$ atinge seu máximo em D. Pela Proposição 2.6, temos que

$$\Delta_\infty\psi(z_0) \geq 0, \tag{3.35}$$

onde $z_0 \in D$ é o ponto de máximo. Porém, de (3.34) e (3.35),

$$0 \leq \Delta_\infty\psi(z_0) < 0, \tag{3.36}$$

o que é uma contradição. Portanto, $u-\psi$ atinge seu máximo em ∂D, sendo assim,

$$(u-\psi)(x) \leq \max_{\xi\in\partial D}\{(u-\psi)(\xi)\},\ \forall\, x \in \overline{D},$$

ou seja,

$$u(x) - b|x-x_0| + \gamma|x-x_0|^2 \leq \max_{\xi\in D}\{u(\xi) - b|\xi-x_0| + \gamma|\xi-x_0|^2\},\ \forall\, x \in \overline{D}.$$

Fazendo $\gamma \to 0$ na última desigualdade, obtemos

$$u(x) - b|x-x_0| \leq \max_{\xi\in D}\{u(\xi) - b|\xi-x_0|\},\ \forall\, x \in \overline{D}.$$

Em consequência, para cada subdomínio $D \subset\subset \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus D$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vale que

$$u(x) - b|x - x_0| \leq \max_{\xi \in \partial D}\{u(\xi) - b|\xi - x_0|\}, \ \forall\, x \in D. \tag{3.37}$$

Agora, procederemos à demonstração da desigualdade (3.37) quando $b = 0$, ou seja,

$$u(x) \leq \max_{\xi \in \partial D}\{u(\xi)\}, \ \forall\, x \in D.$$

De fato, fazendo $b \to 0$ na desigualdade (3.37), obtemos a desigualdade (3.38).

Das análises feitas, mostra-se que para cada subdomínio $D \subset\subset \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus D$ e $b \in \mathbb{R}$, vale que

$$u(x) - b|x - x_0| \leq \max_{\xi \in \partial D}\{u(\xi) - b|\xi - x_0|\}, \ \forall\, x \in D,$$

isto é, a função u satisfaz o princípio de comparação com cones por cima. ■

Um resultado análogo para as supersoluções de viscosidade.

Teorema 3.17 *Se $\Delta_\infty u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω, então u satisfaz o princípio de comparação com cones por baixo.*

A partir dos Teoremas 3.16 e 3.17, fica provado o seguinte resultado.

Teorema 3.18 *Se $\Delta_\infty u = 0$ no sentido de viscosidade em Ω, então u satisfaz o princípio de comparação com cones.*

Dos Lemas 3.14 e 3.15 e do Teorema 3.18, notamos que se u é uma solução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = 0$, então para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ tais que $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$ vale que

$$C_1(x) \leq u(x) \leq C_2(x),$$

para cada $x \in \overline{B(x_0, r)}$, onde C_1 e C_2 são funções cones com vértice em x_0 definidas por

$$\begin{aligned} C_1 : \overline{B(x_0,r)} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto C_1(x) = u(x_0) + \min_{\xi \in \partial B(x_0,r)} \left\{\frac{u(\xi) - u(x_0)}{r}\right\} |x - x_0| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C_2 : \overline{B(x_0,r)} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto C_2(x) = u(x_0) + \max_{\xi \in \partial B(x_0,r)} \left\{\frac{u(\xi) - u(x_0)}{r}\right\} |x - x_0|. \end{aligned}$$

Ora, vejamos que a recíproca dos Teoremas 3.16 e 3.17 são verdadeiros.

Teorema 3.19 *Se u satisfaz o princípio de comparação com cones por cima (por baixo), então $\Delta_\infty u \geq 0$ ($\Delta_\infty u \leq 0$) no sentido de viscosidade em Ω.*

Demonstração. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por cima. Então, existe $r > 0$ com $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$ tal que

$$u(w) - \varphi(w) < 0 = u(x_0) - \varphi(x_0), \ \forall\, w \in \overline{B(x_0, r)} \setminus \{x_0\}. \tag{3.38}$$

Como u satisfaz o princípio de comparação com cones por cima, então para todo $y \in \mathbb{R}^N$ e $\bar{r} > 0$ tais que $B(y, \bar{r}) \subset\subset \Omega$ vale que

$$u(x) \leq u(y) + \max_{\xi \in \partial B(y, \bar{r})} \left\{ \frac{u(\xi) - u(y)}{\bar{r}} \right\} |x - y|, \tag{3.39}$$

para cada $x \in \overline{B(y, \bar{r})}$.

<u>Afirmação 1:</u> Segue-se da desigualdade (3.39) que para qualquer $y \in \mathbb{R}^N$ e $\bar{r} > 0$ tais que $B(y, \bar{r}) \subset\subset \Omega$ vale que

$$u(x) - u(y) \leq \max_{\xi \in \partial B(y, \bar{r})} \{u(\xi) - u(x)\} \frac{|x - y|}{\bar{r} - |x - y|}, \ \forall\, x \in \overline{B(y, \bar{r})}. \tag{3.40}$$

De fato, para qualquer $x \in \overline{B(y, \bar{r})}$,

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(y) + \max_{\xi \in \partial B(y, \bar{r})} \left\{ \frac{u(\xi) - u(y)}{\bar{r}} \right\} |x - y| \\ &= \max_{\xi \in \partial B(y, \bar{r})} \{u(\xi)\} \frac{|x - y|}{\bar{r}} + \frac{\bar{r} - |x - y|}{\bar{r}} u(y), \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(x) - \frac{\bar{r} - |x - y|}{\bar{r}} u(y) \leq \max_{\xi \in \partial B(y, \bar{r})} \{u(\xi)\} \frac{|x - y|}{\bar{r}}.$$

Multiplicando por $\dfrac{\bar{r}}{\bar{r} - |x - y|}$ a última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in \partial B(y, \bar{r})} \{u(\xi)\} \frac{|x - y|}{\bar{r} - |x - y|} &\geq \frac{\bar{r}}{\bar{r} - |x - y|} u(x) - u(y) \\ &= \left(1 + \frac{|x - y|}{\bar{r} - |x - y|} \right) u(x) - u(y). \\ &= u(x) + \frac{|x - y|}{\bar{r} - |x - y|} u(x) - u(y), \end{aligned}$$

isto é,

$$u(x) - u(y) \leq \max_{\xi \in \partial B(y, \bar{r})} \{u(\xi) - u(x)\} \frac{|x - y|}{\bar{r} - |x - y|}.$$

Afirmação 2: Temos que

$$\phi(x_0) - \phi(y) \leq \frac{|x_0 - y|}{\hat{r} - |x_0 - y|} \max_{\xi \in \partial B(y,\hat{r})} \{\phi(\xi) - \phi(x_0)\},$$

onde $\hat{r} > 0$ é suficientemente pequeno e $|y - x_0| < \hat{r}$.

Dados $\hat{r} > 0$ com $B(x_0, \hat{r}) \subset\subset B(x_0, r)$ e $y \in B(x_0, \hat{r})$ tais que $B(y, \hat{r}) \subset\subset B(x_0, r)$, notemos que

$$\varphi(x_0) - \varphi(y) \overset{(3.38)}{\leq} u(x_0) - u(y) \overset{(3.40)}{\leq} \max_{\xi \in \partial B(y,\hat{r})} \{u(\xi) - u(x_0)\} \frac{|x_0 - y|}{\hat{r} - |x_0 - y|}. \tag{3.41}$$

Além disso, para cada $\xi \in \partial B(y, \hat{r})$, vale

$$u(\xi) - u(x_0) \overset{(3.38)}{\leq} \varphi(\xi) - \varphi(x_0), \tag{3.42}$$

pois $\partial B(y, \hat{r}) \subset B(x_0, r)$. De (3.41) e (3.42), obtemos

$$\varphi(x_0) - \varphi(y) \leq \max_{\xi \in \partial B(y,\hat{r})} \{\varphi(\xi) - \varphi(x_0)\} \frac{|x_0 - y|}{\hat{r} - |x_0 - y|}.$$

Agora, denote $q = \nabla \phi(x_0)$ e $A = D^2 \phi(x_0)$.

Caso 1: $q \neq 0$

Escolher $\lambda > 0$ suficientemente pequeno e

$$y_0 = x_0 - \lambda \nabla \phi(x_0) = x_0 - \lambda q.$$

Pela Afirmação 2,

$$\phi(x_0) - \phi(y_0) \leq \frac{|x_0 - y_0|}{\hat{r} - |x_0 - y_0|} \max_{\xi \in \partial B(y,\hat{r})} \{\phi(\xi) - \phi(x_0)\},$$

logo,

$$\phi(x_0) - \phi(y_0) \leq \frac{\lambda |q|}{\hat{r} - \lambda |q|} \max_{\xi \in \partial B(y,\hat{r})} \{\phi(\xi) - \phi(x_0)\}, \tag{3.43}$$

pois $y_0 - x_0 = -\lambda q$.

Segue-se da fórmula de Taylor que

$$\phi(y_0) = \phi(x_0) + \langle q, y_0 - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle A(y_0 - x_0), y_0 - x_0 \rangle + o(\lambda^2 |q|^2),$$

e como $y_0 - x_0 = -\lambda q$, temos

$$\phi(y_0) = \phi(x_0) - \lambda |q|^2 + \frac{\lambda^2}{2} \langle Aq, q \rangle + o(\lambda^2 |q|^2),$$

ou seja,

$$\phi(x_0) - \phi(y_0) = \lambda|q|^2 - \frac{\lambda^2}{2}\langle Aq, q\rangle - o(\lambda^2|q|^2). \tag{3.44}$$

Por (3.43) e (3.44),

$$\lambda|q|^2 - \frac{\lambda^2}{2}\langle Aq, q\rangle - o(\lambda^2|q|^2) \leq \frac{\lambda|q|}{\hat{r} - \lambda|q|} \max_{\xi\in\partial B(y,\hat{r})} \{\phi(\xi) - \phi(x_0)\}$$

Dividendo por λ a última desigualdade, tem-se

$$|q|^2 - \frac{\lambda}{2}\langle Aq, q\rangle - \frac{1}{\lambda}o(\lambda^2|q|^2) \leq \frac{|q|}{\hat{r} - \lambda|q|} \max_{\xi\in\partial B(y,\hat{r})} \{\phi(\xi) - \phi(x_0)\},$$

e fazendo $\lambda \to 0$,

$$|q|^2 \leq \frac{|q|}{\hat{r}} \max_{\xi\in\partial B(x_0,\hat{r})} \{\phi(\xi) - \phi(x_0)\}. \tag{3.45}$$

Seja $\xi_{\hat{r}}$ o ponto onde ϕ atinge seu máximo sobre a esfera, isto é,

$$\phi(\xi_{\hat{r}}) = \max_{\xi\in\partial B(x_0,\hat{r})} \phi(\xi). \tag{3.46}$$

De (3.45) e (3.46),

$$|q|^2 \leq \frac{|q|}{\hat{r}}(\phi(\xi_{\hat{r}}) - \phi(x_0)). \tag{3.47}$$

Novamente, pela fórmula de Taylor,

$$\phi(\xi_{\hat{r}}) - \phi(x_0) = \langle q, \xi_{\hat{r}} - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle A(\xi_{\hat{r}} - x_0), \xi_{\hat{r}} - x_0\rangle + o(|\xi_{\hat{r}} - x_0|^2). \tag{3.48}$$

Substituindo (3.48) na desigualdade (3.47), obtemos que

$$\begin{aligned} |q|^2 &\leq \frac{|q|}{\hat{r}}\left(\langle q, \xi_{\hat{r}} - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle A(\xi_{\hat{r}} - x_0), \xi_{\hat{r}} - x_0\rangle + o(|\xi_{\hat{r}} - x_0|^2)\right) \\ &= \frac{|q|}{\hat{r}}\langle q, \xi_{\hat{r}} - x_0\rangle + \frac{|q|}{2\hat{r}}\langle A(\xi_{\hat{r}} - x_0), \xi_{\hat{r}} - x_0\rangle + \frac{|q|}{\hat{r}}o(|\xi_{\hat{r}} - x_0|^2) \\ &\leq \frac{|q|^2}{\hat{r}}|\xi_{\hat{r}} - x_0| + \frac{|q|\hat{r}}{2}\left\langle A\left(\frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}}\right), \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}}\right\rangle + \frac{|q|}{\hat{r}}o(|\xi_{\hat{r}} - x_0|^2). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Já que $\xi_{\hat{r}} \in \partial B(x_0, \hat{r})$, a última desigualdade é da seguinte forma:

$$|q|^2 \leq |q|^2 + \frac{|q|\hat{r}}{2}\left\langle A\left(\frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}}\right), \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}}\right\rangle + \frac{|q|}{\hat{r}}o(\hat{r}^2).$$

ou seja,

$$0 \leq \left\langle A\left(\frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}}\right), \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}}\right\rangle + \frac{2}{\hat{r}^2}o(\hat{r}^2). \tag{3.50}$$

Por outro lado, por (3.49),

$$|q| \leq \left\langle q, \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle A\left(\frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}}\right), \xi_{\hat{r}} - x_0\right\rangle + \frac{1}{\hat{r}}o(|\xi_{\hat{r}} - x_0|^2),$$

e fazendo $\hat{r} \to 0$,

$$|q| \leq \left\langle q, \lim_{\hat{r}\to 0} \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}} \right\rangle. \tag{3.51}$$

Também, lembremos que

$$\left\langle q, \lim_{\hat{r}\to 0} \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}} \right\rangle = |q| \left| \lim_{\hat{r}\to 0} \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}} \right| \cos\alpha = |q| \left(\lim_{\hat{r}\to 0} \frac{|\xi_{\hat{r}} - x_0|}{\hat{r}} \right) \cos\alpha = |q| \cos\alpha, \tag{3.52}$$

onde α é o ângulo entre os vetores Assim, das desigualdades (3.51) e (3.52),

$$|q| \leq \left\langle q, \lim_{\hat{r}\to 0} \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}} \right\rangle = |q| \cos\alpha.$$

Daí, $\alpha = 0$, e portanto,

$$\left\langle \frac{q}{|q|}, \lim_{\hat{r}\to 0} \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}} \right\rangle = 1 = \left\langle \frac{q}{|q|}, \frac{q}{|q|} \right\rangle,$$

sendo assim,

$$\lim_{\hat{r}\to 0} \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}} = \frac{q}{|q|}. \tag{3.53}$$

Agora, fazendo $\hat{r} \to 0$ em (3.50),

$$0 \leq \left\langle A \left(\lim_{\hat{r}\to 0} \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}} \right), \lim_{\hat{r}\to 0} \frac{\xi_{\hat{r}} - x_0}{\hat{r}} \right\rangle \overset{(3.53)}{=} \left\langle A \left(\frac{q}{|q|} \right), \frac{q}{|q|} \right\rangle,$$

ou seja,

$$0 \leq \langle Aq, q \rangle. \tag{3.54}$$

Em consequência,

$$\Delta_\infty \phi(x_0) = \langle D^2\phi(x_0) \nabla\phi(x_0), \nabla\phi(x_0) \rangle \overset{(3.54)}{\geq} 0.$$

<u>Caso 2:</u> $q = 0$

De fato,

$$\Delta_\infty \phi(x_0) = \langle D^2\phi(x_0) \nabla\phi(x_0), \nabla\phi(x_0) \rangle = 0 \geq 0.$$

Em conclusão, segue-se dos Casos 1 e 2 que para qualquer $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por cima, vale que

$$\Delta_\infty \phi(x_0) \geq 0.$$

Então, u é uma subsolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = 0$.

De modo análogo, mostra-se que se u satisfaz o princípio de comparação com cones por baixo, então $\Delta_\infty u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. ■

Resumindo a teoria desenvolvida até agora, obtemos uma caracterização para as funções $\infty-$harmônicas.

Teorema 3.20 *(Princípio de Comparação com Cones para as funções $\infty-$harmônicas) Uma função $u \in C(\Omega)$ é uma solução de viscosidade em Ω para $\Delta_\infty v = 0$ se, e somente se, u satisfaz o princípio de comparação com cones.*

3.3 Desigualdade de Harnack

Nesta seção, mostraremos uma desigualdade tipo Harnack para $\Delta_\infty u = 0$ análoga à desigualdade de Harnack[5] para a equação $\Delta_p v = 0$ com $2 \leq p < \infty$.

Teorema 3.21 *Consideremos $\Delta_\infty u \leq 0$ em Ω no sentido de viscosidade. Se $u \geq 0$ em $B(x_0, R) \subset \Omega$, então*

$$u(y) \leq 3u(x),$$

onde $x, y \in B(x_0, r)$ com $4r < R$.

Demonstração. Como $\Delta_\infty u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω, então, pelo Teorema 3.17, u satisfaz o princípio de comparação com cones por baixo. Dados $r > 0$ tal que $4r < R$ e $y \in B(x_0, r)$. Temos que

$$|z - x_0| \leq |z - y| + |y - x_0| < 3r + r = 4r < R, \ \forall\, z \in B(y, 3r).$$

Segue-se daí que

$$B(y, 3r) \subset B(x_0, R),$$

e portanto.

$$u \geq 0 \ \text{ em } \ \partial B(y, 3r). \tag{3.55}$$

Além disso, do Lema 3.15,

$$\begin{aligned} u(x) &\geq u(y) + \min_{|\xi - y| = 3r} \left\{ \frac{u(\xi) - u(y)}{3r} \right\} |x - y| \\ &= \left(1 - \frac{|x-y|}{3r}\right) u(y) + \frac{|x-y|}{3r} \min_{|\xi - y| = 3r} \{u(\xi)\} \\ &\overset{(3.55)}{\geq} \left(1 - \frac{|x-y|}{3r}\right) u(y), \end{aligned} \tag{3.56}$$

[5]Ver Teoremas B.8 e B.9 do Apêndice.

para cada $x \in B(y, 3r)$.

Por outro lado, para quaisquer $x, y \in B(x_0, r)$, temos

$$|x - y| \leq |x - x_0| + |y - x_0| < 2r,$$

assim,

$$1 - \frac{|x - y|}{3r} > \frac{1}{3},\ \forall\, x, y \in B(x_0, r). \tag{3.57}$$

Também, já que $B(x_0, r) \subset B(y, 3r)$, pela desigualdade (3.56),

$$u(x) \geq \left(1 - \frac{|x - y|}{3r}\right) u(y),\ \forall\, x \in B(x_0, r). \tag{3.58}$$

Das desigualdades (3.57) e (3.56),

$$u(y) \leq 3u(x),\ \forall\, x \in B(x_0, r).$$

Além disso, consegue-se provar a partir da última desigualdade que

$$\sup_{B(x_0,r)} u(y) \leq 3 \inf_{B(x_0,r)} u(x), \tag{3.59}$$

onde $4r < R$, quando u é uma supersolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = 0$ e não negativa em $B(x_0, R) \subset \Omega$. ■

Teorema 3.22 *(Desigualdade de Harnack para as funções $\infty-$superharmônicas)* *Seja u uma função não negativa em Ω tal que $\Delta_\infty u \leq 0$ no sentido de viscosidade em Ω. Então, para qualquer subdomínio limitado $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe uma constante $c = c(N, \Omega', \Omega)$ tal que*

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u.$$

Demonstração. Dado $x_0 \in \Omega$ e uma bola $B(x_0, r) \subset \Omega$. Pela desigualdade (3.59), temos que

$$\sup_{B(x_0,r)} u(y) \leq 3 \inf_{B(x_0,r)} u(x). \tag{3.60}$$

Seja $\Omega' \subset\subset \Omega$. Escolher $x_1, x_2 \in \overline{\Omega'}$ tais que

$$u(x_1) = \sup_{\Omega'} u \quad \text{e} \quad u(x_2) = \inf_{\Omega'} u.$$

Dado um caminho fechado $\Gamma \subset \overline{\Omega'}$ que une os pontos x_1 e x_2, tomemos $R' > 0$ tal que

$$4R' < dist(\Gamma, \partial\Omega).$$

Pelo Teorema de Heine-Borel-Lebesgue[6], temos que Γ pode ser coberto por um número finito m de bolas de raio R'. Aplicando a desigualdade (3.60) em cada bola e substituindo em cada desigualdade obtida, obtemos

$$u(x_1) \leq 3^m u(x_2).$$

Consequentemente, da análise feita, existe uma constante positiva c tal que

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u.$$

■

[6] Ver [20, Teorema 23 do Capítulo 1].

Capítulo 4

Unicidade de solução de viscosidade para (P_∞)

O nosso objetivo neste capítulo é demonstrar a unicidade de solução de viscosidade para o problema:

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_∞}$$

onde $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função lipschitziana, pois no Teorema 2.19, foi mostrado a existência de solução de viscosidade para o problema (P_∞). Para isso, continuaremos trabalhando com os argumentos de Jensen [17] e a estrutura dada por Lindqvist [22].

4.1 Resultados relevantes para a unicidade de solução

Nesta seção, vamos a estudar os resultados e conceitos desenvolvidos pelos matemáticos Crandall, Ishii e Lions [11] e também de Koike [19] para demonstrar a unicidade de solução de viscosidade.

Proposição 4.1 *(Crandall-Ishii-Lions [11])*
Sejam $F, G \in C(\overline{\Lambda})$, onde Λ é um domínio limitado e $G \geq 0$. Além disso, para cada $\alpha > 0$, consideremos

$$M_\alpha = \sup_{z \in \Lambda}\{F(z) - \alpha G(z)\}.$$

Se $-\infty < \lim\limits_{\alpha \to \infty} M_\alpha < \infty$ e $z_\alpha \in \Lambda$ satisfaz

$$\lim_{\alpha \to \infty}[M_\alpha - (F(z_\alpha) - \alpha G(z_\alpha))] \leq 0,$$

então,

1) $\lim_{\alpha\to\infty}(\alpha G(z_\alpha)) = 0$*,*

2) $G(\hat{z}) = 0$ *e*

3) $\lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha = F(\hat{z}) = \sup_{G(z)=0}\{F(z)\}$*,*

onde $\hat{z} \in \overline{\Lambda}$ *tal que* $z_\alpha \to \hat{z}$ *quando* $\alpha \to \infty$*.*

Demonstração. Para qualquer $\alpha > 0$, consideremos

$$\delta_\alpha = M_\alpha - (F(z_\alpha) - \alpha G(z_\alpha)). \tag{4.1}$$

Logo, pela hipótese,

$$\delta_\alpha \to a \leq 0 \ \text{ quando } \ \alpha \to \infty. \tag{4.2}$$

[Prova de 1)] Se $\alpha_1 < \alpha_2$, então,

$$F(z) - \alpha_2 G(z) \leq F(z) - \alpha_1 G(z),\ \forall\, z \in \Lambda,$$

pois $G \geq 0$. Assim,

$$\sup_{z\in\Lambda}\{F(z) - \alpha_2 G(z)\} \leq \sup_{z\in\Lambda}\{F(z) - \alpha_1 G(z)\}, \ \text{ se } \ \alpha_1 < \alpha_2,$$

ou seja,

$$M_{\alpha_2} \leq M_{\alpha_1}, \ \text{ se } \ \alpha_1 < \alpha_2,$$

e portanto, M_α decresce quando α cresce. Por outro lado,

$$\begin{aligned} M_{\frac{\alpha}{2}} &= \sup_{z\in\Lambda}\{F(z) - \frac{\alpha}{2}G(z)\} \\ &\geq F(z_\alpha) - \frac{\alpha}{2}G(z_\alpha) \\ &= F(z_\alpha) - \alpha G(z_\alpha) + \frac{\alpha}{2}G(z_\alpha) \\ &\overset{(4.1)}{=} M_\alpha - \delta_\alpha + \frac{\alpha}{2}G(z_\alpha), \end{aligned}$$

implicando em

$$2(M_{\frac{\alpha}{2}} - M_\alpha + \delta_\alpha) \geq \alpha G(z_\alpha).$$

Daí,

$$\lim_{\alpha\to\infty}(\alpha G(z_\alpha)) \leq \lim_{\alpha\to\infty}[2(M_{\frac{\alpha}{2}} - M_\alpha + \delta_\alpha)] = \lim_{\alpha\to\infty} 2\delta_\alpha \overset{(4.2)}{\leq} 0. \tag{4.3}$$

Além disso,

$$\lim_{\alpha\to\infty}(\alpha G(z_\alpha)) \geq 0, \tag{4.4}$$

pois $\alpha G(z_\alpha) \geq 0$, para cada $\alpha > 0$. Em consequência, pelas desigualdades (4.3) e (4.4),

$$\lim_{\alpha\to\infty}(\alpha G(z_\alpha)) = 0.$$

Assim fica demonstrado o item 1).

Agora, tomemos uma sequência (α_n) tal que

$$\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \text{ e } \quad z_{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{z}.$$

[Prova de 2)] Pelo item 1), temos que

$$\alpha_n G(z_{\alpha_n}) \xrightarrow[\alpha_n\to\infty]{} 0, \tag{4.5}$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty} G(z_{\alpha_n}) = 0,$$

e segue-se da continuidade de G que $G(\hat{z}) = 0$.

[Prova de 3)] De (4.1),

$$\begin{aligned} F(z_{\alpha_n}) - \alpha_n G(z_{\alpha_n}) &= M_{\alpha_n} - \delta_{\alpha_n} \\ &= \sup_{z\in\Lambda}\{F(z) - \alpha_n G(z)\} - \delta_{\alpha_n} \\ &\geq \sup_{G(z)=0}\{F(z) - \alpha_n G(z)\} - \delta_{\alpha_n} \\ &= \sup_{G(z)=0}\{F(z)\} - \delta_{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Segue-se daí que

$$\lim_{n\to\infty}(F(z_{\alpha_n}) - \alpha_n G(z_{\alpha_n})) = \lim_{n\to\infty}(M_{\alpha_n} - \delta_{\alpha_n}) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{G(z)=0}\{F(z)\} - \delta_{\alpha_n}\right).$$

Assim, de (4.5) e (4.2),

$$F(\hat{z}) = \lim_{n\to\infty} M_{\alpha_n} - a \geq \sup_{G(z)=0}\{F(z)\} - a.$$

Logo,

$$F(\hat{z}) \overset{(4.2)}{\geq} \lim_{n\to\infty} M_{\alpha_n} \geq \sup_{G(z)=0}\{F(z)\} \overset{\text{Af.2}}{\geq} F(\hat{z}),$$

e portanto,

$$F(\hat{z}) = \lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha = \sup_{G(z)=0} \{F(z)\} \tag{4.6}$$

■

Um caso particular da Proposição 4.1 é a seguinte sentença.

Proposição 4.2 *Sejam* $u, w \in C(\overline{\Omega})$ *e*

$$M_j = \sup_{x,y\in\Omega} \left\{ u(x) - w(y) - \frac{j}{2}|x-y|^2 \right\},$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. *Se* $-\infty < \lim_{j\to\infty} M_j < \infty$ *e* $(x_j, y_j) \in \Omega \times \Omega$ *são tais que*

$$\lim_{j\to\infty} \left[M_j - \left(u(x_j) - w(y_j) - \frac{j}{2}|x_j - y_j|^2 \right) \right] \leq 0,$$

então,

1) $\lim_{j\to\infty} (j|x_j - y_j|^2) = 0$ *, e*

2) $\lim_{j\to\infty} M_j = u(\hat{x}) - w(\hat{x}) = \sup_{x\in\Omega}\{u(x) - w(x)\},$

onde $\hat{x} \in \overline{\Omega}$ *tal que* $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \hat{x}$.

Demonstração. A demonstração segue pela Proposição 4.1 fazendo as seguintes considerações:

- $m = 2N$,
- $\Lambda = \Omega \times \Omega$,
- $z = (x, y)$,
- $F(z) = F(x, y) = u(x) - w(y)$,
- $G(z) = G(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$,
- $\alpha = j$,
- $z_\alpha = z_j = (x_j, y_j)$ e
- $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$.

■

No que segue vamos definir dois conceitos que vão ajudar a estabelecer uma caracterização para as soluções de viscosidade.

Definição 4.3 *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função. O conjunto*

$$\left\{(\beta, X) \in \mathbb{N}^N \times \mathbb{S}^N : u(y) \leq u(x) + \langle \beta, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), x-y\rangle + o(|y-x|^2),\ y \to x\right\}$$

*é denominado **superdiferencial** de segunda ordem de u em $x \in \Omega$ e denotado por $J^{2,+}u(x)$ ou $D^{2,+}u(x)$. Além disso, o conjunto*

$$\left\{(\beta, X) \in \mathbb{N}^N \times \mathbb{S}^N : u(y) \geq u(x) + \langle \beta, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), x-y\rangle + o(|y-x|^2),\ y \to x\right\}$$

*é denominado **subdiferencial** de segunda ordem de u em $x \in \Omega$ e denotado por $J^{2,-}u(x)$ ou $D^{2,-}u(x)$.*

De acordo com a definição dada, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.4 .

(1) Para cada $x \in \Omega$, temos

$$-J^{2,+}(-u)(x) = J^{2,-}u(x).$$

(2) Se $J^{2,+}u(x) \cap J^{2,-}u(x) \neq \emptyset$, então $\nabla u(x)$ e $D^2u(x)$ existem e

$$J^{2,+}u(x) \cap J^{2,-}u(x) = \{(\nabla u(x), D^2u(x))\}.$$

Demonstração. Comecemos mostrando o item (1). De fato,

$$\begin{aligned}
(\beta, X) \in -J^{2,+}(-u)(x) \quad &\Leftrightarrow \quad (-\beta, -X) \in J^{2,+}(-u)(x) \\
&\Leftrightarrow \quad -u(y) \leq -u(x) + \langle -\beta, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle -X(y-x), x-y\rangle \\
&\qquad +o(|y-x|^2) \\
&\Leftrightarrow \quad u(y) \geq u(x) + \langle \beta, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), x-y\rangle \\
&\qquad +o(|y-x|^2) \\
&\Leftrightarrow \quad (\beta, X) \in J^{2,-}u(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado, a demonstração do item (2) é uma consequência direta da definição. ■

Proposição 4.5 *(Koike [19])*
Dados $u \in C(\Omega)$ e $x \in \Omega$. Existe uma sequência $(x_n) \in \Omega$ com $x_n \to x$ tal que

$$J^{2,+}u(x_n) \neq \emptyset, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, existe uma sequência $(\tilde{x}_n) \in \Omega$ com $\tilde{x}_n \to x$ tal que

$$J^{2,-}u(\tilde{x}_n) \neq \emptyset, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Dado $x \in \Omega$, podemos escolher $r > 0$ tal que $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$. Para cada $\varepsilon > 0$, consideremos a função

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : \overline{B(x,r)} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto F_\varepsilon(y) = u(y) - \frac{|y-x|^2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Como F_ε é contínua e $\overline{B(x,r)}$ é compacto, existe $x_\varepsilon \in \overline{B(x,r)}$ tal que

$$F_\varepsilon(x_\varepsilon) = \max_{y \in \overline{B(x,r)}} \{F_\varepsilon(y)\}.$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher $x_\varepsilon \in \overline{B(x,r)}$ tal que

$$u(x_\varepsilon) - \varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - x|^2 = \max_{y \in \overline{B(x,r)}} \{u(y) - \varepsilon^{-1}|y-x|^2\}. \tag{4.7}$$

Assim, para cada $\varepsilon > 0$,

$$|x_\varepsilon - x|^2 = \varepsilon \left(u(x_\varepsilon) - \max_{y \in \overline{B(x,r)}} \{u(y) - \varepsilon^{-1}|y-x|^2\} \right),$$

e portanto,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |x_\varepsilon - x|^2 = 0,$$

ou seja,

$$x_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} x. \tag{4.8}$$

Logo, podemos supor que

$$x_\varepsilon \in B(x,r), \ \text{para } \varepsilon \approx 0.$$

Além disso, da identidade (4.7),

$$u(y) - \varepsilon^{-1}|y-x|^2 \leq u(x_\varepsilon) - \varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - x|^2, \ \forall\, y \in \overline{B(x,r)}.$$

ou seja,

$$u(y) \leq u(x_\varepsilon) + \varepsilon^{-1}(|y-x|^2 - |x_\varepsilon - x|^2), \ \forall\, y \in \overline{B(x,r)}. \tag{4.9}$$

Também, para cada $y \in \overline{B(x,r)}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}(|y-x|^2 - |x_\varepsilon - x|^2) &= \varepsilon^{-1}(\langle y,y\rangle - \langle x_\varepsilon, x_\varepsilon\rangle - 2\langle x, y-x_\varepsilon\rangle) \\ &= \varepsilon^{-1}(\langle y, y-x_\varepsilon + x_\varepsilon\rangle - \langle x_\varepsilon, x_\varepsilon - y + y\rangle - 2\langle x, y-x_\varepsilon\rangle) \\ &= \varepsilon^{-1}(\langle y + x_\varepsilon, y - x_\varepsilon\rangle - 2\langle x, y-x_\varepsilon\rangle) \\ &= \varepsilon^{-1}(\langle y + x_\varepsilon, y - x_\varepsilon\rangle + 2\langle x_\varepsilon - x + x_\varepsilon, y-x_\varepsilon\rangle) \\ &= \langle 2\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon - x), y - x_\varepsilon\rangle + \langle \varepsilon^{-1}(y-x_\varepsilon), y - x_\varepsilon\rangle) \\ &= \langle 2\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon - x), y - x_\varepsilon\rangle + \frac{1}{2}\langle (2\varepsilon^{-1}I)(y-x_\varepsilon), y - x_\varepsilon\rangle), \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde I é a matriz identidade de ordem $N \times N$.

Agora, substituindo (4.10) em (4.9),

$$u(y) \leq u(x_\varepsilon) + \langle 2\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon - x), y - x_\varepsilon\rangle + \frac{1}{2}\langle (2\varepsilon^{-1}I)(y-x_\varepsilon), y - x_\varepsilon\rangle),$$

para qualquer $y \in \overline{B(x,r)}$. Segue-se daí que podemos considerar

$$\beta = 2\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon - x) \quad \text{e} \quad X = 2\varepsilon^{-1}I.$$

Em conclusão,

$$(2\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon - x), 2\varepsilon^{-1}I) \in J^{2,+}u(x_\varepsilon), \tag{4.11}$$

Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Por (4.8) e (4.11), existe uma sequência $(x_n) \in \Omega$ com $x_n \to x$ tal que

$$(2n(x_n - x), 2nI) \in J^{2,+}u(x_n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{4.12}$$

sendo assim,

$$J^{2,+}u(x_n) \neq \emptyset,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Por outro lado, pelo item (1) da Observação 4.4, mostra-se que existe uma sequência $(\tilde{x}_n) \in \Omega$ com $\tilde{x}_n \to x$ tal que

$$J^{2,-}u(\tilde{x}_n) \neq \emptyset,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

■

Definição 4.6 *O fecho de $J^{2,+}u(x)$ é definido como*

$$\begin{aligned}\overline{J^{2,+}}u(x) &= \{(\beta, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N : \exists (x_n) \subset \Omega, \exists (\beta_n, X_n) \in J^{2,+}u(x),\\ &\quad (x_n, u(x_n), \beta_n, X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, u(x), \beta, X)\}\end{aligned}$$

Também, o fecho de $J^{2,-}u(x)$ é definido como

$$\begin{aligned}\overline{J^{2,-}}u(x) &= \{(\beta, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N : \exists (x_n) \subset \Omega, \exists (\beta_n, X_n) \in J^{2,-}u(x),\\ &\quad (x_n, u(x_n), \beta_n, X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, u(x), \beta, X)\}\end{aligned}$$

Da Definição 4.6, é fácil ver que:

$$J^{2,+}u(x) \subset \overline{J^{2,+}}u(x) \quad \text{e} \quad J^{2,-}u(x) \subset \overline{J^{2,-}}u(x).$$

Teorema 4.7 *(Koike [19])*
Consideremos a função contínua

$$\begin{aligned} F_\infty : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N &\to \mathbb{R}\\ (x, t, \beta, X) &\mapsto F_\infty(x, t, \beta, X) = \langle Xp, \beta \rangle. \end{aligned}$$

Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua em Ω, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a.i) $F_\infty(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) \geq 0$ *no sentido de viscosidade em Ω.*

(a.ii) Se para cada $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in J^{2,+}u(x)$, temos que

$$F_\infty(x, u(x), \beta, X) \geq 0.$$

(a.iii) Se para cada $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in \overline{J^{2,+}}u(x)$, tem-se que

$$F_\infty(x, u(x), \beta, X) \geq 0.$$

Além disso, as sentenças:

(b.i) $F_\infty(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) \leq 0$ *no sentido de viscosidade em Ω,*

(b.ii) se para cada $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in J^{2,-}u(x)$, temos que $F_\infty(x, u(x), \beta, X) \leq 0$, e

(b.iii) se para cada $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in \overline{J^{2,-}}u(x)$, tem-se que $F_\infty(x, u(x), \beta, X) \leq 0$

são equivalentes.

Demonstração. $[(a.ii) \Rightarrow (a.iii)]$ Sejam $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in \overline{J^{2,+}}u(x)$. Pela Definição 4.6, existem $(x_n) \subset \Omega$ e $(\beta_n, X_n) \in J^{2,+}u(x)$ tais que

$$(x_n, u(x_n), \beta_n, X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, u(x), \beta, X).$$

Pela hipótese, temos que

$$F_\infty(x_n, u(x_n), \beta_n, X_n) \geq 0.$$

Agora, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$F_\infty(x, u(x), \beta, X) \geq 0,$$

pois F_∞ e u são contínuas em seus respectivos domínios.
$[(a.iii) \Rightarrow (a.i)]$ Dados $x \in \Omega$ e $\psi \in C^2(\Omega)$ uma função que toca u em x por cima. Então, existe $r > 0$ com $B(x, r) \subset \Omega$ tal que

$$u(y) - \psi(y) < 0 = u(x) - \psi(x), \ \forall\, y \in B(x, r) \setminus \{x\}. \tag{4.14}$$

Aplicando a fórmula de Taylor à função ψ, tem-se que

$$\psi(y) = \psi(x) + \langle \nabla\psi(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\psi(x)(y - x), x - y\rangle + o(|y - x|^2), \ y \to x.$$

Substituindo a última identidade na desigualdade (4.14), encontramos

$$u(y) < u(x) + \langle \nabla\psi(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\psi(x)(y - x), x - y\rangle + o(|y - x|^2), \ y \to x.$$

Logo,

$$(\nabla\psi(x), D^2\psi(x)) \in J^{2,+}u(x),$$

e portanto,

$$(\nabla\psi(x), D^2\psi(x)) \in \overline{J^{2,+}}u(x),$$

pois $J^{2,+}u(x) \subset \overline{J^{2,+}}u(x)$. Por hipótese, vale que

$$0 \leq F_\infty(x, \psi(x), \nabla\psi(x), D^2\psi(x)).$$

Em consequência, $F_\infty(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) \geq 0$ no sentido de viscosidade em Ω.
$[(a.i) \Rightarrow (a.ii)]$ Sejam $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in J^{2,+}u(x)$. Logo,

$$u(y) \leq u(x) + \langle \beta, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y - x), x - y\rangle + o(|y - x|^2), \ y \to x.$$

Também, existe[1] $w_0 \in C([0,\infty),[0,\infty))$ tal que $w_0(0)=0$ e

$$\sup_{y\in B(x,r)\setminus\{x\}} \frac{1}{|x-y|^2}\left(u(y)-u(x)-\langle \beta, y-x\rangle - \frac{1}{2}\langle X(y-x), x-y\rangle\right) \leq w_0(|y-x|),$$

para cada $y \in B(x,r)\setminus\{x\}$. No que segue consideremos a função:

$$\begin{array}{rcl} w:(0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & w(r) = \sup\limits_{t\in[0,r]} w_0(t). \end{array}$$

Assim,

$$u(y) \leq u(x) + \langle \beta, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), x-y\rangle + |y-x|^2 w(r),\ \forall\, y \in B(x,r). \quad (4.15)$$

Agora, defina

$$\begin{array}{rcl} \psi : B(x,r) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \psi(y) = u(x) + \langle \beta, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), x-y\rangle + \gamma(|y-x|), \end{array}$$

onde

$$\gamma(t) = \int_t^{\sqrt{2}t}\left(\int_s^{2s} w(r)dr\right) ds. \quad (4.16)$$

Note que $\psi \in C^2(B(x,r))$ e

$$(\beta, X) = (\nabla\psi(x), D^2\psi(x)). \quad (4.17)$$

Além disso,

$$u(y) - \psi(y) < 0 = u(x) - \psi(x),\ \forall\, y \in B(x,r)\setminus\{x\}, \quad (4.18)$$

isto é, ψ é uma função que toca u em x por cima. Então, por hipótese,

$$\Delta_\infty \psi(x) \geq 0,$$

ou seja,

$$0 \leq \langle D^2\psi(x)\nabla\psi(x), \nabla\psi(x)\rangle = \langle X\beta, \beta\rangle = F_\infty(x, u(x), \beta, X).$$

O mesmo argumento pode ser usado para mostrar a equivalência entre $(b.i)$, $(b.ii)$ e $(b.iii)$. ■

[1] Ver Proposição B.4 do Apêndice.

4.2 Unicidade

Iniciemos considerando duas equações auxiliares com parâmetro $\varepsilon > 0$ e a equação ∞-laplaciano:

$$\begin{aligned} \max\{\varepsilon - |\nabla v|, \Delta_\infty v\} = 0, &\qquad \text{(equação superior)},\\ \Delta_\infty v = 0, &\qquad \text{(equação } \infty\text{-laplaciano)},\\ \min\{|\nabla v| - \varepsilon, \Delta_\infty v\} = 0, &\qquad \text{(equação inferior)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, fixando $\varepsilon > 0$, sejam u_p^+, u_p e u_p^- as soluções fracas dos problemas:

$$\begin{cases} \Delta_p u = -\varepsilon^{p-1}, & \text{em } \Omega,\\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_p u = 0, & \text{em } \Omega,\\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_p u = \varepsilon^{p-1}, & \text{em } \Omega,\\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $g \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ e $N < p < \infty$.

A próxima proposição estabelece uma relação de ordem entre as funções u_p^+, u_p e u_p^-.

Proposição 4.8 *Temos que as funções u_p^+, u_p e u_p^- satisfazem a desigualdade:*

$$u_p^- \leq u_p \leq u_p^+.$$

Demonstração. Como u_p^+ é a solução fraca da equação $\Delta_p u = -\varepsilon^{p-1}$, então

$$\Delta_p u_p^+ + \varepsilon^{p-1} \leq 0 \text{ no sentido fraco.} \tag{4.19}$$

Também,

$$\Delta_p u_p^- - \varepsilon^{p-1} \geq 0 \text{ no sentido fraco,} \tag{4.20}$$

pois u_p^- é a solução fraca da equação $\Delta_p u = \varepsilon^{p-1}$. Seja $\eta \in C_0^\infty$ com $\eta \geq 0$. Por (4.19) e (4.20),

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u_p^+|^{p-2} \nabla u_p^+, \nabla\eta\rangle dx - \varepsilon^{p-1} \int_\Omega \eta dx \geq 0, \tag{4.21}$$

e

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u_p^-|^{p-2} \nabla u_p^-, \nabla\eta\rangle dx + \varepsilon^{p-1} \int_\Omega \eta dx \leq 0, \tag{4.22}$$

Logo, combinando (4.21) e (4.22),

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u_p^-|^{p-2} \nabla u_p^- - |\nabla u_p^+|^{p-2} \nabla u_p^+, \nabla\eta\rangle dx + 2\varepsilon^{p-1} \int_\Omega \eta dx \leq 0.$$

Sendo assim,

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u_p^-|^{p-2}\nabla u_p^- - |\nabla u_p^+|^{p-2}\nabla u_p^+, \nabla\eta\rangle dx \leq 0,$$

pois $\displaystyle\int_\Omega \eta dx \geq 0$. Ora, escolhendo $\eta = (u_p^- - u_p^+)^+$, obtemos

$$\int_\Omega \langle\, |\nabla u_p^-|^{p-2}\nabla u_p^- - |\nabla u_p^+|^{p-2}\nabla u_p^+, \nabla(u_p^- - u_p^+)^+\rangle dx \leq 0,$$

assim,

$$\int_{\{u_p^- > u_p^+\}} \langle\, |\nabla u_p^-|^{p-2}\nabla u_p^- - |\nabla u_p^+|^{p-2}\nabla u_p^+, \nabla(u_p^- - u_p^+)\rangle dx \leq 0,$$

Aplicando a Desigualdade de Tartar[2] na última desigualdade, obtemos

$$c_p \int_{\{u_p^- > u_p^+\}} |\nabla(u_p^- - u_p^+)|^p dx \leq 0,$$

logo,

$$\int_\Omega |\nabla(u_p^- - u_p^+)^+|^p dx \leq 0. \tag{4.23}$$

Por outro lado, pela Proposição A.10,

$$(u_p^- - u_p^+)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4.24}$$

pois $(u_p^- - u_p^+)^+ = 0$ em $\partial\Omega$. De (4.23) e (4.24),

$$\|(u_p^- - u_p^+)^+\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0,$$

Segue-se daí que $u_p^- \leq u_p^+$. De maneira semelhante à análise feita para provar a última desigualdade, mostra-se que $u_p^- \leq u_p$ e $u_p \leq u_p^+$. ■

Lembremos que as soluções fracas u_p^+, u_p e u_p^- também são soluções de viscosidade dos problemas $(P_{p,\varepsilon}^+)$, (P_p) e $(P_{p,\varepsilon}^-)$, respectivamente[3].

Agora, considere uma sequencia (p) que tende para infinito tal que

$$u_p^- \to h^-, \quad u_p \to h \quad \text{e} \quad u_p^+ \to h^+, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}. \tag{4.25}$$

Pela Proposição 4.8, vale a seguinte afirmação.

Proposição 4.9 *As funções h^-, h e h^+ possuem a mesma relação de ordem que as aplicações u_p^-, u_p e u_p^+, isto é,*

$$h^- \leq h \leq h^+. \tag{4.26}$$

[2] Ver Proposição B.5 do Apêndice.

[3] Ver os Lemas 2.17, 2.10 e 2.23.

Já que u_p^- e u_p^+ são soluções fracas das equações $\Delta_p u = \varepsilon^{p-1}$ e $\Delta_p u = -\varepsilon^{p-1}$, respectivamente, então

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_p^+|^{p-2}\nabla u_p^+, \nabla\eta\rangle dx = \varepsilon^{p-1}\int_\Omega \eta dx, \tag{4.27}$$

e

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_p^-|^{p-2}\nabla u_p^-, \nabla\eta\rangle dx = -\varepsilon^{p-1}\int_\Omega \eta dx, \tag{4.28}$$

onde $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Tomando $\eta = u_p^+ - u_p^-$ e de (4.28) e (4.27), obtemos

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_p^+|^{p-2}\nabla u_p^+ - |\nabla u_p^-|^{p-2}\nabla u_p^-, \nabla(u_p^+ - u_p^-)\rangle dx = 2\varepsilon^{p-1}\int_\Omega (u_p^+ - u_p^-)dx.$$

Aplicando a Desigualdade de Tartar[4] com coeficiente $c_p = 2^{2-p}$, temos que

$$2\varepsilon^{p-1}\int_\Omega (u_p^+ - u_p^-)dx \geq 2^{2-p}\int_\Omega |\nabla(u_p^+ - u_p^-)|^p dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2^{1-p}\int_\Omega |\nabla(u_p^+ - u_p^-)|^p dx &\leq \varepsilon^{p-1}\int_\Omega (u_p^+ - u_p^-)dx \\ &\leq \varepsilon^{p-1}\int_\Omega \lambda|u_p^+ - u_p^-|\lambda dx, \end{aligned}$$

e pela Desigualdade de Young[5],

$$\begin{aligned} 2^{1-p}\int_\Omega |\nabla(u_p^+ - u_p^-)|^p dx &\leq \varepsilon^{p-1}\int_\Omega \left(\frac{\lambda^p}{p}|u_p^+ - u_p^-|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q}\right)dx \\ &\leq \varepsilon^{p-1}\left(\frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |u_p^+ - u_p^-|^p dx + \frac{\lambda^{-q}}{q}|\Omega|\right). \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Friedrichs[6] no lado direito da última desigualdade, tem-se

$$\begin{aligned} 2^{1-p}\int_\Omega |\nabla(u_p^+ - u_p^-)|^p dx &\leq \varepsilon^{p-1}\left(\frac{\lambda^p}{p}(diam(\Omega))^p\int_\Omega |\nabla(u_p^+ - u_p^-)|^p dx + \frac{\lambda^{-q}}{q}|\Omega|\right) \\ &= \frac{\varepsilon^{p-1}}{p}(\lambda\, diam(\Omega))^p\int_\Omega |\nabla(u_p^+ - u_p^-)|^p dx + \frac{\varepsilon^{p-1}\lambda^{-q}|\Omega|}{q} \end{aligned}$$

Escolhemos λ tal que

$$\frac{\varepsilon^{p-1}}{p}(\lambda\, diam(\Omega))^p = 2^{-p}. \tag{4.29}$$

Assim,

$$(2^{1-p} - 2^{-p})^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla(u_p^+ - u_p^-)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\lambda^{\frac{-q}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{p}}},$$

[4]Ver Proposição B.5 do Apêndice.

[5]Ver Proposição A.4 do Apêndice.

[6]Ver Teorema A.14 do Apêndice.

ou seja,

$$\left(\int_\Omega |\nabla(u_p^+ - u_p^-)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\lambda^{\frac{-q}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{p}}}(2^{1-p} - 2^{-p})^{-\frac{1}{p}}.$$

Já que $u_p^+ - u_p^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$, vale

$$\|u_p^+ - u_p^-\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\lambda^{\frac{-q}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{p}}}(2^{1-p} - 2^{-p})^{-\frac{1}{p}}.$$

Segue-se daí que

$$\|u_p^+ - u_p^-\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{c\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\lambda^{\frac{-q}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{p}}}(2^{1-p} - 2^{-p})^{-\frac{1}{p}}, \tag{4.30}$$

pois $W_0^{1,p}(\Omega)$ está contido continuamente em $L^\infty(\Omega)$ para $p \approx \infty$, onde $c > 0$ é uma constante. Logo,

$$\begin{aligned} \|h^+ - h^-\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|h^+ - u_p^+\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_p^+ - u_p^-\|_{L^\infty(\Omega)} + \|h^- - u_p^-\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\overset{(4.25),(4.30)}{<} \varepsilon + \frac{c\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\lambda^{\frac{-q}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{p}}}(2^{1-p} - 2^{-p})^{-\frac{1}{p}} + \varepsilon, \text{ para } p \approx \infty. \end{aligned}$$

Fazendo $p \to \infty$ na última desigualdade,

$$\|h^+ - h^-\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon + c\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon c^*,$$

onde $c^* = 1 + c + 1$. Em consequência,

$$h^+ \leq h^- + \varepsilon c^*. \tag{4.31}$$

De (4.26) e (4.31),

$$h^- \leq h \leq h^+ \leq h^- + \varepsilon c^*. \tag{4.32}$$

Agora mostraremos um lema que serão relevantes para mostrar a unicidade de solução do problema (P_∞). Denotemos as funções obtidas nos Lemas 2.15 e 2.22 por u^+ e u^-, respectivamente. Além disso, pelos Teoremas 2.19 e 2.24, as aplicações u^+ e u^- são as soluções de viscosidade das equações superior e inferior, respectivamente.

Lema 4.10 *(Jensen [17]) Se u é uma subsolução de viscosidade da equação $\Delta_\infty v = 0$ em Ω e $u \leq g = u^+$ em $\partial\Omega$, então $u \leq u^+$ em Ω. De forma semelhante, tem-se que se u é uma supersolução de viscosidade da equação $\Delta_\infty v = 0$ em Ω e $u^- = g \leq u$ em $\partial\Omega$, então $u^- \leq u$ em Ω. Resumindo ambas implicações, afirmamos que se u é uma solução de viscosidade da equação $\Delta_\infty v = 0$ em Ω e $u = g$ em $\partial\Omega$, então*

$$u^- \leq u \leq u^+ \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Como u^+ pertence a $C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, podemos tomar $c > 0$ tal que $u^+ + c > 0$ em Ω. Então, sem perda de generalidade, consideremos

$$u^+ > 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

Notemos que é suficiente mostrar que

$$\max_{\Omega}\{u - u^+\} \leq \max_{\partial\Omega}\{u - u^+\}, \tag{4.33}$$

pois se a desigualdade é verdadeira, então, por hipótese,

$$\max_{\Omega}\{u - u^+\} \leq \max_{\partial\Omega}\{u - u^+\} \leq 0,$$

logo,

$$u - u^+ \leq 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

ou seja,

$$u \leq u^+ \ \text{ em } \ \Omega.$$

Para demonstrar a desigualdade (4.33), suponhamos, por absurdo, que

$$\max_{\Omega}\{u - u^+\} > \max_{\partial\Omega}\{u - u^+\}.$$

Definamos a função

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) \ &\rightarrow \ \mathbb{R} \\ t \ &\mapsto \ f(t) = \ln(1 + a(e^t - 1)), \end{aligned}$$

onde $a > 1$. Note que, vale a seguinte desigualdade:

$$0 < f(t) - t < \ln a, \ \forall\, t \in (0, \infty), \tag{4.34}$$

Para mostrar a última desigualdade, primeiro suponhamos o caso contrario à desigualdade do lado esquerdo de (4.34), isto é, existe $t^* > 0$ tal que

$$f(t^*) - t^* \leq 0.$$

Já que a função exponencial é crescente, então

$$e^{f(t^*)} \leq e^{t^*},$$

ou seja,

$$1 + a(e^{t^*} - 1) \leq e^{t^*},$$

assim,

$$0 \geq 1 - a + e^{t^*}(a-1) = (a-1)(e^{t^*} - 1),$$

o que é absurdo, pois $a > 1$ e $e^{t^*} > 1$. Mostrando assim a desigualdade:

$$0 < f(t) - t, \ \forall\, t \in (0, \infty), \tag{4.35}$$

Por outro lado, considerando a função

$$\begin{array}{rcl} H : [0, \infty] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & H(t) = f(t) - t, \end{array}$$

temos:

$$H'(t) > 0 \ \text{ e } \ H(t) > H(0), \tag{4.36}$$

Sendo assim, H é uma função estritamente crescente. Além disso,

$$e^{f(t)-t} = (1 + a(e^t - 1))e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} a = e^{\ln a},$$

e portanto,

$$f(t) - t < \ln a, \ \forall\, t \in (0, \infty).$$

Consequentemente, fica demonstrado a desigualdade (4.34). Ora, observe que

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{ae^t}{1 + a(e^t - 1)}\right) \\ &= \frac{ae^t(1 + a(e^t - 1)) - (ae^t)^2}{(1 + a(e^t - 1))^2} \\ &= -(a-1)\frac{\frac{(ae^t)^2}{(1+a(e^t-1))^2}}{ae^t} \\ &= -(a-1)\frac{(f'(t)^2)}{ae^t}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Dados $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ uma função que toca u^+ por baixo em x_0 e seja $\varphi = f \circ \phi$. Notemos que, para cada $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial (f \circ \phi)}{\partial x_i} = f'(\phi)\phi_{x_i} \tag{4.38}$$

e
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(f'(\phi)\phi_{x_i}) = f''(\phi)\phi_{x_j}\phi_{x_i} + f'(\phi)\phi_{x_i x_j}. \tag{4.39}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta_\infty \varphi &= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\overset{(4.38),(4.39)}{=} \sum_{i,j=1}^{N} (f'(\phi))^3 \phi_{x_i}\phi_{x_j}\phi_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} (f'(\phi))^2 f''(\phi)(\phi_{x_i})^2(\phi_{x_j})^2 \\
&= (f'(\phi))^3 \Delta_\infty \phi + (f'(\phi))^2 f''(\phi) \sum_{i,j=1}^{N} (\phi_{x_i})^2(\phi_{x_j})^2
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\Delta_\infty \varphi &= (f'(\phi))^3 \Delta_\infty \phi + (f'(\phi))^2 f''(\phi) \left(\sum_{i=1}^{N} (\phi_{x_i})^2\right)\left(\sum_{j=1}^{N} (\phi_{x_j})^2\right) \\
&= (f'(\phi))^3 \Delta_\infty \phi + (f'(\phi))^2 f''(\phi)|\nabla \phi|^4, \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

pois
$$\sum_{i,j=1}^{N} (\phi_{x_i})^2(\phi_{x_j})^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} (\phi_{x_i})^2\right)\left(\sum_{j=1}^{N} (\phi_{x_j})^2\right).$$

Por outro lado, temos que

$$(f'(\phi(x_0)))^3 \Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0, \tag{4.41}$$

já que u^+ é supersolução de viscosidade da equação superior e $f'(\phi(x_0)) > 0$. Por (4.40) e (4.41), no ponto x_0,

$$\begin{aligned}
\Delta_\infty \varphi &\leq (f'(\phi))^2 f''(\phi)|\nabla \phi|^4 \\
&\overset{(4.37)}{=} -(f'(\phi))^2 (a-1)\frac{(f'(\phi)^2)}{ae^{\phi}}|\nabla \phi|^4 \\
&= -(a-1)a^{-1}e^{-\phi}(f'(\phi))^4|\nabla \phi|^4 \leq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, já que[7] $|\nabla \phi(x_0)| \geq \varepsilon$ e $a > 1$, obtemos

$$\Delta_\infty \varphi(x_0) \leq -(a-1)a^{-1}e^{-\phi(x_0)}(f'(\phi(x_0)))^4 \varepsilon^4. \tag{4.42}$$

De (4.42),

$$\Delta_\infty \varphi(x_0) \;\leq\; -(a-1)a^{-1}e^{-\|\phi\|_\infty}\varepsilon^4,$$

[7]Pois ϕ é uma função teste para a supersolução de viscosidade u^+, ou seja, $\varepsilon \leq |\nabla \phi(x_0)|$ e $\Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0$.

pois $0 < f'(t) - 1$. E tomando $-\mu = -(a-1)a^{-1}e^{-\|\phi\|_\infty}\varepsilon^4 < 0$, temos que

$$\Delta_\infty \varphi(x_0) \quad \leq \quad -\mu < 0.$$

Também,

$$|\nabla \varphi(x_0)| = |\nabla (f \circ \phi)(x_0)| = |f'(\phi(x_0))\nabla \phi(x_0)| > |\nabla \phi(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Ora, observe que

$$w(x_0) - \varphi(x_0) = (f \circ u^+)(x_0) - (f \circ \phi)(x_0) = f(u^+(x_0)) - f(\phi(x_0)) = 0$$

e

$$w(x) - \varphi(x) = f(u^+(x)) - f(\phi(x)) = \ln\left(\frac{1 + a(e^{u^+(x)} - 1)}{1 + a(e^{\phi(x)} - 1)}\right) > 0, \ \forall\, x \in \Omega \setminus \{x_0\}.$$

Portanto, $\varphi = f \circ \phi$ é uma função que toca w por baixo em x_0. Em consequência, da análise feita,

$$\Delta_\infty \varphi(x_0) \leq -\mu < 0 \quad \text{ e } \quad |\nabla \varphi(x_0)| \geq \varepsilon, \tag{4.43}$$

onde φ é uma função que toca w por baixo em x_0.

Por outro lado, fixemos $a \approx 1$ tal que

$$0 < f(u^+) - u^+ = \ln(1 + a(e^{u^+} - 1)) - u^+ < \delta,$$

ou seja, $f(u^+) \approx u^+$, e portanto,

$$\max_{\Omega}\{u - w\} > \max_{\partial\Omega}\{u - w\}, \text{ onde } w = f(u^+),$$

pois $\max\limits_{\Omega}\{u - u^+\} > \max\limits_{\partial\Omega}\{u - u^+\}$.

Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos as funções,

$$\begin{aligned} L_j : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad L_j(x, y) = u(x) - w(y) - \frac{j}{2}|x - y|^2. \end{aligned}$$

Podemos considerar um ponto de máximo (x_j, y_j) da função L_j em $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, pois L_j é contínua. Pela Proposição 4.2, tem-se que

$$\lim_{j \to \infty} (j|x_j - y_j|^2) = 0$$

e

$$\lim_{j\to\infty} L_j = u(\hat{x}) - w(\hat{x}) = \sup_{x\in\Omega}\{u(x) - w(x)\},$$

onde $\hat{x} \in \overline{\Omega}$ tal que $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \hat{x}$. Além disso, já que $\max_{\Omega}\{u - w\} > \max_{\partial\Omega}\{u - w\}$, $\hat{x} \in \overline{\Omega}$ e Ω é um domínio, então, para $j \approx \infty$,

$$(x_j, y_j) \in \Omega \quad \text{e} \quad x_j, y_j \to \hat{x} \in \Omega.$$

Do Teorema de Ishii[8], existem $X_j, Y_j \in \mathbb{S}^N$ tais que

$$(j(x_j - y_j), X_j) \in \overline{J^{2,+}}u(x_j), \ \ (j(x_j - y_j), Y_j) \in \overline{J^{2,-}}w(y_j) \ \text{ e } \ X_j \leq Y_j.$$

Aplicando o Teorema 4.7, obtemos

$$j^2\langle X_j(x_j - y_j), (x_j - y_j)\rangle \geq 0 \tag{4.44}$$

e

$$j^2\langle Y_j(x_j - y_j), (x_j - y_j)\rangle \overset{(4.43)}{\leq} -\mu < 0. \tag{4.45}$$

Subtraendo (4.44) de (4.45),

$$j^2\langle (Y_j - X_j)(x_j - y_j), (x_j - y_j)\rangle \leq -\mu < 0. \tag{4.46}$$

Esta última desigualdade é uma contradição, pois $X_j \leq Y_j$, ou seja,

$$0 \leq \langle (Y_j - X_j)\xi, \xi\rangle, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N,$$

assim, em particular,

$$\langle (Y_j - X_j)(x_j - y_j), (x_j - y_j)\rangle \geq 0.$$

Em conclusão, a suposição

$$\max_{\Omega}\{u - u^+\} > \max_{\partial\Omega}\{u - u^+\}.$$

é falsa, e portanto,

$$\max_{\Omega}\{u - u^+\} \leq \max_{\partial\Omega}\{u - u^+\}.$$

Logo,

$$u \leq u^+ \ \text{ em } \ \Omega.$$

[8]Ver Teorema B.7 do Apêndice.

$\blacksquare$

Agora, suponhamos que o problema (P_∞) possui duas soluções u_1 e u_2. Então, pelo Lema 4.10,

$$u^- \leq u_1, u_2 \leq u^+ \text{ em } \Omega.$$

Segue-se daí que

$$-\varepsilon \overset{(4.32)}{\leq} u^- - u^+ \leq u_1 - u_2 \leq u^+ - u^- \overset{(4.32)}{\leq} \varepsilon,$$

e fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos que $u_1 = u_2$. Portanto, o problema (P_∞) tem uma única solução de viscosidade. Em decorrência, fica demonstrado o seguinte resultado clássico:

Teorema 4.11 *(Teorema de existência e unicidade para (P_∞), Jensen [17])*
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana. Então, existe uma única solução de viscosidade $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ para o problema ∞-laplaciano:

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_∞}$$

Depois da análise feita para mostrar a existência e unicidade de solução de viscosidade do problema (P_∞), a dúvida natural que surge no leitor é:

Podemos garantir o mesmo resultado quando o termo da esquerda da primeira equação do problema (P_∞) é não nula?

Veremos no próximo capítulo que a resposta para esta dúvida é afirmativa impondo condições adequadas.

Capítulo 5

Existência e unicidade de soluções de viscosidades para $(P_{\infty,F})$

Este capítulo será dedicado a provar a existência e unicidade de solução de viscosidade para o problema $(P_{\infty,F})$, isto é,

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = F, & \text{em } \Omega, \\ \quad u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\infty,F}$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tal que $\inf\limits_{\Omega} F > 0$ ou $\sup\limits_{\Omega} F < 0$. As ideias a seguir para mostrar isso estão essencialmente baseadas nos trabalhos de Lindqvist [22, Seção 10] e Lu-Wang [24, Seções 2 e 3].

Embora tenhamos assumido até o momento que nossas funções sejam contínuas na Definição 2.16, mostraremos que as funções semicontínuas que são supersoluções ou subsoluções de viscosidade de $\Delta_\infty v = F$ são necessariamente contínuas. Portanto, podemos redefinir o que é uma solução de viscosidade.

Definição 5.1 *Consideremos a função contínua $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times N} \to \mathbb{R}$ e uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}$ limitada e contínua.*

*(i) Uma função semicontínua inferiormente $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é denominada **supersolução de viscosidade** em Ω da equação*

$$E(x, v, \nabla v, D^2 v) = F \;\text{ em }\; \Omega,$$

se para cada $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por baixo temos

$$E(x_0, \phi(x_0), \nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq F(x_0).$$

De maneira simples, afirmaremos que '$E(x, u, \nabla u, D^2 u) \leq F$ no sentido de viscosidade em Ω'.

(ii) Uma função semicontínua superiormente $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é denominada ***subsolução de viscosidade*** *em Ω da equação*

$$E(x, v, \nabla v, D^2 v) = F \text{ em } \Omega,$$

se para cada $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ que toca u em x_0 por cima tem-se

$$E(x_0, \varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq F(x_0).$$

De maneira simples, afirmaremos que '$E(x, u, \nabla u, D^2 u) \geq F$ no sentido de viscosidade em Ω'.

(iii) Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é denominada ***solução de viscosidade*** *da equação*

$$E(x, v, \nabla v, D^2 v) = F \text{ em } \Omega,$$

se u é uma supersolução e subsolução de viscosidade em Ω. De maneira simples, afirmaremos que '$E(x, u, \nabla u, D^2 u) = F$ no sentido de viscosidade em Ω'.

As próximas proposições mostram que as funções semicontínuas que são supersoluções ou subsoluções de viscosidade da equação $\Delta_\infty v = F$ também são contínuas, quando $F = 0$ ou $F \neq 0$.

Proposição 5.2 *Se $F = 0$, as supersoluções e subsoluções de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = F$ são contínuas em Ω.*

Demonstração. Seja u uma subsolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = 0$. Logo, por definição, u é semicontínua superiormente. Dados $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ tal que $B(x_0, 2r) \subset\subset \Omega$ e

$$M = \max_{\overline{B(x_0,2r)}}\{u(x)\}.$$

Notemos que $M < \infty$. Escolhemos uma sequência $(x_j) \subset B(x_0, r)$ tal que

$$x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x_0 \quad \text{e} \quad \lim_{j\to\infty} u(x_j) = \liminf_{x\to x_0} u(x). \tag{5.1}$$

Como u é uma subsolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = 0$, então, pelo Teorema 3.16, u satisfaz o principio de comparação com cones por cima. Se $|x-x_j| \leq r$ e aplicando o Lema 3.14, temos que

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(x_j) + \max_{\xi \in \partial B(x_j,r)} \left\{ \frac{u(\xi) - u(x_j)}{r} \right\} |x - x_j| \\ &= u(x_j) + \frac{M}{r}|x - x_j| - \frac{u(x_j)}{r}|x - x_j| \\ &= u(x_j)\left(1 - \frac{|x - x_j|}{r}\right) + \frac{M}{r}|x - x_j|, \end{aligned}$$

assim,

$$u(x_j) \geq \frac{u(x) - \frac{M}{r}|x - x_j|}{1 - \frac{|x-x_j|}{r}}. \tag{5.2}$$

Já que $x_j \to x_0$, então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_0 \in B(x_j, r),\ \forall\, j \geq j_0. \tag{5.3}$$

De (5.2) e (5.3),

$$u(x_j) \geq \frac{u(x_0) - \frac{M}{r}|x_0 - x_j|}{1 - \frac{|x_0-x_j|}{r}},$$

e fazendo $j \to \infty$, obtemos

$$\lim_{j\to\infty} u(x_j) \geq u(x_0).$$

Logo,

$$u(x_0) \leq \lim_{j\to\infty} u(x_j) \overset{(5.1)}{=} \liminf_{x\to x_0} u(x) \leq \limsup_{x\to x_0} u(x) \leq u(x_0),$$

ou seja,

$$u(x_0) = \lim_{j\to\infty} u(x_j),$$

e portanto, u é contínua em x_0. Em conclusão, u é contínua em Ω, pois x_0 é um ponto arbitrário de Ω.

Por outro lado, se u é uma supersolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = 0$, então, pela Observação 2.5, $-u$ é uma subsolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = 0$. Da análise feita para subsoluções de viscosidades, temos que $-u$ é contínua em Ω. Assim, u é contínua em Ω. ■

Proposição 5.3 *Seja $F \neq 0$. Se F limitada, as supersoluções e subsoluções de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = F$ são contínuas em Ω. De forma específica, as* *supersoluções de viscosidade em* Ω *da equação* $\Delta_\infty v = F$ *são contínuas em* Ω*, sempre que* F *seja limitada superiormente. Além disso, as subsoluções de viscosidade em* Ω *da equação* $\Delta_\infty v = F$ *são contínuas em* Ω*, quando* F *é limitada inferiormente.*

Demonstração. Seja u uma supersolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = F$. Dados $x_0 \in \Omega$ e $\phi^* \in C^2(\Omega)$ uma função que toca u por baixo em x_0. Consideremos

$$\begin{aligned} \Phi^* : \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{N+1} &\to \mathbb{R} \\ (x, x_{N+1}) &\mapsto \Phi^*(x, x_{N+1}) = \phi^*(x) - \alpha x_{N+1}^{4/3}, \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_N)$ e $\widetilde{\Omega} = \Omega \times (0, \infty)$. É fácil ver que $\Phi^* \in C^2(\widetilde{\Omega})$. Além disso,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty^{(N+1)} \Phi^*(x, x_{N+1}) &= \Delta_\infty^{(N+1)} (\phi^*(x) - \alpha x_{N+1}^{4/3}) \\ &= \Delta_\infty^{(N)} \phi^*(x) - \Delta_\infty^{(N+1)} (\alpha x_{N+1}^{4/3}) \\ &= \Delta_\infty^{(N)} \phi^*(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_{N+1}} (\alpha x_{N+1}^{4/3}) \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_{N+1}^2} (\alpha x_{N+1}^{4/3}) \\ &= \Delta_\infty^{(N)} \phi^*(x) - \frac{64}{81} \alpha^3, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta_\infty^{(N+1)} \Phi^*(x, x_{N+1}) = \Delta_\infty^{(N)} \phi^*(x) - \frac{64}{81} \alpha^3. \tag{5.4}$$

No que segue, vamos considerar a função

$$\begin{aligned} V : \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{N+1} &\to \mathbb{R} \\ (x, x_{N+1}) &\mapsto V(x, x_{N+1}) = u(x) - \alpha x_{N+1}^{4/3}, \end{aligned}$$

onde α será escolhido de forma adequada mais adiante. Sejam $(x_0, x_{0,N+1}) \in \widetilde{\Omega}$ e $\Phi \in C^2(\widetilde{\Omega})$ uma função que toca V por baixo em $(x_0, x_{0,N+1})$, isto é, existe $r > 0$ com $B((x_0, x_{0,N+1}), r) \subset \Omega$ tal que

$$V(x, x_{N+1}) - \Phi(x, x_{N+1}) > 0 = V((x_0, x_{0,N+1})) - \Phi((x_0, x_{0,N+1})), \tag{5.5}$$

para qualquer $(x, x_{N+1}) \in B((x_0, x_{0,N+1}), r) \setminus \{(x_0, x_{0,N+1})\}$. Substituindo a definição de V na última desigualdade, obtemos

$$u(x) - \left(\Phi(x, x_{N+1}) + \alpha x_{N+1}^{4/3} \right) > 0,$$

onde $(x, x_{N+1}) \in B((x_0, x_{0,N+1}), r) \setminus \{(x_0, x_{0,N+1})\}$.

$$u(x) - \left(\Phi(x, x_{0,N+1}) + \alpha (x_{0,N+1})^{4/3} \right) > 0, \ \forall \, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}. \tag{5.6}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(5.5)}{=} V(x_0, x_{0,N+1}) - \Phi(x_0, x_{0,N+1}) \\ &= u(x_0) - \left(\Phi(x_0, x_{0,N+1}) + \alpha(x_{0,N+1})^{4/3}\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

De (5.6) e (5.7), observamos que a função ϕ definida como

$$\begin{aligned} \phi : \Omega \subset \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi(x) = \Phi(x, x_{0,N+1}) + \alpha(x_{0,N+1})^{4/3} \end{aligned}$$

toca u por baixo em x_0. A aplicação ϕ não depende da variável x_{N+1}, e portanto,

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial x_{N+1}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{N+1}} \left(\Phi(x, x_{0,N+1}) + \alpha(x_{0,N+1})^{4/3}\right), \ \forall\, x \in \Omega. \tag{5.8}$$

Já que u é uma supersolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = F$ e ϕ é uma função teste para u, então

$$\Delta_\infty^{(N)} \phi(x_0) \leq F(x_0), \tag{5.9}$$

no qual $\Delta_\infty^{(N)}$ é o operador ∞-laplaciano para N variáveis. Por (5.8) e (5.4),

$$\Delta_\infty^{(N)} \phi(x_0) = \Delta_\infty^{(N+1)} \Phi(x_0, x_{0,N+1}) + \frac{64}{81}\alpha^3. \tag{5.10}$$

Substituindo (5.10) em (5.9), tem-se que

$$\Delta_\infty^{(N+1)} \Phi(x_0, x_{0,N+1}) \leq F(x_0) - \frac{64}{81}\alpha^3. \tag{5.11}$$

Daí, a função V é uma supersolução de viscosidade da equação $\Delta_\infty U = F - \frac{64}{81}\alpha^3$. Já que

$$u(x) = V(x, x_{N+1}) + \alpha x_{N+1}^{4/3},$$

então para mostrar que u é contínua devemos demonstrar que a aplicação V é contínua. Para atingir o objetivo, podemos escolher α tal que

$$\frac{64}{81}\alpha^3 \geq \sup_{\Omega}\{F(x)\}, \tag{5.12}$$

pois F é limitada (notar que só é preciso que F seja limitada superiormente). De (5.11) e (5.12),

$$\Delta_\infty^{(N+1)} \Phi(x_0, x_{0,N+1}) \leq 0, \tag{5.13}$$

assim, V é uma supersolução de viscosidade da equação $\Delta_\infty U = 0$. Aplicando a Proposição 5.2, podemos afirmar que V é contínua.

Um argumento similar pode ser usado para mostrar que se u é uma subsolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty v = F$, então u é contínua. ■

Agora provaremos uma versão mais geral do Teorema 4.7, isto é, um resultado de equivalências para as soluções de viscosidade da equação não homogênea $\Delta_\infty v = F$.

Teorema 5.4 *Consideremos a função contínua*

$$\begin{aligned} E_\infty : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N &\to \mathbb{R} \\ (x,t,\beta,X) &\mapsto E_\infty(x,t,\beta,X) = \langle X\beta, \beta\rangle. \end{aligned}$$

Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função semicontínua superiormente em Ω, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a.i) $E_\infty(x,u(x),\nabla u(x),D^2u(x)) \geq F(x)$ *no sentido de viscosidade em Ω.*

(a.ii) Se para cada $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in J^{2,-}u(x)$, temos que

$$E_\infty(x,u(x),\beta,X) \geq F(x).$$

(a.iii) Se para cada $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in \overline{J^{2,-}}u(x)$, temos que

$$E_\infty(x,u(x),\beta,X) \geq F(x).$$

Além disso, quando $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função semicontínua inferiormente em Ω, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(b.i) $E_\infty(x,u(x),\nabla u(x),D^2u(x)) \leq F(x)$ *no sentido de viscosidade em Ω,*

(b.ii) se para quaisquer $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in J^{2,-}u(x)$, temos que

$$E_\infty(x,u(x),\beta,X) \leq F(x),$$

(b.iii) se para quaisquer $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in \overline{J^{2,-}}u(x)$, temos que

$$E_\infty(x,u(x),\beta,X) \leq F(x).$$

Demonstração. $[(a.i) \Rightarrow (a.ii)]$ Sejam $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in J^{2,+}u(x)$. Fazendo argumentos similares à demonstração de $[(a.i) \Rightarrow (a.ii)]$ do Teorema 4.7, obtemos uma função ψ que toca u em x por cima. Então, por hipótese,

$$\Delta_\infty \psi(x) \geq F(x),$$

ou seja,

$$\langle D^2\psi(x)\nabla\psi(x), \nabla\psi(x)\rangle \geq F(x).$$

Daí,

$$E_\infty(x, t, \beta, X) \geq F(x),$$

pois $(\beta, X) = (\nabla\psi(x), D^2\psi(x))$.

$[(a.ii) \Rightarrow (a.iii)]$ Sejam $x \in \Omega$ e $(\beta, X) \in \overline{J^{2,+}}u(x)$. Pela Definição 4.6, existem $(x_n) \subset \Omega$ e $(\beta_n, X_n) \in J^{2,+}u(x)$ tais que

$$(x_n, u(x_n), \beta_n, X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, u(x), \beta, X).$$

Por hipótese,

$$E_\infty(x_n, u(x_n), \beta_n, X_n) \geq F(x_n).$$

Ora, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$E_\infty(x, u(x), \beta, X) \geq F(x),$$

pois E_∞, u e F são contínuas em seus respectivos domínios.

$[(a.iii) \Rightarrow (a.i)]$ Dados $x \in \Omega$ e $\psi \in C^(\Omega)$ uma função que toca u em x por cima, isto é, existe $r > 0$ com $B(x, r) \subset \Omega$ tal que

$$u(y) - \psi(y) < 0 = u(x) - \psi(x), \ \forall\, y \in B(x, r) \setminus \{x\}.$$

De forma semelhante à demonstração de $[(a.iii) \Rightarrow (a.i)]$ do Teorema 4.7, concluímos

$$(\nabla\psi(x), D^2\psi(x)) \in \overline{J^{2,+}}u(x).$$

Por hipótese, vale que

$$F(x) \leq E_\infty(x, u(x), \nabla\psi(x), D^2\psi(x)) = \langle D^2\psi(x)\psi(x), \psi(x)\rangle = \Delta_\infty\psi(x).$$

Portanto, $E_\infty(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) \geq F(x)$ no sentido de viscosidade em Ω.

Usando as mesmas ideias pode-se mostrar a equivalência entre as afirmações $(b.i)$, $(b.ii)$ e $(b.iii)$. ■

5.1 Teorema de Comparação

A fim de mostrar a existência e unicidade de solução de viscosidade do problema $(P_{\infty,F})$, esta seção está dedicada ao estudo de um resultado de Comparação para a equação $\Delta_\infty v = F$.

Lema 5.5 *Sejam $u, v \in C(\overline{\Omega})$ tais que*

$$\Delta_\infty v \leq F_1 \qquad e \qquad \Delta_\infty u \geq F_2,$$

no sentido de viscosidade em Ω, onde F_1, $F_2 \in C(\Omega)$ com $F_1 < F_2$ em Ω. Se $v \geq u$ em $\partial\Omega$, então

$$v \geq u \ \ em \ \ \Omega.$$

Demonstração. Notemos que é suficiente mostrar que

$$\max_{\Omega}\{u - v\} \leq \max_{\partial\Omega}\{u - v\}.$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\max_{\Omega}\{u - v\} > \max_{\partial\Omega}\{u - v\}.$$

Consideremos

$$M_j = \sup_{x,y\in\Omega}\left\{u(x) - v(y) - \frac{j}{2}|x-y|^2\right\}, \tag{5.14}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Usando os mesmos argumentos da demonstração do Lema 4.10, obtemos que, para $j \approx \infty$,

$$(x_j, y_j) \in \Omega \quad \text{ e } \quad x_j, y_j \to \hat{x} \in \Omega,$$

onde $\hat{x} \in \Omega$ e (x_j, y_j) são pontos de máximo para a função L_j definida por

$$L_j(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{j}{2}|x-y|^2.$$

Aplicando o Teorema de Ishii (ver Teorema B.7), existem $X_j, Y_j \in \mathbb{S}^N$ tais que

$$(j(x_j - y_j), X_j) \in \overline{J^{2,+}}u(x_j), \ \ (j(x_j - y_j), Y_j) \in \overline{J^{2,-}}v(y_j) \ \text{ e } \ X_j \leq Y_j.$$

Pelo Teorema 5.4,

$$j^2\langle X_j(x_j - y_j), (x_j - y_j)\rangle \geq F_2(x_j) \tag{5.15}$$

e

$$j^2\langle Y_j(x_j - y_j), (x_j - y_j)\rangle \leq F_1(y_j). \tag{5.16}$$

Como $X_j \leq Y_j$, então

$$\begin{aligned} F_1(y_j) &\overset{(5.16)}{\geq} j^2\langle Y_j(x_j - y_j), (x_j - y_j)\rangle \\ &\geq j^2\langle X_j(x_j - y_j), (x_j - y_j)\rangle \\ &\overset{(5.15)}{\geq} F_2(x_j). \end{aligned}$$

Segue-se daí que

$$\lim_{j\to\infty} F_1(y_j) \geq \lim_{j\to\infty} F_2(x_j).$$

Já que F_1, $F_2 \in C(\Omega)$, obtemos

$$F_1(\hat{x}) \geq F_2(\hat{x}),$$

o que é uma contradição, pois $F_1 < F_2$ em Ω. Em consequência,

$$\max_{\Omega}\{u - v\} \leq \max_{\partial\Omega}\{u - v\},$$

e portanto,

$$v \geq u \;\text{ em }\; \Omega,$$

pois $v \geq u$ em $\partial\Omega$. ■

Teorema 5.6 *(Teorema de Comparação) Sejam $u, v \in C(\overline{\Omega})$ tais que*

$$\Delta_\infty v \leq F \qquad e \qquad \Delta_\infty u \geq F,$$

no sentido de viscosidade em Ω, onde $F \in C(\Omega)$ com

$$\inf_{\Omega}\{F\} > 0 \qquad ou \qquad \sup_{\Omega}\{F\} < 0.$$

Se $v \geq u$ em $\partial\Omega$, então

$$v \geq u \;\; em \;\; \Omega.$$

Demonstração. Para cada $\delta > 0$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} u_\delta : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto u_\delta(x) = (1+\delta)u(x) - \delta\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Dados $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ uma função que toca u_δ por cima em x_0, isto é, existe $r > 0$ com $B(x, r) \subset \Omega$ tal que

$$u_\delta(x) - \varphi(x) < 0 = u_\delta(x_0) - \varphi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Logo,

$$(1+\delta)u(x) - \delta\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} - \varphi(x) < 0 = (1+\delta)u(x_0) - \delta\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} - \varphi(x_0),\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\},$$

ou seja,

$$u(x) - \frac{\delta\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \varphi(x)}{1+\delta} < 0 = u(x_0) - \frac{\delta\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \varphi(x_0)}{1+\delta},\ \forall\, x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Daí, podemos considerar a seguinte função

$$\begin{array}{rcl} \psi : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \psi(x) = \dfrac{\delta\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \varphi(x)}{1+\delta} \end{array}$$

como uma função teste para u em x_0. Já que $\Delta_\infty u \geq F$ no sentido de viscosidade em Ω, então

$$\Delta_\infty \psi(x_0) \geq F(x_0). \tag{5.17}$$

Por outro lado, para qualquer $x \in \Omega$,

$$\Delta_\infty \psi(x) = \frac{1}{(1+\delta)^3} \Delta_\infty \varphi(x). \tag{5.18}$$

Substituindo (5.18) em (5.17), obtemos

$$\Delta_\infty \varphi(x_0) \geq (1+\delta)^3 F(x_0).$$

Em consequência, $\Delta_\infty u_\delta \geq (1+\delta)^3 F$ no sentido de viscosidade em Ω, pois φ é uma função teste para u_δ. A hipótese:

$$\inf_{\Omega}\{F\} > 0.$$

permite assegurar a desigualdade

$$F < (1+\delta)^3 F.$$

Além disso, para todo $\xi \in \partial\Omega$,

$$u_\delta(\xi) = u(\xi) + (\delta u(\xi) - \delta\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}) \leq u(\xi) \leq v(\xi).$$

Resumindo o feito até agora, tem-se que $u_\delta, v \in C(\overline{\Omega})$ tais que

$$\Delta_\infty v \leq F \quad \text{e} \quad \Delta_\infty u_\delta \geq (1+\delta)^3 F,$$

no sentido de viscosidade em Ω, onde as funções F e $(1+\delta)^3 F$ são contínuas em Ω tal que $F < (1+\delta)^3 F$ em Ω. Como $v \geq u_\delta$ em $\partial\Omega$, então, pelo Lema 5.5,

$$v \geq u_\delta \text{ em } \Omega,$$

ou seja,

$$v \geq (1+\delta)u - \delta \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \text{ em } \Omega.$$

Fazendo $\delta \to 0$ na última desigualdade,

$$v \geq u \text{ em } \Omega.$$

$\blacksquare$

5.2 Existência e unicidade

Nesta seção, usaremos o Método de Perron para assegurar existência de solução de viscosidade do problema $(P_{\infty,F})$ e o Teorema de Comparação para a unicidade de solução de viscosidade. A aplicação do Método de Perron consiste em:

- Passo 1: Definir duas funções, $\overline{h}_{F,g}$ e $\underline{h}_{F,g}$, associadas ao problema (denominadas soluções de Perron),
- Passo 2: Provar que $\overline{h}_{F,g}$ ou $\underline{h}_{F,g}$ é uma solução de viscosidade para $(P_{\infty,F})$.

Daqui em diante consideraremos que $\inf_\Omega\{F\} > 0$, a menos de menção em contrário. Para poder definir as soluções de Perron, primeiro definiremos a classe superior e inferior de Perron.

Definição 5.7 .

(i) O conjunto

$$\mathcal{S}_{F,g} = \{v \in C(\overline{\Omega}) : \Delta_\infty v \leq F \textit{ no sentido de viscosidade em } \Omega \textit{ e } v \geq g \textit{ em } \partial\Omega\}$$

é denominado ***classe superior de Perron****.*

(ii) O conjunto

$$\mathcal{I}_{F,g} = \{w \in C(\overline{\Omega}) \,:\, \Delta_\infty w \geq F \text{ no sentido de viscosidade em } \Omega \text{ e } w \leq g \text{ em } \partial\Omega\}.$$

*é denominado **classe inferior de Perron**.*

Observação 5.8 *Antes de fazer qualquer afirmação que envolva as classes superior e inferior de Perron, devemos demonstrar que $\mathcal{S}_{F,g}$ e $\mathcal{I}_{F,g}$ são não vazias. De fato, consideremos a função*

$$\begin{array}{rcl} v : \overline{\Omega} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & v(x) = \sup\limits_{\partial\Omega}\{g\} + 1. \end{array}$$

É claro que $v \in C(\overline{\Omega})$. Como $v \in C^2(\Omega)$, basta mostrar que $\Delta_\infty v(x) \leq F(x)$ em Ω para afirmar que $\Delta_\infty v \leq F$ no sentido de viscosidade em Ω. Notemos que

$$\Delta_\infty v(x) = \Delta_\infty \left(\sup_{\partial\Omega}\{g\} + 1\right) = 0 < \inf_{\Omega}\{F\} \leq F(x),$$

onde $x \in \Omega$. Além disso, para qualquer $x \in \Omega$, vale que

$$v(x) = \sup_{\partial\Omega}\{g\} + 1 > g(x).$$

Portanto, $v \in \mathcal{S}_{F,g}$. Por outro lado, dado $\xi_0 \in \partial\Omega$, definamos

$$\begin{array}{rcl} w : \overline{\Omega} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & w(x) = c(|x - \xi_0|^{\frac{4}{3}} + d), \end{array}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{64c^3}{81} > \|F\|_{L^\infty(\Omega)}$ e $d < 0$ com $|d|$ suficientemente grande. Notemos que, para cada $\xi \in \partial\Omega$,

$$\begin{array}{rcl} w(\xi) & = & c(|\xi - \xi_0|^{\frac{4}{3}} + d) \\ & \leq & c((diam(\Omega))^{\frac{4}{3}} + d) \\ & \leq & \inf\limits_{\partial\Omega} g(\tilde{\xi}) \\ & \leq & g(\xi), \end{array}$$

pois Ω é limitado e $g \in C(\partial\Omega)$, ou seja, g é limitado em $\partial\Omega$. Além disso, como

$w \in C^2(\Omega)$, é suficiente ver que, para cada $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\Delta_\infty w(x) &= \frac{1}{2}\left\langle \nabla w(x), \nabla|\nabla w(x)|^2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \nabla(c(|x-\xi_0|^{\frac{4}{3}}+d)), \nabla|\nabla(c(|x-\xi_0|^{\frac{4}{3}}+d))|^2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle c\nabla|x-\xi_0|^{\frac{4}{3}}, \nabla|c\nabla|x-\xi_0|^{\frac{4}{3}}|^2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \frac{4c}{3}|x-\xi_0|^{-\frac{2}{3}}(x-\xi_0), \nabla\left|\frac{4c}{3}|x-\xi_0|^{-\frac{2}{3}}(x-\xi_0)\right|^2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \frac{4c}{3}|x-\xi_0|^{-\frac{2}{3}}(x-\xi_0), \frac{16c^2}{9}\nabla\,|x-\xi_0|^{\frac{2}{3}} \right\rangle \\
&= \frac{32c^3}{27}\left\langle |x-\xi_0|^{-\frac{2}{3}}(x-\xi_0), \frac{2}{3}|x-\xi_0|^{-\frac{4}{3}}(x-\xi_0) \right\rangle \\
&= \frac{64c^3}{81}\left\langle |x-\xi_0|^{-\frac{2}{3}}(x-\xi_0), |x-\xi_0|^{-\frac{4}{3}}(x-\xi_0) \right\rangle \\
&= \frac{64c^3}{81} \\
&> \|F\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\geq F(x).
\end{aligned}$$

Como $w \leq g$ em $\partial\Omega$, $\Delta_\infty w \geq F$ no sentido de viscosidade em Ω e $w \in C(\overline{\Omega})$, tem-se que $w \in \mathcal{I}_{F,g}$.

O seguinte resultado nos permite construir um novo elemento de alguma das classe de Perron a partir de uma quantidade finita de elementos da mesma classe.

Proposição 5.9 *Se $v_1, v_2, \cdots, v_n \in \mathcal{S}_{F,g}$, então a função*

$$\begin{aligned}
v : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto v(x) = \min_{i=1,\cdots,n}\{v_i(x)\}
\end{aligned}$$

pertence a $\mathcal{S}_{F,g}$. Além disso, se $w_1, w_2, \cdots, w_n \in \mathcal{I}_{F,g}$, então a função

$$\begin{aligned}
w : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto w(x) = \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i(x)\}
\end{aligned}$$

pertence a $\mathcal{I}_{F,g}$.

Demonstração. Primeiro mostremos que a função v pertence a $C(\overline{\Omega})$. Para isso, é suficiente mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned}
\hat{v} : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \hat{v}(x) = \min\{\hat{v}_1(x), \hat{v}_2(x)\},
\end{aligned}$$

onde $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in \mathcal{S}_{F,g}$, pertence a $\mathcal{I}_{F,g}$. Lembremos que

$$\min\{\hat{v}_1(x), \hat{v}_2(x)\} = \frac{1}{2}(\hat{v}_1(x) + \hat{v}_2(x) - |\hat{v}_1(x) - \hat{v}_2(x)|),\ \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

e portanto,

$$\hat{v} = \frac{1}{2}(\hat{v}_1 + \hat{v}_2 - |\hat{v}_1 - \hat{v}_2|).$$

Da última identidade, segue-se que $\hat{v} \in C(\overline{\Omega})$, pois $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in C(\overline{\Omega})$.

Agora, provemos que $\Delta_\infty v \leq F$ no sentido de viscosidade em Ω. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ tais que

$$v(x) - \phi(x) > 0 = v(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in \Omega \setminus \{x_0\}. \tag{5.19}$$

Como $v(x_0) = \min\limits_{i=1,\cdots,n}\{v_i(x_0)\}$, então existe $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que

$$v(x_0) = v_{i_0}(x_0). \tag{5.20}$$

Segue-se de (5.19) e (5.20) que

$$v_{i_0}(x) - \phi(x) > v(x) - \phi(x) > 0 = v(x_0) - \phi(x_0) = v_{i_0}(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in \Omega \setminus \{x_0\},$$

ou seja,

$$v_{i_0}(x) - \phi(x) > 0 = v_{i_0}(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in \Omega \setminus \{x_0\}.$$

Assim, ϕ é uma função teste para v_{i_0}. Logo,

$$\Delta_\infty \phi(x_0) \leq F(x_0), \tag{5.21}$$

pois $\Delta_\infty v_{i_0} \leq F$ no sentido de viscosidade em Ω (por hipótese). Já que ϕ é uma função teste arbitraria para v[1], então $\Delta_\infty v \leq F$ no sentido de viscosidade em Ω.

Por outro lado, por hipótese, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$v_i(\xi) \geq g(\xi),\ \forall\, \xi \in \partial\Omega,$$

assim,

$$v(\xi) = \min_{i=1,\cdots,n}\{v_i(\xi)\} \geq g(\xi),\ \forall\, \xi \in \partial\Omega,$$

e portanto,

$$v \geq g \text{ em } \partial\Omega.$$

[1]Ver a desigualdade (5.19)

Em consequência, $v \in \mathcal{S}_{F,g}$.

Além disso, fazendo um argumento semelhante, pode-se provar que w pertence a $\mathcal{I}_{F,g}$. ■

Agora, procedamos a definir as soluções de Perron.

Definição 5.10 *A função*

$$\begin{aligned} \overline{h}_{F,g} : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \overline{h}_{F,g}(x) = \inf_{v \in \mathcal{S}_{F,g}} \{v(x)\} \end{aligned}$$

é denominada ***solução superior de Perron****. Também, a aplicação*

$$\begin{aligned} \underline{h}_{F,g} : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \underline{h}_{F,g}(x) = \sup_{w \in \mathcal{I}_{F,g}} \{w(x)\} \end{aligned}$$

é denominada ***solução inferior de Perron****.*

O seguinte resultado garante que as soluções de Perron são soluções de viscosidade da equação $\Delta_\infty u = F$.

Teorema 5.11 *Se* $\inf_\Omega\{F\} > 0$*, então* $\overline{h}_{F,g}$ *é uma solução de viscosidade de* $\Delta_\infty u = F$*. Também, tem-se que* $\underline{h}_{F,g}$ *é uma solução de viscosidade de* $\Delta_\infty u = F$*, quando* $\sup_\Omega\{F\} < 0$.

Demonstração. Já que a demostração da segunda implicação do Teorema 5.11 é similar à primeira, só provaremos que $\overline{h}_{F,g}$ é uma solução de viscosidade de $\Delta_\infty u = F$. Por facilidade, denotaremos $\overline{h}_{F,g}$ por $\overline{h}$. Como $\overline{h}(x) = \inf_{v \in \mathcal{S}_{F,g}} \{v(x)\}$ e v é contínua em Ω, então $\overline{h}$ é semicontínua superiormente em Ω.

Agora, mostremos que $\Delta_\infty \overline{h} \geq F$ no sentido de viscosidade em Ω. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $\psi \in C^2(\Omega)$ tais que

$$\overline{h}(x) - \psi(x) < 0 = \overline{h}(x_0) - \psi(x_0), \ \forall\, x \in \Omega \setminus \{x_0\}. \tag{5.22}$$

Suponhamos, por absurdo, que $\Delta_\infty \overline{h} < F$ no sentido de viscosidade em Ω, ou seja,

$$\Delta_\infty \psi(x_0) < F(x_0).$$

Logo,

$$\Delta_\infty \psi(x_0) - F(x_0) < 0.$$

Como $\psi \in C^2(\Omega)$ e $F \in C(\Omega)$, então $\Delta_\infty \psi - F$ é contínua em Ω. Daí, existe $\delta > 0$ tal que

$$\Delta_\infty \psi(x) < F(x), \ \forall\, x \in B(x_0, 2\delta). \tag{5.23}$$

Por outro lado, de (5.22),

$$\overline{h}(\xi) < \psi(\xi),$$

onde $\xi \in \partial B(x_0, \delta)$, e portanto,

$$\inf_{v \in \mathcal{S}_{F,g}} \{v(\xi)\} < \psi(\xi). \tag{5.24}$$

Também, existe uma sequência $(v_n) \subset \mathcal{S}_{F,g}$ tal que

$$v_n(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{v \in \mathcal{S}_{F,g}} \{v(\xi)\}. \tag{5.25}$$

Por (5.24) e (5.25), para cada $\xi \in \partial B(x_0, \delta)$, existe $(v_{n(\xi)}) \in \mathcal{S}_{F,g}$ tal que

$$v_{n(\xi)}(\xi) < \psi(\xi), \ \forall\, n(\xi) \in \mathbb{N}.$$

Daí, existe $r_\xi > 0$ tal que

$$v_{n(\xi)}(x) < \psi(x), \ \forall\, x \in B(\xi, r_\xi), \tag{5.26}$$

pois $v_{n(\xi)} - \psi$ é contínua. Agora, notemos que

$$\partial B(x_0, \delta) \subset \bigcup_{\xi \in \partial B(x_0,\delta)} B(\xi, r_\xi).$$

Já que $\partial B(x_0, \delta)$ é un conjunto compacto, tem-se que existem $\xi_1, \cdots, \xi_m \in \partial B(x_0, \delta)$ tal que

$$\partial B(x_0, \delta) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(\xi_j, r_{\xi_j}).$$

Então, para cada $x \in \partial B(x_0, \delta)$ existe $j_x \in \{1, \cdots, m\}$ tal que $x \in B(\xi_{j_x}, r_{\xi_{j_x}})$. De isto último e (5.26), para qualquer $\xi \in \partial B(x_0, \delta)$ existe $j_x \in \{1, \cdots, m\}$ tal que

$$v_{n(\xi_{j_x})}(\xi) < \psi(\xi),$$

sendo assim,

$$\min_{j=1,\cdots,n} \{v_{n(\xi_j)}(\xi)\} < \psi(\xi), \ \forall\, \xi \in \partial B(x_0, \delta). \tag{5.27}$$

Baseados na última desigualdade, consideremos

$$\begin{array}{rcl} v : \overline{\Omega} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & v(x) = \min\limits_{j=1,\cdots,m} \{v_{n(\xi_j)}(x)\}. \end{array}$$

Por (5.27) e a Proposição 5.9, tem-se que

$$v \in \mathcal{S}_{F,g} \quad \text{e} \quad v < \psi \text{ em } \partial B(x_0, \delta). \tag{5.28}$$

Agora, fixemos a função $V : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida como

$$V(x) = \begin{cases} \min\left\{v(x), \psi(x) - \frac{\alpha}{2}\right\}, & x \in B(x_0, \delta), \\ v(x), & x \in (B(x_0, \delta))^c, \end{cases}$$

onde[2] $\alpha = \min\limits_{\partial B(x_0,\delta)} \{\psi - v\}$. Observemos que se desejamos mostrar que $V \in \mathcal{S}_{F,g}$, basta provar que $\psi - \frac{\alpha}{2} \in \mathcal{S}_{F,g}$ no conjunto $B(x_0, \delta)$; pois, pela Proposição 5.9, $V \in \mathcal{S}_{F,g}$ no conjunto $B(x_0, \delta)$ sempre que $\psi - \frac{\alpha}{2} \in \mathcal{S}_{F,g}$ no conjunto $B(x_0, \delta)$ e, pela Teoria de Soluções de Viscosidade [19], uma função definida por partes pertence a $\mathcal{S}_{F,g}$ quando cada parte é um elemento de $\mathcal{S}_{F,g}$.

Segue-se de (5.23) que,

$$\Delta_\infty \left(\psi(x) - \frac{\alpha}{2}\right) = \Delta_\infty \psi(x) < F(x), \ \forall\, x \in B(x_0, 2\delta),$$

e de forma similar ao Teorema de Consistência (ver Teorema 2.7), obtemos que $\psi - \frac{\alpha}{2}$ é uma supersolução de viscosidade de $\Delta_\infty u(x) = F(x)$ em $B(x_0, 2\delta)$.

Como $\alpha = \min\limits_{\partial B(x_0,\delta)} \{\psi - v\}$, então

$$g \leq v \leq \psi - \frac{\alpha}{2} \ \text{ em } \ \partial B(x_0, \delta).$$

Além disso, $\psi - \frac{\alpha}{2}$ pertence a $C(\overline{B(x_0, \delta)})$, pois $\psi \in C^2(\Omega)$. Em conclusão, $\psi - \frac{\alpha}{2} \in \mathcal{S}_{F,g}$ no conjunto $B(x_0, \delta)$.

Da definição da função V, segue-se que

$$\begin{array}{rcl} V(x_0) & = & \min\left\{v(x_0), \psi(x_0) - \dfrac{\alpha}{2}\right\} \\ & \leq & \psi(x_0) - \dfrac{\alpha}{2} \\ & \overset{(5.22)}{=} & \overline{h}(x_0) - \dfrac{\alpha}{2} \\ & < & \overline{h}(x_0). \end{array} \tag{5.29}$$

[2]Note que $\alpha > 0$, por (5.28).

Da análise feita para V,

$$V \in \mathcal{S}_{F,g} \quad \text{e} \quad V(x_0) < \overline{h}(x_0), \tag{5.30}$$

o que é absurdo, pois $\overline{h}(x) = \inf_{v \in \mathcal{S}_{F,g}}\{v(x)\}$. Portanto, $\overline{h}$ é uma subsolução de viscosidade de $\Delta_\infty = F$. Também, pela Proposição (5.3), $\overline{h}$ é contínua em Ω.

Agora vamos provar que a função $\overline{h}$ é uma supersolução de viscosidade de $\Delta_\infty = F$, pois $\overline{h}$ é semicontínua inferiormente em Ω . Dados x_0, $B(x_0,r) \subset\subset \Omega$ e $\phi \in C^2(\overline{B(x_0,r)})$ tal que

$$\overline{h}(x) - \phi(x) > 0 = \overline{h}(x_0) - \phi(x_0),\ \forall\, x \in \overline{B(x_0,r)} \setminus \{x_0\}.$$

Notemos, para cada $v \in \mathcal{S}_F$,

$$v(x) - \phi(x) \geq \overline{h}(x) - \phi(x),\ \forall\, x \in \overline{B(x_0,r)},$$

assim,

$$\min_{\overline{B(x_0,r)}}\{v - \phi\} \geq \min_{\overline{B(x_0,r)}}\{\overline{h} - \phi\}.$$

Como $v \in C(\Omega)$ e $\phi \in C(\overline{B(x_0,r)})$, então

$$v - \phi \in C(\overline{B(x_0,r)}),$$

e portanto, $v - \phi$ atinge seu mínimo em $\bar{x} \in \overline{B(x_0,r)}$. Agora, consideremos a função

$$\overline{\phi}(x) = \phi(x) - |x - \bar{x}|^4 + (v - \phi)(\bar{x}),\ \forall\, x \in \overline{B(x_0,r)}.$$

É fácil ver que $\overline{\phi} \in C(\overline{B(x_0,r)})$. Além disso,

$$\overline{\phi}(\bar{x}) = \phi(\bar{x}) - |\bar{x} - \bar{x}|^4 + (v - \phi)(\bar{x}) = v(\bar{x})$$

e, para cada $x \in \overline{B(x_0,r)} \setminus \{\bar{x}\}$,

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}(x) &= \phi(x) - |x - \bar{x}|^4 + (v - \phi)(\bar{x}) \\
&< \phi(x) + (v - \phi)(\bar{x}) \\
&\leq \phi(x) + (v - \phi)(x) \\
&= v(x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$v(x) - \overline{\phi}(x) > 0 = v(\bar{x}) - \overline{\phi}(\bar{x}),\ \forall\, x \in \overline{B(x_0,r)} \setminus \{\bar{x}\},$$

e como v é uma supersolução de viscosidade em Ω, obtemos

$$\Delta_\infty \overline{\phi}(\bar{x}) \leq F(\bar{x}).$$

Lembremos que

$$\Delta_\infty \overline{\phi}(\bar{x}) = \Delta_\infty \phi(\bar{x}),$$

assim,

$$\Delta_\infty \phi(\bar{x}) \leq F(\bar{x}).$$

Como o raio pode ser arbitrariamente pequeno e pelas continuidade de $\Delta_\infty \phi$ e F, tem-se

$$\Delta_\infty \phi(x_0) = \lim_{\bar{x} \to x_0} \Delta_\infty \phi(\bar{x}) \leq \lim_{\bar{x} \to x_0} F(\bar{x}) = F(x_0),$$

ou seja,

$$\Delta_\infty \phi(x_0) \leq F(x_0).$$

Em consequência, $\overline{h}$ é uma supersolução de viscosidade de $\Delta_\infty = F$.

Resumindo a teoria desenvolvida até agora, temos que $\overline{h}$ é uma subsolução e supersolução de viscosidade de $\Delta_\infty = F$, ou seja, $\overline{h}$ é uma solução de viscosidade de $\Delta_\infty = F$ ■

Com base no que fizemos até agora, é suficiente mostrar que $\overline{h}_{F,g}$ pertence a $C(\overline{\Omega})$ e $\overline{h}_{F,g} = g$ em $\partial\Omega$ para garantir a existência de soluções de viscosidade do problema $(P_{\infty,F})$.

Teorema 5.12 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $F \in C(\Omega)$ com $\inf_{\Omega}\{F\} > 0$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Então, existe $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u = g$ em $\partial\Omega$ e*

$$\Delta_\infty u = F$$

no sentido de viscosidade em Ω.

Demonstração. Por simplicidade, denotaremos $\overline{h}_{F,g}$ por $\overline{h}$. Começamos mostrando que a solução superior de Perron satisfaz a condição de fronteira, isto é, $\overline{h} = g$ em $\partial\Omega$. Dados $\xi_0 \in \partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$ fixados, existe $\delta > 0$ tal que

$$g(\xi_0) - \varepsilon < g(\xi) < g(\xi_0) + \varepsilon, \tag{5.31}$$

para cada $\xi \in B(\xi_0,\delta)\cap\partial\Omega$, pois $g \in C(\partial\Omega)$. Agora, consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} \overline{v}:\overline{\Omega} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \overline{v}(x) = g(\xi_0)+\varepsilon+\sup\limits_{\partial\Omega}\{g(\xi)-g(\xi_0)\}\dfrac{|x-\xi_0|}{\delta}. \end{array}$$

<u>Afirmação 1:</u> $\overline{v}$ é uma supersolução de viscosidade em Ω da equação $\Delta_\infty u = F$.

Como $\overline{v} \in C(\Omega)$, então $\overline{v}$ é semicontínua inferiormente em Ω. Além disso, já que $\overline{v} \in C^2(\Omega)$, temos que, para qualquer $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty \overline{v}(x) &= \frac{1}{2}\left\langle \nabla \overline{v}(x), \nabla|\nabla \overline{v}(x)|^2\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle \nabla\left(\sup_{\partial\Omega}\{g(\xi)-g(\xi_0)\}\frac{|x-\xi_0|}{\delta}\right), \nabla\left|\nabla\left(\sup_{\partial\Omega}\{g(\xi)-g(\xi_0)\}\frac{|x-\xi_0|}{\delta}\right)\right|^2\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle K\frac{(x-\xi_0)}{|x-\xi_0|}, \nabla\left|K\frac{(x-\xi_0)}{|x-\xi_0|}\right|^2\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle K\frac{(x-\xi_0)}{|x-\xi_0|}, \nabla(K^2)\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle K\frac{(x-\xi_0)}{|x-\xi_0|}, 0\right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde $K = \sup\limits_{\partial\Omega}\{g(\xi)-g(\xi_0)\}/\delta$. Como $\inf\limits_{\Omega}\{F\} > 0$, obtemos

$$\Delta_\infty \overline{v}(x) = 0 < \inf_{\Omega}\{F\} \leq F(x),\ \forall\, x \in \Omega,$$

assim, $\overline{v}$ é uma supersolução de viscosidade em Ω.

<u>Afirmação 2:</u> $\overline{v} \geq g$ em $\partial\Omega$.

Se $\tilde{\xi} \in B(\xi_0,\delta)\cap\partial\Omega$, tem-se que

$$\begin{aligned} \overline{v}(\tilde{\xi}) &= g(\xi_0)+\varepsilon+\sup_{\partial\Omega}\{g(\xi)-g(\xi_0)\}\frac{|\tilde{\xi}-\xi_0|}{\delta} \\ &\geq g(\xi_0)+\varepsilon+(g(\xi_0)-g(\xi_0))\frac{|\tilde{\xi}-\xi_0|}{\delta} \\ &\geq g(\xi_0)+\varepsilon \\ &\overset{(5.31)}{>} g(\tilde{\xi}). \end{aligned}$$

Também, se $\tilde{\xi} \in (B(\xi_0, \delta))^c \cap \partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{v}(\tilde{\xi}) &= g(\xi_0) + \varepsilon + \sup_{\partial\Omega}\{g(\xi) - g(\xi_0)\}\frac{|\tilde{\xi} - \xi_0|}{\delta} \\
&\geq g(\xi_0) + \varepsilon + \sup_{\partial\Omega}\{g(\xi) - g(\xi_0)\} \\
&\geq g(\xi_0) + \varepsilon + g(\tilde{\xi}) - g(\xi_0) \\
&\geq \varepsilon + g(\tilde{\xi}) \\
&> g(\tilde{\xi}).
\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\overline{v}(\tilde{\xi}) > g(\tilde{\xi}),\ \forall \tilde{\xi} \in \partial\Omega.$$

Já que $\overline{v} \in C(\overline{\Omega})$ e pelas Afirmações 1 e 2, então $\overline{v} \in \mathcal{S}_{F,g}$. Assim, para quaisquer $\xi_0 \in \partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$,

$$g(\xi_0) \leq \overline{h}(\xi_0) = \inf_{v \in \mathcal{S}_F}\{v(\xi_0)\} \leq \overline{v}(\xi_0) = g(\xi_0) + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos que

$$\overline{h}(\xi_0) = g(\xi_0),\ \forall\, \xi_0 \in \partial\Omega.$$

Agora, mostraremos alguns resultados que serão revelantes para afirmar que $\overline{h}$ pertence a $C(\overline{\Omega})$. Notemos que

$$\underline{h} \text{ é semicontínua inferiormente em } \overline{\Omega} \quad \text{e} \quad \underline{h} \leq g \text{ em } \partial\Omega. \tag{5.32}$$

Já que, para cada $w \in \mathcal{I}_{F,g}$, temos que $w \in C(\overline{\Omega})$, e portanto, w é semicontínuo inferiormente em $\overline{\Omega}$. Assim, $\underline{h} = \sup_{w \in \mathcal{I}_{F,g}}\{w\}$ é semicontínuo inferiormente em $\overline{\Omega}$. Além disso, como $w \leq g$ em $\partial\Omega$, para cada $w \in \mathcal{I}_{F,g}$, então

$$\underline{h} = \sup_{w \in \mathcal{I}_{F,g}}\{w\} \leq g \text{ em } \partial\Omega.$$

Vejamos que a desigualdade

$$\liminf_{x \in \Omega \to \xi} \underline{h}(x) \geq g(\xi),\ \forall\, \xi \in \partial\Omega.$$

é verdadeira. Dados $\xi \in \partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$. Como $g \in C(\partial\Omega)$, então existe $r > 0$ tal que

$$|g(\tilde{\xi}) - g(\xi)| < \varepsilon \ \text{ quando } \ \tilde{\xi} \in B(\xi, r) \cap \partial\Omega. \tag{5.33}$$

Já que Ω é limitado, podemos escolher $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a > 3|x-\xi|, \ \forall\, x \in \overline{\Omega}, \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{4}a^{\frac{4}{3}}. \tag{5.34}$$

Notemos que

$$b - \frac{1}{4}(a-3r)^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}a^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{4}(a-3r)^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}\left(a^{\frac{4}{3}} - (a-3r)^{\frac{4}{3}}\right) > 0.$$

Agora, tomemos $c \geq 1$ tal que

$$c\left(b - \frac{1}{4}(a-3r)^{\frac{4}{3}}\right) \geq 2\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \quad \text{e} \quad c^3 \geq \|F\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Consideremos a função

$$\begin{aligned} \overline{w} : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \overline{w}(x) = g(\xi) - \varepsilon - c\left(b - \frac{1}{4}(a-3|x-\xi|)^{\frac{4}{3}}\right). \end{aligned}$$

Afirmação 3: $\overline{w}$ é uma subsolução de viscosidade em Ω.

Como $\overline{w} \in C(\Omega)$, então $\overline{w}$ é semicontínua superiormente em Ω. Além disso, já que $\overline{v} \in C^2(\Omega)$, temos que, para cada $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty \overline{w}(x) &= \frac{1}{2}\left\langle \nabla \overline{w}(x), \nabla|\nabla \overline{w}(x)|^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle \nabla\left(\frac{c}{4}(a-3|x-\xi|)^{\frac{4}{3}}\right), \nabla\left|\nabla\left(\frac{c}{4}(a-3|x-\xi|)^{\frac{4}{3}}\right)\right|^2 \right\rangle \\ &= \frac{c^3}{128}\left\langle \nabla\left((a-3|x-\xi|)^{\frac{4}{3}}\right), \nabla\left|\nabla\left((a-3|x-\xi|)^{\frac{4}{3}}\right)\right|^2 \right\rangle \\ &= \frac{c^3}{128}\left\langle -4(a-3|x-\xi|)^{\frac{1}{3}}\frac{(x-\xi)}{|x-\xi|}, \nabla\left|-4(a-3|x-\xi|)^{\frac{1}{3}}\frac{(x-\xi)}{|x-\xi|}\right|^2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty \overline{w}(x) &= \frac{-64c^3}{128}\left\langle (a-3|x-\xi|)^{\frac{1}{3}}\frac{(x-\xi)}{|x-\xi|}, \nabla\left((a-3|x-\xi|)^{\frac{2}{3}}\right) \right\rangle \\ &= \frac{-64c^3}{128}\left\langle (a-3|x-\xi|)^{\frac{1}{3}}\frac{(x-\xi)}{|x-\xi|}, -2(a-3|x-\xi|)^{-\frac{1}{3}}\frac{(x-\xi)}{|x-\xi|} \right\rangle \\ &= \frac{128c^3}{128}\left\langle (a-3|x-\xi|)^{\frac{1}{3}}\frac{(x-\xi)}{|x-\xi|}, (a-3|x-\xi|)^{-\frac{1}{3}}\frac{(x-\xi)}{|x-\xi|} \right\rangle \\ &= c^3 \geq \|F\|_{L^\infty(\Omega)} \geq F(x), \end{aligned}$$

isto é, $\overline{w}$ é uma subsolução de viscosidade em Ω.

Afirmação 4: $\overline{w} \leq g$ em $\partial\Omega$.

Para qualquer $\tilde{\xi} \in B(\xi, r) \cap \partial\Omega$, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{w}(\tilde{\xi}) &= g(\xi) - \varepsilon - c\left(b - \frac{1}{4}(a - 3|\tilde{\xi} - \xi|)^{\frac{4}{3}}\right) \\
&\overset{(5.34)}{<} g(\xi) - \varepsilon \\
&\overset{(5.33)}{<} g(\tilde{\xi}).
\end{aligned}$$

Também, se $\tilde{\xi} \in (B(\xi_0, \delta))^c \cap \partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{w}(\tilde{\xi}) &= g(\xi) - \varepsilon - c\left(b - \frac{1}{4}(a - 3|\tilde{\xi} - \xi|)^{\frac{4}{3}}\right) \\
&< g(\xi) - 2\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\
&= (g(\xi) - \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}) - \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\
&\leq -\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\
&\leq g(\tilde{\xi}).
\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\overline{w}(\tilde{\xi}) < g(\tilde{\xi}),\ \forall\, \tilde{\xi} \in \partial\Omega.$$

Já que $\overline{w} \in C(\overline{\Omega})$ e pelas Afirmações 3 e 4, obtemos que $\overline{w} \in \mathcal{I}_{F,g}$. Por outro lado, da definição de $\overline{w}$, temos

$$\overline{w}(\xi) = g(\xi) - \varepsilon - c\left(b - \frac{1}{4}a^{\frac{4}{3}}\right) \overset{(5.34)}{=} g(\xi) - \varepsilon,$$

assim, para quaisquer $\xi \in \partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$,

$$\underline{h}(\xi) = \sup_{w \in \mathcal{I}_{F,g}} \{w(\xi)\} \geq \overline{w}(\xi) = g(\xi) - \varepsilon.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\underline{h}(\xi) \geq g(\xi),\ \forall\, \xi \in \partial\Omega,$$

e por (5.32),

$$\liminf_{x \in \Omega \to \xi} \underline{h}(x) \geq \underline{h}(\xi) \geq g(\xi),\ \forall\, \xi \in \partial\Omega. \tag{5.35}$$

Usando os resultados obtidos até agora, provaremos que $\overline{h} \in C(\overline{\Omega})$. Pelos Teoremas 5.11 e 5.3, tem-se que $\overline{h} \in C(\Omega)$. Também, observe que $\overline{h}$ é semicontínua superiormente em $\overline{\Omega}$, pois $\overline{h}(x) = \inf_{v \in \mathcal{S}_{F,g}} \{v(x)\}$ e v é contínua em $\overline{\Omega}$. Então, como $\overline{h}$ é semicontínua superiormente em $\overline{\Omega}$ e $\overline{h} = g$ em $\partial\Omega$,

$$\limsup_{x \in \Omega \to \xi} \overline{h}(x) \leq \overline{h}(\xi) = g(\xi),\ \forall\, \xi \in \partial\Omega. \tag{5.36}$$

Por outro lado, lembremos que, para quaisquer $v \in \mathcal{S}_{F,g}$ e $w \in \mathcal{I}_{F,g}$, temos que:

- $v, w \in C(\overline{\Omega})$ tais que $\Delta_\infty v \leq F$ e $\Delta_\infty w \geq F$ em Ω, no sentido de viscosidade,
- $v \geq g \geq w$ em $\partial\Omega$, e
- $F \in C(\Omega)$ e $\inf\limits_{\Omega}\{F\} > 0$,

e assim, usando o Teorema de Comparação[3],

$$v \geq w \ \text{ em } \ \overline{\Omega}, \ \forall\, v \in \mathcal{S}_{F,g}, \ \forall\, w \in \mathcal{I}_{F,g}.$$

Daí,

$$\overline{h} = \inf_{v \in \mathcal{S}_{F,g}} \{v\} \geq \sup_{w \in \mathcal{I}_{F,g}} \{w\} = \underline{h} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}.$$

Em particular, para cada $\xi \in \partial\Omega$,

$$\liminf_{x \in \Omega \to \xi} \overline{h}(x) \geq \liminf_{x \in \Omega \to \xi} \underline{h}(x). \tag{5.37}$$

Em consequência,

$$g(\xi) \overset{(5.36)}{\geq} \limsup_{x \in \Omega \to \xi} \overline{h}(x) \geq \liminf_{x \in \Omega \to \xi} \overline{h}(x) \overset{(5.37)}{\geq} \liminf_{x \in \Omega \to \xi} \underline{h}(x) \overset{(5.35)}{\geq} g(\xi),$$

ou seja,

$$\lim_{x \in \Omega \to \xi} \overline{h}(x) = g(\xi), \ \forall\, \xi \in \partial\Omega.$$

Portanto, $h \in C(\overline{\Omega})$.

Em conclusão, temos que $\overline{h} \in C(\overline{\Omega})$ tal que $\overline{h} = g$ em $\partial\Omega$ e

$$\Delta_\infty \overline{h} = F$$

no sentido de viscosidade em Ω, isto é, o problema $(P_{\infty,F})$ possui pelo menos uma solução de viscosidade. ∎

Por outro lado, se supomos a condição de limitação superior $\sup_\Omega\{F\} < 0$, então, também pode-se garantir que o problema $(P_{\infty,F})$ tem solução.

Teorema 5.13 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, $F \in C(\Omega)$ com $\sup\limits_{\Omega}\{F\} < 0$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Logo, existe $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u = g$ em $\partial\Omega$ e*

$$\Delta_\infty u = F$$

no sentido de viscosidade em Ω.

[3] Ver Teorema 5.6.

Demonstração. Como $F \in C(\Omega)$ com $\sup\limits_{\Omega}\{F\} < 0$ e $g \in C(\partial\Omega)$, então

$$-F \in C(\Omega) \text{ com } -\inf_{\Omega}\{-F\} < 0 \text{ e } -g \in C(\partial\Omega).$$

Agora, tomando $\widetilde{F} = -F$ e $\widetilde{g} = -g$, obtemos

$$\widetilde{F} \in C(\Omega) \text{ com } \inf_{\Omega}\{\widetilde{F}\} > 0 \text{ e } \widetilde{g} \in C(\partial\Omega).$$

Pelo Teorema 5.12, existe $v \in C(\overline{\Omega})$ tal que $v = \widetilde{g}$ em $\partial\Omega$ e

$$\Delta_\infty v = \widetilde{F}$$

no sentido de viscosidade em Ω. Logo, existe $v \in C(\overline{\Omega})$ tal que $-v = g$ em $\partial\Omega$ e

$$\Delta_\infty(-v) = F$$

no sentido de viscosidade em Ω. Em consequência, existe $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u = g$ em $\partial\Omega$ e

$$\Delta_\infty u = F$$

no sentido de viscosidade em Ω. ■

Em conclusão, podemos resumir os Teoremas 5.12 e 5.13 na seguinte afirmação.

Teorema 5.14 *(Teorema de Existência para ($P_{\infty,F}$), Lu e Wang [24])*
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, $F \in C(\Omega)$ com $\sup\limits_{\Omega}\{F\} < 0$ ou $\inf\limits_{\Omega}\{F\} > 0$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Então, existe $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u = g$ em $\partial\Omega$ e

$$\Delta_\infty u = F$$

no sentido de viscosidade em Ω.

Ora, com as condições do Teorema de Existência para ($P_{\infty,F}$), suponhamos que as funções $u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega})$ são soluções do problema ($P_{\infty,F}$). Então,

$$\Delta_\infty u_2 \leq F \qquad \text{e} \qquad \Delta_\infty u_1 \geq F,$$

no sentido de viscosidade em Ω e $u_2 \geq u_1$ em $\partial\Omega$. Também, tem-se que

$$\Delta_\infty u_1 \leq F \qquad \text{e} \qquad \Delta_\infty u_2 \geq F,$$

no sentido de viscosidade em Ω e $u_1 \geq u_2$ em $\partial\Omega$. Aplicando o Teorema de Comparação[4] para ambos últimos conjuntos de resultados, obtemos

$$u_2 \geq u_1 \text{ em } \overline{\Omega} \quad \text{e} \quad u_1 \geq u_2 \text{ em } \overline{\Omega},$$

respectivamente. Segue-se daí que $u_1 = u_2$ em $\overline{\Omega}$. Consequentemente, el Teorema 5.14, pode escrever-se da seguinte maneira:

Teorema 5.15 *(Teorema de existência e unicidade para $(P_{\infty,F})$, Lu e Wang [24]) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $F \in C(\Omega)$ com $\sup_{\Omega}\{F\} < 0$ ou $\inf_{\Omega}\{F\} > 0$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Então, existe uma única $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u = g$ em $\partial\Omega$ e*

$$\Delta_\infty u = F$$

no sentido de viscosidade em Ω.

[4]Ver Teorema 5.6.

Apêndice A

Alguns resultados da Teoria da Medida e Espaços de Sobolev

Neste Apêndice recordamos alguns resultados clássicos da Análise Funcional e da Teoria de Integração.

Dizemos que duas funcoes u e v são iguais em quase toda parte (q.t.p.) se u e v são diferentes apenas em um subconjunto de Ω com medida nula.

A classe de equivalência determinada por u consiste de todas as funcoes v que são iguais q.t.p. a u. Com base na classes de equivalência, definimos os seguintes espaços.

Definição A.1 *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ é definido por*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

em que representamos simplesmente por f a classe de equivalência determinada por f.

A função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

define uma norma no espaço $L^P(\Omega)$.

Definição A.2

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \},$$

com norma definida por a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \ q.t.p. \ em \ \Omega\}. \end{aligned}$$

Proposição A.3 *(ver [2, Lema 2.2])*
Sejam $1 \leq p < \infty$ e $a, b \geq 0$, então

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{A.1}$$

Proposição A.4 *(Desigualdade de Young)(ver [2, Seção 8.3])*
Dados os números $a, b \geq 0$ e $p, q \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema A.5 *(Desigualdade de Hölder)(ver [7, Teorema 4.6])*
Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suponhamos que $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema A.6 *(ver [2, Teorema 2.14])*
Assumamos que $1 \leq p, q \leq \infty$ e $|\Omega| < \infty$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Além disso, se $u \in L^\infty(\Omega)$, então

$$\lim_{p \to \infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Também, se $u \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e se existe uma constante K tal que para cada p vale $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$, então $u \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K.$$

Agora, apresentaremos alguns definições e resultados à respeito do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$, definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega) \ : \ \exists g_1, g_2, \cdots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que } \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \phi dx, \\ \text{para cada } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e para quasquier } i = 1, \cdots, N \end{array} \right\}$$

munido da norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} : W^{1,p}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

Teorema A.7 *(ver [7, Proposição 9.1])*
Valem as seguintes afirmações:

- $W^{1,p}(\Omega)$ *é de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$.
- $W^{1,p}(\Omega)$ *é reflexivo para* $1 < p < \infty$.
- $W^{1,p}(\Omega)$ *é separável para* $1 \leq p < \infty$.

Teorema A.8 *(Rellich-Kondrachov)(ver [7, Teorema 9.16])*
Assumamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um aberto limitado com fronteira suave. Então, a imersão* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ *é compacta, quando* $p > N$.

O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma de $W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, as funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ são as funções $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que se anulam na fronteira $\partial\Omega$ no sentido de Traço, isto é,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : u\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

É necessário dar um sentido preciso a este conceito, pois as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ são definidas a menos de conjunto de medida nula e a fronteira $\partial\Omega$ é um conjunto de medida nula.

Teorema A.9 *(Teorema do Traço)(ver [13, Teorema 1, Seção 5.5])*
Seja $1 \leq p < \infty$. *Então, existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

(i) $Tu = u\big|_{\partial\Omega}$ *se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

(ii) existe uma constante $c = c(p, \Omega) > 0$ *tal que, para qualquer* $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

O operador T é denominado operador traço. O Teorema A.9 nos permite identificar Tu como sendo os valores na fronteira de uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Suponhamos que a sequência (u_n) em $C_0^\infty(\Omega)$ satisfaz $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Já que o operador traço e contínuo temos que

$$Tu = \lim_{n\to\infty} Tu_n = 0.$$

Desse modo, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset Ker(T)$. Um argumento mais sofisticado prova que a recíproca é verdadeira. Portanto, as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ valem zero na fronteira de Ω.

Proposição A.10 *(ver [7, Teorema 9.17])*
Sejam Ω um aberto suave e $1 \leq p < \infty$. Consideremos a função $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega \Leftrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema A.11 *(Desigualdade de Poincaré)(ver [7, Corolario 9.19])*
Se $1 \leq p < \infty$ e Ω é um conjunto aberto e limitado, então existe uma constante $c = c(p, \Omega)$ tal que

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq c|||\nabla u|||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{A.2}$$

Uma consequência da Desigualdade de Poincaré é que a função

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)}$$

é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que é equivalente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ à norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. De fato, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} &= \||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq c\||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)} + \||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)} \\
&= (c+1)\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Teorema A.12 *(Morrey)(ver [6, Teorema 2.3.27])*
Sejam $p > N$ e Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$. Se $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$|v(x) - v(y)| \leq \frac{2pN}{p-N}|x-y|^{1-\frac{N}{p}}\||\nabla v|\|_{L^p(\Omega)}, \tag{A.3}$$

q.t.p. em Ω Além disso, v pode ser estendido para $\overline{\Omega}$ tal que $v \in C^{1-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega})$ com $v\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Proposição A.13 *(ver [7, Observação 7, Seção 9.1])*
Se $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, então

$$|u(x) - u(y)| \leq \||\nabla u|\|_{L^\infty(\Omega)}|x-y|, \ \forall\, x, y \in \Omega.$$

Teorema A.14 *(Desigualdade de Friedrichs)(ver [27, Capítulo 18])*
Se $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, vale

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq (diam(\Omega))^k\||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)}.$$

Apêndice B

Resultados Técnicos

Teorema B.1 *(Ascoli-Arzelá)(ver [20])*
Seja (f_n) *uma sequência de funções em* $C(\overline{\Omega})$ *tal que*

- $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty$, *e*
- (f_n) *é equicontínua, ou seja, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para qualquer* $x, y \in \overline{\Omega}$ *vale*

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Então, existem uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ *e uma função* $f \in C(\overline{\Omega})$ *tais que* (f_{n_j}) *converge uniformemente para* f *em* $C(\overline{\Omega})$.

Teorema B.2 *(Rademacher)(ver [14, Teorema 3.2])*
Qualquer função lipschitziana f *é diferenciável q.t.p. em* Ω, *isto é,*

$$f(y) = f(x) + \langle\, \nabla f(x), y - x\rangle + o(|y-x|), \ \textit{quando}\ y \to x,$$

q.t.p. em Ω.

Proposição B.3 *Sejam* $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *uma função lipschitziana e* $Lip(g, \partial\Omega) = L$. *Temos que as aplicações*

$$\begin{array}{rcl} F_1 : \overline{\Omega} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_1(x) = \max\limits_{z\in\partial\Omega}\{g(z) - L|x-z|\} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} F_2 : \overline{\Omega} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_2(x) = \min\limits_{y\in\partial\Omega}\{g(y) + L|x-y|\} \end{array}$$

satisfazem as seguintes propriedades:

(p.1.) para qualquer $x \in \partial\Omega$, tem-se $F_1(x) = g(x)$ e $F_2(x) = g(x)$, e

(p.2.) F_1 e F_2 são funções lipschitzianas com $Lip(g, \overline{\Omega}) = Lip(F_1, \overline{\Omega}) = Lip(F_2, \overline{\Omega})$.

Demonstração. .

Afirmação 1: Para qualquer $x \in \partial\Omega$, tem-se $F_1(x) = g(x)$ e $F_2(x) = g(x)$.

Dado $x \in \partial\Omega$. Temos que

$$F_1(x) = \max_{z \in \partial\Omega}\{g(z) - L|x - z|\} \geq g(x) - L|x - x| = g(x). \tag{B.1}$$

Além disso, já que g é uma função lipschitziana, vale que

$$|g(z) - g(x)| \leq L|x - z|, \; \forall\, z \in \partial\Omega,$$

assim,

$$g(z) - L|x - z| \leq g(x), \; \forall\, z \in \partial\Omega.$$

Logo,

$$F_1(x) = \max_{z \in \partial\Omega}\{g(z) - L|x - z|\} \leq g(x). \tag{B.2}$$

Segue-se de (B.1) e (B.2) que $F_1(x) = g(x)$. De maneira similar, mostra-se que $F_2(x) = g(x)$.

Afirmação 2: F_1 e F_2 são funções lipschitzianas.

Dado $x \in \overline{\Omega}$. Notemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\bar{z} \in \partial\Omega$ tal que

$$F_1(x) - \varepsilon = \max_{z \in \partial\Omega}\{g(z) - L|x - z|\} - \varepsilon < g(\bar{z}) - L|x - \bar{z}|, \tag{B.3}$$

Também,

$$F_1(x) = \max_{z \in \partial\Omega}\{g(z) - L|x - z|\} \geq g(\bar{z}) - L|x - \bar{z}|, \tag{B.4}$$

Sejam $x, y \in \overline{\Omega}$. De (B.3) e (B.4),

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_1(y) &< \varepsilon + g(\bar{z}) - L|x - \bar{z}| - g(\bar{z}) + L|y - \bar{z}| \\ &= \varepsilon + L(|y - \bar{z}| - |x - \bar{z}|) \\ &\leq \varepsilon + L|y - x|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F_1(x) - F_1(y) < \varepsilon + L|y - x|. \tag{B.5}$$

Trocando as variáveis x e y, obtemos

$$F_1(y) - F_1(x) < \varepsilon + L|y - x|. \tag{B.6}$$

Segue-se das inequações (B.5) e (B.6) que

$$|F_1(x) - F_1(y)| < \varepsilon + L|y - x|, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Portanto,

$$|F_1(x) - F_1(y)| \leq L|y - x|, \ \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

De forma análoga, tem-se que

$$|F_2(x) - F_2(y)| \leq L|y - x|, \ \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Afirmação 3: $Lip(g, \overline{\Omega}) = Lip(F_1, \overline{\Omega}) = Lip(F_2, \overline{\Omega})$

Seja $L_1 = Lip(F_1, \overline{\Omega})$. Pela Afirmação 2, temos que

$$L_1 \leq L.$$

Suponhamos, por absurdo, que $L_1 < L$. Como $L_1 = Lip(F_1, \overline{\Omega})$, então

$$|F_1(x) - F_1(y)| \leq L_1|y - x|, \ \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Em particular,

$$|F_1(x) - F_1(y)| \leq L_1|y - x|, \ \forall x, y \in \partial\Omega,$$

logo, pela Afirmação 1,

$$|g(x) - g(y)| \leq L_1|y - x|, \ \forall x, y \in \partial\Omega,$$

assim,

$$L = Lip(g, \partial\Omega) < L_1,$$

o que é absurdo. Em consequência,

$$L_1 = L.$$

Do mesmo jeito, vale que

$$Lip(F_2, \overline{\Omega}) = L.$$

■

Proposição B.4 *Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e k um número natural. Temos que $f(x) \leq o(|x|^k)$ quando $x \to 0$ se, somente se, existe $w \in C([0,\infty),[0,\infty))$ tal que*

$$\sup_{x \in B(0,r)\setminus\{0\}} \frac{f(x)}{|x|^k} \leq w_0(|x|).$$

Proposição B.5 *(Desigualdade de Tartar)(ver [8, Lema 2.1])*
Seja $p \geq 2$. Então,

$$\langle |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a-b\rangle \geq c_p|b-a|^p,\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}^N,$$

onde c_p é uma constante positiva.

Proposição B.6 *Vale a seguinte desigualdade:*

$$|b|^p \geq |a|^p + p\langle\, |a|^{p-2}a, b-a\rangle,\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}^N,\ \textit{ onde } p \geq 1,$$

Teorema B.7 *(Crandall-Ishii)(ver [10])*
Sejam $u,v \in C(\Omega)$. Se existem pontos interiores $(x_j,y_j) \in \Omega\times\Omega$ tal que

$$\max_{x,y\in\Omega}\{u(x)-v(x)-\frac{j}{2}||x-y|^2\} \tag{B.7}$$

é atingido nesses pontos, então existem $X_j, Y_j \in \mathbb{S}^N$ tais que

$$(j(x_j-y_j),X_j) \in \overline{J^{2,+}}u(x_j),\ \ (j(x_j-y_j),Y_j) \in \overline{J^{2,-}}v(y_j)\ \ e\ \ X_j \leq Y_j. \tag{B.8}$$

Teorema B.8 *(Desigualdade de Harnack para a equação $\Delta u = 0$)(ver [15, Teorema 2.5])*
Seja u uma função harmônica não negativa em Ω. Então, para qualquer subdomínio limitado $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe uma constante $c = c(N,\Omega',\Omega)$ tal que

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u.$$

Teorema B.9 *(Desigualdade de Harnack para a equação $\Delta_p u = 0$)(ver [21, Teorema 2.20])*
Seja $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ uma solução fraca do equação p-laplaciana e $u \geq 0$ em $B(0,2r)$. Logo,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B(0,2r)} u \leq c \operatorname*{ess\,inf}_{B(0,2r)} u,$$

onde $c = c(N,p)$ é uma constante.

Bibliografia

[1] Achdou, Y., Buera, F.J., Lasry, J.-M., Lions P.-L. and Moll, B., *Partial differential equation models in macroeconomics*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.

[2] Adams, R.A. e Fournier, J.J.F, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics Series, Second Edition.

[3] Aronsson, G., *Extension of functions satisfying Lipschitz conditions*, Arkiv för Matematik 6, 1967, pp. 551-561.

[4] Aronsson, G., *On the partial differential equation* $u_x^2 u_x x + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$, Arkiv för Matematik 7, 1968, pp. 397-425.

[5] Aronsson, G., *On certain singular solutions of the partial differential equation* $u_x^2 u_x x + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$, manuscripta math. 47, 133- 151 (1984).

[6] Borodzik, M., Goldstein, P., Rybka, P. e Zatorska-Goldstein, A., *Problems on Partial Differential Equations*, Problems Books in Mathematics, Springer.

[7] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 1nd Edition, Universitext, Springer, Berlin, 2011.

[8] Chen, Y.Z. e DiBenedetto, E., *Boundary estimates for solutions of nonlinear degenerate parabolic systems*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 395 (1989), 102-131.

[9] Crandall, M., Evans, L.C. e Gariepy, R., *Optimal Lipschitz Extensions and the Infinity Laplacian*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations 13 (2001), no. 2, 123-139.

[10] Crandall, M. e Ishii, H., *The maximum principle for semicontinuous functions*, Differential and Integral Equations 3 (1990), 1001-1014.

[11] Crandall, M., Ishii, H. e Lions, P.-L., *User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations*, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 27, Number 1, July 1992, 1-67.

[12] Crandall, M. e Lions, P.-L.,*Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Transactions of the American Mathematical Society, 277, 1 (1983), 1-42.

[13] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, 2nd Edition, American Mathematical Society.

[14] Evans, L.C. e Gariepy, R.F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised Edition, Textbooks in Mathematics, CRC Press.

[15] Gilbarg, T. e Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd Edition, Springer, Berlin 1983.

[16] Ishii, H., *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations*, Duke Mathematical Journal, 55 (1987), 369-384

[17] Jensen, R., *Uniqueness of Lipschitz extension: minimizing the sup norm of the gradient*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 123, 1993, 51-74

[18] Kawohl, B., *On a familiy of torsional creep problems*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), Volume 1990, Issue 410, pp. 1-22.

[19] Koike, S., *A Begginers's Guide to the Theory of Viscosity Solutions*, Mathematical Society of Japan Memoirs, Volume 13, 2013.

[20] Lages, E.L., *Curso de análise vol.2*, 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015

[21] Lindqvist, P., *Notes on the p-Laplace Equation*, University of Jyväskylä, Report 102, 2006.

[22] Lindqvist, P., *Notes on the Infinity Laplace Equation*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer International Publishing, 2016.

[23] Lopes, H.N. e Filho, M.L.,*Uma Introdução a Soluções de Viscosidade para Equações de Hamilton-Jacobi*, Publicações Matemáticas, IMPA, 2006.

[24] Lu, G. e Wang, P., *Inhomogeneous infinity Laplace equation*, Advances in Mathematics 217, 2008, 1838-1868.

[25] Manfredi, J.J., Parviainen, M. e Rossi, J.D., *An Asymptotic Mean Value Characterization for p-Harmonic Functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 138, Number 3, March 2010, 881-889.

[26] McShane, E. J., *Extension of range of functions*, Bulletin of the American Mathematical Society 40 (1934), 837-842.

[27] Rektorys, K., *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, Springer.

[28] Urbano, J., *An introduction to the ∞-Laplacian*, `http://www.mat.uc.pt/~jmurb/infty_lap.pdf`

[29] Whitney, H., *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Transactions of the American Mathematical Society 36 (1934), N° 1, 63-89.