Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Marisa da Cunha Bezerra †

Controlabilidade Exata na Fronteira para a Equação da Onda em um Domínio Não-cilíndrico

Campina Grande - PB

2025

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq sob o processo de número 130864/2024-2

Marisa da Cunha Bezerra

Controlabilidade Exata na Fronteira para a Equação da Onda em um Domínio Não-cilíndrico

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Pammella Queiroz de Souza

Campina Grande - PB

2025

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

B574c Bezerra, Marisa da Cunha.

Controlabilidade exata na fronteira para a equação da onda em um domínio não cilíndrico / Marisa da Cunha Bezerra. – 2025.

138 f. : il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação: Profa. Dra. Pammella Queiroz de Souza".

Referências.

1. Equação da Onda. 2. Domínio Não-cilíndrico. 3. Controlabilidade Exata. I. Souza, Pammella Queiroz de. II. Título.

UFCG/BC CDU 517.9(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Controlabilidade Exata na Fronteira para a Equação da Onda em um Domínio Não-Cilíndrico

por

Marisa da Cunha Bezerra

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 24 de novembro de 2025

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Bruno Sérgio V. de Araújo

Prof. Dr. Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo
Universidade Federal de Campina Grande (UEPB)

Fágner Dias Araruna

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Pammella Queiroz de Souza

Prof. Dra. Pammella Queiroz de Souza - Orientadora
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Novembro - 2025

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, que me concedeu o dom da vida e todas as oportunidades que me trouxeram até aqui. Senhor, nos dias em que o caminho pareceu difícil, foi a tua palavra que me deu força, direção e que me guiou para seguir com fé. Que eu jamais me esqueça de que, sem ti, nada posso fazer.

À minha família que sempre esteve ao meu lado, acreditando no meu potencial e investindo na minha educação. Em especial, agradeço de todo meu coração, aos meus pais Antonio Alves e Delfina Maria. Meu pai, enquanto o sol queimava teus passos, o senhor plantava em silêncio a sombra que hoje me abriga. Minha mãe, seus esforços e sua dedicação no trabalho e em casa, garantiram que eu tivesse todo o suporte que necessitei. Meu maior orgulho é ser fruto da luta de vocês. Painho e mainha, sem teu aconchego, amor e dedicação, nada disso seria possível. Ademais, quero expressar todo meu amor pelos meus irmãos Bruno da Cunha e Mariana da Cunha. Contar com o apoio de vocês sempre foi de grande importância para mim. Passar esse tempo distante de casa não foi fácil para todos nós, mas espero compensá-los contribuindo com grandes realizações para nossa família.

Aos meus tios, tias e primos, o meu eterno agradecimento. Em particular, à Ângela Nobre e Cláudio Dantas. Sei que a vossa colaboração foi essencial para garantir que eu tivesse a tranquilidade necessária para me dedicar aos estudos, especialmente durante a mudança para Campina Grande.

Estendo também meus agradecimentos aos meus queridos amigos Helena Sobreira e Ismael Silva. Obrigada por todos os momentos vivenciados durante a graduação, a força e apoio durante o mestrado, e pela amizade sincera e maravilhosa de sempre. Ao meu primo Tiago Bezerra e amigo Levi Dantas, meus agradecimentos pelas conversas, momentos de risadas e incentivo.

À Samara, Kleiton, Dona Nenê, Seu Chiquinho e Dona Abigail, pela inesquecível recepção e acolhimento em Campina Grande. Que um dia eu possa retribuir todo o carinho e apoio a mim concedido por vocês.

À todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica, em particular aos da área de Matemática. Graças a vocês, descobri a beleza, a lógica e o poder transformador dessa ciência. Notadamente, quero dedicar meus agradecimentos aos professores do IFCE - *Campus* Juazeiro do Norte, onde me graduei em Licenciatura Plena em Matemática. Em especial, ao meu caro professor e amigo Me. Helano Leom Maia. Agradeço não só pelos ensinamentos transmitidos com maestria, mas também pela confiança que depositou em mim. Suas palavras de estímulo foram o ponto de partida decisivo para que eu me desafiasse a buscar o Mestrado. Jamais me esquecerei do seu apoio.

À minha querida e inspiradora orientadora, Prof. Dra. Pammella Queiroz de Souza, dedico um agradecimento que vai além do âmbito acadêmico. Sua orientação não se limitou às correções técnicas e ao rigor matemático, que foram indispensáveis para a qualidade final deste trabalho, mas também ao carinho, compreensão e amizade. Agradeço, sobretudo, por compartilhar sua vasta experiência e, principalmente, por ter tido paciência e confiança no meu potencial. Pammella, você sempre comentou acerca de suas inspirações femininas na Matemática. Pode ter certeza que a minha é você. Agradeço por me ensinar que a pesquisa exige muito estudo e disciplina, mas que floresce com o afeto.

Aos amigos mestrandos Joice Daisyelle, Celine Ingrid, Laryssa Kely, Ísis Vieira, Pedro Vítor, Cleyson de Medeiros e Mateus Ferreira, pelo apoio, companheirismo, estudos, troca de experiências e por terem tornado os momentos mais tensos em lembranças agradáveis e de muitas risadas. Sem a nossa união, o Mestrado não teria sido o mesmo. Ademais, agradeço à todos os amigos da Sala da Pós, pelo maravilhoso convívio e amizade. Em especial, à Ary Vinícius, Diego Jonathan, Rodrigo Marques e Josias Vera Baca, pela paciência e generosidade em esclarecer minhas dúvidas. Guardo o desejo de, em algum momento, poder retribuir a colaboração de vocês.

A todos os funcionários e professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFCG, pela dedicação e contribuição para minha formação. Em particular, ao Prof. Dr. Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo, pela atenção e pelo conhecimento compartilhado. Suas disciplinas e as discussões durante esse período formaram uma fundamental base teórica para minha formação e para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade, pelo tempo dedicado e, principalmente, pelas críticas pertinentes e sugestões valiosas.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O apoio financeiro foi fundamental para a dedicação exclusiva à este trabalho.

Dedicatória

Ao meu pai Antonio, minha mãe Delfina e meus irmãos Bruno e Mariana. Amo vocês.

"Mesmo em domínios irregulares, a harmonia matemática persiste, e nela revela-se a arte da controlabilidade: agir apenas onde se pode, e ainda assim dominar o que se propaga."

Resumo

Neste trabalho, investigamos o problema da controlabilidade exata para a equação

$$u'' - \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \widehat{Q}, \tag{1}$$

onde $\widehat{Q}$ é um domínio não cilíndrico de $\mathbb{R}^{n+1}$. Para contornar os desafios impostos pela geometria não cilíndrica, realizamos uma mudança de variáveis apropriada, que nos permite transformar o problema (1) em um problema equivalente em um domínio cilíndrico. Assim, estudamos a controlabilidade exata da equação

$$w'' - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial w'}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad \text{em} \quad Q,$$

onde $Q = \Omega \times (0,T)$ é um cilindro, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Os resultados de boa colocação foram estabelecidos via método de Galerkin, garantindo existência e unicidade de soluções. Em seguida, estudamos a controlabilidade exata utilizando o Método da Unicidade de Hilbert (HUM) e, por fim, demonstramos a equivalência entre os sistemas, o que assegura que os resultados de controlabilidade obtidos no cilindro se estendem de forma rigorosa ao domínio não-cilíndrico $\widehat{Q}$.

Palavras-chave: Equação da onda; Domínio não-cilíndrico; Controlabilidade exata.

Abstract

In this work, we investigate the problem of exact controllability for the equation

$$u'' - \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \widehat{Q}, \tag{2}$$

where $\widehat{Q}$ is a non-cylindrical domain of $\mathbb{R}^{n+1}$. To overcome the challenges imposed by the non-cylindrical geometry, we perform an appropriate change of variables, which allows us to transform problem (2) into an equivalent problem in a cylindrical domain. Thus, we study the exact controllability of the equation

$$w'' - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial w'}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in} \quad Q,$$

where $Q = \Omega \times (0,T)$ is a cylinder, with $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a bounded domain. The well-posedness results are established via the Galerkin method, ensuring existence and uniqueness of solutions. In this setting, we study the exact controllability using the Hilbert Uniqueness Method (HUM) and, finally, demonstrate the equivalence between these systems, which ensures that the controllability results obtained in the cylinder extend rigorously to the non-cylindrical domain $\widehat{Q}$.

Key Words: Wave equation; Non-cylindrical domain; Exact controllability.

Sumário

Lista de Figuras

Notações e simbologias

- $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$.
- $|\cdot|$ denota a norma em $L^2(\Omega)$.
- $((\cdot,\cdot))$ denota o produto interno em $H_0^1(\Omega)$.
- $\|\cdot\|$ denota a norma em $H_0^1(\Omega)$.
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ quando não especificado, denota diferentes pares de dualidade.
- $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ denota o gradiente da função f.
- $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ denota o operador Laplaciano da função f.
- $q.s.$ - quase sempre.
- $\hookrightarrow$ denota uma imersão contínua.
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota imersão compacta.
- $' = \dfrac{\partial}{\partial t}$ denota a derivada em relação a variável t (tempo).
- $\rightarrow$ denota convergência forte.
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca.
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ denota convergência fraca$-*$.
- $D(f)$ denota o domínio da função f.
- $C(I,X) = \{f : I \longrightarrow X \mid f \text{ é contínua em } X\}$, em que $I \subset \mathbb{R}$ é aberto e X é um espaço de Banach.
- $C^m(I,X) = \{f : I \longrightarrow X \mid f^{(k)} \in C(I,X), k = 0,\ldots,m\}$.
- $C^{m,\alpha}(I,X) = \{f : I \longrightarrow X \mid f \in C^m(I,X) \text{ e } f^{(m)} \text{ é Hölder Contínua com expoente } \alpha\}$.

Seja $\alpha \in (0,1]$. Uma função $f : I \longrightarrow X$ é dita Hölder Contínua com expoente α se existir uma constante real C tal que

$$\|f(t) - f(s)\|_X \leqslant C\,|t-s|^{\alpha}, \quad \forall\, t,s \in I.$$

- $(P)_j$ denota a equação j do problema P.

Introdução

O termo *controle* permite duas interpretações: a de verificação e a de ação. Na primeira, controlar significa observar e garantir que um sistema se comporte de forma satisfatória; na segunda, implica intervir para ajustar o sistema e fazê-lo funcionar conforme o desejado. Essa noção de controlar é muito anterior à sua formalização matemática, estando presente tanto nas práticas humanas quanto na própria natureza.

Ao longo da história, é possível identificar práticas que evidenciam o princípio fundamental da Teoria de Controle: o ajuste do comportamento de um sistema para atingir um estado pretendido. Como exemplificado em [9], na Mesopotâmia, há mais de 2000 anos antes de Cristo, o manejo de sistemas de irrigação (Figura 1) exigia técnicas de controle precisas. Já na Roma Antiga, sistemas de válvulas eram utilizados para regular o fluxo de água nos arquedutos (Figura 1), demonstrando uma forma primitiva de controle automático. Essas práticas marcaram o início de uma longa busca pela compreensão científica dos mecanismos de controle.

Com o avanço da ciência, no final do século XVII, surgiram desenvolvimentos decisivos. Ch. Huygens e R. Hooke estudaram o movimento do pêndulo, buscando controlar suas oscilações para medir o tempo com precisão, o que teve grande impacto na navegação. Mais tarde, o princípio de autorregulação foi explorado em mecanismos como os moinhos de vento e, especialmente, na máquina a vapor de James Watt, que usava um regulador centrífugo (Figura 1) para manter constante a velocidade do sistema. Esse dispositivo inspirou análises matemáticas fundamentais no período da Revolução Industrial entre os séculos XVIII e XIX, como as de G. Airy e, posteriormente, de J.C. Maxwell, que em 1868 formulou as primeiras descrições matemáticas rigorosas, onde alguns dos comportamentos erráticos encontrados na máquina a vapor foram descritos e alguns mecanismos de controle foram propostos.

Figura 1: Sistemas de irragação na Mesopotâmia, arquedutos romanos e regulador centrífugo, respectivamente.

Com o decorrer dos anos, as ideias centrais da Teoria de Controle ganharam um impacto notável. Nos anos vinte, a preferência de engenheiros por técnicas de controle contínuo, semiautomático ou automático impulsionou o reconhecimento da Engenharia de Controle como uma disciplina de destaque. Ao fim da década de trinta, dois métodos e abordagens diferentes estavam disponíveis: um baseado no uso de Equações Diferenciais e outro, de natureza frequencial, desenvolvido pelo matemático francês Joseph Fourier. Após 1960, esses métodos passaram a ser considerados parte da Teoria de Controle "clássica".

Hoje em dia, graças aos trabalhos de matemáticos como R. Bellman, H. Fattorini, R. Kalman, J.-L. Lions, L. Potryagin e D.L. Russell, e muitos outros, a Teoria de Controle é um rico ramo interdisciplinar da matemática, com aplicações em áreas como Engenharia, Biologia, Economia e Medicina. Para mais detalhes ver, por exemplo, [9], [34] e [35].

Quanto à controlabilidade de Equações Diferenciais Parciais (EDP), o tema teve desenvolvimento intenso nas últimas décadas, embora conceitos relacionados já existissem antes. Em 1965, L. Markus [19] introduziu o conceito de controlabilidade para sistemas descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Na teoria de EDP, um impulso decisivo veio em 1973 e 1978 com os trabalhos de D.L. Russel [31] e [32], que organizaram e destacaram os resultados mais relevantes até então, muitos dos quais se relacionavam com técnicas de multiplicadores e com a análise de Fourier não-harmônica. Em 1988, J.-L. Lions [13], [15] introduziu o Método de Unicidade Hilbertiana (HUM), um método sistemático e construtivo que reduz a questão da controlabilidade exata de sistemas lineares à continuação única e à obtenção de uma desigualdade inversa (também chamada *desigualdade de observabilidade*, atribuída a L.F. Ho em [11]). A partir do HUM foram obtidos inúmeros resultados e descobertas significativas para a controlabilidade de EDP, as quais compõem a base teórica da presente dissertação.

Em termos matemáticos, de forma breve, para compreendermos um problema de controle, supomos que queremos obter um bom comportamento de um sistema físico governado pela equação de estado

$$A(y) = f(v). \tag{3}$$

Aqui, y é o estado, a incógnita do sistema que pretendemos controlar, pertencente a um espaço vetorial Y e v é o controle. Tal controle pertencerá ao conjunto de controles admissíveis $\mathcal{U}_{ad}$. Assumamos que $A : D(A) \subset Y \longrightarrow Y$ e $f : \mathcal{U}_{ad} \longrightarrow Y$ são duas aplicações (lineares ou não lineares) dadas. O operador A determina a equação que deve ser satisfeita pela variável de estado y, de acordo com as leis da Física. A função f indica a maneira como o controle v atua no sistema que governa o estado.

Para simplificar, assumamos ainda que, para cada $v \in \mathcal{U}_{ad}$, a equação de estado (3) possui exatamente uma solução $y = y(v)$ em Y. Então, de maneira concisa, controlar (3) é encontrar $v \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que a solução de (3) se aproxime de um estado desejado.

Neste trabalho, nos dedicamos ao estudo de algumas propriedades (existência, unicidade, regularidade e controlabilidade) da Equação da Onda. Esta equação ocupa um papel central, pois além de ser a EDP hiperbólica mais representativa ela serve para modelar fenômenos físicos fundamentais, como pequenas vibrações de corpos elásticos, propagação do som e certos modelos da mecânica quântica. Sua relevância para a teoria da controlabilidade decorre tanto das aplicações quanto das propriedades matemáticas que ela exibe.

Em particular, estudamos a controlabilidade exata para a Equação da Onda em um domínio não-cilíndrico $\widehat{Q} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Assim, consideramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ em } \widehat{Q}, \\ u = g \ \text{ sobre } \ \widehat{\Sigma}, \\ u(\cdot, 0) = u^0(\cdot), u'(\cdot, 0) = u^1(\cdot) \text{ em } \Omega_0, \end{cases} \tag{4}$$

em que $u = u(y,t)$ é o estado e $g = g(y,t)$ é o controle que atua no sistema através da fronteira lateral $\widehat{\Sigma}$. O problema de controlabilidade que buscamos resolver consiste em exibir um controle g em um espaço adequado de tal forma que a solução u do sistema (4) alcançe o equilíbrio no instante T, ou seja, tal que a solução u do sistema (4) satisfaça

$$u(\cdot, T, g) = 0 \quad \text{e} \quad u'(\cdot, T, g) = 0.$$

Para resolver este problema, nossa abordagem consiste, primeiramente, em transformar (4) utilizando uma mudança de variáveis adequada, em um sistema definido em um domínio cilíndrico. Assim, estudamos a controlabilidade exata para o sistema

$$\begin{cases} w'' - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial w'}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \text{ em } Q, \\ w = v \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ w(\cdot,0) = w^0(\cdot), w'(\cdot,0) = w^1(\cdot) \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

em que Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ e $Q = \Omega \times (0,T)$ o cilindro com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Para controlabilidade exata de (5) utilizamos o Método de Unicidade Hilbertiana (HUM).

A existência de soluções para o problema de valor de contorno inicial da Equação da Onda não linear em domínios não-cilíndricos gerais $\widehat{Q}$ foi estudada, entre outros autores, por J.-L. Lions [17], L. A. Medeiros [20], quando $\widehat{Q}$ é crescente, e por C. Bardos e J. Cooper [3], quando $\widehat{Q}$ é do *tipo-tempo*. O caso linear foi tratado por J. Sikorav [36], quando $\widehat{Q}$ é do tipo-tempo. Ele utilizou ferramentas da Topologia Diferencial. O controle interno exato para a equação da onda em domínios não cilíndricos foi tratado por C. Bardos e G. Cheng [2]. Os autores usaram invariantes de energia para estudar as estimativas de crescimento e decaimento de soluções da equação da onda em um domínio não-cilíndrico e, a partir daí, estabeleceram condições suficientes para garantir a controlabilidade exata (de parâmetros distribuídos) da equação da onda.

No que se refere à controlabilidade exata para o sistema (5), notamos que o caso $a_{ij} = \delta_{ij}a(t)$, $b_i = \beta_i = 0$, foi estudado por J.-L. Lions [14] e J.M. Rivera [30], e o caso $a_{ij} = \delta_{ij}a(x)$, $b_i = \beta_i = 0$, por E. Zuazua [38]. Além disso, R. Fuentes [10] analisou a situação $b_i = \beta_i = 0$. Observamos que a presença do termo $\dfrac{\partial w'}{\partial x_i}$ em (5) gera desafios técnicos significativos, tornando a abordagem deste trabalho distinta das apresentadas acima.

Enquanto a teoria de controle para a equação da onda em domínios cilíndricos é bem estabelecida (ver [28]), muitos problemas físicos envolvem meios cujas fronteiras evoluem temporalmente. Este trabalho busca, tomando como base os resultados apresentados por J.-L. Lions [13], [15] e M.M. Miranda [25]– [27], estender essa teoria para uma classe mais geral de domínios, aproximando-se assim de uma gama mais ampla de aplicações.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No **Capítulo 1**, introduzimos os conceitos e resultados matemáticos fundamentais que servirão de base para o restante do trabalho. Apresentamos os principais espaços funcionais utilizados, como os espaços de Sobolev e de Lebesgue, bem como alguns resultados clássicos da Análise Funcional. Ainda neste capítulo, fazemos uma breve introdução à Teoria de Controle, na qual discutimos as noções de controlabilidade exata, aproximada, nula e exata para trajetórias, que ajudam a compreender o problema de controlabilidade à ser estudado.

Já no **Capítulo 2**, realizamos a formulação matemática do problema de controlabilidade para a equação da onda em um domínio não-cilíndrico. A partir de uma mudança de variáveis conveniente, passamos a trabalhar com o sistema equivalente (5) em um domínio cilíndrico fixo. Provamos a existência, unicidade e regularidade de soluções forte, fraca e ultra-fraca para o sistema adjunto associado ao sistema (5). Usamos o Método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução forte. A solução fraca é obtida como limite de uma sequência de soluções fortes. Ademais, provamos as Desigualdades Direta e Inversa para esta solução fraca, e o Método da Transposição é usado para definir a solução ultra-fraca.

No **Capítulo 3**, estudamos a controlabilidade exata do sistema (5). O controle é considerado atuando apenas em uma parte da fronteira, o que caracteriza um controle localizado e remete à ideia de otimização e minimização de custos. O resultado principal é obtido por meio do HUM, que estabelece a equivalência entre o problema de controle e o problema adjunto. Sob hipóteses adequadas, demonstramos que o sistema é exatamente controlável em um tempo suficientemente grande.

No **Capítulo 4**, tratamos da equivalência entre a controlabilidade obtida no domínio cilíndrico e a correspondente no domínio não-cilíndrico original. Por meio da transformação inversa de variáveis, mostramos que os resultados de controlabilidade estabelecidos para (5) estendem-se de maneira rigorosa a (4), concluindo assim a demonstração do resultado principal desta dissertação.

Por fim, no **Apêndice A**, apresentamos o resultado que nos garante a existência e prolongamento de soluções aproximadas, e é parte essencial à obtenção da solução forte estudada no Capítulo 2. Já no **Apêndice B**, formalizamos os espaços funcionais definidos em domínios não-cilíndricos. Esses espaços são essenciais para garantir a validade matemática da equivalência de controlabilidade demonstrada no Capítulo 4.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo daremos algumas definições e resultados essenciais à continuidade do trabalho.

1.1 Espaços funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f, e denota-se por supp(f), o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$. Assim, supp$(f)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u.

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas, e com suporte compacto, em Ω.

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < 1\}$ compactamente contido em Ω. Consideremos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}}, & se\ \|x\| < 1 \\ 0, & se\ \|x\| \geqslant 1 \end{array} \right. ,$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *é a norma euclidiana de* x*. Temos que* $f \in C^{\infty}(\Omega)$ *e* $supp(f) = \overline{B_1(0)}$ *é compacto, isto é,* $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$*.*

Definição 1.1 *Diz-se que uma sequência* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em* $C_0^{\infty}(\Omega)$ *converge para* φ *em* $C_0^{\infty}(\Omega)$*, quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) Existe um compacto K *de* Ω *tal que* $supp(\varphi) \subset K$ *e* $supp(\varphi_n) \subset K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

(ii) $D^{\alpha}\varphi_n \to D^{\alpha}\varphi$ *uniformemente em* K*, para todo multi-índice* α*.*

Observação 1.1 *É possível (ver Schwartz [33]) dotar* $C_0^{\infty}(\Omega)$ *com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.*

O espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$, munido da convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω.

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$, em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 1.2 *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. O funcional* $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$*, definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

é uma distribuição sobre Ω *univocamente determinada por* u *(ver Medeiros-Miranda [22]). Por esta razão, identifica-se* u *à distribuição* T_u *por ela definida e, desta forma,* $L^1_{loc}(\Omega)$ *será identificado a uma parte (própria) de* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Exemplo 1.3 *Consideremos* $0 \in \Omega$ *e o funcional* $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Em [22], vê-se que δ_0 *é uma distribuição sobre* Ω. *Além disso, mostra-se que* δ_0 *não é definido por uma função de* $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definição 1.2 *Diz-se que uma sequência* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *converge para* T *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *quando a sequência numérica* $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para* $\langle T, \varphi \rangle$ *em* $\mathbb{R}$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3 *Sejam* T *uma distribuição sobre* Ω *e* α *um multi-índice. A derivada* $D^\alpha T$ *(no sentido das distribuições) de ordem* $|\alpha|$ *de* T *é o funcional definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2 *Decorre da Definição 1.3 que cada distribuição* T *sobre* Ω *possui derivadas de todas as ordens.*

Observação 1.3 $D^\alpha T$ *é uma distribuição sobre* Ω, *onde* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *De fato, vê-se facilmente que* $D^\alpha T$ *é linear. Agora, para a continuidade, consideremos* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergindo para* φ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Assim,* $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leqslant |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \to 0$, *quando* $n \to \infty$.

Observação 1.4 *Vê-se em Medeiros-Rivera [24] que a aplicação* $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que* $T \mapsto D^\alpha T$ *é linear e contínua no sentido da convergência definida em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m, sobre Ω, das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leqslant m$. $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, qualquer que seja $1 \leqslant p < \infty$.

Munido das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leqslant p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x\in\Omega} ess \, |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

os espaços de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach (vide Medeiros-Rivera [24]).

Observação 1.5 *Quando* $p = 2$, *o espaço* $W^{m,2}(\Omega)$ *é denotado por* $H^m(\Omega)$, *o qual munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \, D^\alpha v(x) \, dx$$

é um espaço de Hilbert.

Dado um espaço de Banach X, denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $(0,T)$, com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$, com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u(t)\|_X .$$

Observação 1.6 *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Consideremos o espaço $L^p(0,T;X)$, $1 < p < \infty$, com X sendo Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0,T;X)]' \approx L^q(0,T;X'),$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^\infty(0,T;X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadamente em Lions [18].

Observação 1.7 *Se $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, então $L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;X)$.*

Observação 1.8 *Se $X \hookrightarrow Y$ e se $f \in L^1(0,T;X)$, então $f \in L^1(0,T;Y)$ e as integrais de f no sentido de X e Y coincidem.*

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.4 *Dada $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Exemplo 1.4 *Dadas $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0,T) \to X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

integral de Bochner em X, é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0,T;X) = \left\{ u \in L^p(0,T;X);\ u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ j = 1,...,m \right\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \left\| u^{(j)} \right\|_{L^p(0,T;X)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach (Vide Adams [1]).

Observação 1.9 *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será denotado por $H^m(0,T;X)$, o qual, munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} \left(u^{(j)}, v^{(j)} \right)_{L^2(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0,T;X)$ o fecho, em $H^m(0,T;X)$, de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$.

1.2 Principais resultados utilizados

Lema 1.1 (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right]$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty)$.

(iii) Se $n = 1$ e $m \geqslant 1$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Prova: Ver Brezis [5].

Lema 1.2 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(*i*) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right)$.

(*ii*) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty)$.

(*iii*) Se $2m > n$ então $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - \dfrac{n}{2} \leqslant k + 1$.

Prova: Ver Brezis [5].

Teorema 1.1 *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, de classe C^m. Então*

$$W^{m,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\overline{\Omega}).$$

Prova: Ver Medeiros-Milla [21].

Teorema 1.2 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *O conjunto $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leqslant 1\}$ é compacto pela topologia fraca$-*$ $\sigma(E', E)$, onde E é um espaço de Banach.*

Prova: Ver Brezis [5].

Lema 1.3 (Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Prova: Ver Medeiros-Rivera [24].

Lema 1.4 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $u \in H^1_0(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Prova: Ver Brezis. [5]

Lema 1.5 (Desigualdade de Young) *Sejam a, b constantes positivas, $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova: Ver Brezis [5].

Lema 1.6 (Desigualdade de Young com δ) *Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\delta > 0$. Então,*

$$ab \leqslant \delta a^p + C(\delta) b^q, \quad \forall a, b \geqslant 0,$$

onde $C(\delta) = (\delta p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$. No caso particular quando $p = q = 2$, a desigualdade reduz-se a

$$ab \leqslant \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2, \quad \forall a, b \geqslant 0.$$

Prova: Ver Evans [8].

Observação 1.10 *A desigualdade acima será usada ao decorrer do trabalho no caso particular em que $p = q = 2$ e $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, com $\varepsilon > 0$.*

Lema 1.7 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg| \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Ver Brezis [5].

Teorema 1.3 (Teorema do Traço) *A aplicação linear*

$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u) = \left(u|_\Gamma, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_A^{m-1}}\right|_\Gamma \right)$$

de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ em $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de $W^{m,p}(\Omega)$ em $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Prova: Ver Lions [18].

Observação 1.11 *Note que para o caso unidimensional, isto é, $\Omega = (\alpha, \beta)$, se $u \in H^m(\alpha, \beta)$, então pelo Lema 1.2, $u \in C^{m-1}([\alpha, \beta])$. Logo faz sentido definir a função u e suas derivadas suas derivadas na fronteira, que no caso será $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$.*

Proposição 1.1 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ bem regular. Então a aplicação*

$$v \mapsto \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

define em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ uma norma equivalente à norma em $H^2(\Omega)$.

Prova: Ver Medeiros-Miranda [22].

Definição 1.5 *Uma forma bilinear* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *é dita*

(i) Contínua *se existe uma constante* C *tal que*

$$|a(u,v)| \leqslant C|u||v| \quad \forall u,v \in H;$$

(ii) Coerciva *se existe uma constante* $\alpha > 0$ *tal que*

$$a(v,v) \geqslant \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Definição 1.6 *Seja* V *um espaço de Hilbert e considere um operador linear* $A : V \to V'$*, onde* V' *denota o dual de* V*, associado a uma forma bilinear* $a(\cdot,\cdot)$ *tal que*

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v), \qquad \forall\, u,v \in V.$$

Dizemos que o operador A *(ou, equivalentemente, a forma bilinear* $a(\cdot,\cdot)$*) é uniformemente coercivo se existe uma constante* $\alpha > 0$ *tal que*

$$a(u,u) \geqslant \alpha\, \|u\|_V^2, \qquad \forall\, u \in V.$$

Essa propriedade é conhecida como condição de coercividade uniforme (ou elipticidade uniforme) e garante que o operador seja positivo definido em todas as direções do espaço, assegurando a existência, unicidade e estabilidade da solução de problemas variacionais associados.

Exemplo 1.5 *Considere o espaço de Hilbert* $H_0^1(\Omega)$ *e o operador elíptico de segunda ordem*

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

definido em um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*, cujos coeficientes* $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$*,* $1 \leqslant i,j \leqslant N$*, satisfazem a condição de elipticidade uniforme*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\,|\xi|^2, \qquad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N,$$

para algum $\alpha > 0$*. Nessas condições, a forma bilinear associada,*

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx,$$

é uniformemente coerciva em $H_0^1(\Omega)$*, o que garante, pelo Teorema de Lax–Milgram, a existência e unicidade da solução fraca do problema variacional correspondente.*

Teorema 1.4 (Lax-Milgram) *Seja H um espaço de Hilbert e $p\,(u,\ v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $f \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$p\,(u,\ v) = \langle f, v \rangle\,,\ \forall\ v \in H.$$

Além disso, se p é simétrica, u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2}p\,(u,\ u) - \langle f,\ u \rangle = \underset{v \in H}{Min}\left\{\frac{1}{2}p\,(v,\ v) - \langle f,\ v \rangle\right\}.$$

Prova: Ver Brezis [5].

Teorema 1.5 (Representação de Riesz-Fréchet) *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle, \quad \forall\, x \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

Prova: Ver Botelho-Pellegrino [4].

Teorema 1.6 (Isomorfismo de Banach) *Sejam E e F dois espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e bijetivo de E sobre F. Então T^{-1} é contínuo de F em E. Ou seja, T é um isomorfismo.*

Prova: Ver Brezis [5].

Proposição 1.2 *Seja $T : (E, \|\cdot\|_1) \to (F, \|\cdot\|_2)$ um operador linear bijetor. Então, T é um isomorfismo se, e somente se, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que*

$$C_1\|u\|_1 \leqslant \|Tu\|_2 \leqslant C_2\|u\|_1, \quad \forall\, u \in E.$$

Prova: Ver Botelho-Pellegrino [4].

Teorema 1.7 *Seja $T : X \to Y$ um operador linear e considere $T^* : Y^* \to X^*$ seu adjunto. Então T^* é contínuo e $\|T\| = \|T^*\|$. Se T é um isomorfismo (ou isometria), então T^* também é isomorfismo (ou isometria).*

Prova: Ver Pellegrini [29].

Teorema 1.8 *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $\mu \in L^p(0, T, X), \mu' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, então $\mu \in C^0([0, T]\,; Y)$.*

Prova: Ver Brezis [5].

Teorema 1.9 *Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual e (f_n) uma sucessão de E'. Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\| \leqslant C$ e $\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|$.*

Prova: Ver Brezis [5].

Teorema 1.10 (Gauss-Green) *Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu^i d\Gamma \quad (i = 1, 2, ..., n)$.*

Prova: Ver Brezis [5].

Teorema 1.11 (Fórmulas de Green) *Valem:*

(i) Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \nabla\gamma . \nabla u \, dx = -\int_\Omega u \nabla\gamma \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} u \, d\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(ii) Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_\Omega u\Delta\gamma - \gamma\Delta u \, dx = \int_\Gamma u\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} \, d\Gamma.$$

Prova: Ver Brezis [5].

Teorema 1.12 ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Se*

$$x(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^t k(s)x(s)ds, \quad t \in [t_0, T),$$

onde todas as funções envolvidas são contínuas em $[t_0, T)$, $T \leqslant +\infty$, e $k(t) \geqslant 0$, então $x(t)$ satisfaz

$$x(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^t h(s)k(s) \exp\left[\int_s^t k(u)du\right] ds, \quad t \in [t_0, T).$$

Se, em adição, $h(t)$ é não decrescente, então

$$x(t) \leqslant h(t) \exp\left(\int_{t_0}^t k(s)ds\right), \quad t \in [t_0, T).$$

Prova: Ver Corduneanu [6].

Teorema 1.13 ***(Generalização não-linear da desigualdade de Gronwall)*** *Seja $u(t)$ uma função não negativa que satisfaz a desigualdade integral*

$$u(t) \leqslant c + \int_{t_0}^t (a(s)u(s) + b(s)u^\alpha(s)) \, ds, \; c \geqslant 0, \; \alpha \geqslant 0,$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas não negativas para $t \geqslant t_0$. Para $0 \leqslant \alpha < 1$ temos

$$u(t) \leqslant \left\{c^{1-\alpha} \exp\left[(1-\alpha)\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right] + (1-\alpha)\int_{t_0}^t b(s) \exp\left[(1-\alpha)\int_s^t a(r)\,dr\right] ds\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

para $\alpha = 1$,

$$u(t) \leqslant c \exp\left\{\int_{t_0}^{t} [a(s) + b(s)]\, ds\right\};$$

e para $\alpha > 1$ *com a hipótese adicional*

$$c < \left\{\exp\left[(1-\alpha)\int_{t_0}^{t_0+h} a(s)\, ds\right]\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}} \left\{(\alpha-1)\int_{t_0}^{t_0+h} b(s)\, ds\right\}^{-\frac{1}{\alpha-1}}$$

nós também obtemos para $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$, *para* $h > 0$,

$$u(t) \leqslant \left\{c \exp\left[(1-\alpha)\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right] - c^{-1}(\alpha-1)\int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left[(1-\alpha)\int_{s}^{t} a(r)\, dr\right] ds\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Prova: Ver Dragomir [7].

1.3 Introdução à teoria de controle

Nesta seção faremos uma breve introdução à Teoria de Controle, apresentando algumas definições presentes na literartura.

Um sistema de controle é uma equação de evolução (EDO ou EDP) que depende de um parâmetro v, que descreveremos da seguinte forma: Consideremos dois espaços de Hilbert (real ou complexo) $\mathcal{H}$ e $\mathcal{U}$, um tempo $T > 0$, $y_0 \in \mathcal{H}$ e um operador fechado ilimitado $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$ que gera um semigrupo fortemente contínuo $S(t)_{t \geqslant 0}$. Estamos interessados na seguinte classe de problemas de controle linear

$$\begin{cases} y_t = \mathcal{A}y + \mathcal{B}v, \quad t \in [0,T], \\ y(\cdot,0) = y_0(\cdot), \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, D(\mathcal{A}'))$ é o operador que descreve a maneira como o controle v atua no sistema. Assumiremos que o operador $\mathcal{B}$ satisfaz a seguinte condição de admissibilidade:

$$\forall\, T > 0,\ \exists\, C_T > 0 \ \text{ tal que } \int_0^T \|\mathcal{B}^* S(t)^* z\|_{\mathcal{U}}\, dt \leqslant C_T \, \|z\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall\, z \in D(\mathcal{A}^*), \tag{1.2}$$

em que $\mathcal{B}^*$, $S(t)^*$ e $\mathcal{A}^*$ são os operadores adjuntos de $\mathcal{B}$, $S(t)$ e $\mathcal{A}$, respectivamente.

Sob a condição de admissibilidade (1.2), o problema de Cauchy (1.1) está bem posto no sentido de Hadamard, isto é, para cada $y_0 \in \mathcal{H}$ e $v \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ existe um único $y \in C([0,T];\mathcal{H})$ satisfazendo (1.1). Além disso,

$$\|y\|_{C([0,T];\mathcal{H})} \leqslant C\left(\|y_0\|_{\mathcal{H}} + \|v\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})}\right),$$

para uma constante positiva C que depende de T, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Apresentaremos agora algumas noções de controlabilidade para o sistema (1.1).

Definição 1.7 (Controlabilidade exata) *O sistema* (1.1) *é exatamente controlável no instante T se, para quaisquer $y_0, y_T \in \mathcal{H}$, existe $v \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ tal que a solução y de* (1.1) *cumpre $y(\cdot,T) = y_T$.*

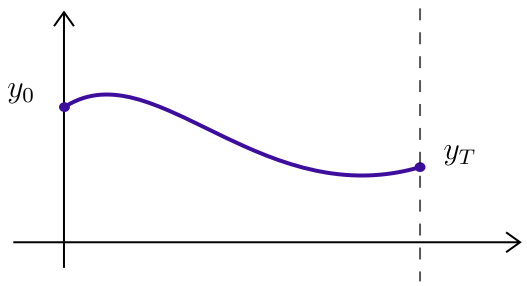

Figura 1.1: Controle exato: A solução atinge exatamente o estado desejado.

Definição 1.8 (Controlabilidade aproximada) *O sistema* (1.1) *é aproximadamente controlável no instante T se, para quaisquer $y_0, y_T \in \mathcal{H}$ e algum $\varepsilon > 0$, existe $v \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ tal que a solução y de* (1.1) *cumpre $\|y(\cdot,T) - y_T\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$.*

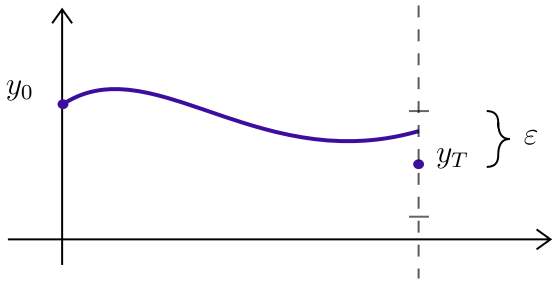

Figura 1.2: Controle aproximado: A solução pode ser o mais próximo possível do estado desejado.

Definição 1.9 (Controlabilidade nula) *O sistema* (1.1) *possui a propriedade de controle nulo no instante T se, para qualquer $y_0 \in \mathcal{H}$, existir $v \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ tal que a solução y de* (1.1) *cumpre $y(\cdot,T) = 0$.*

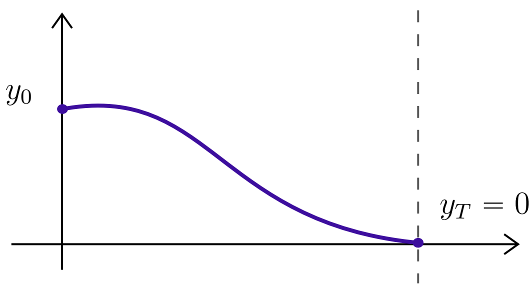

Figura 1.3: Controle nulo: A solução é conduzida para zero.

A partir das definições acima é possível perceber que a controlabilidade exata implica tanto a controlabilidade nula como aproximada. A recíproca, em geral, não é verdade.

Uma vez que o problema (1.1) é linear, pode-se verificar que a controlabilidade nula é equivalente à controlabilidade exata para trajetórias:

Definição 1.10 (Controlabilidade exata para trajetórias) *O sistema* (1.1) *é exatamente controlável para trajetórias no tempo T se, para qualquer $y_0 \in \mathcal{H}$ e qualquer solução $\overline{y}$ de* (1.1)*, e algum dado $\overline{v}$, existe um controle v tal que a solução associada de* (1.1) *cumpre $y(\cdot, T) = \overline{y}(\cdot, T)$.*

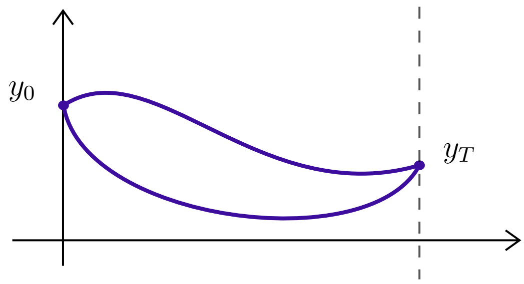

Figura 1.4: Controle exato para trajetórias: Independente da trajetória, a solução atinge exatamente o estado desejado.

Observa-se que, no sistema (1.1), o controle v atua diretamente na equação de evolução, afetando o comportamento da solução ao longo do tempo através do termo $\mathcal{B}v$. Esse tipo de formulação representa o caso em que o controle é interno, isto é, aplicado no interior do domínio do sistema.

Entretanto, em diversos contextos práticos e teóricos, é natural considerar situações em que o controle não atua no interior do domínio, mas sim na fronteira. Nesses casos, a ação controladora é implementada por meio de condições de contorno que dependem de um parâmetro de controle, o que conduz ao chamado problema de *controle de fronteira.*

Um exemplo bem representativo é o controle de temperatura em uma haste (ou barra) unidimensional. Para formular esse problema consideremos:

- Uma haste metálica de comprimento L, ou seja, o domínio espacial do problema é dado pelos elementos $x \in (0, L)$ (o interior da haste), com fronteira $x = 0$ e $x = L$ (as extremidades da haste).

- A evolução da temperatura dentro da haste é dada pela Equação do Calor Unidimensional
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
em que $u(x,t)$ é a temperatura (variável de estado), α é a difusividade térmica do material da haste ($\alpha > 0$) e $t \geqslant 0$. Nesse caso, $u(x,t)$ é a variável que se quer controlar.

- Não aplicamos o calor (ou resfriamento) no interior da haste, mas em uma de suas extremidades (fronteira). Assumimos que o controle $v(t)$ é aplicado na extremidade $x = L$, forçando a temperatura à chegar a um estado desejado.

- Suponhamos que a extremidade $x = 0$ está isolada, ou seja, não há fluxo de calor (ou resfriamento), e que tenhamos uma distribuição inicial de temperatura na haste (condição inicial).

Assim, o sistema de controle de fronteira para a haste unidimensional, com a intenção de controlar a temperatura $u(x,t)$ por meio da ação $v(t)$, é definido por
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{em } (0,L) \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 & \text{(Condição na fronteira isolada)} \\ u(L,t) = v(t) & \text{(Condição de controle na fronteira)} \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{(condição inicial)} \end{cases}$$
Nesse sentido, o objetivo é escolher a função de controle $v(t)$ (a temperatura aplicada na extremidade) de tal forma que a temperatura em toda a haste atinja um perfil desejado, por exemplo, esfriar a haste até zero ou estabilizar a temperatura em um valor constante C_0.

Além do intuito de estabilizar ou direcionar um sistema dinâmico, a Teoria de Controle possui um caráter otimizante. De modo geral, busca-se determinar um controle capaz de conduzir o sistema a um estado desejado, minimizando simultaneamente um custo associado à atuação do controle. Essa característica de otimização está presente em diversas formulações clássicas, como os problemas de *controle ótimo*, nos quais se considera uma função de custo que mede o desempenho do sistema, penalizando tanto o erro em relação ao estado alvo quanto a energia gasta pelo controle. Esse princípio é particularmente relevante em contextos industriais, ambientais e tecnológicos, onde o controle ideal deve equilibrar eficácia e eficiência.

Voltando à controlabilidade de fronteira, é possível observar que em muitas situações práticas, a aplicação do controle em toda a fronteira de um domínio pode ser inviável ou desnecessária, seja por restrições físicas, limitações de acesso ou mesmo por custos operacionais elevados. Assim, é natural considerar o caso em que o controle atua apenas em uma parte da fronteira. Essa forma de minimização de custos não compromete o desempenho global do sistema e representa justamente a característica otimizante dessa teoria.

Do ponto de vista matemático, essa restrição implica que o termo de controle está associado a uma porção da fronteira, enquanto nas demais regiões impõem-se condições homogêneas. Assim, busca-se determinar controles capazes de garantir as propriedades desejadas de controlabilidade e otimização, mantendo o esforço de controle concentrado em uma região reduzida. Esse tipo de configuração reflete de maneira realista a necessidade de equilibrar eficiência e viabilidade prática na implementação de estratégias de controle, que é o caso desse trabalho.

Capítulo 2

Existência, Unicidade e Regularidade da Solução

Neste capítulo estabeleceremos a formulação do problema que iremos estudar e realizaremos a análise das soluções fortes e fracas, com ênfase em existência, unicidade e regularidade.

2.1 Formulação do problema

Seja Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2, que sem perda de generalidade, pode ser assumido contendo a origem de $\mathbb{R}^n$, e $k : [0, \infty) \to (0, \infty)$ uma função continuamente diferenciável.

Para $T > 0$, seja $\{\Omega_t\}_{t \in [0,T]}$ uma família de subconjuntos abertos limitados de $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular representada por Γ_t, definido da seguinte maneira

$$\Omega_t = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y = k(t)x,\, x \in \Omega\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty.$$

Denotamos por $\widehat{Q}$ o domínio não cilíndrico de $\mathbb{R}^{n+1}$ como sendo

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0<t<T} \Omega_t \times \{t\},$$

com fronteira lateral dada por

$$\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \Gamma_t \times \{t\}.$$

Seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Representamos por $m(x)$ a função vetorial $m(x) = x - x^0$ e por $\nu(x)$ o vetor normal unitário em $x \in \Gamma$, direcionado para o exterior de Ω. Determinamos os seguintes conjuntos

$$\text{Partição da fronteira } \Gamma \text{ de } \Omega \quad \left| \begin{array}{l} \Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma \mid m(x) \cdot \nu(x) \geqslant 0\}, \\ \\ \Gamma_*(x^0) = \{x \in \Gamma \mid m(x) \cdot \nu(x) < 0\} = \Gamma \backslash \Gamma(x^0) \end{array} \right.$$

e

$$\text{Partição da fronteira lateral } \Sigma \text{ de } Q \quad \left| \begin{array}{l} \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0,T), \\ \\ \Sigma_*(x^0) = \Gamma_*(x^0) \times (0,T). \end{array} \right.$$

Com isso, definimos os conjuntos correspondentes

$$\Gamma_t(x^0) = \{y \in \Gamma_t \mid y = k(t)x,\ x \in \Gamma(x^0),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}, \quad \text{e} \quad \widehat{\Sigma}(x^0) = \bigcup_{0<t<T} \Gamma_t(x^0) \times \{t\}.$$

Consideramos

$$R(x^0) = \sup\{|m(x)|;\ x \in \Omega\}, \quad M = \sup\{|x|;\ x \in \Omega\}$$

em que $|x|$ é o comprimento do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ e λ_1 o primeiro autovalor do problema espectral $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Sobre a função k suponhamos que

$$k \in W^{3,\infty}_{\text{loc}}(0,\infty), \tag{H_1}$$

$$0 < k_0 = \inf_{t \geqslant 0} k(t), \quad \sup_{t \geqslant 0} k(t) = k_1 < \infty, \tag{H_2}$$

$$\sup_{t \geqslant 0} |k'(t)| = \tau < \frac{1}{M}, \tag{H_3}$$

$$\ell_1 = \int_0^\infty |k'(t)|\,dt < \infty \quad \text{e} \quad \ell_2 = \int_0^\infty |k''(t)|\,dt < \infty. \tag{H_4}$$

Exemplo 2.1 *Uma função que satisfaz as condições acima é dada por*

$$k(t) = 1 + \frac{1}{3}e^{-t} sen^2(t).$$

De fato, observamos que

(H_1) $k(t)$ é infinitamente diferenciável para $t > 0$, pois é o produto de funções $C^\infty(0,\infty)$, e portanto, $k \in C^\infty(0,\infty) \subset W^{3,\infty}_{loc}(0,\infty)$.

(H_2) Temos

$$sen^2(t) \in [0,1] \implies e^{-t}sen^2(t) \in [0,1] \implies 1+\frac{1}{3}e^{-t}sen^2(t) \in \left[1, 1+\frac{1}{3}\right] = \left[1, \frac{4}{3}\right].$$

Logo, $k(t) \in \left[1, \frac{4}{3}\right]$*. Assim,*

$$k_0 = \inf_{t \geqslant 0} k(t) = 1 > 0, \quad k_1 = \sup_{t \geqslant 0} k(t) = \frac{4}{3} < \infty.$$

(H_3) Calculando a derivada de $k(t)$ *obtemos*

$$k'(t) = \frac{1}{3}\left[-e^{-t}sen^2(t) + e^{-t}\cdot 2sen(t)\cos(t)\right] = \frac{1}{3}e^{-t}\left[-sen^2(t) + sen(2t)\right].$$

Desde que $|sen^2(t)| \leqslant 1$ *e* $|sen(2t)| \leqslant 1$*, tem-se*

$$|k'(t)| \leqslant \frac{1}{3}e^{-t}(1+1) = \frac{2}{3}e^{-t} \leqslant \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$\sup_{t \geqslant 0} |k'(t)| = \frac{2}{3}.$$

Podemos escolher $\tau = \frac{2}{3}$ *e* $M = 1$ *por exemplo.*

(H_4)

$$\ell_1 = \int_0^\infty |k'(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty \frac{2}{3}e^{-t}\,dt = \frac{2}{3} < \infty.$$

Para $k''(t)$*, derivamos* $k'(t)$*, obtendo*

$$k''(t) = \frac{1}{3}e^{-t}\left[sen^2(t) - 2\,sen(2t) + 2\cos(2t)\right],$$

o que implica

$$|k''(t)| \leqslant \frac{1}{3}e^{-t}(1+2+2) = \frac{5}{3}e^{-t}.$$

Logo,

$$\ell_2 = \int_0^\infty |k''(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty \frac{5}{3}e^{-t}\,dt = \frac{5}{3} < \infty.$$

Portanto, a função $k(t) = 1+\frac{1}{3}e^{-t}sen^2(t)$*, para todo* $t \geqslant 0$*, satisfaz as hipóteses* (H_1) - (H_4).

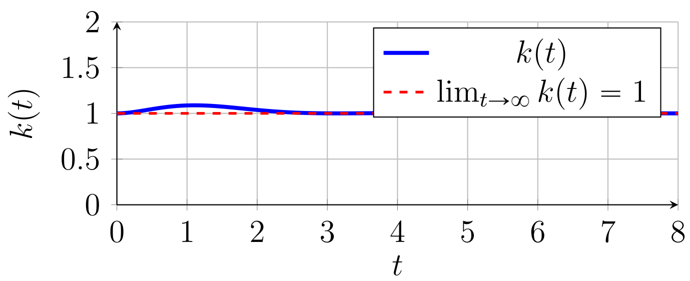

Figura 2.1: Gráfico da função $k(t) = 1 + \frac{1}{3}e^{-t}\sin^2(t)$.

O principal objetivo deste trabalho é obter a controlabilidade exata para o problema

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ em } \widehat{Q}, \\ u = g \text{ sobre } \widehat{\Sigma}, \\ u(\cdot,0) = u^0(\cdot), u'(\cdot,0) = u^1(\cdot) \text{ em } \Omega_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $u = u(y,t)$ é o estado e $g = g(y,t)$ é o controle que atua no sistema através da fronteira lateral $\widehat{\Sigma}$.

Problema: Dado $T > 0$ suficientemente grande, queremos encontrar um espaço de Hilbert apropriado H tal que para quaisquer dados iniciais $\{u^0, u^1\} \in H$, exista um controle $g \in L^2\left(\widehat{\Sigma}(x^0)\right)$, tal que a solução de (2.1) cumpra a condição de equilíbrio

$$u(\cdot,T,g) = 0 \quad \text{e} \quad u'(\cdot,T,g) = 0.$$

Sendo assim, podemos formular o problema de controlabilidade exata para o sistema (2.1) como segue:

Nossa abordagem consiste em transformar o sistema (2.1) em um problema equivalente definido no cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$ pelo difeomorfismo

$$T : \widehat{Q} \to Q$$

dado por $T(y,t) = (x,t)$ com $x = \dfrac{y}{k(t)}$. A inversa $T^{-1} : Q \to \widehat{Q}$ é definida por

$$T^{-1}(x,t) = (y,t) \text{ com } y = k(t)\, x.$$

Agora, iremos proceder de forma a transformar o sistema (2.1) em um novo problema definido em um domínio cilíndrico.

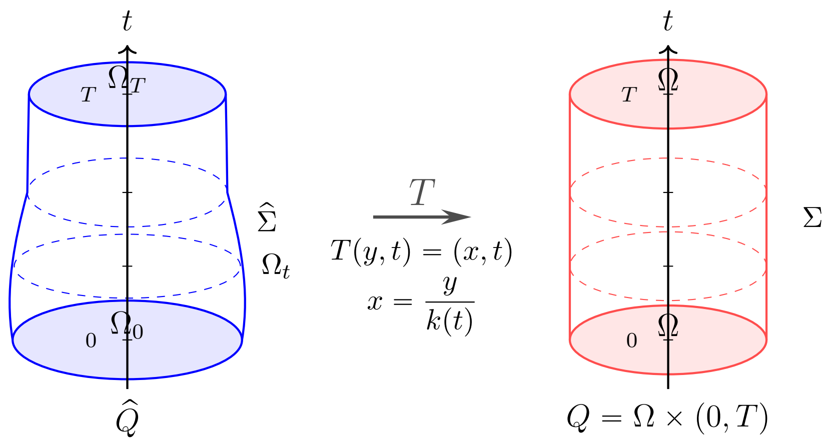

Figura 2.2: Mudança de variáveis através do difeomorfismo T, que mapeia o domínio não cilíndrico $\widehat{Q}$ no domínio cilíndrico fixo Q.

Usando o difeomorfismo T temos que

$$u(y,t) = (u \circ T^{-1})(x,t) = w(x,t).$$

Tomando as derivadas de primeira e segunda ordem e utilizando a regra da cadeia para funções de várias variáveis, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}(y,t) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left[w\left(\frac{y}{k(t)},t\right)\right] = \frac{\partial w}{\partial x_i}\left(\frac{y}{k(t)},t\right)\frac{1}{k(t)} = \frac{1}{k(t)}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t),$$

isto é, $\nabla u(y,t) = \dfrac{1}{k(t)}\nabla w(x,t)$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y,t) &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{\partial u}{\partial y_i}(y,t)\right] = \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{1}{k(t)}\frac{\partial w}{\partial x_i}\left(\frac{y}{k(t)},t\right)\right] = \frac{1}{k(t)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}(x,t)\frac{1}{k(t)}\right]\\ &= \frac{1}{k(t)^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}(x,t), \qquad (2.2)\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta u(y,t) = \frac{1}{(k(t))^2}\Delta w(x,t).$$

Por outro lado, derivemos em relação a variável temporal, daí

$$\begin{aligned}u'(y,t) = [w(x,t)]' &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t)\,x_i' + w'(x,t)\,t'\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t)\left(-y_i\frac{k'(t)}{k(t)^2}\right) + w'(x,t)\\ &= -\frac{k'(t)}{k(t)^2}\sum_{i=1}^{n}k(t)x_i\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) + w'(x,t)\\ &= -\frac{k'(t)}{k(t)}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) + w'(x,t) \qquad (2.3)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}u''(y,t) &= \left[-\frac{k'(t)}{k(t)}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) + w'(x,t)\right]'\\ &= -\left[\frac{k'(t)}{k(t)}\right]'\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) - \frac{k'(t)}{k(t)}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t)\right]' + [w'(x,t)]'.\end{aligned}$$

Assim, usando as propriedades de derivação e observando que $x = \dfrac{y}{k(t)}$, temos,

$$\begin{aligned}u''(y,t) = &-\left[\frac{k''(t)k(t) - (k'(t))^2}{(k(t))^2}\right]\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) - \frac{k'(t)}{k(t)}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i}{k(t)}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t)\right]'\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w'}{\partial x_i}(x,t)\left(-y_i\frac{k'(t)}{(k(t))^2}\right) + w''(x,t),\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
u''(y,t) = {} & \left[\frac{(k'(t))^2 - k''(t)k(t)}{(k(t))^2}\right]\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) - \frac{k'(t)}{k(t)}\sum_{i=1}^{n}\left[-y_i \frac{k'(t)}{(k(t))^2}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t)\right] \\
& - \frac{k'(t)}{k(t)}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{y_i}{k(t)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i}(x,t)\left(-y_j\frac{k'(t)}{(k(t))^2}\right) + \frac{\partial w'}{\partial x_i}(x,t)\right)\right] \\
& + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w'}{\partial x_i}(x,t)\left(-k(t)x_i\frac{k'(t)}{(k(t))^2}\right) + w''(x,t).
\end{aligned}
$$

Evidenciando que $y = k(t)x$ e simplificando a expressão, obtemos

$$
\begin{aligned}
u''(y,t) = {} & \left[\frac{(k'(t))^2 - k''(t)k(t)}{(k(t))^2}\right]\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) + \frac{k'(t)}{k(t)}\sum_{i=1}^{n}\left(k(t)x_i\frac{k'(t)}{(k(t))^2}\right)\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) \\
& - \frac{k'(t)}{k(t)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k(t)x_i}{k(t)}\right)\frac{\partial w'}{\partial x_i}(x,t)\frac{k'(t)}{k(t)}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{(k(t)x_i)(k(t)x_j)k'(t)}{k(t)\,(k(t))^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i}(x,t) \\
& - \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{k'(t)}{k(t)}\right)\frac{\partial w'}{\partial x_i}(x,t) + w''(x,t) \\
= {} & \left[\frac{(k'(t))^2 - k''(t)k(t)}{(k(t))^2}\right]\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) + \left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) \\
& - \frac{k'(t)}{k(t)}\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial w'}{\partial x_i}(x,t) + \left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i}(x,t) \\
& - \sum_{i=1}^{n}\frac{k'(t)}{k(t)}x_i\frac{\partial w'}{\partial x_i}(x,t) + w''(x,t),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
u''(y,t) = {} & \left(\frac{2(k'(t))^2 - k''(t)k(t)}{k(t)^2}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) + \left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i}(x,t) \\
& - \frac{2k'(t)}{k(t)}\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial w'}{\partial x_i}(x,t) + w''(x,t).
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Observação 2.1 *A fim de simplificar a notação, quando não houver risco de ambiguidade, denotaremos por w e k as funções $w(x,t)$ e $k(t)$, respectivamente. Essa notação será retomada em sua forma completa sempre que for relevante destacar tal dependência.*

Substituindo (2.2) e (2.4) em $(2.1)_1$, obtemos

$$
w'' + \left(\frac{2(k')^2 - k''k}{k^2}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial w}{\partial x_i} + \left(\frac{k'}{k}\right)^2\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{2k'}{k}\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial w'}{\partial x_i} - \frac{1}{k^2}\Delta w = 0. \tag{2.5}
$$

Sendo δ_{ij} o delta de kronecker, ou seja,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases},$$

note que,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\delta_{ij} - (k')^2 x_i x_j}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta_{ij}}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(k')^2 x_i x_j}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= -\left[\left(\frac{k'}{k} \right)^2 \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{1}{k^2} \Delta w \right].
\end{aligned}$$

Assim, em (2.5) podemos escrever

$$w'' - \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\delta_{ij} - (k')^2 x_i x_j}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{2(k')^2 - k'' k}{k^2} \right) \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{2k'}{k} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w'}{\partial x_i} = 0. \quad (2.6)$$

Denotemos por a_{ij} o termo

$$\boxed{a_{ij}(x,t) = \frac{\delta_{ij} - (k')^2 x_i x_j}{k^2}} \quad (2.7)$$

Além disso, podemos perceber ainda que,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \text{ou seja,} \quad a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

Substituindo em (2.6), temos

$$w'' - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \left(\frac{2(k')^2 - k'' k}{k^2} \right) \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{2k'}{k} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w'}{\partial x_i} = 0. \quad (2.8)$$

Observemos agora que o terceiro termo da igualdade acima pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1 - (k')^2 x_i^2}{k^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{-(k')^2 x_i x_j}{k^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i} \left(\frac{-2(k')^2 x_i}{k^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \left(\frac{-(k')^2 x_i}{k^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Perceba que o somatório quando $i \neq j$ nos dá $(n-1)$ parcelas, isto é,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-2(k')^2 x_i}{k^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-(n-1)(k')^2 x_i}{k^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(-1-n)(k')^2 x_i}{k^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que podemos escrever a igualdade (2.8) na forma

$$w'' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial w'}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0, \tag{2.9}$$

em que

$$\boxed{b_i(x,t) = \frac{-2k'}{k}x_i} \tag{2.10}$$

e

$$\boxed{\beta_i(x,t) = \left(\frac{(1-n)(k')^2 - k''k}{k^2}\right)x_i} \tag{2.11}$$

Para verificar os termos de fronteira notemos que $u(y,t) = g(y,t)$ sobre $\widehat{\Sigma}$ e, usando o difeomorfismo, temos

$$g(y,t) = u(y,t) = (u \circ T^{-1})(x,t) = w(x,t),$$

ou ainda,

$$w(x,t) = g(k(t)x,t).$$

Daí, basta considerar $v(x,t) = g(k(t)x,t)$.

Para completar o problema, vejamos o que ocorre com as condições iniciais em Ω_0. Note que,

$$u^0(y) = u(y,0) = u(k(0)x,0) = w(x,0) = w^0(x).$$

Se $k(0) = 1$, tem-se $\Omega_0 = \Omega$. Então,

$$w^0(x) = u^0(x) = u^0(y).$$

Além disso, por (2.3) segue que

$$u^1(y) = u'(y,0) = -\frac{k'(0)}{k(0)}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(x,0) + w'(x,0) = -\frac{k'(0)}{k(0)}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}(x) + w'(x,0).$$

Assim,

$$w^1(x) = w'(x,0) = u^1(y) + \frac{k'(0)}{k(0)}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}(x)$$

e, consequentemente, se $k(0) = 1$, teremos

$$w^1(x) = u^1(x) + k'(0)\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}(x).$$

Portanto, o problema (2.1) é transformado no seguinte problema equivalente

$$\begin{cases} w'' - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial w'}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \text{ em } Q, \\ w = v \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ w(\cdot,0) = w^0(\cdot), w'(\cdot,0) = w^1(\cdot) \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

em que Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ e $Q = \Omega \times (0,T)$ o cilindro com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Observação 2.2 *No que segue, adotaremos as seguintes convenções:*

- *Será utilizada a convenção de soma de Einstein. No entanto, o símbolo de somatório será explicitamente incluído em casos onde a ambiguidade possa surgir, ou para maior clareza da expressão.*
- *A notação C será utilizada para denotar uma constante genérica positiva que pode variar de linha para linha (a menos que seja indicado de outra forma).*

Nas próximas seções, 2.2 e 2.3, será estabelecida a existência e unicidade de soluções, bem como a identidade de energia correspondente, para um operador diferencial de segunda ordem na variável temporal t.

Todavia, tal análise será conduzida especificamente para o sistema adjunto associado a (2.12), tendo em vista que, por meio do princípio de dualidade, os resultados obtidos para o adjunto também implicam propriedades análogas para o problema original. Assim, procedemos à dedução do operador adjunto de (2.12).

Multipliquemos formalmente $(2.12)_1$ por $z \in \mathcal{D}(Q)$ e integremos em $Q = \Omega \times (0,T)$, para obter,

$$\int_0^T \int_\Omega w'' z \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) z \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_\Omega b_i \frac{\partial w'}{\partial x_i} z \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \beta_i \frac{\partial w}{\partial x_i} z \, dx \, dt = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega w \left[z'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z)' - \frac{\partial}{\partial x_i}(\beta_i z) \right] dx \, dt = 0. \tag{2.13}$$

Analisemos os dois últimos termos do lado direito da igualdade anterior. Para isso, recordemos as expressões (2.10) e (2.11) e notemos que

$$b_i' = 2x_i\left(\frac{(k')^2 - k''k}{k^2}\right), \quad \frac{\partial b_i'}{\partial x_i} = 2\left(\frac{(k')^2 - k''k}{k^2}\right),$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_i} = \frac{-2k'}{k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} = \frac{(1-n)(k')^2 - k''k}{k^2}.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z)' &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i' z + b_i z') \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial b_i'}{\partial x_i} z + b_i' \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial b_i}{\partial x_i} z' + b_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[2\left(\frac{(k')^2 - k''k}{k^2}\right) z + 2x_i\left(\frac{(k')^2 - k''k}{k^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i} - \frac{2k'}{k} z' - \frac{2k'}{k} x_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}\right] \\
&= \left(\frac{2n(k')^2 - 2nk''k}{k^2}\right) z + \left(\frac{2(k')^2 - 2k''k}{k^2}\right) x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} - \frac{2nk'}{k} z' - \frac{2k'}{k} x_i \frac{\partial z'}{\partial x_i} \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_i}(\beta_i z) &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} z + \beta_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(1-n)(k')^2 - k''k}{k^2}\right) z + \left(\frac{(1-n)(k')^2 - k''k}{k^2}\right) x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \\
&= \left(\frac{-n(1-n)(k')^2 + nk''k}{k^2}\right) z + \left(\frac{k''k - (1-n)(k')^2}{k^2}\right) x_i \frac{\partial z}{\partial x_i}. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Dessa forma, de (2.14) e (2.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z)' - \frac{\partial}{\partial x_i}(\beta_i z) = &-\frac{2k'}{k} x_i \frac{\partial z'}{\partial x_i} - \frac{2nk'}{k} z' + \left(\frac{n(n+1)(k')^2 - nk''k}{k^2}\right) z \\
&+ \left(\frac{(n+1)(k')^2 - k''k}{k^2}\right) x_i \frac{\partial z}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Substituindo a igualdade acima em (2.13), temos que

$$z'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) + b_i(x,t)\frac{\partial z'}{\partial x_i} + c(x,t) z' + d_i(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_i} + f(x,t) z = 0, \qquad (2.16)$$

em que

$$\boxed{c(x,t) = -\frac{2nk'}{k}}$$

$$\boxed{d_i(x,t) = \left(\frac{(n+1)(k')^2 - k''k}{k^2}\right) x_i} \qquad (2.17)$$

$$\boxed{f(x,t) = \frac{n(n+1)(k')^2 - nk''k}{k^2}}$$

Definamos o operador

$$Rz = z'' + A(t)z + b_i(x,t)\frac{\partial z'}{\partial x_i} + c(x,t)z' + d_i(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_i} + f(x,t)z \tag{2.18}$$

em que

$$A(t)z = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right). \tag{2.19}$$

Usaremos as seguintes notações:

$$\langle A(t)z, \xi\rangle = a(t,z,\xi) = \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}dx,$$

$$a'(t,z,\xi) = \int_\Omega a'_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}dx \tag{2.20}$$

e

$$a''(t,z,\xi) = \int_\Omega a''_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}dx.$$

Lema 2.1 *Os coeficientes de Rz satisfazem as condições*

$$\begin{cases} a_{ij} \text{ são simétricos e uniformemente coercivos em } Q, \\ a_{ij} \in C^1(\overline{Q}); \quad a''_{ij} \in L^\infty(Q), \\ b_i, c, d_i, f \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega)); \quad \dfrac{\partial b_i}{\partial x_i} \in L^\infty(Q). \end{cases} \tag{2.21}$$

Além disso, o operador Rz pode ser identificado como o operador adjunto L^*z, o qual pode ser expresso na forma

$$L^*z = z'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z') + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z)' + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{n(k')^2}{k^2}x_i z\right). \tag{2.22}$$

Prova. De fato, como $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, então $a_{ij} = a_{ji}$, ou seja, são simétricos. Além disso,

$$\begin{aligned} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j &= \frac{1}{k^2}\left(\sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\xi_i\xi_j - (k')^2\sum_{i,j=1}^n x_i x_j \xi_i\xi_j\right) \\ &= \frac{1}{k^2}\left(\sum_{i,j=1}^n \xi_i^2 - (k')^2\langle x,\xi\rangle^2\right). \end{aligned}$$

Aqui, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno. Por Cauchy- Schwarz, $|\langle x, \xi \rangle|^2 \leqslant |x|^2|\xi|^2$. Daí, (H_2), (H_3) e a definição de M implicam que

$$\begin{aligned} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j &\geqslant \frac{1}{k^2}\left(|\xi|^2 - (k')^2|x|^2|\xi|^2\right) \\ &\geqslant \frac{1}{k_1^2}\left(1 - \tau^2M^2\right)|\xi|^2 \\ &= \alpha|\xi|^2, \end{aligned}$$

com $\alpha = \dfrac{1-\tau^2M^2}{k_1^2} \geqslant 0$. Portanto, é possível concluir que a_{ij} é uniformemente coercivo, o que confirma a validade de $(2.21)_1$.

Como $x_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e por (H_1) e pelo Torema 1.1, tem-se $k \in W^{3,\infty}([0,T]) \hookrightarrow C^{2,1}([0,T])$, segue que $a_{ij} \in C(\overline{\Omega} \times [0,T]) = C(\overline{Q})$. Desde que as primeiras derivadas de a_{ij} em relação a variável espacial e temporal dependem no máximo de k'', temos que $a_{ij} \in C^1(\overline{Q})$. Além disso, a''_{ij} depende no máximo de k''', e por (H_1) temos que k, k', k'' e k''' são funções localmente em $L^\infty(0,\infty)$, logo, são limitadas em $(0,T)$, ou seja, $a''_{ij} \in L^\infty(Q)$, deduzindo $(2.21)_2$.

Perceba ainda, que desde que b_i, c, d_i, f e suas primeiras derivadas em relação a variável temporal dependem no máximo de k''', a limitação de k e suas derivadas, mencionada anteriormente, nos permite concluir que

$$b_i, c, d_i, f \in W^{1,\infty}(0,T; L^\infty(\Omega)).$$

De modo análogo justificamos que $\dfrac{\partial b_i}{\partial x_i} \in L^\infty(Q)$, confirmando $(2.21)_3$.

Além disso, note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z)' &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} z' + b_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} -2\frac{k'}{k} z' - 2\frac{k'}{k} x_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}\right) \\ &= -n\frac{k'}{k} z' - \frac{k'}{k} x_i \frac{\partial z'}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{2.23}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{n(k')^2}{k^2} x_i z\right) &= \frac{n(k')^2}{k^2}\sum_{i=1}^{n}\left(z + x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{n(k')^2}{k^2}\left(nz + x_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{n^2(k')^2}{k^2} z + \frac{n(k')^2}{k^2} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Combinando (2.23) e (2.24) e utilizando (2.14), obtemos que L^*z pode ser escrito como dado em (2.22). ∎

Consideremos o problema

$$\begin{cases} Rz = h \text{ em } Q, \\ z = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z^0(\cdot), z'(\cdot,0) = z^1(\cdot) \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{2.25}$$

com dados $\{z^0, z^1, h\}$ em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

A seguir, apresentaremos lemas técnicos necessários para o estudo da existência, unicidade e regularidade de solução para o problema (2.25).

Lema 2.2 *A fórmula de Green fornece*

$$\left(b_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \xi\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\xi, \xi\right), \quad \forall\, \xi \in H_0^1(\Omega).$$

Prova. Observemos inicialmente que

$$\frac{\partial(\xi^2)}{\partial x_i} = 2\,\xi \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \text{ ou seja, } \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\xi = \frac{1}{2}\frac{\partial(\xi^2)}{\partial x_i}.$$

Assim, pelo Teorema de Green, segue que

$$\left(b_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \xi\right) = \int_\Omega b_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\xi\, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega b_i \frac{\partial(\xi^2)}{\partial x_i}dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\xi^2 dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\xi, \xi\right),$$

para todo $\xi \in H_0^1(\Omega)$. ∎

Lema 2.3 *Valem a identidade*

$$a'(t,z,z'') = \frac{d}{dt}a'(t,z,z') - a''(t,z,z') - a'(t,z',z')$$

e a estimativa

$$|a'(t,z(t),z'(t))| \leqslant \frac{C}{\eta}\|z(t)\|^2 + \eta\|z'(t)\|^2,$$

em que C e η são constantes positivas arbitrárias.

Prova. De fato, usando a notação estabelecida em (2.20), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a'(t,z,z') &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\left(a'_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z'}{\partial x_i}\right)dx \\ &= \int_\Omega a''_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z'}{\partial x_i} + a'_{ij}(x,t)\left(\frac{\partial z'}{\partial x_j}\frac{\partial z'}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z''}{\partial x_i}\right)dx \\ &= a''(t,z,z') + a'(t,z',z') + a'(t,z,z''), \end{aligned}$$

o que nos fornece,

$$a'(t,z,z'') = \frac{d}{dt}a'(t,z,z') - a''(t,z,z') - a'(t,z',z').$$

Além disso, da condição $(2.21)_2$, temos $a'_{ij} \in C(\overline{Q})$, assim, existe $C > 0$ tal que

$$|a'_{ij}(x,t)| \leqslant C, \quad \forall (x,t) \in Q.$$

Daí, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|a'(t,z,z')| \leqslant \int_\Omega |a'_{ij}(x,t)| \left|\frac{\partial z}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial z'}{\partial x_i}\right| dx \leqslant C \int_\Omega |\nabla z|\,|\nabla z'|\,dx \leqslant C\,|\nabla z|\,|\nabla z'|\,dx.$$

Aplicando, em seguida, a desigualdade de Young e, recordando que $|\nabla z| \leqslant \|z\|$, podemos obter a estimativa

$$\begin{aligned} |a'(t,z,z')| &\leqslant \frac{C}{\eta}|\nabla z|^2 + \eta |\nabla z'|^2 \\ &\leqslant \frac{C}{\eta}\|z(t)\|^2 + \eta\|z'(t)\|^2, \end{aligned}$$

com constantes C e η positivas. ■

2.2 Solução forte

O objetivo nesta seção é provar a existência e unicidade de solução para o problema (2.25) quando z^0, z^1 e h são dados bem regulares.

Definição 2.1 (Solução forte) *Dizemos que uma função $z : Q \to \mathbb{R}$ é uma solução forte do problema* (2.25) *quando*

$$z \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \quad z' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad z'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

satisfaz

$$z'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) + b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i} + Pz = h \quad q.s. \text{ em } Q$$

e as condições iniciais $z(\cdot,0) = z^0(\cdot)$ e $z'(\cdot,0) = z^1(\cdot)$, em que

$$\boxed{Pz = cz' + d_i\frac{\partial z}{\partial x_i} + fz}$$

Enunciaremos agora um resultado que garante existência de solução forte para o problema (2.25).

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade) *Sejam*

$$z^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \quad z^1 \in H_0^1(\Omega); \quad h, h' \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Então existe uma única solução forte z *do problema* (2.25).

Prova. Para provarmos a existência de solução usaremos o Método de Faedo-Galerking que consiste em três etapas:

1. Construção de "soluções aproximadas" em um espaço de dimensão finita;
2. Obtenção de estimativas à priori;
3. Passagem ao limite (recuperando os espaços infinito dimensionais).

Soluções aproximadas

Munindo $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ da norma

$$\|z\|_{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)} = \|z\|_{H_0^1(\Omega)} + \|z\|_{H^2(\Omega)},$$

temos que esse espaço é separável, e assim, possui uma base Hilbertiana $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Seja $V_m = [w_1, \ldots, w_m]$ o espaço gerado pelos m primeiros vetores da base $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Queremos encontrar soluções aproximadas do tipo variáveis separáveis

$$z_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i(x),$$

onde os $g_{im}'s$ satisfazem o sistema de EDOs:

$$\begin{cases} (z_m''(t), \xi) + a(t, z_m(t), \xi) + \left(b_i \dfrac{\partial z_m'}{\partial x_i}(t), \xi \right) + (P z_m, \xi) = (h, \xi), \ \forall\, \xi \in V_m \\ z_m(x,0) = z_m^0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i \to z^0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ z_m'(x,0) = z_m^1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \zeta_i w_i \to z^1 \text{ em } H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{PA}$$

Pelo Teorema de Carathéodory o problema aproximado (PA) possui solução local no intervalo $[0, t_m]$ com $t_m < T$ (ver Apêndice A). Essa solução pode ser estendida a todo intervalo $[0, T]$ como consequência das estimativas à priori que faremos a seguir.

Estimativas à priori

Estimativa I

Fazendo $\xi = z'_m(t) \in V_m$ em $(\text{PA})_1$, temos

$$(z''_m(t), z'_m(t)) + a(t, z_m(t), z'_m(t)) + \left(b_i \frac{\partial z'_m(t)}{\partial x_i}, z'_m(t)\right) + (Pz_m, z'_m(t)) = (h, z'_m(t)). \quad (2.26)$$

Pela simetria de a_{ij} e usando o Lema 2.3, obtemos

$$a(t, z_m, z'_m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t, z_m, z_m) - \frac{1}{2}a'(t, z_m, z_m) \quad (2.27)$$

e

$$\left|-\frac{1}{2}a'(t, z_m, z_m)\right| = \frac{1}{2}\int_\Omega |a'_{ij}(x,t)||\nabla z_m|^2 dx \leqslant \frac{C}{2}\|z_m\|^2 = C\|z_m\|^2. \quad (2.28)$$

Além disso, pelo Lema 2.2 e usando o fato de que $\dfrac{\partial bi}{\partial x_i} \in L^\infty(Q)$, segue que

$$\left(b_i \frac{\partial z'_m}{\partial x_i}, z'_m\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z'_m, z'_m\right) \leqslant \left|-\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial b_i}{\partial x_i}(z'_m)^2 dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty} |z'_m|^2 = C|z'_m|^2. \quad (2.29)$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, e $(2.21)_3$, temos

$$\begin{aligned}
(Pz_m, z'_m(t)) &= \int_\Omega c(z'_m)^2 + d_i \frac{\partial z_m}{\partial x_i} z'_m + f z_m z'_m dx \\
&\leqslant \|c\|_{L^\infty}\int_\Omega |z'_m|^2 dx + \|d_i\|_{L^\infty}\int_\Omega \frac{\partial z_m}{\partial x_i} z'_m dx + \|f\|_{L^\infty}\int_\Omega z_m z'_m dx \\
&\leqslant \|c\|_{L^\infty}|z'_m|^2 + \|d_i\|_{L^\infty}|\nabla z_m||z'_m| + \|f\|_{L^\infty}\|z_m\||z'_m| \\
&\leqslant C|z'_m|^2 + C\left(\frac{\|z_m\|^2}{2} + \frac{|z'_m|^2}{2}\right) \\
&= C|z'_m|^2 + C\|z_m\|^2
\end{aligned} \quad (2.30)$$

e

$$(h, z'_m(t)) \leqslant |h||z'_m| \leqslant \frac{|h|^2}{2} + \frac{|z'_m|^2}{2}. \quad (2.31)$$

Substituindo as estimativas (2.28), (2.29), (2.30) e (2.31) em (2.26), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z'_m|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t, z_m, z_m) &\leqslant C\|z_m\|^2 + C|z'_m|^2 + C|z'_m|^2 + C\|z_m\|^2 + \frac{|h|^2}{2} + \frac{|z'_m|^2}{2} \\
&\leqslant C|z'_m|^2 + C\|z_m\|^2 + \frac{|h|^2}{2}.
\end{aligned} \quad (2.32)$$

Agora, integrando a desigualdade acima de 0 a t, concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|z'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t, z_m(t), z_m(t)) &\leqslant \frac{1}{2}|z^1_m|^2 + \frac{1}{2}a(0, z^0_m, z^0_m) + C\int_0^t |z'_m|^2 ds \\
&\quad + C\int_0^t \|z_m\|^2 ds + \int_0^T \frac{|h|^2}{2} ds.
\end{aligned}$$

Pela coercividade de $a(t,\cdot,\cdot)$, pela hipótese sobre h e pelas convergências em $(\text{PA})_2$ e $(\text{PA})_3$, temos

$$\frac{1}{2}|z_m'(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|z_m\|^2 \leqslant C_1 + \int_0^t C\left(|z_m'|^2 + \|z_m\|^2\right) ds,$$

com $C_1 = \frac{1}{2}|z_m^1|^2 + \frac{1}{2}a(0, z_m^0, z_m^0) + \frac{1}{2}\int_0^T |h|^2\, ds$. Assim, pelo Lema de Gronwall, podemos escrever

$$\frac{1}{2}|z_m'(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|z_m\|^2 \leqslant C,$$

em que a constante $C > 0$ independe de m e t. Dessa forma, podemos estender a solução aproximada $z_m(t)$ a todo intervalo $[0,T]$, e passando o supremo essencial na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&(z_m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\\
&(z_m') \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Note que as pertinências acima não são suficientes para atender os requisitos do teorema, assim, necessitamos de mais algumas estimativas.

Estimativa II

Inicialmente, derivamos $(\text{PA})_1$ em relação a t, isto é,

$$\frac{d}{dt}(z_m'', \xi) + \frac{d}{dt}a(t, z_m, \xi) + \frac{d}{dt}\left(b_i\frac{\partial z_m'}{\partial x_i}, \xi\right) + \frac{d}{dt}(Pz_m, \xi) = \frac{d}{dt}(h, \xi),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(z_m''', \xi) + a'(t, z_m, \xi) + a(t, z_m', \xi) + \left(b_i'\frac{\partial z_m'}{\partial x_i}, \xi\right) + \left(b_i\frac{\partial z_m''}{\partial x_i}, \xi\right)&\\
+ \left(c'z_m' + cz_m'' + d_i'\frac{\partial z_m}{\partial x_i} + d_i\frac{\partial z_m'}{\partial x_i} + f'z_m + fz_m', \xi\right) &= (h', \xi).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Fazendo $\xi = z_m''(t) \in V_m$ em (2.33), segue que

$$\begin{aligned}
(z_m''', z_m'') + a'(t, z_m, z_m'') + a(t, z_m', z_m'') + \left(b_i'\frac{\partial z_m'}{\partial x_i}, z_m''\right) + \left(b_i\frac{\partial z_m''}{\partial x_i}, z_m''\right)&\\
+ \left(c'z_m' + cz_m'' + d_i'\frac{\partial z_m}{\partial x_i} + d_i\frac{\partial z_m'}{\partial x_i} + f'z_m + fz_m', z_m''\right) &= (h', z_m'')
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Utilizando o Lema 2.3 e (2.27), obtemos

$$a'(t, z_m, z_m'') + a(t, z_m', z_m'') = \frac{d}{dt}a'(t, z_m, z_m') + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t, z_m', z_m') - \frac{3}{2}a'(t, z_m', z_m') - a''(t, z_m, z_m').$$

Analisemos inicialmente os dois últimos termos da igualdade acima.

Usando as condições (2.21) e as desigualdades de Cauchy-schwarz e Young obtemos

$$\left|-\frac{3}{2}a'(t,z_m',z_m')\right| \leqslant \frac{3}{2}\int_\Omega |a_{ij}'(x,t)||\nabla z_m'|^2dx \leqslant \frac{3C}{2}\|z_m'\|^2 = C\|z_m'\|^2,$$

e

$$|a''(t,z_m,z_m')| \leqslant \int_\Omega |a_{ij}''(x,t)||\nabla z_m||\nabla z_m'|dx \leqslant C\|z_m\|\|z_m'\| \leqslant C(\|z_m\|^2+\|z_m'\|^2).$$

Usando a mesma estratégia, estimemos agora os demais termos de (2.34), ou seja,

- $\left(b_i'\dfrac{\partial z_m'}{\partial x_i}, z_m''\right) = \displaystyle\int_\Omega b_i'\frac{\partial z_m}{\partial x_i}z_m''\,dx \leqslant \|b_i'\|_{L^\infty}|\nabla z_m'||z_m''| = C\left(\|z_m'\|^2+|z_m''|^2\right);$
- $\left(b_i\dfrac{\partial z_m''}{\partial x_i}, z_m''\right) \leqslant \left|-\frac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial b_i}{\partial x_i}(z_m'')^2dx\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left\|\dfrac{\partial b_i}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty}|z_m''|^2 = C|z_m''|^2;$
- $(c'z_m', z_m'') \leqslant \|c'\|_{L^\infty}|z_m'||z_m''| \leqslant C(|z_m'|^2+|z_m''|^2);$
- $(cz_m'', z_m'') \leqslant \|c\|_{L^\infty}|z_m''|^2 = C|z_m''|^2;$
- $\left(d_i'\dfrac{\partial z_m}{\partial x_i}, z_m''\right) \leqslant \|d_i'\|_{L^\infty}|\nabla z_m||z_m''| \leqslant C(\|z_m\|^2+|z_m''|^2);$
- $\left(d_i\dfrac{\partial z_m'}{\partial x_i}, z_m''\right) \leqslant \|d_i\|_{L^\infty}|\nabla z_m'||z_m''| \leqslant C(\|z_m'\|^2+|z_m''|^2);$
- $(f'z_m, z_m'') \leqslant \|f'\|_{L^\infty}|z_m||z_m''| \leqslant C(|z_m|^2+|z_m''|^2);$
- $(fz_m', z_m'') \leqslant \|f\|_{L^\infty}|z_m'||z_m''| \leqslant C(|z_m'|^2+|z_m''|^2);$
- $(h', z_m'') \leqslant |h'||z_m''| \leqslant C(|h'|^2+|z_m''|^2).$

Substituindo as desigualdades acima em (2.34), segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z_m''|^2+\frac{d}{dt}a'(t,z_m,z_m')+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,z_m',z_m') \leqslant C(\|z_m'\|^2+\|z_m\|^2+|z_m''|^2+|z_m'|^2+|z_m|^2+|h'|^2).$$

Pela Estimativa I, as normas $\|z_m\|^2$, $|z_m'|^2$ e $|z_m|^2$ podem ser majoradas por constantes, logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z_m''|^2+\frac{d}{dt}a'(t,z_m,z_m')+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,z_m',z_m') \leqslant C(\|z_m'\|^2+|z_m''|^2+|h'|^2). \tag{2.35}$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t é possível reescrevê-la na forma

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|z_m''(t)|^2+a'(t,z_m(t),z_m'(t))+\frac{1}{2}a(t,z_m'(t),z_m'(t))\\ &\leqslant \frac{1}{2}|z_m''(0)|^2+a'(0,z_m^0,z_m^0)+\frac{1}{2}a(0,z_m^1,z_m^1)+\int_0^t C(\|z_m'\|^2+|z_m''|^2)ds+C\int_0^T|h'|^2ds.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Pelo Lema 2.3 e pela Estimativa I tem-se

$$|a'(t, z_m(t), z'_m(t))| \leqslant \frac{C}{\eta}\|z_m(t)\|^2 + \eta\|z'_m(t)\|^2 \leqslant C + \eta\|z'_m(t)\|^2,$$

e, mais uma vez, pela coercividade de $a(t, \cdot, \cdot)$, podemos escrever em (2.36) que

$$\frac{1}{2}|z''_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|z'_m(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}|z''_m(0)|^2 + a'(0, z^0_m, z^0_m) + \frac{1}{2}a(0, z^1_m, z^1_m)$$
$$+ C + \int_0^t C(\|z'_m\|^2 + |z''_m|^2)ds + C\int_0^T |h'|^2 ds. \tag{2.37}$$

Afirmação 2.1 *$z''_m(0)$ é limitado.*

De fato, se $z''_m(0) = 0$ não há o que fazer. Suponhamos que $z''_m(0) \neq 0$ e tomemos $t = 0$ e $\xi = z''_m(0)$ em $(\text{PA})_1$ para obter

$$(z''_m(0), z''_m(0)) + a(0, z^0_m, z''_m(0)) + \left(b_i\frac{\partial z^1_m}{\partial x_i}, z''_m(0)\right) + (cz^1_m, z''_m(0))$$
$$+ \left(d_i\frac{\partial z^0_m}{\partial x_i}, z''_m(0)\right) + (fz^0_m, z''_m(0)) = (h(0), z''_m(0)). \tag{2.38}$$

Observe que

$$a(0, z^0_m, z''_m(0)) = \langle A(0)z^0_m, z''_m(0)\rangle = \int_\Omega -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,0)\frac{\partial z^0_m}{\partial x_j}\right)z''_m(0)dx$$
$$\leqslant \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x,0)\frac{\partial z^0_m}{\partial x_j}\right| + \left|a_{ij}(x,0)\frac{\partial^2 z^0_m}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right)|z''_m(0)|dx.$$

Como $a_{ij} \in C^1(\bar{Q})$, temos que a_{ij} e $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$ são contínuas no compacto $\bar{Q}$. Além disso, $z^0_m \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Logo, existem $m_1, m_2, m_3, m_4 > 0$ tais que

$$|a_{ij}(x,0)| \leqslant m_1, \quad \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x,0)\right| \leqslant m_2, \quad \left|\frac{\partial z^0_m}{\partial x_j}\right| \leqslant m_3 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial^2 z^0_m}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant m_4.$$

Tomando $C = \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ temos

$$a(0, z^0_m, z''_m(0)) \leqslant C|z''_m(0)|$$

Recordando de $(2.21)_3$ que $b_i, c, d_i, f \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega))$, em (2.38) segue que

$$|z''_m(0)|^2 \leqslant C|z''_m(0)| + C\left|\frac{\partial z^1_m}{\partial x_i}\right||z''_m(0)| + C(|z^1_m| + C + |z^0_m|)|z''_m(0)| + |h(0)||z''_m(0)|,$$

ou seja,

$$|z''_m(0)| \leqslant C,$$

Assim, $z''_m(0)$ é limitado. Dessa forma, em (2.37) temos

$$\frac{1}{2}|z''_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|z'_m(t)\|^2 \leqslant C + \int_0^t C(\|z'_m\|^2 + |z''_m|^2)\, ds,$$

Pelo Lema de Gronwall, concluímos que

$$\frac{1}{2}|z''_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|z'_m(t)\|^2 \leqslant C$$

em que $C > 0$ é uma constante independente de m. Daí, passando o supremo essencial, obtemos

$$\begin{aligned} &(z'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \\ &(z''_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Estimativa III

Tomemos $\xi = -\Delta z'_m \in V_m$ em (PA)$_1$, ou seja,

$$\begin{aligned} (z''_m(t), -\Delta z'_m(t)) + a(t, z_m(t), -\Delta z'_m(t)) + \left(b_i \frac{\partial z'_m(t)}{\partial x_i}, -\Delta z'_m(t) \right) \\ + (P z_m, -\Delta z'_m(t)) = (h, -\Delta z'_m(t)). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Analisaremos cada termo da expressão acima separadamente. Note que

$$(z''_m(t), -\Delta z'_m(t)) = ((z''_m(t), z'_m)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z'_m\|^2$$

e

$$a(t, z_m(t), -\Delta z'_m(t)) = -\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial z_m}{\partial x_j}\frac{\partial(\Delta z'_m)}{\partial x_j}\, dx = \int \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial z_m}{\partial x_j}\Delta z'_m + a_{ij}\Delta z_m \Delta z'_m\, dx.$$

Desde que $a_{ij} \in C^1(\overline{Q})$, pelo Teorema de Green e pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, tem-se

$$\begin{aligned} a(t, z_m(t), -\Delta z'_m(t)) &\leqslant -C\int_\Omega \Delta z_m \nabla z'_m\, dx + C\int_\Omega \Delta z_m \Delta z'_m\, dx \\ &\leqslant C|\Delta z_m|\|z'_m\| + \frac{C}{2}\frac{d}{dt}|\Delta z_m|^2 \\ &\leqslant C|\Delta z_m|^2 + C\|z'_m\|^2 + \frac{C}{2}\frac{d}{dt}|\Delta z_m|^2. \end{aligned}$$

Ademais, pelo Lema 2.2 temos

$$\begin{aligned}\left(b_i\frac{\partial z'_m(t)}{\partial x_i}, -\Delta z'_m(t)\right) &= -\int_\Omega b_i \Delta z'_m \frac{\partial z'_m}{\partial x_i}\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\frac{\partial z'_m}{\partial x_i}\frac{\partial z'_m}{\partial x_i}\,dx\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial b_i}{\partial x_j}\right\|_{L^\infty}\|z'_m\|^2\\
&= C\|z'_m\|^2.\end{aligned}$$

Seguindo a mesma estratégia e levando em consideração as condições (2.21), também obtemos que

$$\begin{aligned}(Pz_m(t), -\Delta z'_m(t)) &= \int_\Omega c z'_m(-\Delta z'_m) + d_i\frac{\partial z_m}{\partial x_i}(-\Delta z'_m) + f z_m(-\Delta z'_m)\,dx\\
&= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(c z'_m)\frac{\partial z'_m}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(d_i\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\right)\frac{\partial z'_m}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(f z_m)\frac{\partial z'_m}{\partial x_j}\,dx\\
&= \int_\Omega \frac{\partial c}{\partial x_i} z'_m \frac{\partial z'_m}{\partial x_j} + c\frac{\partial z'_m}{\partial x_i}\frac{\partial z'_m}{\partial x_j} + \frac{\partial d_i}{\partial x_i}\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\frac{\partial z'_m}{\partial x_j}\,dx\\
&\quad + \int_\Omega d_i\frac{\partial^2 z_m}{\partial x_i^2}\frac{\partial z'_m}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} z_m \frac{\partial z'_m}{\partial x_j} + f\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\frac{\partial z'_m}{\partial x_j}\,dx\\
&\leqslant C|z'_m|^2 + C\|z'_m\|^2 + C\|z_m\|^2 + C|\Delta z_m|^2\end{aligned}$$

e

$$(h, -\Delta z'_m(t)) = -\int_\Omega h\Delta z'_m\,dx = \int_\Omega \lambda_1 h\, z'_m\,dx \leqslant \frac{|h|^2}{2} + \frac{\lambda_1|z'_m|^2}{2}.$$

Daí, pelas Estimativas I e II, existe uma constante C tal que em (2.39) podemos escrever

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z'_m\|^2 + \frac{M}{2}\frac{d}{dt}|\Delta z_m|^2 \leqslant C|\Delta z_m|^2 + \frac{|h|^2}{2} + C.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t temos

$$\frac{1}{2}\|z'_m(t)\|^2 + \frac{C}{2}|\Delta z_m(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|z^1_m\|^2 + \frac{C}{2}|\Delta z_m(0)|^2 + C + C\int_0^t |\Delta z_m|^2\,ds + \int_0^T \frac{|h|^2}{2}\,ds.$$

De modo análogo ao realizado na Afirmação 2.1 da Estimativa II, é possível mostrar que $\Delta z_m(0)$ é limitado. Logo, pelo Lema de Gronwall, podemos afirmar que

$$(z_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)).$$

Da combinação das pertinências obtidas em cada uma das Estimativas à priori, concluímos que

$$(z_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \tag{2.40}$$

$$(z'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \tag{2.41}$$

$$(z''_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.42}$$

Passagem ao limite

Segue de (2.40) - (2.42) e do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki que existe uma subsequência (que ainda denotaremos da mesma forma) tal que

$$z_m \overset{*}{\rightharpoonup} z \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q) \tag{2.43}$$

$$z'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q) \tag{2.44}$$

$$z''_m \overset{*}{\rightharpoonup} \beta \quad \text{em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q) \tag{2.45}$$

Sabemos de (2.43) que $z_m \to z$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e, sendo o operador derivada contínuo em $\mathcal{D}'$, temos $z'_m \to z'$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e $z''_m \to z''$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Pela unicidade do limite é possível concluir que $\alpha = z'$ e $\beta = z''$.

Agora, considere em $(\mathrm{PA})_1$, $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$, e integremos de 0 a T para obter

$$\int_0^T (z''_m,\xi)\,dt + \int_0^T a(t,z_m,\xi)dt + \int_0^T \left(b_i\frac{\partial z'_m}{\partial x_i},\xi\right)dt + \int_0^T (Pz_m,\xi)\,dt = \int_0^T (h,\xi)\,dt \tag{2.46}$$

Pelas convergências (2.43) - (2.45), quando $m \longrightarrow \infty$, temos

$$\int_0^T (z''_m,\xi)\ dt \longrightarrow \int_0^T (z'',\xi)\ dt,$$

$$\begin{aligned}\int_0^T a(t,z_m,\xi)\,dt = -\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z_m}{\partial x_j}\right)\xi\,dxdt &\longrightarrow -\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)\xi\,dxdt\\ &= \int_0^T\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial \xi}{\partial x_j}\,dxdt,\end{aligned}$$

$$\int_0^T \left(b_i\frac{\partial z'_m}{\partial x_i},\xi\right)\ dt \longrightarrow \int_0^T \left(b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i},\xi\right)\ dt,$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^T (Pz_m,\xi)\,dt = \int_0^T\int_\Omega \left(cz'_m + d_i\frac{\partial z_m}{\partial x_i} + fz_m\right)\xi\,dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_\Omega \left(cz' + d_i\frac{\partial z}{\partial x_i} + fz\right)\xi\,dxdt\\ &= \int_0^T (Pz,\xi)\,dt.\end{aligned}$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.46) e usando as convergências anteriores, obtemos

$$\int_0^T (z'',\xi)\,dt + \int_0^T a(t,z,\xi)dt + \int_0^T \left(b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i},\xi\right)dt + \int_0^T (Pz,\xi)\,dt + \int_0^T (h,\xi)\,dt. \tag{2.47}$$

Sendo $\beta(x,t) = \xi(x)\theta(t) \in \mathcal{D}(Q)$, temos

$$\int_0^T\int_\Omega z''\beta - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)\beta + b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i}\beta - \left(cz' + d_i\frac{\partial z}{\partial x_i} + fz\right)\beta\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega h\beta\,dxdt,$$

ou seja,

$$\left\langle z'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) + b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i} + cz' + d_i\frac{\partial z}{\partial x_i} + fz - h\,,\beta\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0$$

Pelas convergências (2.43) - (2.45), pelas condições (2.21) e pelas Observações 1.7 e 1.8, temos que

$$z, z', z'', \frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z'}{\partial x_i}, a_{ij}, b_i, c, d_i, f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Assim, pelo Lema 1.3, podemos concluir que

$$z'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) + b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i} + cz' + d_i\frac{\partial z}{\partial x_i} + fz = h \quad q.s. \text{ em } \; Q.$$

Unicidade

Suponhamos que z_1 e z_2 sejam soluções de (2.25) nas condições do Teorema 2.1. Então $\mathbf{w} = z_1 - z_2$ satisfaz

$$\begin{cases} \mathbf{w}'' + A(t)z_1 - A(t)z_2 + b_i\dfrac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x_i} + c\mathbf{w}' + d_i\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} + f\mathbf{w} = 0 \quad q.s. \text{ em } \; Q, \\ \mathbf{w} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \mathbf{w}(\cdot,0) = 0, \; \mathbf{w}'(\cdot,0) = 0 \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{2.48}$$

e

$$\mathbf{w} \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)), \quad \mathbf{w}' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad e \quad \mathbf{w}'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Mostremos que $\mathbf{w} = 0$. Com efeito, multiplicando $(2.48)_1$ por $\mathbf{w}'$ e integrando em Ω, obtemos

$$(\mathbf{w}'', \mathbf{w}') + (A(t)z_1 - A(t)z_2, \mathbf{w}') + \left(b_i\frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x_i}, \mathbf{w}'\right) + (c\mathbf{w}', \mathbf{w}') + \left(d_i\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i}, \mathbf{w}'\right) + (f\mathbf{w}, \mathbf{w}') = 0. \tag{2.49}$$

Note que

$$\begin{aligned} (A(t)z_1 - A(t)z_2, \mathbf{w}') &= a(t, z_1, \mathbf{w}') - a(t, z_2, \mathbf{w}') \\ &= \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial z_1}{\partial x_j}\frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x_i}dx - \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial z_2}{\partial x_j}\frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x_i}dx \\ &= \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial x_j}\frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x_i}dx \\ &= a(t, \mathbf{w}, \mathbf{w}'). \end{aligned}$$

Logo, em (2.49) temos

$$(\mathbf{w}'', \mathbf{w}') + a(t, \mathbf{w}, \mathbf{w}') + \left(b_i\frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x_i}, \mathbf{w}'\right) + (c\mathbf{w}', \mathbf{w}') + \left(d_i\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i}, \mathbf{w}'\right) + (f\mathbf{w}, \mathbf{w}') = 0.$$

Integrando a igualdade acima de 0 a t e prosseguindo de forma análoga ao realizado na Estimativa I, obtemos

$$\frac{1}{2}|\mathbf{w}'(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|\mathbf{w}(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}|\mathbf{w}'(0)|^2 + \frac{1}{2}a(0,\mathbf{w}(0),\mathbf{w}(0)) + C\int_0^t \|\mathbf{w}(s)\|^2 ds + C\int_0^t |\mathbf{w}'(s)|^2 ds,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}|\mathbf{w}'(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|\mathbf{w}(t)\|^2 \leqslant C\int_0^t |\mathbf{w}'(s)|^2 + \|\mathbf{w}(s)\|^2 \,\mathrm{d}s.$$

Aplicando o Lema de Gronwall concluímos que

$$\frac{1}{2}|\mathbf{w}'(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|\mathbf{w}(t)\|^2 \leqslant 0.$$

Portanto, $\mathbf{w}(t) = 0$, ou seja, $z_1 = z_2$.

Além disso, desde que $z \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ e $z' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos pelo Teorema 1.8, que faz sentido considerar os dados iniciais no tempo $t = 0$, ou seja, $z(0)$ e $z'(0)$. ∎

2.3 Solução fraca

O objetivo nesta seção é considerar o problema (2.25) com dados iniciais z^0, z^1 e h menos regulares.

Definição 2.2 (Solução fraca) *Uma função $z : Q \to \mathbb{R}$ será chamada de solução fraca do problema (2.25) se z pertencente a classe*

$$z \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad z' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

satisfaz a equação

$$\begin{aligned}&-\int_0^T (z',\xi')dt + \int_0^T a(t,z,\xi)dt + \int_0^T \left\langle b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i},\xi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T (Pz,\xi)dt \\ &= \int_0^T (h,\xi)dt \quad \forall \xi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ \xi' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \xi(\cdot,0) = \xi(\cdot,T) = 0,\end{aligned} \tag{2.50}$$

e as condições iniciais

$$z(\cdot,0) = z^0(\cdot) \quad e \quad z'(\cdot,0) = z^1(\cdot).$$

Teorema 2.2 (Existência e Unicidade) *Sejam*

$$z^0 \in H_0^1(\Omega), \quad z^1 \in L^2(\Omega), \quad h \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Então

(i) Existe uma única solução fraca z do problema (2.25) pertencente a classe

$$z \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)).$$

(ii) A aplicação linear

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega)) &\longrightarrow C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \\ \{z^0, z^1, h\} &\longmapsto z\,, \end{aligned}$$

em que z é obtido em (i), é contínua.

(iii) Além disso, a energia

$$E(t) = \frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t, z(t), z(t))$$

associada ao problema (2.25), com z obtida em (i), satisfaz

$$\begin{aligned} E(t) = E(0) &+ \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,z,z)\;ds + \int_0^t (h,z')\;ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right) ds - \int_0^t (Pz, z')\;ds, \end{aligned}$$

onde Pz foi estabelecido na Definição 2.1.

Prova. Desde que os espaços $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ são densos, respectivamente, nos espaços $H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)$ e $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, existem sequências $(z_\mu^0) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $(z_\mu^1) \subset H_0^1(\Omega)$ e $(h_\mu) \subset W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ tais que

$$z_\mu^0 \longrightarrow z^0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \quad z_\mu^1 \longrightarrow z^1 \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad h_\mu \longrightarrow h \text{ em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.51}$$

Denotemos por z_μ a solução obtida no Teorema 2.2 com dados z_μ^0, z_μ^1, h_μ. Como $z_\mu \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), z_\mu' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $z_\mu'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, pelo Teorema 1.8, tem-se

$$z_\mu \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Desenvolvendo $(Rz_\mu, z_\mu') = (h, z_\mu')$, usando o Lema 2.2 e

$$a(t,z,z') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,z,z) - \frac{1}{2}a'(t,z,z),$$

obtemos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z_\mu'|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,z_\mu,z_\mu) - \frac{1}{2}a'(t,z_\mu,z_\mu) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}z_\mu', z_\mu'\right) + (Pz_\mu, z_\mu') = (h, z_\mu').$$

Integrando a igualdade acima de 0 a t, temos que

$$\begin{aligned}E_\mu(t) = E_\mu(0) + \frac{1}{2}\int_0^t a'(s, z_\mu, z_\mu)ds + \int_0^t (h_\mu, z'_\mu)ds \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z'_\mu, z'_\mu\right) ds - \int_0^t (P z_\mu, z'_\mu)ds,\end{aligned} \tag{2.52}$$

com

$$E_\mu(t) = \frac{1}{2}|z'_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t, z_\mu(t), z_\mu(t)).$$

Usando as desigualdades (2.28), (2.29) e (2.30) obtidas na Estimativa I do Teorema 2.1 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$E_\mu(t) \leqslant E_\mu(0) + C\int_0^t \|z_\mu\|^2\, ds + \int_0^t |h_\mu||z'_\mu|\, ds + C\int_0^t |z'_\mu|^2\, ds.$$

Além disso, da coercividade de $a(t,\cdot,\cdot)$, segue que

$$E_\mu(t) \leqslant E_\mu(0) + \int_0^t |h_\mu||z'_\mu|\, ds + C\int_0^t E_\mu(s)\, ds.$$

Desde que $|z'_\mu|^2 \leqslant 2E_\mu(t)$ implica que $|z'_\mu| \leqslant \sqrt{2}E_\mu^{\frac{1}{2}}(t)$, temos

$$E_\mu(t) \leqslant E_\mu(0) + \int_0^t \sqrt{2}|h_\mu| E_\mu^{\frac{1}{2}}(s)\, ds + C\int_0^t E_\mu(s)\, ds.$$

Usando o Teorema 1.13, obtemos

$$\begin{aligned}E_\mu(t) &\leqslant \left\{ E_\mu^{\frac{1}{2}}(0)\, e^{\frac{1}{2}\int_0^t C\, ds} + \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{2}|h_\mu| e^{\frac{1}{2}\int_s^t C\, dr} ds \right\}^2 \\ &\leqslant \left\{ E_\mu^{\frac{1}{2}}(0)\, e^{\frac{1}{2}CT} + \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{2}|h_\mu| e^{\frac{1}{2}CT} ds \right\}^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}E_\mu(t) &\leqslant \left[E_\mu^{\frac{1}{2}}(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t |h_\mu|\, ds \right]^2 e^{CT} \\ &\leqslant \left[E_\mu(0) + \frac{1}{2}\left(\int_0^t |h_\mu|\, ds\right)^2 + 2E_\mu^{\frac{1}{2}}(0)\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t |h_\mu|\, ds \right] e^{CT}\end{aligned}$$

Usando o fato de que $2ab \leqslant a^2 + b^2$ na última parcela do lado direito da desigualdade acima, concluimos que

$$E_\mu(t) \leqslant \left[2\, E_\mu(0) + \left(\int_0^T |h_\mu|\, dt\right)^2 \right] e^{CT}, \tag{2.53}$$

em que C é uma constante que independe de μ ou t.

Repetindo os mesmos argumentos usados para obter (2.53) com $z_\mu - z_\sigma$ ao invés de z_μ, obtemos

$$\begin{aligned}&|z'_\mu(t) - z'_\sigma(t)|^2 + a(t, z_\mu(t) - z_\sigma(t), z_\mu(t) - z_\sigma(t))\\&\leqslant 2\left[|z^1_\mu - z^1_\sigma|^2 + a(0, z^0_\mu - z^0_\sigma, z^0_\mu - z^0_\sigma) + \left(\int_0^T |h_\mu - h_\sigma| dt\right)^2\right] e^{CT}\end{aligned} \tag{2.54}$$

Novamente pela coercividade de $a(t, \cdot, \cdot)$, e passando ao limite em (2.54) quando $\mu, \sigma \to \infty$, tem-se

$$|z'_\mu(t) - z'_\sigma(t)|^2 + \alpha \left\| z_\mu(t) - z_\sigma(t)\right\|^2 \longrightarrow 0, \quad \forall\, t \in [0, T],$$

pois (2.51) implica que

$$|z^1_\mu - z^1_\sigma|^2 \longrightarrow 0, \quad a(0, z^0_\mu - z^0_\sigma, z^0_\mu - z^0_\sigma) \longrightarrow 0 \quad e \quad \left(\int_0^T |h_\mu - h_\sigma| dt\right)^2 \longrightarrow 0.$$

Consequentemente,

$$|z'_\mu(t) - z'_\sigma(t)|^2 \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega) \quad e \quad \|z_\mu(t) - z_\sigma(t)\|^2 \longrightarrow 0 \text{ em } H^1_0(\Omega),$$

ou seja, (z'_μ) e (z_μ) são sequências de Cauchy em $C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $C([0, T]; H^1_0(\Omega))$ respectivamente. Desde que esses são espaços de Banach, existe uma função $z \in C([0, T]; H^1_0(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ tal que

$$\begin{aligned}z_\mu &\longrightarrow z \text{ em } C([0, T]; H^1_0(\Omega))\\ z'_\mu &\longrightarrow z' \text{ em } C([0, T]; L^2(\Omega)).\end{aligned} \tag{2.55}$$

Agora, escrevendo z_μ em vez de z em (2.50) e passando ao limite quando $\mu \longrightarrow \infty$, podemos afirmar, considerando as convergências em (2.55), que

- $\displaystyle\int_0^T (z'_\mu, \xi')\, dt \longrightarrow \int_0^T (z', \xi')\, dt$
- $\displaystyle\int_0^T a(t, z_\mu, \xi)\, dt = \int_0^T a_{ij} \frac{\partial z_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\, dt \longrightarrow \int_0^T a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\, dt = \int_0^T a(t, z, \xi)\, dt$

Pelo Teorema de Green, temos ainda que

- $\displaystyle\int_0^T \left(b_i \frac{\partial z'_\mu}{\partial x_i}, \xi\right)\, dt = \int_0^T \int_\Omega b_i \frac{\partial z'_\mu}{\partial x_i}\, \xi\, dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x_i} b_i\right) z'_\mu\, dx\, dt$

$$\longrightarrow -\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x_i} b_i\right) z'\, dx\, dt = \int_0^T \left(b_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}, \xi\right)\, dt$$

- $$\int_0^T (Pz_\mu, \xi)\, dt = \int_0^T \int_\Omega \left(cz'_\mu + d_i \frac{\partial z_\mu}{\partial x_i} + f z_\mu \right) \xi \, dx\, dt$$
$$\longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \left(cz' + d_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + f z \right) \xi \, dx\, dt = \int_0^T (Pz, \xi)\, dt$$

- $$\int_0^T (h_\mu, \xi)\, dt \longrightarrow \int_0^T (h, \xi)\, dt.$$

Assim, passando ao limite em (2.50) quando $\mu \to \infty$, pelas convergências acima, podemos afirmar que z satisfaz

$$-\int_0^T (z', \xi')dt + \int_0^T a(t, z, \xi)dt + \int_0^T \left\langle b_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}, \xi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T (Pz, \xi)dt$$
$$= \int_0^T (h, \xi)dt, \quad \forall \xi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),\ \xi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),\ \xi(\cdot, 0) = \xi(\cdot, T) = 0.$$

Além disso, desde que $z_\mu(\cdot, 0) = z^0_\mu(\cdot)$ e $z'_\mu(\cdot, 0) = z^1_\mu(\cdot)$, e por (2.55) , $z_\mu(\cdot, 0) \longrightarrow z(\cdot, 0)$ em $H_0^1(\Omega)$ e $z'_\mu(\cdot, 0) \longrightarrow z'(\cdot, 0)$ em $L^2(\Omega)$, segue, pela unicidade do limite, que

$$z(\cdot, 0) = z^0(\cdot) \quad e \quad z'(\cdot, 0) = z^1(\cdot).$$

Portanto, obtemos a existência no item (i). Sua unicidade é provada de modo análogo ao realizado no Teorema 2.1.

Mostremos agora o item (ii). Não é difícil ver que dado $l : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)) \longrightarrow C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ com $l(z^0, z^1, h) = z$, usando as convergências (2.51) e (2.55), obtemos $\{z^0_\mu, z^1_\mu, h_\mu\} \longrightarrow \{z^0, z^1, h\}$ em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$, então $l(z^0_\mu, z^1_\mu, h_\mu) \longrightarrow l(z^0, z^1, h)$ em $C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$, ou seja, $z_\mu \longrightarrow z$ em $C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$.

Já para o item (iii), observe que como $z_\mu(t) \longrightarrow z(t)$ em $H_0^1(\Omega)$, temos pela continuidade de $a(t, \cdot, \cdot)$, que

$$|a(t, z_\mu, z_\mu) - a(t, z, z)| = |a(t, z_\mu - z, z_\mu - z)| \leqslant C \left\| z_\mu - z \right\|^2 \longrightarrow 0,$$

e desde que $z'_\mu(t) \longrightarrow z'(t)$ em $L^2(\Omega)$, obtemos

- $$E_\mu(t) \longrightarrow \frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t, z(t), z(t)).$$

De modo análogo, pelas convergências em (2.51),

- $$E_\mu(0) \longrightarrow \frac{1}{2}|z^1|^2 + \frac{1}{2}a(0, z^0, z^0).$$

Além disso, como $a_{ij} \in C^1(\overline{Q})$, vale

- $$\begin{aligned} |a'(s, z_\mu, z_\mu) - a'(s, z, z)| &= |a'(s, z_\mu - z, z_\mu - z)| \\ &\leqslant \int_\Omega |a'_{ij}| \left| \frac{\partial(z_\mu - z)}{\partial x_i} \frac{\partial(z_\mu - z)}{\partial x_j} \right| dx \\ &\leqslant C \|z_\mu - z\|^2 \to 0. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

- $$\begin{aligned} \left|(h_\mu, z'_\mu) - (h, z')\right| &= |(h_\mu, z'_\mu) - (h, z'_\mu) + (h, z'_\mu) - (h, z')| \\ &\leqslant |(h_\mu - h, z'_\mu)| + |(h, z'_\mu - z')| \\ &\leqslant |h_\mu - h||z'_\mu| + |h||z'_\mu - z'| \to 0; \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z'_\mu, z'_\mu\right) - \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right) &= \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z'_\mu, z'_\mu\right) - \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'_\mu\right) + \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z\mu'\right) - \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right) \\ &= \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} (z'_\mu - z), z'_\mu\right) + \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z\mu' - z'\right) \\ &\leqslant \left\|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty} |z'_\mu - z'||z'_\mu| + \left\|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty} |z'||z'_\mu - z'| \to 0; \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (Pz_\mu, z'_\mu) - (Pz, z') &= (Pz_\mu, z'_\mu) - (Pz, z'_\mu) + (Pz, z'_\mu) - (Pz, z') \\ &= (P(z_\mu - z), z'_\mu) + (Pz, z'_\mu - z) \\ &\leqslant |P(z_\mu - z)||z'_\mu| + |Pz||z'_\mu - z|. \end{aligned}$$

Analisando os termos do lado direito da desigualdade acima, é possível notar, pelas condições (2.21) e pelas convergências (2.55), que

$$|P(z_\mu - z)| \leqslant \|c\|_{L^\infty}|z'_\mu - z'| + \|d_i\|_{L^\infty}\left|\frac{\partial(z_\mu - z)}{\partial x_i}\right| + \|f\|_{L^\infty}|z_\mu - z| \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad |z'_\mu| < \infty,$$

e ainda que,

$$|Pz| \leqslant \|c\|_{L^\infty}|z'| + \|d_i\|_{L^\infty}\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| + \|f\|_{L^\infty}|z| < \infty \quad \text{e} \quad |z'_\mu - z| \longrightarrow 0.$$

Assim, podemos escrever que

- $$(Pz_\mu, z'_\mu) - (Pz, z') \longrightarrow 0.$$

Portanto, passando ao limite em (2.52) quando $\mu \longrightarrow \infty$, e considerando que as convergências acima são uniformes em relação a t, temos que z satisfaz

$$E(t) = E(0) + \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,z,z)ds + \int_0^t (h,z')ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right) ds - \int_0^t (Pz, z')ds.$$

∎

Agora vamos considerar um problema que será usado no estudo da regularidade para a solução w do problema (2.12). Este é,

$$\begin{cases} Rz = h' \text{ em } Q, \\ z = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = 0, \; z'(\cdot,0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.56}$$

Podemos notar que se $h' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ então a solução fraca z do problema acima tem a regularidade (i) do Teorema 2.2.

Teorema 2.3 *Sejam*

$$h \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad e \quad h' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad com \quad h(\cdot,0) = 0.$$

Então a solução z do Problema (2.56) satisfaz

$$\|z(t)\| + |z'(t) - h(t)| \leqslant C\int_0^T \|h\|\,dt, \quad \forall t \in [0,T],$$

em que C é uma constante independente de z e h.

Prova. Desde que $z'(\cdot,0) = 0$ e $z(\cdot,0) = 0$, temos $E(0) = 0$, e daí, pela identidade (iii) do Teorema 2.2, segue que

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,z,z)ds + \int_0^t (h,z')ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right) ds - \int_0^t (Pz,z')ds. \tag{2.57}$$

onde Pz foi estabelecido na Definição 2.1.

Por integração por partes em $[0,t]$ e notando que $h(\cdot,0) = 0$ temos

$$\int_0^t (h',z')\,ds = (h(s),z'(s))\Big|_0^t - \int_0^t (h',z'')\,ds = (h(t),z'(t)) - \int_0^t (h',z'')\,ds.$$

Recorde que (2.18) nos fornece que

$$z'' = h' - Az - b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i} - Pz.$$

Assim, podemos reescrever a última igualdade na forma

$$\int_0^t (h', z')\, ds = (h(t), z'(t)) - \int_0^t (h, h')\, ds + \int_0^t (h, Az)\, ds$$
$$+ \int_0^t \left(h, b_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}\right) ds + \int_0^t (h, Pz)\, ds,$$

ou seja,

$$\int_0^t (h', z')\, ds = (h(t), z'(t)) - \frac{1}{2}|h(t)|^2 + \int_0^t (h, Az)\, ds$$
$$+ \int_0^t \left(h, b_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}\right) ds + \int_0^t (h, Pz)\, ds. \tag{2.58}$$

Analisando o quarto termo da igualdade acima temos, pelo Teorema de Green, que

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(h, b_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}\right) ds &= \int_0^t \int_\Omega h b_i \frac{\partial z'}{\partial x_i}\, dx\, ds \\ &= -\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial (h b_i)}{\partial x_i} z'\, dx\, ds \\ &= -\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} b_i + h \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right) z'\, dx\, ds. \\ &= -\int_0^t \left(h, \frac{\partial b_i}{\partial x_i} z'\right) ds - \int_0^t \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}, b_i z'\right) ds. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Combinando (2.57), (2.58) e (2.59), obtemos

$$\begin{aligned} E(t) = {} & \frac{1}{2}\int_0^t a'(s, z, z)\, ds + (h(t), z'(t)) - \frac{1}{2}|h(t)|^2 + \int_0^t (h, Az)\, ds \\ & - \int_0^t \left(h, \frac{\partial b_i}{\partial x_i} z'\right) ds - \int_0^t \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}, b_i z'\right) ds + \int_0^t (h, Pz)\, ds \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right) ds - \int_0^t (Pz, z')\, ds. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Desde que

$$\frac{1}{2}|z'(t)|^2 - (h(t), z'(t)) + \frac{1}{2}|h(t)|^2 = \frac{1}{2}|z'(t) - h(t)|^2,$$

podemos reescrever (2.60) na forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|z'(t) - h(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t, z(t), z(t)) = {} & \frac{1}{2}\int_0^t a'(s, z, z)\, ds + \int_0^t (h, Az)\, ds - \int_0^t \left(h, \frac{\partial b_i}{\partial x_i} z'\right) ds \\ & - \int_0^t \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}, b_i z'\right) ds + \int_0^t (h, Pz)\, ds \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right) ds - \int_0^t (Pz, z')\, ds. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Fazendo $\theta = z' - h$ em (2.61) e substituindo z' por $\theta + h$ nesta igualdade, nós obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,z(t),z(t)) = &\frac{1}{2}\int_0^t a'(s,z,z)\,ds + \int_0^t (h,Az)\,ds - \int_0^t\int_\Omega h\frac{\partial b_i}{\partial x_i}(\theta+h)\,dx\,ds\\ &+ \int_0^t\int_\Omega -\frac{\partial h}{\partial x_i}b_i(\theta+h) + hc(\theta+h) + hdi\frac{\partial z}{\partial x_i} + hfz\,dx\,ds\\ &+ \int_0^t\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}(\theta^2+2h\theta+h^2) - c(\theta^2+2h\theta+h^2)\,dx\,ds\\ &+ \int_0^t\int_\Omega -d_i\frac{\partial z}{\partial x_i}(\theta+h) - fz(\theta+h)\,dx\,ds.\end{aligned}$$

Desenvolvendo as expressões da igualdade acima e simplificando-a, podemos escrever que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,z(t),z(t)) = &\frac{1}{2}\int_0^t a'(s,z,z)\,ds + \int_0^t (h,Az)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\theta,\theta\right)\,ds\\ &- \int_0^t \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}b_i,\theta\right)\,ds - \int_0^t (c\theta,\theta)ds - \int_0^t (ch,\theta)\,ds\\ &- \int_0^t \left(d_i\frac{\partial z}{\partial x_i},\theta\right)\,ds - \int_0^t (fz,\theta)\,ds\\ &+ \int_0^t -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}h,h\right) - \left(b_i\frac{\partial h}{\partial x_i},h\right)\,ds.\end{aligned} \tag{2.62}$$

Pelo Lema 2.2 a última parcela da expressão (2.62) se anula. Agora, utilizando as condições (2.21), conseguimos limitar cada termo do seu lado direito conforme a seguir.

- $\displaystyle \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,z,z)\,ds \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |a'_{ij}|\left|\frac{\partial z}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|\,dx\,ds \leqslant \frac{C}{2}\int_0^t |\nabla z|^2\,ds \leqslant C\int_0^t \|z\|^2\,ds;$
- $\displaystyle \int_0^t (h,Az)\,ds = \int_0^t a(t,z,h)\,ds \leqslant C\int_0^t |\nabla z||\nabla h|\,ds \leqslant C\int_0^t \|z\|\|h\|\,ds;$
- $\displaystyle \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\theta,\theta\right)\,ds \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right||\theta|^2\,dx\,ds \leqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty}\int_0^t |\theta|^2\,ds \leqslant C\int_0^t |\theta|^2\,ds;$
- $\displaystyle -\int_0^t \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}b_i,\theta\right)\,ds \leqslant \|b_i\|_{L^\infty}\int_0^t |\nabla h||\theta|\,ds \leqslant C\int_0^t \|h\||\theta|\,ds;$
- $\displaystyle -\int_0^t (c\theta,\theta)\,ds \leqslant \int_0^t\int_\Omega |c||\theta|^2\,dx\,ds \leqslant \|c\|_{L^\infty}\int_0^t |\theta|^2\,ds \leqslant C\int_0^t |\theta|^2\,ds;$
- $\displaystyle -\int_0^t (ch,\theta)\,ds \leqslant \int_0^t\int_\Omega |c||h||\theta|\,dx\,ds \leqslant \|c\|_{L^\infty}\int_0^t |h||\theta|\,ds \leqslant C\int_0^t \|h\||\theta|\,ds.$

Seguindo a mesma estratégia e utilizando a desigualdade de Young, temos

- $\displaystyle -\int_0^t \left(d_i\frac{\partial z}{\partial x_i},\theta\right)\,ds \leqslant \|d_i\|_{L^\infty}\int_0^t \|z\||\theta|\,ds \leqslant C\int_0^t \|z\|^2 + |\theta|^2\,ds;$

- $-\int_0^t (fz, \theta)\, ds \leqslant \|f\|_{L^\infty} \int_0^t \|z\| |\theta|\, ds \leqslant C \int_0^t \|z\|^2 + |\theta|^2\, ds.$

Pelas estimativas acima e pela coercividade de $a(t,\cdot,\cdot)$, temos, em (2.62), que

$$\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}\|z(t)\|^2 \leqslant C \int_0^t \|h\|(\|z\| + |\theta|)\, ds + C \int_0^t \|z\|^2 + |\theta|^2 ds, \tag{2.63}$$

em que C é uma constante que independe de z e h.

Multiplicando a igualdade acima por 2 e usando o fato de que

$$|\theta(t)| + \|z(t)\| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{|\theta(t)|^2 + \|z(t)\|^2}, \tag{2.64}$$

obtemos

$$|\theta(t)|^2 + \|z(t)\|^2 \leqslant C \int_0^t \|h\| \sqrt{|\theta|^2 + \|z\|^2}\, ds + C \int_0^t \|z\|^2 + |\theta|^2 ds.$$

Aplicando o Teorema 1.13, podemos escrever que

$$\begin{aligned} |\theta(t)|^2 + \|z(t)\|^2 &\leqslant \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t C\|h\| \left(e^{\frac{1}{2}\int_s^t C\, dr} \right) ds \right\}^2 \\ &\leqslant \frac{C^2}{4} \left(\int_0^t \|h\|\, ds \right)^2 e^{CT}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\theta(t)|^2 + \|z(t)\|^2 \leqslant C \left(\int_0^T \|h\|\, dt \right)^2.$$

Extraindo a raiz de ambos os lados, usando (2.64) e substituindo θ por $z' - h$, concluímos que

$$\|z(t)\| + |z'(t) - h(t)| \leqslant C \int_0^T \|h\|\, dt.$$

■

Observação 2.3 *Sejam as funções definidas por*

$$\begin{array}{lll} \breve{a}_{ij}(x,t) = a_{ij}(x, T-t), & \breve{A}(t) = A(T-t), & \breve{b}_i(x,t) = -b_i(x, T-t), \\ \breve{c}(x,t) = -c(x, T-t), & \breve{d}_i(x,t) = d_i(x, T-t), & \breve{f}(x,t) = f(x, T-t), \\ \breve{h}(x,t) = h(x, T-t), & \breve{z}(x,t) = z(x, T-t) & \end{array}$$

e considere o operador

$$\breve{R}\breve{z} = \breve{z}'' + \breve{A}\breve{z} + \breve{b}_i \frac{\partial \breve{z}'}{\partial x_i} + \breve{c}\breve{z}' + \breve{d}_i \frac{\partial \breve{z}}{\partial x_i} + \breve{f}\breve{z}.$$

Nessas condições, é possível observar que os coeficientes a_{ij}, b_i, c, d_i e f satisfazem (2.21) se, e somente se, os coeficientes transformados $\breve{a}_{ij}, \breve{b}_i, \breve{c}, \breve{d}_i$ e $\breve{f}$ também satisfazem.

Com efeito, já sabemos que os coeficientes a_{ij}, b_i, c, d_i e f verificam (2.21). Além disso, considerando que a_{ij} é simétrico, segue que

$$\breve{a}_{ij}(x,t) = a_{ij}(x,T-t) = a_{ji}(x,T-t) = \breve{a}_{ji}(x,t),$$

o que garante a simetria de $\breve{a}_{ij}(x,t)$. Ademais, existe $\alpha > 0$ tal que

$$a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \ \ e \ \ (x,t) \in Q.$$

Desde que a função $\varphi(t) = T - t$ mapeia o intervalo $[0,T]$ para si mesmo, temos que $(x, T-t) \in Q$. Logo,

$$\breve{a}_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j = a_{ij}(x,T-t)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2,$$

ou seja, $\breve{a}_{ij}$ é uniformemente coercivo.

Agora, seja $\phi(x,t) = (x, T-t)$. Considerando que $a_{ij} \in C^1(\overline{Q})$ e que podemos escrever $\breve{a}_{ij}(x,t) = (a_{ij} \circ \phi)(x,t)$ como composição de funções contínuas, e de forma análoga suas primeiras derivadas, temos que $\breve{a}_{ij} \in C^1(\overline{Q})$. Ademais, note que

$$\breve{a}'_{ij}(x,t) = [a_{ij}(x,T-t)]' = a'_{ij}(x,T-t)(T-t)' = (-a'_{ij} \circ \phi)(x,t).$$

e daí,

$$\breve{a}''_{ij}(x,t) = [\breve{a}'_{ij}(x,T-t)]' = [-a'_{ij}(x,T-t)]' = a''_{ij}(x,T-t)(T-t)' = (-a''_{ij} \circ \phi)(x,t).$$

Dessa forma, se $a''_{ij} \in L^\infty(Q)$ e a composição acima preserva a propriedade de limitação essencial, temos que $\breve{a}''_{ij} \in L^\infty(Q)$. Seguindo o mesmo raciocínio mostramos que $\breve{b}_i, \breve{c}, \breve{d}_i$, $\breve{f} \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega))$ e que $\dfrac{\partial b_i}{\partial x_i} \in L^\infty(Q)$. A recíproca é feita de maneira análoga.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} \breve{R}\breve{z} = \breve{h} \ \text{ em } Q, \\ \breve{z} = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \breve{z}(\cdot,T) = z^0(\cdot),\ \breve{z}'(\cdot,T) = -z^1(\cdot) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.65}$$

Para este, podemos definir, de maneira análoga ao problema (2.25), uma solução fraca.

Observação 2.4 *z é uma solução fraca do problema (2.25) se, e somente se, $\breve{z}$ é uma solução fraca do problema (2.65).*

De fato, suponhamos que z é uma solução fraca do problema (2.25), ou seja, consideramos z satisfazendo a Definição 2.2. Assim, sabemos que existe uma constante C tal que

$$\|z\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} = \sup_{t\in[0,T]} ess\|z\,(t)\,\| \leqslant C \qquad e \qquad \|z'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{t\in[0,T]} ess|z'(t)| \leqslant C.$$

Desde que $\varphi(t) = T - t$ *mapeia* $[0, T]$ *para si mesmo, tem-se*

$$\sup_{t\in[0,T]} ess\|\breve{z}\,(t)\,\| = \sup_{t\in[0,T]} ess\|z\,(T-t)\,\| \leqslant C \qquad e \qquad \sup_{t\in[0,T]} ess|\breve{z}'(t)| = \sup_{t\in[0,T]} ess|z'(T-t)| \leqslant C,$$

ou seja, $\breve{z} \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ *e* $\breve{z}' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Agora, verifiquemos que a função $\breve{z}$ *pode ser expressa também pela formulação fraca equivalente a* (2.50).

Fazendo em (2.50) *a mudança de variável* $s = T - t$, *temos* $t = T - s$ *e* $dt = -ds$. *Daí, quando* $t = 0$ *temos* $s = T$, *e quando* $t = T$, $s = 0$. *Definindo* $\breve{\xi}(x,t) = \xi(x, T-t)$, *temos*

$$\begin{aligned}
\xi'(x,t) &= -\xi'(x,T-s) = -\breve{\xi}'(x,s)\\
z'(x,t) &= -z'(x,T-s) = -\breve{z}'(x,s)\\
\frac{\partial z}{\partial x_i}(x,t) &= \frac{\partial \breve{z}}{\partial x_i}(x,s)\\
a_{ij}(x,t) &= a_{ij}(x,T-s) = \breve{a}_{ij}(x,s)\\
b_i(x,t) &= b_i(x,T-s) = -\breve{b}_i(x,s)
\end{aligned}$$

e de modo análogo os demais coeficientes. Dessa forma,

- $-\displaystyle\int_0^T (z',\xi')\,dt = -\int_T^0 (-\breve{z}',-\breve{\xi}')\,ds = -\int_0^T (\breve{z}',\breve{\xi}')\,ds;$
- $\displaystyle\int_0^T a(t,z,\xi)\,dt = -\int_T^0\int_\Omega \breve{a}_{ij}\frac{\partial \breve{z}}{\partial x_j}\frac{\partial \breve{z}}{\partial x_i}\,dx\,ds = \int_0^T \breve{a}(t,\breve{z},\breve{\xi})\,ds;$
- $\displaystyle\int_0^T \left(b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i},\xi\right)\,dt = -\int_T^0 \left(-\breve{b}_i\frac{-\partial \breve{z}'}{\partial x_i},\breve{\xi}\right)\,ds = \int_0^T \left(\breve{b}_i\frac{\partial \breve{z}'}{\partial x_i},\breve{\xi}\right)\,ds;$
- $\displaystyle\int_0^T (Pz,\xi)\,dt = -\int_T^0 \left(-\breve{c}(-\breve{z}') + \breve{d}_i\frac{\partial \breve{z}}{\partial x_i} + \breve{f}\breve{z},\breve{\xi}\right)\,ds = \int_0^T (\breve{P}\breve{z},\breve{\xi})\,ds;$
- $\displaystyle\int_0^T (h,\xi)\,dt = -\int_T^0 (\breve{h},\breve{\xi})\,ds = \int_0^T (\breve{h},\breve{\xi})\,ds.$

Isso demonstra que $\breve{z}$ *satisfaz a formulação fraca* (2.50), *como desejado. Ademais, recordando que para* $t = 0$ *tem-se* $s = T$, *podemos notar que para as condições iniciais obtemos*

$$\breve{z}(\cdot,T) = z(\cdot,T-T) = z(\cdot,0) = z^0(\cdot)$$

e

$$\breve{z}'(\cdot,T) = -z'(\cdot,T-T) = -z'(\cdot,0) = -z^1(\cdot).$$

De modo análogo mostramos a recíproca.

2.3.1 Desigualdades inversa e direta

O Método da Unicidade Hilbertiana (HUM), que será visto posteriormente, é baseado em duas expressões fundamentais denominadas Desigualdade Direta e Desigualdade Inversa. Essa seção é dedicada a provar essas desigualdades para a solução fraca do problema

$$\begin{cases} L^*z = h \ \text{ em } Q, \\ z = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z^0(\cdot),\ z'(\cdot,0) = z^1(\cdot) \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2.66}$$

em que L^*z, definido em (2.22), é o adjunto formal do operador

$$Lw = w'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij(x,t)}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + b_i(x,t)\frac{\partial w'}{\partial x_i} + \beta_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}, \tag{2.67}$$

em que a_{ij}, b_i e β_i foram definidos, respectivamente, em (2.7), (2.10) e (2.11).

Pelo Lema 2.1, os resultados de existência, unicidade e regularidade das soluções, estabelecidos nesse Capítulo 2, permanecem válidos quando substituímos o operador R por L^*.

Lema 2.4 *Existem constantes $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, com $a_0 > 0$, tais que*

(i) Para todo $(x,t) \in Q$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, vale

$$a_0\xi_i\xi_i \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant a_1\xi_i\xi_i.$$

(ii) Para todo $z \in H_0^1(\Omega)$, tem-se

$$|\nabla z|^2 \leqslant \frac{1}{a_0}a(t,z,z).$$

Prova. Desde que $a_{ij} \in C^1(\overline{Q})$ é uniformemente coercivo, existe $\alpha > 0$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2 = \alpha\langle\xi,\xi\rangle = \alpha\,\xi_i^2$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant C\sum_{i,j=1}^{n}|\xi_i||\xi_j| = C\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\right)^2.$$

Sejam $y_1 = (|\xi_1|,\ldots,|\xi_n|)$ e $y_2 = (1,\ldots,1)$. Por Cauchy-Schwarz segue que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\right)^2 = \langle y_1,y_2\rangle^2 \leqslant |y_1|^2|y_2|^2 = n\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2.$$

Daí,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant Cn\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xi_i.$$

Assim, basta tomar $a_0 = \alpha$ e $a_1 = Cn$ para obter o item (i).

Agora, considerando $\xi_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ no item (i) e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx \leqslant \frac{1}{a_0}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx,$$

ou seja,

$$|\nabla z|^2 \leqslant \frac{1}{a_0}a(t,z,z).$$

■

Conforme mostrado no Teorema 2.2, a energia do problema (2.66) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,z(t),z(t)).$$

Em particular,

$$E_0 = \frac{1}{2}|z^1|^2 + \frac{1}{2}a(0,z^0,z^0).$$

Teorema 2.4 *Seja z a solução fraca do problema* (2.66). *Então*

(i) se $h = 0$,

$$E_0e^{-C_0} \leqslant E(t) \leqslant E_0e^{C_0}, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

(ii) se $h \neq 0$,

$$E(t) \leqslant \left[2E_0 + \left(\int_0^T |h|\,dt\right)^2\right]e^{C_0}, \quad \forall t \in [0,T],$$

em que,

$$C_0 = \frac{2\left(1+\tau k_1M^2+\tau^2M^2+na_0k_1^2\right)}{a_0k_0^3}(\ell_1+\ell_2) + \frac{2\left(\sqrt{\lambda_1}M+n\right)(n\tau+\tau+k_1)}{\sqrt{a_0}\,k_0^2\sqrt{\lambda_1}}(\ell_1+\ell_2)$$

(ver notações da Seção 2.1).

Prova. (i) Derivando com respeito a t a identidade (iii) do Teorema 2.2 e supondo que $h = 0$, temos

$$E'(t) = \frac{1}{2}a'(t,z,z) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}z', z'\right) - (Pz,z'). \tag{2.68}$$

Analisemos cada termo do lado direito da equação acima. Para isso, note que

$$
\begin{aligned}
a'_{ij} &= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\delta_{ij} - (k')^2 x_i x_j}{k^2} \right]' \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{-2x_i^2 k' k'' k - 2k' + 2(k')^3 x_i^2}{k^3} \\
&= 2 \left[-\frac{k'}{k^3} - \left(\frac{k' k'' k - (k')^3}{k^3} \right) x_i^2 \right].
\end{aligned}
$$

Desse modo, podemos escrever

$$
\frac{1}{2} a'(t, z, z) = \frac{1}{2} \int_\Omega a'_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} \, dx = -\frac{k'}{k^3} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) - \left(\frac{k' k'' k - (k')^3}{k^3} \right) \left| x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|^2. \tag{2.69}
$$

Ademais, os outros termos são escritos da forma

$$
\frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z' \right) = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial b_i}{\partial x_i} (z')^2 \, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega 2n \frac{k'}{k} (z')^2 \, dx = -n \frac{k'}{k} |z'|^2 \tag{2.70}
$$

e

$$
\begin{aligned}
-(Pz, z') &= -(cz', z') - \left(d_i \frac{\partial z}{\partial x_i}, z' \right) - (fz, z') \\
&= 2n \frac{k'}{k} |z'|^2 - \left(d_i \frac{\partial z}{\partial x_i}, z' \right) - (fz, z').
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

Substituindo (2.69), (2.70) e (2.71) em (2.68), obtemos

$$
\begin{aligned}
E'(t) = &- \frac{k'}{k^3} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) - \left(\frac{k' k'' k - (k')^3}{k^3} \right) \left| x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|^2 \\
&+ n \frac{k'}{k} |z'|^2 - \left(d_i \frac{\partial z}{\partial x_i}, z' \right) - (fz, z').
\end{aligned} \tag{2.72}
$$

Limitaremos cada um dos termos da desigualdade acima. Vejamos que, utilizando o Lema 2.4 e recordando o fato de que k é uma função positiva, temos

$$
-\frac{k'}{k^3} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) \leqslant \frac{|k'|}{k^3} \int_\Omega |\nabla z|^2 \, dx \leqslant \frac{|k'|}{a_0 k^3} a(t, z, z) \leqslant \frac{2|k'|}{a_0 k^3} E(t),
$$

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{k' k'' k - (k')^3}{k^3} \right) \left| x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \right|^2 &\leqslant \frac{|k' k'' k - (k')^3|}{k^3} M^2 |\nabla z|^2 \\
&\leqslant \frac{M^2 |k' k'' k - (k')^3|}{a_0 k^3} a(t, z, z) \\
&\leqslant \frac{2M^2 |k' k'' k - (k')^3|}{a_0 k^3} E(t)
\end{aligned}
$$

e

$$n\frac{k'}{k}|z'|^2 \leqslant 2n\frac{|k'|}{k}E(t) = 2n\frac{a_0k^2|k'|}{a_0k^3}E(t).$$

Por (2.17) e pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, temos que

$$\begin{aligned}
-\left(d_i\frac{\partial z}{\partial x_i}, z'\right) &\leqslant \frac{|(n+1)(k')^2 - k''k|M}{k^2}|\nabla z||z'| \\
&\leqslant \frac{|(n+1)(k')^2 - k''k|M}{\sqrt{a_0}\,k^2}\sqrt{a(t,z,z)}|z'| \\
&\leqslant \frac{|(n+1)(k')^2 - k''k|M}{\sqrt{a_0}\,k^2}\left(\frac{a(t,z,z)}{2} + \frac{|z'|^2}{2}\right) \\
&\leqslant \frac{2\sqrt{\lambda_1}|(n+1)(k')^2 - k''k|M}{\sqrt{a_0}\sqrt{\lambda_1}\,k^2}E(t),
\end{aligned}$$

em que λ_1 foi definido no início do Capítulo 2.

Seguindo o mesmo raciocínio, por (2.1) e desde que a desigualdade de Poincaré e o Lema 2.4 implicam que

$$|z| \leqslant \frac{\sqrt{a(t,z,z)}}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{a_0}},$$

temos,

$$\begin{aligned}
-(fz, z') &\leqslant \frac{n|(n+1)(k')^2 - k''k|}{k^2}|z||z'| \\
&\leqslant \frac{n|(n+1)(k')^2 - k''k|}{\sqrt{a_0}\sqrt{\lambda_1}\,k^2}\sqrt{a(t,z,z)}|z'| \\
&\leqslant \frac{n|(n+1)(k')^2 - k''k|}{\sqrt{a_0}\sqrt{\lambda_1}\,k^2}\left(\frac{a(t,z,z)}{2} + \frac{|z'|^2}{2}\right) \\
&\leqslant \frac{2n|(n+1)(k')^2 - k''k|}{\sqrt{a_0}\sqrt{\lambda_1}\,k^2}E(t).
\end{aligned}$$

Pelas limitações acima, podemos escrever em (2.72) que

$$|E'(t)| \leqslant G(t)E(t), \tag{2.73}$$

em que

$$G(t) = 2\left(\frac{|k'| + M^2|k'k''k - (k')^3| + na_0k^2|k'|}{a_0k^3}\right) + 2\left(\frac{(\sqrt{\lambda_1}M + n)|(n+1)(k')^2 - k''k|}{\sqrt{a_0}\sqrt{\lambda_1}\,k^2}\right).$$

Usando as hipóteses (H_2) e (H_3) sobre a função k, podemos limitar cada termo de G, isto é,

$$\begin{aligned}
G(t) \leqslant\ & 2\left(\frac{|k'| + M^2(\tau|k''|k_1 + \tau^2|k'|) + na_0k_1^2|k'|}{a_0k_0^3}\right) \\
&+ 2\left(\frac{(\sqrt{\lambda_1}M + n)(n\tau|k'| + \tau|k'| + |k''|k_1)}{\sqrt{a_0}\sqrt{\lambda_1}\,k_0^2}\right).
\end{aligned}$$

Usando agora a hipótese (H_4), nós obtemos

$$\int_0^\infty G(t)\,dt \leqslant 2\left(\frac{\ell_1 + M^2(\tau\,\ell_2\,k_1 + \tau^2\,\ell_1) + na_0k_1^2\,\ell_1}{a_0k_0^3}\right) + 2\left(\frac{(\sqrt{\lambda_1}M + n)(n\tau\,\ell_1 + \tau\,\ell_1 + \ell_2\,k_1)}{\sqrt{a_0}\sqrt{\lambda_1}\,k_0^2}\right),$$

ou seja,

$$\int_0^\infty G(t)\,dt \leqslant C_0. \tag{2.74}$$

Segue de (2.73) que

$$-G(t) \leqslant \frac{E'(t)}{E(t)} \leqslant G(t),$$

isto é,

$$-\int_0^t G(s)\,ds \leqslant \int_0^t \ln'\left(E(s)\right)ds \leqslant \int_0^t G(s)\,ds,$$

e por (2.74),

$$-C_0 \leqslant \ln E(t) - \ln E(0) \leqslant C_0, \quad \forall\ t \in [0,\infty).$$

Usando propriedades logarítmicas nós podemos escrever que

$$-C_0 \leqslant \ln\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right) \leqslant C_0, \quad \forall\ t \in [0,\infty),$$

e elevando os membros da desigualdade acima como expoentes da base e, obtemos

$$E_0e^{-C_0} \leqslant E(t) \leqslant E_0e^{C_0}, \quad \forall\ t \in [0,\infty).$$

(ii) Utilizando os mesmos argumentos do item (i) para obter (2.72), segue que

$$E'(t) = -\frac{k'}{k^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{k'k''k - (k')^3}{k^3}\right)\left|x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^2 + n\frac{k'}{k}|z'|^2 + (h,z') - \left(d_i\frac{\partial z}{\partial x_i}, z'\right) - (fz,z').$$

E analogamente ao que foi feito em (2.73), obtemos

$$E'(t) \leqslant G(t)E(t) + (h,z').$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e integrando de 0 a t, temos

$$E(t) \leqslant E(0) + \int_0^t |h||z'|\ + G(s)E(s)\,ds.$$

De forma semelhante ao realizado para obter (2.53) na demonstração do Teorema 2.2 e usando (2.74), concluimos que

$$E(t) \leqslant \left[2E_0 + \left(\int_0^T |h| \, dt \right)^2 \right] e^{C_0}, \quad \forall \ t \in [0,T].$$

■

A seguir, provaremos uma identidade que será fundamental na obtenção das estimativas para $\dfrac{\partial z}{\partial \nu}$.

Teorema 2.5 *Seja $q = (q_\ell)$ um campo vetorial em $\overline{\Omega}$, $q \in [C^1(\overline{\Omega})]^n$. Então toda solução fraca z do problema (2.66) verifica*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_\ell \nu_\ell \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt = \left(z' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} \right)\Bigg|_0^T \\
&+ \frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\left((z')^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i} \right) + (n+1)\iint \frac{(k')^2}{k^2} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} \\
&+ \iint a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} q_\ell z' + \frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_\ell}\frac{\partial z}{\partial x_i} q_\ell z' \\
&+ \frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i} z \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} z' + \frac{1}{2}\iint b_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} z' - \frac{1}{2}\iint b_i z' \frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} \\
&- \frac{1}{2}\iint n^2 \frac{(k')^2}{k^2}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} z^2 - \iint h q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

em que

$$\iint \varphi \quad \textit{denota} \quad \int_0^T \int_\Omega \varphi \, dx \, dt.$$

Prova. Primeiro provaremos (2.75) para a solução forte z do problema (2.66), ou seja, consideremos inicialmente $z(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $z'(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Seja $L^* z$ como estabelecido em (2.22). Multiplicando a equação $(2.66)_1$ por $q_\ell \dfrac{\partial z}{\partial x_\ell}$ e integrando em Q, temos

$$\begin{aligned}
&\iint z'' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} - \iint \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \iint \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z') q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} \\
&+ \iint \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z)' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \iint \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{n(k')^2}{k^2} x_i z \right) q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} = \iint h q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Iremos agora analisar as integrais que aparecem no lado esquerdo da equação acima.

- Análise de $\displaystyle\iint z'' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}$

  Usando integração por partes no primeiro termo e notando que $q_\ell = q_\ell(x)$ não depende de t, segue que

$$\begin{aligned}\iint z'' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} &= \left(z', q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T - \iint z' \left(q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)' \\ &= \left(z', q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T - \iint q_\ell z' \frac{\partial z'}{\partial x_\ell} \\ &= \left(z', q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\iint q_\ell \frac{\partial (z')^2}{\partial x_\ell}.\end{aligned}$$

E, por sua vez, segue do Teorema de Green que

$$\iint z'' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} = \left(z', q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T + \frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}(z')^2. \tag{2.77}$$

- Análise de $-\iint \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}$

  Para análise do segundo termo, usando o Teorema 1.10 e o Teorema de Green, note que

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right], q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) &= -\int_\Gamma q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\nu_i \, d\Gamma + \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\left(\frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + q_\ell \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\ell}\right) dx \\ &= \left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}, \frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) + \left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}, q_\ell \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\ell}\right) \\ &\quad - \int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\nu_i \, d\Gamma \end{aligned} \tag{2.78}$$

Usando a mesma estratégia na segunda integral do lado direito de (2.78), temos que

$$\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}, q_\ell \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\ell}\right) = \int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_\ell \, d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j} q_\ell\right]\frac{\partial z}{\partial x_i} \, dx,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}, q_\ell \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\ell}\right) &= \int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_\ell \, d\Gamma - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial z}{\partial x_j} q_\ell, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) - \left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}, q_\ell \frac{\partial^2 z}{\partial x_l \partial x_j}\right) \\ &\quad - \left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right).\end{aligned} \tag{2.79}$$

Pela simetria de a_{ij}, podemos escrever em (2.79) que

$$2\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}, q_\ell \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\ell}\right) = \int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_\ell \, d\Gamma - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial z}{\partial x_j} q_\ell, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) - \left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right).$$

Daí, substituindo a equação acima em (2.78), obtemos

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right], q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) = \left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}, \frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial z}{\partial x_j}q_\ell, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \\
- \frac{1}{2}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_\ell\, d\Gamma \\
- \int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\nu_i\, d\Gamma. \qquad (2.80)
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[\frac{\delta_{ij}}{k^2} - \frac{(k')^2 x_i x_j}{k^2}\right] = -\frac{(k')^2}{k^2}\left[\frac{\partial x_i}{\partial x_\ell}x_j + \frac{\partial x_j}{\partial x_\ell}x_i\right],
$$

temos que o segundo termo do lado direito de (2.80) pode ser escrito como

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial z}{\partial x_j}q_\ell, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{(k')^2}{k^2}\left[\frac{\partial x_i}{\partial x_\ell}x_j\frac{\partial z}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j}{\partial x_\ell}x_i\frac{\partial z}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_i}\right] dx.
$$

Note que, considerando nas parcelas acima o somatório que estamos implicitando, temos que a primeira parcela só será diferente de zero quando $\ell = i$, e a segunda quando $\ell = j$. Desse modo, tomando $i = j$, segue que

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell}\frac{\partial z}{\partial x_j}q_\ell, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{(k')^2}{k^2}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}, q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right). \qquad (2.81)
$$

Já para os termos na fronteira de (2.80), desde que $\dfrac{\partial z}{\partial x_i} = \nu_i\dfrac{\partial z}{\partial \nu}$ em Γ, tem-se,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_\ell\, d\Gamma - \int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\nu_i\, d\Gamma \\
= \frac{1}{2}\int_\Gamma a_{ij}\nu_j\frac{\partial z}{\partial \nu}q_\ell\nu_i\frac{\partial z}{\partial \nu}\nu_\ell\, d\Gamma - \int_\Gamma a_{ij}\nu_j\frac{\partial z}{\partial \nu}q_\ell\nu_\ell\frac{\partial z}{\partial \nu}\nu_i\, d\Gamma \\
= -\frac{1}{2}\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_\ell\nu_\ell\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma. \qquad (2.82)
\end{aligned}
$$

Substituindo (2.81) e (2.82) em (2.80), concluímos que

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right], q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) = \left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}, \frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) + \left(\frac{(k')^2}{k^2}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}, q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) \\
- \frac{1}{2}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_\ell\nu_\ell\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma. \\
(2.83)
\end{aligned}
$$

- Análise de $\displaystyle\iint \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z')q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}$

Agora, aplicando o Teorema 1.10 e o Teorema de Green, podemos escrever que

$$\begin{aligned}\iint \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z')q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} &= -\frac{1}{2}\iint b_i z' \frac{\partial}{\partial x_i}\left[q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\iint b_i z' \frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} - \frac{1}{2}\iint b_i z' q_\ell \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\ell}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

- Análise de $\displaystyle\iint \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z)' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}$

Utilizando integração por partes, segue que

$$\iint \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z)' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z), q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\Bigg|_0^T - \frac{1}{2}\iint \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z) q_\ell \frac{\partial z'}{\partial x_\ell}. \tag{2.85}$$

Usando o Teorema de Green na segunda integral do lado direito da igualdade acima, obtemos

$$-\frac{1}{2}\iint \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z) q_\ell \frac{\partial z'}{\partial x_\ell} = \frac{1}{2}\int_\Omega z' \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left[\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z q_\ell + b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} q_\ell\right] dx.$$

Desde que $\dfrac{\partial^2 b_i}{\partial x_\ell \partial x_i} = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\iint \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z) q_\ell \frac{\partial z'}{\partial x_\ell} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{\partial b_i}{\partial x_\ell} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_i} + b_i q_\ell \frac{\partial^2 z}{\partial x_\ell \partial x_i}, z'\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(z \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} + b_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}, z'\right). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Por (2.85) e (2.86) segue que

$$\begin{aligned}\iint \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z)' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i z), q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} z' + \frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_\ell} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_i} z' \\ &+ \frac{1}{2}\iint b_i q_\ell \frac{\partial^2 z}{\partial x_\ell \partial x_i} z' + \frac{1}{2}\iint z \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} z' + \frac{1}{2}\iint b_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} z' \end{aligned} \tag{2.87}$$

- Análise de $\displaystyle\iint \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{n(k')^2}{k^2} x_i z\right) q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}$

Podemos notar inicialmente que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(n \frac{k'^2}{k^2} x_i z\right) &= n \frac{(k')^2}{k^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_i} z + x_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \\ &= n \frac{(k')^2}{k^2}\left(nz + x_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \\ &= n^2 \frac{(k')^2}{k^2} z + n \frac{(k')^2}{k^2} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\iint \frac{\partial}{\partial x_i}\left(n\,\frac{(k')^2}{k^2}\,x_i z\right) q_\ell\,\frac{\partial z}{\partial x_\ell} = \iint n^2\,\frac{(k')^2}{k^2}\,z\,q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \iint n\,\frac{(k')^2}{k^2}\,x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\,q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}. \tag{2.88}$$

Usando novamente o Teorema de Green na primeira integral do lado direito da equação acima, temos que

$$\iint n^2\,\frac{(k')^2}{k^2}\,z\,q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell} = -\iint z\,n^2\frac{(k')^2}{k^2}\left[\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\,q_\ell + z\,\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\right],$$

ou seja,

$$\iint n^2\,\frac{(k')^2}{k^2}\,z\,q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell} = -\frac{1}{2}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}.$$

Substituindo a última expressão em (2.88),

$$\iint \frac{\partial}{\partial x_i}\left(n\,\frac{(k')^2}{k^2}\,x_i z\right) q_\ell\,\frac{\partial z}{\partial x_\ell} = -\frac{1}{2}\iint n^2\,\frac{(k')^2}{k^2}\,z^2\,\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} + \iint n\,\frac{(k')^2}{k^2}\,x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\,q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}. \tag{2.89}$$

Finalmente, adicionando (2.77), (2.83), (2.84), (2.87) e (2.89), obtemos (2.75).

Considere agora z solução fraca do problema (2.66), ou seja, $z(t) \in H_0^1(\Omega)$ e $z'(t) \in L^2(\Omega)$. Desde que

$$\overline{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \overline{H_0^1(\Omega)} = L^2(\Omega),$$

existem sequências $(z_\mu) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $(z'_\mu) \subset H_0^1(\Omega)$ tais que

$$z_\mu \longrightarrow z \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad z'_\mu \longrightarrow z' \text{ em } L^2(\Omega).$$

Conforme provado no Teorema 2.2, temos que

$$z_\mu \longrightarrow z \text{ em } C([0,T]; H_0^1(\Omega)),$$

$$z'_\mu \longrightarrow z' \text{ em } C([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Assim, escrevendo (2.75) com z_μ e z'_μ ao invés de z e z' respectivamente, e tomando o limite quando $\mu \longrightarrow \infty$, obtemos que (2.75) é válida para toda solução fraca de (2.66).

■

A próxima desigualdade que demonstraremos é conhecida como desigualdade direta para o problema (2.66). Esse resultado estabelece uma propriedade de regularidade adicional para a derivada normal $\dfrac{\partial z}{\partial \nu}$ em Σ, onde z denota uma solução fraca do problema (2.66). Mais precisamente, provaremos que

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma). \tag{2.90}$$

Notemos que a regularidade (2.90) não provém das propiedades da solução fraca z garantida no Teorema 2.3. Por esta razão, ela é chamada de *Regularidade Escondida*. Esta denominação foi introduzida por Lions em [16], quando o autor estudou um problema misto associado à equação de onda semilinear.

Teorema 2.6 (Desigualdade Direta) *Seja z uma solução fraca qualquer do problema* (2.66). *Então,* $\dfrac{\partial z}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$ *e*

$$\int_0^T \int_\Gamma \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma\, dt \;\leqslant\; C(T+1)\left[E_0 + \left(\int_0^T |h|\, dt\right)^2\right] + C\sqrt{E_0}\int_0^T |h|\, dt,$$

em que C é uma constante que independe de z e T.

Prova. O item (ii) do Teorema 2.4 nos fornece que

$$\frac{|z'(t)|^2}{2} + \frac{a(t,z(t),z(t))}{2} \;\leqslant\; \left[2E_0 + \left(\int_0^T |h|\, dt\right)^2\right] e^{C_0}, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

ou seja,

$$|z'(t)|^2 + a(t,z(t),z(t)) \;\leqslant\; CE_0 + C\left(\int_0^T |h|\, dt\right)^2, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.91}$$

Consideremos a identidade do Teorema 2.5 com um campo vetorial q tal que $q = \nu$ em Γ. Limitaremos cada termo do lado direito dessa identidade considerando, quando necessário, as condições (2.21) e o fato de existir uma constante $C > 0$, tal que

$$|q_\ell| \leqslant C, \quad \ell = 1,\dots,n, \quad e \quad \left|\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\right| \leqslant C, \quad \ell = 1,\dots,n. \tag{2.92}$$

Observe que para o primeiro termo em (2.75) temos que

$$\begin{aligned}\left(z' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) &\leqslant \int_\Omega \left(|z| + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| |z| + \frac{1}{2}|b_i|\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|\right) |q_\ell| \left|\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right| dx \\ &\leqslant C\int_\Omega (|z'| + |z| + |\nabla z|)\, |\nabla z|\, dx.\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré, e o item (ii) do Lema 2.4, podemos escrever

$$\begin{aligned}\left(z'+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) &\leqslant C\left(|z'||\nabla z|+|z||\nabla z|+|\nabla z|^2\right) \\ &\leqslant C(|z'|^2+|\nabla z|^2+|z|^2) \\ &\leqslant C\left(|z'|^2+\frac{a(t,z,z)}{a_0}+C\frac{a(t,z,z)}{a_0}\right),\end{aligned} \tag{2.93}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left(z'+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) &\leqslant C\left(2E(t)+\frac{2}{a_0}E(t)+\frac{2C}{a_0}E(t)\right) \\ &\leqslant 2CE(t),\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$. Desse modo, por (2.91), segue que

$$\left(z'+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\Bigg|_0^T \leqslant C(2E(T)+2E_0) \leqslant C\left[E_0+\left(\int_0^T |h|\,dt\right)^2\right]. \tag{2.94}$$

Já no segundo termo, note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\left((z')^2-a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) &\leqslant \frac{1}{2}\iint\left|\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\right|\left((z')^2-a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \\ &\leqslant C\int_0^T |z'|^2-a(t,z,z)\,dt \\ &\leqslant C\int_0^T |z'|^2+a(t,z,z)\,dt\,,\end{aligned}$$

e novamente, por (2.91), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\left((z')^2-a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) &\leqslant C\left[CE_0+C\left(\int_0^T |h|\,dt\right)^2\right]\int_0^T dt \\ &\leqslant C\,T\left[E_0+\left(\int_0^T |h|\,dt\right)^2\right].\end{aligned} \tag{2.95}$$

A seguir, usando as hipóteses (H_2) e (H_3) e a definição de M, temos no terceiro termo, também aplicando-se o Lema 2.4 e (2.91), que

$$\begin{aligned}(n+1)\iint\frac{(k')^2}{k^2}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}q_\ell\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} &\leqslant (n+1)\frac{\tau^2}{k_0^2}MC\iint|\nabla z|^2 \\ &\leqslant \frac{C}{a_0}\int_0^T a(t,z,z)\,dt \\ &\leqslant C\,T\left[E_0+\left(\int_0^T |h|\,dt\right)^2\right].\end{aligned} \tag{2.96}$$

De modo inteiramente análogo, usando-se as mesmas estratégias, conseguimos motrar que o quarto até o décimo termo também são marjorados por

$$C\,T\left[E_0+\left(\int_0^T|h|\,dt\right)^2\right]. \tag{2.97}$$

Avaliemos agora o décimo primeiro termo. Primeiro, perceba que o Lema 2.4 implica que

$$|\nabla z|\leqslant\frac{\sqrt{a(t,z,z)}}{\sqrt{a_0}},$$

Por (2.91), temos

$$\sqrt{a(t,z,z)}\leqslant C\sqrt{E_0+\left(\int_0^T|h|\,dt\right)^2},$$

e usando o fato de que $\sqrt{x+y^2}\leqslant\sqrt{x}+y$, para $x,y\geqslant 0$, podemos escrever que

$$\begin{aligned}\left|\iint hq_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right|&\leqslant C\iint|h||\nabla z|\\&\leqslant C\int_0^T|h|\cdot|\nabla z|\,dt\\&\leqslant C\left(\sqrt{E_0}+\int_0^T|h|\,dt\right)\int_0^T|h|\,dt\\&\leqslant C\sqrt{E_0}\int_0^T|h|\,dt+C\left(\int_0^T|h|\,dt\right)^2.\end{aligned} \tag{2.98}$$

Já no lado esquerdo de (2.75), usando o item (i) do Lema 2.4 e recordando o fato de que $|\nu|=1$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\,\nu_i\,\nu_j\,\nu_\ell\,\nu_\ell\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma\,dt&\geqslant\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_0\,\nu_i^2\,\nu_\ell^2\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_0|\nu|^2\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma\,dt\\&=\frac{a_0}{2}\int_0^T\int_\Gamma\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma\,dt.\end{aligned} \tag{2.99}$$

Combinando as desigualdades (2.94)-(2.99), concluimos que

$$\int_0^T\int_\Gamma\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma\,dt\leqslant C(T+1)\left[E_0+\left(\int_0^T|h|\,dt\right)^2\right]+C\sqrt{E_0}\int_0^T|h|\,dt.$$

Por essa última desigualdade, podemos afirmar que

$$\int_0^T\int_\Gamma\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma\,dt<\infty,$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma).$$

■

Observação 2.5 *A desigualdade direta verificada no Teorema 2.6 com $E(T)$ ao invés de E_0 também é verdadeira para a solução fraca z do problema*

$$\begin{cases} L^* z = h \ \text{em } Q, \\ z = 0 \ \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot, T) = z^0(\cdot), \ z'(\cdot, T) = z^1(\cdot) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

Para isso, nós introduzimos uma função $\breve{k}(t) = k(T-t)$. Com os coeficientes a_{ij}, b_i, c, d_i, f de L^* nós determinamos os coeficientes $\breve{a}_{ij}, \breve{b}_i, \breve{c}, \breve{d}_i, \breve{f}$ dados na Observação 2.3. Observamos que o operador $\breve{L}^*$ com os coeficientes $\breve{a}_{ij}, \breve{b}_i, \breve{c}, \breve{d}_i, \breve{f}$ e o operador L^* têm a mesma forma. O resultado segue aplicando-se a Observação 2.3.

Com o objetivo de mostrar a desigualdade inversa provaremos o seguinte resultado.

Lema 2.5 *Seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Então toda solução fraca z do problema (2.66) com $h = 0$ verifica*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma a_{ij} \nu_i \nu_j \nu_\ell (x_\ell - x_\ell^0) \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \\ &\quad = \int_0^T E(t)\, dt + \left(z' + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} [b_i z], (x_\ell - x_\ell^0) \frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2} z \right) \Bigg|_0^T \\ &\quad + (n+1) \iint \frac{(k')^2}{k^2} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} (x_\ell - x_\ell^0) \frac{\partial z}{\partial x_\ell} - (n+1) \iint \frac{k'}{k} \frac{\partial z}{\partial x_\ell} (x_\ell - x_\ell^0) z' \\ &\quad + \frac{(n+1)}{4} \iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i} z z' - \frac{(n+1)}{4} \iint n^2 \frac{(k')^2}{k^2} z^2. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Prova. Consideremos a identidade do Teorema 2.5 com o particular campo vetorial $q(x) = x - x^0$. Analisemos alguns termos do lado direito dessa identidade.

Inicialmente, note que

$$\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} = n \ , \quad \frac{\partial q_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_\ell} = \sum_{i,\ell=1}^n \frac{\partial q_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_\ell} = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad e \quad \frac{\partial b_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{i,\ell=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial z}{\partial x_i} = -2 \frac{k'}{k} \frac{\partial z}{\partial x_\ell} \tag{2.101}$$

Assim, para o segundo e quarto termo, temos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \left((z')^2 - a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) + \iint a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_\ell} \\ &\qquad = \frac{n}{2} \iint \left((z')^2 - a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) + \iint a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Desde que,

$$\begin{aligned}&\frac{n-1}{2}\iint\left((z')^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \int_0^T E(t)\,dt\\&= \frac{n}{2}\iint\left(z^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \iint a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i},\end{aligned}$$

podemos reescrever (2.102) da forma

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\iint\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\left((z')^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \iint a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\\&= \frac{n-1}{2}\iint\left((z')^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \int_0^T E(t)\,dt.\end{aligned}\tag{2.103}$$

Por (2.101), obtemos, para o quinto e sexto termo, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}q_\ell z' + \frac{1}{2}\iint\frac{\partial b_i}{\partial x_\ell}\frac{\partial z}{\partial x_i}q_\ell z' &= -\iint\frac{k'}{k}\frac{\partial x_i}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}q_\ell z' - \iint\frac{k'}{k}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}q_\ell z'\\&= -(n+1)\iint\frac{k'}{k}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}q_\ell z',\end{aligned}\tag{2.104}$$

e para o sétimo termo,

$$\frac{1}{2}\iint\frac{\partial b_i}{\partial x_i}z\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}z' = \frac{n}{2}\iint\frac{\partial b_i}{\partial x_i}zz' = \frac{n+1}{4}\iint\frac{\partial b_i}{\partial x_i}zz' + \frac{n-1}{4}\iint\frac{\partial b_i}{\partial x_i}zz'.\tag{2.105}$$

Já para o oitavo e nono termo, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}z' - \frac{1}{2}\iint b_i z'\frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} &= \frac{n}{2}\iint b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}z' - \frac{1}{2}\iint b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}z'\\&= \frac{n-1}{2}\iint b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}z'.\end{aligned}\tag{2.106}$$

Finalmente, o décimo termo é escrito como

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}z^2 &= -\frac{n}{2}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2\\&= -\frac{(n+1)}{4}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2 - \frac{(n-1)}{4}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2.\end{aligned}\tag{2.107}$$

Substituindo as igualdades (2.103) - (2.107) na identidade (2.75) do Teorema 2.5,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_\ell q_\ell\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt = \left(z' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T + \int_0^T E(t)\,dt\\&+ (n+1)\iint\frac{(k')^2}{k^2}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}q_\ell\frac{\partial z}{\partial x_\ell} - (n+1)\iint\frac{k'}{k}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}q_\ell z' + \frac{n+1}{4}\iint\frac{\partial b_i}{\partial x_i}zz'\\&- \frac{(n+1)}{4}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2 + \frac{n-1}{2}\iint\left((z')^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \frac{n-1}{2}\iint b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}z'\\&+ \frac{n-1}{4}\iint\frac{\partial b_i}{\partial x_i}zz' - \frac{(n-1)}{4}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2.\end{aligned}\tag{2.108}$$

Agora, multipliquemos a equação $L^*z = 0$ por z e integremos em Q. Usando o Teorema de Green ou Integração por partes em t em cada termo do produto $L^*z \cdot z$, nos dá

- $\displaystyle\iint z'' = (z', z)\Big|_0^T - \iint (z')^2\,;$
- $\displaystyle\iint -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right] z = \int_0^T \langle A(t)z, z\rangle\, dt = \int_0^T a(t,z,z)\, dt;$
- $\displaystyle\frac{1}{2}\iint \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z']z = -\frac{1}{2}\iint b_i z'\frac{\partial z}{\partial x_i}\,;$
- $\displaystyle\frac{1}{2}\iint \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z]'z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], z\right)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i} z.z' - \frac{1}{2}\iint b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}z'\,.$

Já para o último termo, temos que

$$\begin{aligned}\iint \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{n(k')^2}{k^2}x_i z\right] z &= \iint \frac{n(k')^2}{k^2}\left[\frac{\partial x_i}{\partial x_i}z + x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\right] z\\ &= \iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2 + \iint n\frac{(k')^2}{k^2}x_i z\frac{\partial z}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Usando que $z\dfrac{\partial z}{\partial x_i} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial(z^2)}{\partial x_i}$ e o Teorema de Green na última integral do lado direito da igualdade acima, temos que

- $\displaystyle\iint \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{n(k')^2}{k^2}x_i z\right] z = \iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2 + \frac{1}{2}\iint n\frac{(k')^2}{k^2}x_i\frac{\partial(z^2)}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2.$

Adicionando as últimas cinco igualdades, multiplicando o resultado por $\dfrac{n-1}{2}$ e isolando o termo avaliado em 0 e T, obtemos

$$\begin{aligned}\left(z' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], \frac{n-1}{2}z\right)\Big|_0^T &= \frac{(n-1)}{2}\iint\left((z')^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \frac{(n-1)}{4}\iint\frac{\partial b_i}{\partial x_i}zz'\\ &+ \frac{(n-1)}{2}\iint b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}z' - \frac{(n-1)}{4}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2. \qquad (2.109)\end{aligned}$$

Note que (2.109) é igual aos últimos quatro termos do lado direito de (2.108). Assim, realizando essa subtituição em (2.108) e trocando q_ℓ por $x_\ell - x_\ell^0$, obtemos (2.100).

■

Para obter a desigualdade inversa para o problema (2.66), introduzimos algumas notações. O Teorema 2.4, item (i), nos fornece que

$$C_1E_0 \leqslant E(t) \leqslant C_2E_0, \quad \forall t\in[0,\infty) \quad (C_1 = e^{-C_0}, C_2 = e^{C_0}). \qquad (2.110)$$

O tempo T_0 é definido por

$$T_0 = \left[\frac{2R(x^0)}{\sqrt{a_0}} + K_1 + K_2 + K_3\right]\frac{C_2}{C_1} \qquad (2.111)$$

em que

$$K_1 = \frac{2\tau\left[(n-1)M + 2nR(x^0) + 2\sqrt{\lambda_1}\, M\, R(x^0)\right]}{a_0 k_0 \sqrt{\lambda_1}},$$
$$K_2 = \frac{2\ell_1(n+1)R(x^0)\left[\tau M + \sqrt{a_0}\, k_0\right]}{a_0 k_0^2},$$
$$K_3 = \frac{\ell_1 n(n+1)\left[\tau M + \sqrt{a_0}\, k_0\right]}{a_0\, k_0^2\, \sqrt{\lambda_1}}.$$

Observação 2.6 *No caso particular em que $k(t) = 1$, para todo $t \geqslant 0$, tem-se $C_1 = C_2 = a_0 = 1$ e $K_1 = K_2 = K_3 = 0$, o que implica que $T_0 = 2R(x^0)$. Esse é precisamente o tempo T_0 obtido por J. L. Lions [13] e V. Komornik [12] para a equação clássica da onda $u'' - \Delta u = 0$.*

De fato, tomando $k(t) = 1$ para todo $t \geqslant 0$, e utilizando as relações (H_2), (H_3) e (H_4), obtemos $k_1 = 1$ e $\tau = \ell_1 = \ell_2 = 0$. Nessas condições, tem-se $C_0 = 0$, o que implica $C_1 = C_2 = 1$. Além disso, $K_1 = K_2 = K_3 = 0$, e pela demonstração do item (i) do Lema 2.4, conclui-se que

$$a_0 = \alpha = \frac{1-\tau^2 M^2}{k_1^2} = 1.$$

Consequentemente, $T_0 = 2R(x^0)$.

Teorema 2.7 (Desigualdade Inversa) *Seja $T > T_0$. Então toda solução fraca z do problema (2.66) com $h = 0$, verifica*

$$\frac{1}{2}R(x^0)a_1 \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt \geqslant C_1(T-T_0)E_0.$$

Prova. A ideia é limitar, usando a estimativa (2.110), cada termo do lado direito da identidade (2.100) do Lema 2.5. Para o primeiro termo desse lado direito temos que

$$\int_0^T E(t)\, dt \geqslant C_1 T E_0. \tag{2.112}$$

Já para o segundo termo, segue que

$$\left(z' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z],\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\Bigg|_0^T$$
$$= \left(z',\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z],\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\Bigg|_0^T. \tag{2.113}$$

Avaliemos cada expressão do lado direito de (2.113) separadamente. Note que, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, temos

$$\left|\left(z',\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\right| \leqslant \frac{\mu}{2}|z'|^2 + \frac{1}{2\mu}\left|[x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right|^2, \quad \forall \mu > 0. \tag{2.114}$$

Desenvolvendo a segunda norma do lado direito da desigualdade acima, usando que $z\dfrac{\partial z}{\partial x_\ell} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial(z^2)}{\partial x_\ell}$ e o Teorema de Green, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
&\left|[x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right|^2 \\
&= \int_\Omega \left([x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)^2 + (n-1)[x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}z + \frac{(n-1)^2}{4}z^2 dx. \\
&= \int_\Omega \left([x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)^2 dx + \frac{(n-1)}{2}\int_\Omega [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial(z^2)}{\partial x_\ell}\,dx + \frac{(n-1)^2}{4}\int_\Omega z^2\,dx \\
&= \int_\Omega \left([x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)^2 dx - \frac{n(n-1)}{2}\int_\Omega z^2\,dx + \frac{(n-1)^2}{4}\int_\Omega z^2\,dx
\end{aligned}$$

Desde que $-\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{(n-1)^2}{4} \leqslant 0$, temos, usando também a definição de $R(x^0)$ e o Lema 2.4, que

$$\begin{aligned}
\left|[x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right|^2 &\leqslant \int_\Omega \left([x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)^2 dx \\
&\leqslant R^2(x^0)|\nabla z|^2 \\
&\leqslant R^2(x^0)\frac{a(t,z,z)}{a_0}.
\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.114), obtemos

$$\left|\left(z',\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\right| \leqslant \frac{\mu}{2}|z'|^2 + \frac{1}{2\mu}R^2(x^0)\frac{a(t,z,z)}{a_0}, \quad \forall \mu > 0.$$

Fazendo $\mu = \dfrac{R(x^0)}{\sqrt{a_0}}$ e usando (2.110), segue que

$$\begin{aligned}
\left|\left(z',\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\right| &\leqslant \frac{R(x^0)}{\sqrt{a_0}}\frac{|z'|^2}{2} + \frac{R(x^0)}{\sqrt{a_0}}\frac{a(t,z,z)}{2} \\
&= \frac{R(x^0)}{\sqrt{a_0}}E(t) \\
&\leqslant \frac{R(x^0)}{\sqrt{a_0}}C_2E_0,
\end{aligned}$$

o que implique que

$$\left(z',\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\Bigg|_0^T \geqslant -2\,\frac{R(x^0)}{\sqrt{a_0}}C_2E_0. \tag{2.115}$$

Agora, usando o Teorema de Green, para o segundo termo do lado direito de (2.113) perceba que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z],\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z],\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], \frac{n-1}{2}z\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}z + b_i\frac{\partial z}{\partial x_i},\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) - \frac{1}{2}\left(b_i z, \frac{n-1}{2}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(-\frac{2k'}{k}nz + b_i\frac{\partial z}{\partial x_i},\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right) - \frac{n-1}{4}\left(z, b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

Para limitar os termos de (2.116), note que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}\left(-\frac{2k'}{k}nz + b_i\frac{\partial z}{\partial x_i},\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\right| &\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{2\tau}{k_0}n|z| + \frac{2\tau}{k_0}M|\nabla z|\right] R(x^0)|\nabla z|\ dx \\
&\leqslant \frac{\tau}{k_0}nR(x^0)|z||\nabla z| + \frac{\tau M}{k_0}R(x^0)|\nabla z|^2.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Poincaré e o item (ii) do Lema 2.4, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}\left(-\frac{2k'}{k}nz + b_i\frac{\partial z}{\partial x_i},\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\right| &\leqslant \frac{\tau}{k_0}nR(x^0)\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}|\nabla z|^2 + \frac{\tau M}{k_0}R(x^0)\frac{a(t,z,z)}{a_0} \\
&\leqslant \frac{\tau}{k_0}nR(x^0)\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\frac{a(t,z,z)}{a_0} + \frac{\tau M}{k_0}R(x^0)\frac{a(t,z,z)}{a_0},
\end{aligned}
$$

e desde que $a(t,z,z) \leqslant 2E(t) \leqslant 2C_2E_0$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}\left(-\frac{2k'}{k}nz + b_i\frac{\partial z}{\partial x_i},\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right)\right| &\leqslant \left(\frac{2\tau nR(x^0)}{a_0k_0\sqrt{\lambda_1}} + \frac{2\tau MR(x^0)\sqrt{\lambda_1}}{a_0k_0\sqrt{\lambda_1}}\right)C_2E_0 \\
&= \frac{2\tau R(x^0)(n+\sqrt{\lambda_1}M)C_2E_0}{a_0k_0\sqrt{\lambda_1}}.
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

Já para o segundo termo do lado direito de (2.116), obtemos, usando as mesmas estratégias, que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{n-1}{4}\left(z, b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)\right| &\leqslant \frac{n-1}{4}\int_\Omega |z||b_i||\nabla z|\ dx \\
&\leqslant \frac{n-1}{4}\int_\Omega \frac{2\tau M}{k_0}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}|\nabla z|^2\ dx \\
&\leqslant \frac{n-1}{2}\frac{\tau M}{k_0\sqrt{\lambda_1}}|\nabla z|^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{n-1}{4}\left(z, b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)\right| &\leqslant \frac{n-1}{2}\frac{\tau M}{k_0\sqrt{\lambda_1}}\frac{a(t,z,z)}{a_0} \\
&\leqslant \frac{(n-1)\tau MC_2E_0}{a_0k_0\sqrt{\lambda_1}}.
\end{aligned}
\tag{2.118}
$$

Por (2.117) e (2.118), temos em (2.116) que

$$\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z],\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\right| \leqslant \frac{\tau\left[(n-1)M + 2nR(x^0) + 2\sqrt{\lambda_1}MR(x^0)\right]C_2E_0}{a_0k_0\sqrt{\lambda_1}},$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z],\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\Big|_0^T \\ &\quad \geqslant \frac{-2\tau\left[(n-1)M + 2nR(x^0) + 2\sqrt{\lambda_1}MR(x^0)\right]C_2E_0}{a_0k_0\sqrt{\lambda_1}}.\end{aligned} \tag{2.119}$$

A partir de (2.115) e (2.119), temos, para o segundo termo do lado direito de (2.100), que

$$\begin{aligned}&\left(z' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z],\ [x_\ell - x_\ell^0]\frac{\partial z}{\partial x_\ell} + \frac{n-1}{2}z\right)\Big|_0^T \\ &\geqslant -2\,\frac{R(x^0)}{\sqrt{a_0}}C_2E_0 - \frac{2\tau\left[(n-1)M + 2nR(x^0) + 2\sqrt{\lambda_1}MR(x^0)\right]C_2E_0}{a_0k_0\sqrt{\lambda_1}} \\ &= -2\,\frac{R(x^0)}{\sqrt{a_0}}C_2E_0 - K_1C_2E_0.\end{aligned} \tag{2.120}$$

Avaliando agora o terceiro termo do lado direito de (2.100) e recordando a hipótese (H_4), de modo análogo, podemos escrever

$$\begin{aligned}\left|(n+1)\iint \frac{(k')^2}{k^2}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_\ell - x_\ell^0)\frac{\partial z}{\partial x_\ell}\right| &\leqslant (n+1)\iint \frac{|k'||k'|}{k_0^2}M\ R(x^0)|\nabla z|^2 \\ &\leqslant \frac{(n+1)\tau MR(x^0)}{k_0^2}\int_0^T |k'|\frac{a(t,z,z)}{a_0}\ dt \\ &\leqslant \frac{2(n+1)\tau MR(x^0)}{a_0k_0^2}C_2E_0\int_0^\infty |k'|\ dt \\ &\leqslant \frac{2\ell_1(n+1)\tau MR(x^0)C_2E_0}{a_0k_0^2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$(n+1)\iint \frac{(k')^2}{k^2}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_\ell - x_\ell^0)\frac{\partial z}{\partial x_\ell} \geqslant -\frac{2\ell_1(n+1)\tau MR(x^0)C_2E_0}{a_0k_0^2}. \tag{2.121}$$

Para o quarto termo seguimos a mesma estratégia, isto é,

$$\begin{aligned}\left|(n+1)\iint \frac{k'}{k}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}(x_\ell - x_\ell^0)z'\right| &\leqslant (n+1)\iint \frac{|k'|}{k_0}R(x^0)|\nabla z||z'| \\ &\leqslant \frac{(n+1)R(x^0)}{k_0}\int_0^T |k'||\nabla z||z'|\ dt \\ &\leqslant \frac{(n+1)R(x^0)}{k_0\sqrt{a_0}}\int_0^T |k'|\sqrt{a(t,z,z)}|z'|\ dt.\end{aligned}$$

Usando acima a desigualdade de Young e (2.110), temos que

$$\begin{aligned}
\left|(n+1)\iint \frac{k'}{k}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}(x_\ell - x_\ell^0)z'\right| &\leqslant \frac{(n+1)R(x^0)}{\sqrt{a_0}\ k_0}\int_0^T |k'|\left(\frac{a(t,z,z)}{2}+\frac{|z'|^2}{2}\right)\ dt\\
&\leqslant \frac{(n+1)R(x^0)C_2E_0}{\sqrt{a_0}\ k_0}\int_0^\infty |k'|\ dt\\
&\leqslant \frac{2\ell_1(n+1)R(x^0)C_2E_0}{\sqrt{a_0}\ k_0},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-(n+1)\iint \frac{k'}{k}\frac{\partial z}{\partial x_\ell}(x_\ell - x_\ell^0)z' \geqslant -\frac{2\ell_1(n+1)R(x^0)C_2E_0}{\sqrt{a_0}\ k_0}. \tag{2.122}$$

De modo semelhante, seguimos estimando agora o quinto termo do lado direito de (2.100), isto é,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(n+1)}{4}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i}zz'\right| &\leqslant \frac{(n+1)}{4}\int_0^T 2\frac{|k'|}{k_0}n|z||z'|\ dt\\
&\leqslant \frac{n(n+1)}{2\sqrt{a_0}\ k_0\sqrt{\lambda_1}}\int_0^T |k'|\sqrt{a(t,z,z)}|z'|\ dt\\
&\leqslant \frac{n(n+1)C_2E_0}{2\sqrt{a_0}\ k_0\sqrt{\lambda_1}}\int_0^\infty |k'|\ dt\\
&\leqslant \frac{\ell_1 n(n+1)C_2E_0}{\sqrt{a_0}\ k_0\sqrt{\lambda_1}},
\end{aligned}$$

e assim,

$$\frac{(n+1)}{4}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i}zz' \geqslant -\frac{\ell_1 n(n+1)C_2E_0}{\sqrt{a_0}\ k_0\sqrt{\lambda_1}}. \tag{2.123}$$

Para o sexto termo recorde que $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_i} = n$, e daí, usando o Teorema de Green, tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(n+1)}{4}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2\right| &= \left|\frac{n(n+1)}{4}\iint \frac{\partial x_i}{\partial x_i}\frac{(k')^2}{k^2}z^2\right|\\
&= \left|\frac{n(n+1)}{4}\iint x_i\frac{(k')^2}{k^2}2z\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|\\
&\leqslant \frac{n(n+1)\tau M}{2\ k_0^2}\int_0^T |k'||z||\nabla z|\ dt.
\end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade de Poincaré, o item (ii) do Lema 2.4 e (2.110), obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(n+1)}{4}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2\right| &\leqslant \frac{n(n+1)\tau M}{2\ k_0^2}\int_0^T |k'|\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\frac{a(t,z,z)}{a_0}\ dt\\
&\leqslant \frac{n(n+1)\tau M}{a_0\ k_0^2\sqrt{\lambda_1}}C_2E_0\int_0^\infty |k'|\ dt\\
&\leqslant \frac{\ell_1\tau n(n+1)MC_2E_0}{a_0\ k_0^2\sqrt{\lambda_1}},
\end{aligned}$$

e daí,

$$-\frac{(n+1)}{4}\iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}z^2 \geqslant -\frac{\ell_1\tau n(n+1)MC_2E_0}{a_0\ k_0^2\sqrt{\lambda_1}}. \tag{2.124}$$

Usando (2.112) e (2.120) - (2.124), temos em (2.100), que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_\ell(x_\ell-x_\ell^0)\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\\
&\geqslant C_1TE_0-\left[\frac{2R(x^0)}{\sqrt{a_0}}+K_1+\frac{2\ell_1(n+1)\tau MR(x^0)}{a_0k_0^2}+\frac{2\ell_1(n+1)R(x^0)}{\sqrt{a_0}\ k_0}\right]C_2E_0\\
&\quad-\left[\frac{\ell_1 n(n+1)}{\sqrt{a_0}\ k_0\sqrt{\lambda_1}}+\frac{\ell_1\tau n(n+1)M}{a_0\ k_0^2\sqrt{\lambda_1}}\right]C_2E_0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma & a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_\ell(x_\ell-x_\ell^0)\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\\
&\geqslant C_1TE_0-\left[\frac{2R(x^0)}{\sqrt{a_0}}+K_1+K_2+K_3\right]C_2E_0\\
&= C_1TE_0-\left[\frac{2R(x^0)}{\sqrt{a_0}}+K_1+K_2+K_3\right]\frac{1}{C_1}C_2E_0C_1\\
&= C_1(T-T_0)E_0.
\end{aligned}\tag{2.125}$$

Além disso, notando que $\nu_\ell(x_\ell-x_\ell^0)=\nu(x)\cdot m(x)$ e

$$|\nu(x)\cdot m(x)|\leqslant|\nu(x)||m(x)||\cos\theta|\leqslant|m(x)|\leqslant R(x^0),$$

em que θ é o ângulo entre os vetores ν e m, então, usando o item (i) do Lema 2.4, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_\ell(x_\ell-x_\ell^0)\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_1\nu_i\nu_i(\nu(x)\cdot m(x))\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma\ dt\\
&\leqslant \frac{1}{2}R(x^0)a_1\int_0^T\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma\ dt,
\end{aligned}\tag{2.126}$$

pois $\Gamma(x^0)=\{x\in\Gamma\,|\,m(x)\cdot\nu(x)\geqslant 0\}$. Por (2.125) e (2.126), obtemos

$$\frac{1}{2}R(x^0)a_1\int_0^T\int_{\Gamma(x^0)}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\geqslant C_1(T-T_0)E_0.$$

■

2.4 Solução Ultra-fraca

O objetivo desta seção é estudar a existência, a unicidade e a regularidade da solução do problema (2.25), quando os dados iniciais z^0 e z^1 são menos regulares do que os considerados na Seção 2.3. Por essa razão, tal solução será denominada solução ultra-fraca. Inicialmente, definiremos o conceito de solução para (2.25) por meio do Método da Transposição (ver [18]). Em virtude do método empregado, essa solução também é conhecida como solução por transposição.

Seja L o operador

$$Lw = w'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + b_i\frac{\partial w'}{\partial x_i} + \beta_i\frac{\partial w}{\partial x_i}. \tag{2.127}$$

definido em (2.67) e consideremos o problema

$$\begin{cases} Lw = 0 \text{ em } Q, \\ w = v \text{ sobre } \Sigma, \\ w(\cdot,0) = w^0(\cdot),\ w'(\cdot,0) = w^1(\cdot) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.128}$$

Primeiro, vamos definir a concepção de solução ultra-fraca do problema (2.128).

Seja z a solução do problema

$$\begin{cases} L^*z = h \text{ em } Q, \\ z = 0 \text{ em } \Sigma, \\ z(\cdot,T) = 0,\ z'(\cdot,T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.129}$$

Multipliquemos (2.127) por z e integramos em Q para obter

$$\iint\limits_Q Lw\ z\ dx\ dt = \iint\limits_Q w''z\ - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)z + b_i\frac{\partial w'}{\partial x_i}z + \beta_i\frac{\partial w}{\partial x_i}z\ dx\ dt. \tag{2.130}$$

Avaliemos separadamente cada termo do lado direito da igualdade acima. Integração por partes e o Teorema de Green nos fornecem que

- $$\begin{aligned} \iint\limits_Q w''z\ dx\ dt &= \int_\Omega [w'z]\big|_0^T\ dx - \iint\limits_Q w'z'\ dx\ dt \\ &= -\int_\Omega w'(0)z(0)\ dx - \iint\limits_Q w'z'\ dx\ dt \\ &= -\int_\Omega w'(0)z(0)\ dx - \int_\Omega [wz']\big|_0^T\ dx + \iint\limits_Q wz''\ dx\ dt \\ &= -\int_\Omega w'(0)z(0)\ dx + \int_\Omega w(0)z'(0)\ dx + \iint\limits_Q wz''\ dx\ dt; \end{aligned}$$

- $$\iint\limits_Q -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) z\ dx\ dt = \iint\limits_Q a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\ dx\ dt$$
$$= \iint\limits_\Sigma a_{ij} w \frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_j\ d\Gamma\ dt - \iint\limits_Q w\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)\ dx\ dt;$$

- $$\iint\limits_Q b_i \frac{\partial w'}{\partial x_i} z\ dx\ dt = \int_\Omega \left[b_i\frac{\partial w}{\partial x_i}z\right]\Bigg|_0^T\ dx - \iint\limits_Q [b_i z]'\frac{\partial w}{\partial x_i}\ dx\ dt$$
$$= -\int_\Omega b_i(0)\frac{\partial w}{\partial x_i}(0)z(0)\ dx - \iint\limits_Q [b_i z]'\frac{\partial w}{\partial x_i}\ dx\ dt$$
$$= -\int_\Omega b_i(0)\frac{\partial w}{\partial x_i}(0)z(0)\ dx + \iint\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z]' w\ dx\ dt;$$

- $$\iint\limits_Q \beta_i\frac{\partial w}{\partial x_i}z = -\iint\limits_Q w\frac{\partial}{\partial x_i}[\beta_i z]\ dx\ dt.$$

Substituindo as últimas quatro igualdades acima em (2.130), temos que

$$\iint\limits_Q Lw\ z\ dx\ dt = -\int_\Omega w'(0)z(0)\ dx + \int_\Omega w(0)z'(0)\ dx - \int_\Omega b_i(0)\frac{\partial w}{\partial x_i}(0)z(0)\ dx$$
$$+ \iint\limits_\Sigma w\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\ d\Gamma\ dt + \iint\limits_Q wh\ dx\ dt, \tag{2.131}$$

em que

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_A} = a_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_j. \tag{2.132}$$

Observação 2.7 *Se $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, pelo Teorema 2.2 e Observação 2.3, temos que a solução z do problema* (2.129) *verifica*

(i) $z \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$

(ii) $|z'(0)| + \|z(0)\| \leqslant C\displaystyle\int_0^T |h|\ dt$

De fato, a Observação 2.3 mostra que um problema com condições de contorno finais (em T, como (2.129)*) pode ser transformado em um problema com condições iniciais (análogo a* (2.25)*) usando $t \mapsto T-t$. A solução $\check{z}$ do problema* (2.65) *é relacionada à solução z do problema* (2.25)*, assim, a regularidade de $\check{z}$ é a mesma garantida pelo Teorema 2.2 para z. Portanto, a solução z do problema* (2.129) *também tem essa mesma regularidade, ou seja,*

$$z \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Ademais, avaliando o item (iii) do Teorema 2.2 com $t = T$ temos que

$$\frac{1}{2}|z'(T)|^2 + \frac{1}{2}a(T, z(T), z(T)) = E(0) + \frac{1}{2}\int_0^T a'(t, z, z)\ dt + \int_0^T (h, z')\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right) dt - \int_0^T (Pz, z')\ dt$$

Desde que $z(\cdot, T) = z'(\cdot, T) = 0$, tem-se

$$E(0) = -\frac{1}{2}\int_0^T a'(t, z, z)\ dt - \int_0^T (h, z')\ dt - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right) dt + \int_0^T (Pz, z')\ dt. \quad (2.133)$$

Note que, usando as condições (2.21) e o fato de que

$$|z'|^2 \leqslant 2E(t) \quad e \quad \alpha\|z\|^2 \leqslant a(t, z, z) \leqslant 2E(t),$$

podemos escrever que

- $-\frac{1}{2}\int_0^T a'(t, z, z)\ dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |a'_{ij}||\nabla z|^2\ dt \leqslant C\int_0^T E(t)\ dt;$
- $-\int_0^T (h, z')\ dt \leqslant \int_0^T |h||z'|\ dt \leqslant C\int_0^T |h|\ E^{1/2}(t)\ dt;$
- $-\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} z', z'\right)\ dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T \left|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right| |z'|^2\ dt \leqslant C\int_0^T E(t)\ dt;$
- $$\begin{aligned}\int_0^T (Pz, z')\ dt &\leqslant \int_0^T \left(|c||z'|^2 + |d_i||\nabla z||z'| + |f||z||z'|\right)\ dt \\ &\leqslant C\int_0^T \left(E(t) + \sqrt{E(t)}\sqrt{E(t)} + \sqrt{E(t)}\sqrt{E(t)}\right)\ dt \\ &\leqslant C\int_0^T E(t)\ dt.\end{aligned}$$

Pelas últimas quatro desigualdades, temos em (2.133), que

$$E(0) \leqslant C\int_0^T E(t) + |h|E^{1/2}(t)\ dt.$$

Pelo Teorema 1.13, segue que

$$\frac{1}{2}|z'(0)|^2 + \frac{1}{2}a(0, z(0), z(0)) \leqslant C\left(\int_0^T |h|\ dt\right)^2$$

e pela coercividade de $a(t, \cdot, \cdot)$, obtemos

$$|z'(0)|^2 + \|z(0)\|^2 \leqslant C\left(\int_0^T |h|\ dt\right)^2.$$

Usando o fato de que $a + b \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$*, com* $a, b > 0$*, tem-se*

$$|z'(0)| + \|z(0)\| \leqslant C \int_0^T |h| \ dt.$$

Observação 2.8 *Pelo Teorema 2.6 e Observação 2.5, vale que*

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma) \quad e \qquad \left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C \int_0^T |h| \ dt.$$

De fato, a inclusão $\dfrac{\partial z}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$ *é uma aplicação direta do Teorema 2.6. Além disso, pela Observação 2.5, tal resultado permanece válido quando o funcional de energia* E_0 *é substituído por* $E(T)$*. Assim, obtemos a estimativa*

$$\int_0^T \int_\Gamma \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma \, dt \ \leqslant \ C(T+1) \left[E(T) + \left(\int_0^T |h| \, dt \right)^2 \right] + C\sqrt{E(T)} \int_0^T |h| \, dt.$$

Como as condições finais impõem $z(\cdot, T) = z'(\cdot, T) = 0$*, é possível concluir que* $E(T) = 0$*. Substituindo essa informação na desigualdade anterior, obtemos*

$$\int_0^T \int_\Gamma \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma \, dt \ \leqslant C(T+1) \left(\int_0^T |h| \, dt \right)^2,$$

o que implica, de forma imediata, a estimativa final

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C \int_0^T |h| \ dt.$$

Esse resultado evidencia que a norma de traço normal de z *sobre* Σ *é controlada pelo termo de entrada* h*, ressaltando a coerência entre a energia do sistema e a ação do controle.*

Motivados por (2.129), (2.131), (2.132) e pelas Observações 2.7 e 2.8, introduzimos a seguinte definição:

Definição 2.3 ***(Solução por transposição)*** *Sejam*

$$w^0 \in L^2(\Omega), \quad w^1 \in H^{-1}(\Omega) \quad e \quad v \in L^2(\Sigma). \tag{2.134}$$

Dizemos que $w \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ *é solução ultra fraca (ou solução por transposição) do problema (2.128) com dados* w^0, w^1 *e* v *se*

$$\int_0^T (w, h) \ dt = \langle w^1, z(0) \rangle - \langle w^0, z'(0) \rangle - \left\langle \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}, z(0) \right\rangle - \int_0^T \left(v, \frac{\partial z}{\partial \nu_A} \right)_{L^2(\Gamma)} dt, \tag{2.135}$$

para toda $h \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$*, em que* z *está relacionada a* h *pelo problema (2.129).*

Teorema 2.8 (Existência e Unicidade) *Existe somente uma solução por transposição w do problema (2.128). Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C\left(|w^0| + \|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right). \tag{2.136}$$

Prova. Para demonstrar a existência da solução, consideremos a aplicação linear

$$\begin{aligned} S : L^1(0,T,L^2(\Omega)) &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \langle S, h\rangle \end{aligned}$$

definida por

$$\langle S,h\rangle = \langle w^1, z(0)\rangle - \langle w^0, z'(0)\rangle - \left\langle \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}, z(0)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\, H_0^1(\Omega)} - \int_0^T \left(v, \frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)_{L^2(\Gamma)} dt,$$

em que z é a solução fraca do problema (2.129).

Com base nas Observações 2.7 e 2.8, temos:

$$|\langle w^1, z(0)\rangle| \leqslant \|w^1\|_{H^{-1}}\|z(0)\| \leqslant C\|w^1\| \int_0^T |h|\ dt$$

e

$$|(w^0, z'(0))| \leqslant |w^0||z'(0)| \leqslant C|w^0| \int_0^T |h|\ dt.$$

Usando o Teorema de Green e a mesma estratégia empregada, no terceiro termo, obtemos

$$\begin{aligned} \left| - \left\langle \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}, z(0)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\, H_0^1(\Omega)} \right| &\leqslant 2\frac{\tau}{k_0} M \int_\Omega |w^0| \left|\frac{\partial z(0)}{\partial x_i}\right|\ dx \\ &\leqslant C \int_\Omega |w^0||\nabla z(0)|\ dx \\ &\leqslant C|w^0|\|z(0)\| \\ &\leqslant C|w^0| \int_0^T |h|\ dt. \end{aligned}$$

Ademais, aplicando a desigualdade de Cauchy–Schwarz no quarto termo e a Observação 2.8, segue que

$$\left|\int_0^T \left(v, \frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)_{L^2(\Gamma)} dt\right| \leqslant \|v\|_{L^2(\Sigma)} \left\|\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\|v\|_{L^2(\Sigma)} \int_0^T |h|\ dt.$$

Assim, pela formulação (2.135), conclui-se que

$$\left|\int_0^T (w,h)\ dt\right| \leqslant C\left(|w^0| + \|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right) \int_0^T |h|\ dt, \quad \forall\, h \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Usando a definição de norma em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, que é dada por dualidade

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{\substack{h\in L^1(0,T;L^2(\Omega))\\ h\neq 0}} \frac{\left|\int_0^T (w,h)\ dt\right|}{\int_0^T |h|\ dt},$$

tem-se que

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C\left(|w^0| + \|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right),$$

com C independe de w, garantindo (2.136).

Portanto, S é linear e contínuo. Pelo Teorema 1.5, existe $w \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ tal que

$$\langle S,h\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\,L^1(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T (w,h)\,dt, \quad \forall\, h\in L^1(0,T,L^2(\Omega)).$$

Essa função w constitui, portanto, a solução do problema (2.135).

Para a unicidade, suponhamos que existem w_1 e w_2 soluções por transposição de (2.128). Desde que ambas satisfazem (2.135), tem-se

$$\int_0^T (w_1,h)\ dt - \int_0^T (w_2,h)\ dt = 0, \quad \forall\, h\in L^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\int_0^T (w_1 - w_2,h)\ dt = 0, \quad \forall\, h\in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Portanto, $w_1 - w_2 = 0$, isto é, $w_1 = w_2$.

■

Com o objetivo de provar a regularidade das soluções por transposição, introduzimos um resultado prévio.

Seja $h\in\mathcal{D}(Q)$ e z a solução fraca do problema

$$\begin{cases} L^*z = h' \text{ em } Q,\\ z = 0 \text{ sobre } \Sigma,\\ z(\cdot,0) = 0, z'(\cdot,0) = 0 \text{ em } \Omega.\end{cases} \tag{2.137}$$

Pelo Teorema 2.3 temos que z verifica a estimativa

$$\|z(t)\| + |z'(t) - h(t)| \leqslant C\int_0^T \|h\|\ dt,\ \forall\, t\in[0,T], \tag{2.138}$$

em que C é uma constante que independe de z e h. Pelo Teorema 2.6 nós obtemos de (2.137) que $\dfrac{\partial z}{\partial \nu}\in L^2(\Sigma)$.

Lema 2.6 *A solução z de (2.137) com $h \in \mathcal{D}(Q)$, verifica*

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C \int_0^T \|h\| \; dt$$

em que C é uma constante independente de z e h.

Prova. Temos pelo Teorema 2.5 que z verifica a identidade (2.75). No que segue, limitaremos cada termo desta identidade por

$$C \left(\int_0^T \|h\| \; dt \right)^2, \tag{2.139}$$

em que C independe de z e h. Para o primeiro termo, utilizando as mesmas estratégias realizadas para obter (2.93), temos que

$$\begin{aligned} \left(z' + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} \right) &\leqslant C \left(|z'||\nabla z| + |z||\nabla z| + |\nabla z|^2 \right) \\ &\leqslant C \left(|z'|\|z\| + \|z\|^2 \right). \end{aligned} \tag{2.140}$$

Desde que $|z'| - |h| \leqslant |z' - h|$, pela estimativa (2.138) podemos obter

$$\begin{aligned} |z'(T)| &\leqslant C \int_0^T \|h\| \; dt + |h| \\ &\leqslant C \int_0^T \|h\| \; dt + \|h\| \end{aligned}$$

e integrando de 0 a T em ambos lados, temos

$$|z'(T)| \leqslant C \int_0^T \|h\| \; dt. \tag{2.141}$$

Assim, sendo $z(0) = z'(0) = 0$ e usando (2.141) e (2.138) em (2.140), tem-se

$$\begin{aligned} \left(z' + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1}[b_1 z], q \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \Bigg|_0^T &\leqslant C \left[|z'(T)||z(T)| + \|z(T)\|^2 \right] \\ &\leqslant C \left[\left(\int_0^T \|h\| dt \right)^2 + \left(\int_0^T \|h\| dt \right)^2 \right] \\ &\leqslant C \left(\int_0^T \|h\| dt \right)^2. \end{aligned} \tag{2.142}$$

No segundo termo podemos escrever que

$$\frac{1}{2} \iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \left((z')^2 - a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} (z')^2 - \frac{1}{2} \iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

e usando $(z')^2 = (z' - h)^2 + 2h(z' - h) + h^2$, obtemos

$$\frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\left((z')^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}(z'-h)^2 + \iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}h(z'-h)$$
$$+\frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}h^2 - \frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}. \tag{2.143}$$

Por outro lado, usando integração por partes e o Teorema de Green no último termo de (2.75), temos que

$$-\iint h' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} = \iint h q_\ell \frac{\partial z'}{\partial x_\ell} = -\iint \frac{\partial h}{\partial x_\ell} q_\ell z' - \iint h\frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} z'$$

e usando $z' = (z'-h) + h$, obtemos

$$-\iint h' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} = -\iint \frac{\partial h}{\partial x_\ell} q_\ell (z'-h) - \iint \frac{\partial h}{\partial x_\ell} q_\ell h - \iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} h(z'-h) - \iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} h^2. \tag{2.144}$$

Pelo Lema 2.2, temos que a segunda e a última integrais do lado direito da igualdade acima somam

$$-\frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} h^2,$$

e assim, em (2.144), segue que

$$-\iint h' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} = -\iint \frac{\partial h}{\partial x_\ell} q_\ell (z'-h) - \frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} h^2 - \iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} h(z'-h). \tag{2.145}$$

Somando (2.143) e (2.145) obtemos

$$\frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\left((z')^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) - \iint h' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} = \frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}(z'-h)^2 - \iint \frac{\partial h}{\partial x_\ell} q_\ell (z'-h)$$
$$-\frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}. \tag{2.146}$$

Note que, usando (2.21), (2.92) e (2.138) podemos estimar os termos do lado direito da desigualdade acima como a seguir

- $\displaystyle \frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}(z-h)^2 \leqslant C\int_0^T |z'-h|^2 dt \leqslant C\int_0^T \left(\int_0^T \|h\| dt\right)^2 dt \leqslant C\left(\int_0^T \|h\|\, dt\right)^2;$

- $\displaystyle \left|\iint \frac{\partial h}{\partial x_\ell} q_\ell (z'-h)\right| \leqslant C\iint |\nabla h||z'-h| \leqslant C\int_0^T \|h\||z'-h|\, dt \leqslant C\left(\int_0^T \|h\|\, dt\right)^2;$

- $\displaystyle \left|\frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| \leqslant C\iint |\nabla z|^2 \leqslant C\int_0^T \|z\|^2\, dt \leqslant C\left(\int_0^T \|h\|\, dt\right)^2.$

Dessa forma, em (2.146), temos

$$\frac{1}{2}\iint \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}\left((z')^2 - a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) - \iint h' q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} \leqslant C\left(\int_0^T \|h\|\,dt\right)^2. \tag{2.147}$$

Seguindo de forma análoga, para o terceiro e quarto termo obtemos

$$\bullet\ (n+1)\iint \frac{(k')^2}{k^2} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} q_\ell \frac{\partial z}{\partial x_\ell} \leqslant (n+1)\frac{\tau^2}{k_0^2} MC \iint |\nabla z|^2 \leqslant C\left(\int_0^T \|h\|\,dt\right)^2; \tag{2.148}$$

$$\bullet\ \iint a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} \leqslant C\iint |\nabla z|^2 \leqslant C\left(\int_0^T \|h\|\,dt\right)^2. \tag{2.149}$$

Usando que $z' = (z'-h) + h$ no quinto termo do lado direito de (2.75) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} q_\ell z' &= \frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} q_\ell (z'-h) + \frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} q_\ell h \\
&\leqslant C\int_0^T |\nabla z||z'-h|\,dt + C\int_0^T |\nabla z||h|\,dt \\
&\leqslant C\int_0^T \|z\||z'-h|\,dt + C\int_0^T \|z\|\|h\|\,dt,
\end{aligned}$$

e por (2.138) nesta última desigualdade, concluimos que

$$\frac{1}{2}\iint \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_\ell} q_\ell z' \leqslant C\left(\int_0^T \|h\|\,dt\right)^2. \tag{2.150}$$

Utilizando as mesmas estratétigas nos demais termos, usando a igualdade $z' = (z' - h) + h$ e (2.138), obtemos que estes são estimados por (2.139). Portanto, por (2.99), (2.142) e (2.147) - (2.150), segue na identidade (2.75), que

$$\frac{a_0}{2}\int_0^T \int_\Gamma \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt \leqslant C\left(\int_0^T \|h\|\,dt\right)^2,$$

ou seja,

$$\left\|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\int_0^T \|h\|\,dt.$$

■

Teorema 2.9 *Toda solução por transposição w do problema (2.128) tem a regularidade*

$$w \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$$

e a aplicação linear

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma) &\longrightarrow C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)) \\ \{w^0, w^1, v\} &\longmapsto w \end{aligned}$$

é contínua.

Prova. Primeiro vamos provar que $w \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Para isso, fixamos $w^0 \in L^2(\Omega)$, $w^1 \in H^{-1}(\Omega)$ e $v \in L^2(\Sigma)$. Sejam $(w^0_\mu) \subset H^1_0(\Omega)$, $(w^1_\mu) \subset L^2(\Omega)$ e $(v_\mu) \subset H^2_0(0,T;H^2(\Gamma))$ tais que

$$w^0_\mu \longrightarrow w^0 \text{ em } L^2(\Omega), \quad w^1_\mu \longrightarrow w^1 \text{ em } H^{-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad v_\mu \longrightarrow v \text{ em } L^2(\Sigma). \tag{2.151}$$

Considere γ a função traço sobre Γ. Pela sobrejetividade de γ garantida pelo Teorema 1.3, temos que para o traço $\{v_\mu, 0\}$, com $v_\mu \in L^2(\Sigma)$, existe $\widehat{v}_\mu \in H^2_0(0,T;H^2(\Omega))$ tal que

$$\widehat{v}_\mu\Big|_\Sigma = v_\mu \quad \text{e} \quad \frac{\partial \widehat{v}_\mu}{\partial \nu}\Big|_\Sigma = 0,$$

ou seja, $\gamma\widehat{v}_\mu = \{v_\mu, 0\}$. Ademais, seja y_μ a solução do problema

$$\begin{cases} Ly = -L\widehat{v}_\mu \text{ em } Q, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) = w^0_\mu(\cdot),\ y'(\cdot,0) = w^1_\mu(\cdot) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.152}$$

Afirmação 2.2 *Pelo Teorema 2.2,*

$$y_\mu \in C([0,T];H^1_0(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Para concluir esta regularidade usando o Teorema 2.2, basta mostrar que $-L\widehat{v}_\mu \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, pois já temos que $w^0_\mu \in H^1_0(\Omega)$ e $w^1_\mu \in L^2(\Omega)$. Sendo assim, avaliemos cada termo do operador

$$L\widehat{v}_\mu = \widehat{v}''_\mu - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \widehat{v}_\mu}{\partial x_j}\right) + b_i\frac{\partial \widehat{v}'_\mu}{\partial x_i} + \beta_i\frac{\partial \widehat{v}_\mu}{\partial x_i}. \tag{2.153}$$

Desde que

$$\widehat{v}_\mu \in H^2_0(0,T;H^2(\Omega)), \tag{2.154}$$

obtemos

$$\widehat{v}''_\mu \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Ademais, por (2.21) e (2.154) podemos perceber que as implicações a seguir são verdadeiras para todo $t \in [0,T]$.

- $\widehat{v}_\mu(t) \in H^2(\Omega) \Rightarrow \dfrac{\partial \widehat{v}_\mu(t)}{\partial x_j} \in H^1(\Omega) \Rightarrow a_{ij}(t)\dfrac{\partial \widehat{v}_\mu(t)}{\partial x_j} \in H^1(\Omega)$
  $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t)\dfrac{\partial \widehat{v}_\mu(t)}{\partial x_j}\right) \in L^2(\Omega);$

- $\widehat{v}'_\mu \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \Rightarrow \widehat{v}'_\mu(t) \in H^2(\Omega) \Rightarrow \dfrac{\partial \widehat{v}'_\mu(t)}{\partial x_i} \in H^1(\Omega) \Rightarrow b_i(t)\dfrac{\partial \widehat{v}_\mu(t)}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$
  $\Rightarrow b_i(t)\dfrac{\partial \widehat{v}_\mu(t)}{\partial x_i} \in L^2(\Omega);$

- $\widehat{v}_\mu(t) \in H^2(\Omega) \Rightarrow \dfrac{\partial \widehat{v}_\mu(t)}{\partial x_i} \in H^1(\Omega) \Rightarrow \beta_i(t)\dfrac{\partial \widehat{v}_\mu(t)}{\partial x_i} \in H^1(\Omega) \Rightarrow \beta_i(t)\dfrac{\partial \widehat{v}_\mu(t)}{\partial x_i} \in L^2(\Omega).$

Assim, os últimos três termos do lado direito de (2.153) pertencem a $H_0^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, $-L\widehat{v}_\mu \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Afirmação 2.3 *A soma $w_\mu = y_\mu + \widehat{v}_\mu$ é a solução por transposição do problema (2.128) com dados w_μ^0, w_μ^1 e v_μ. Além disso, $w_\mu \in C([0,T];L^2(\Omega))$.*

Essa afirmação é consequência direta da construção de y_μ e $\widehat{v}_\mu$. De fato, temos que

$$Lw_\mu = L(y_\mu + \widehat{v}_\mu) = Ly_\mu + L\widehat{v}_\mu = -L\widehat{v}_\mu + L\widehat{v}_\mu = 0$$

Além disso, sobre Σ, segue que $y_\mu = 0$ e pelo traço, $\widehat{v}_\mu = v_\mu$. Daí,

$$w_\mu = y_\mu + \widehat{v}_\mu = v_\mu \text{ sobre } \Sigma.$$

E ainda, por (2.154) temos

$$\begin{aligned} w_\mu(0) &= y_\mu(0) + \widehat{v}_\mu(0) = w_\mu^0 + 0 = w_\mu^0 \\ w'_\mu(0) &= y'_\mu(0) + \widehat{v}'_\mu(0) = w_\mu^1 + 0 = w_\mu^1. \end{aligned}$$

Logo, w_μ é solução de (2.128). Além disso, pela afirmação anterior temos

$$y_\mu \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \subset C([0,T];L^2(\Omega))$$

e de (2.154), tem-se $\widehat{v}_\mu \in L^2(0,T;L^2(\Omega)$ e $\widehat{v}'_\mu \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Pelo Teorema 1.8 , obtemos

$$\widehat{v}_\mu \in C([0,T];L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$w_\mu \in C([0,T];L^2(\Omega)).$$

Afirmação 2.4 $w \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Desde que w e w_μ são soluções por transposição do problema (2.128) com dados w^0, w^1, v e w^0_μ, w^1_μ, v_μ, respectivamente, tem-se que $w - w_\mu$ é solução por transposição de (2.128) com dados $w^0 - w^0_\mu$, $w^1 - w^1_\mu$ e $v - v_\mu$. Logo, $w - w_\mu$ satisfaz (2.136), ou seja,

$$\|w - w_\mu\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C \left(\|w^0 - w^0_\mu\| + \|w^1 - w^1_\mu\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v - v_\mu\|_{L^2(\Sigma)} \right).$$

Tomando o limite quando $\mu \to \infty$ e considerando as convergências (2.151), temos que

$$w_\mu \to w \text{ em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

Como $C([0,T]; L^2(\Omega))$ é um subespaço fechado de $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, segue que

$$w \in C([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Agora, considere $h \in \mathcal{D}(Q)$ e z a solução fraca do problema

$$\begin{cases} L^* z = h' \text{ em } Q, \\ z = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot, T) = 0, \; z'(\cdot, T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.155}$$

Pelo Teorema 2.3 e a Observação 2.3, temos

$$\|z(t)\| + |z'(t) - h(t)| \leqslant C \int_0^T \|h\|\, dt, \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.156}$$

e pelo Lema 2.6,

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C \int_0^T \|h\|\, dt. \tag{2.157}$$

As constantes em (2.156) e (2.157) são independentes de z e h.

Como $w \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T; L^2(\Omega))$, temos $w' \in H^{-1}(0,T; L^2(\Omega))$. Ademais, pelo Teorema de Green, segue que

$$\langle w', h \rangle = -\int_0^T (w, h')\; dt.$$

Como w é uma solução por transposição do problema (2.128), temos de (2.155), que

$$\int_0^T (w, h')\; dt = \left\langle w^1, z(0) \right\rangle - \left(w^0, z'(0) \right) - \left\langle \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}, z(0) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)}$$
$$- \int_0^T \left(v, \frac{\partial z}{\partial \nu_A} \right)_{L^2(\Gamma)} dt.$$

Pelas estimativas (2.156) e (2.157), de modo análogo ao realizado para mostrar (2.136), verificamos que

$$|\langle w', h\rangle| = \left|\int_0^T \langle w, h'\rangle \; dt\right| \leqslant C\left(\|w^0\| + \|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right)\int_0^T \|h\| \; dt, \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pela densidade de $\mathcal{D}(Q)$ em $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, a desigualdade acima vale para toda função $h \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Daí,

$$\|w'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C\left(\|w^0\| + \|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right), \tag{2.158}$$

ou seja, $w \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Usando argumentos similares aos realizados na primeira parte da demonstração e notando que $w'_\mu = y'_\mu + \hat{v}'_\mu \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$, pois

- $y_\mu \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$, o que implica que $y'_\mu \in C([0,T];L^2(\Omega))$, e então $y'_\mu \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$;
- $\hat{v}_\mu \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$, daí, $\hat{v}'_\mu \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ e pelo Teorema 1.8, $\hat{v}'_\mu \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Assim, concluímos que $w' \in C([0,T];\, H^{-1}(\Omega))$, ou seja,

$$w \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

Por fim, avaliemos a continuidade da aplicação linear

$$B : X \longrightarrow Y,$$

em que $X = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ e $Y = C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$, com $B\{w^0, w^1, v\} = w$. Consideremos as normas a seguir:

$$\|\{w^0, w^1, v\}\|_X = |w^0| + \|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}$$

e

$$\|w\|_Y = \sup_{t\in[0,T]} |w(t)| + \sup_{t\in[0,T]} \|w'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

De (2.136) e (2.158) tem-se

$$\sup_{t\in[0,T]} |w(t)| \leqslant C\left(|w^0| + \|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right)$$

e

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C\left(|w^0| + \|w^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\right).$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$. Então, para quaisquer dados $\{w^0, w^1, v\}$ e $\{\tilde{w}^0, \tilde{w}^1, \tilde{v}\}$ com

$$\|\{w^o, w^1, v\} - \{\tilde{w}^0, \tilde{w}^1, \tilde{v}\}\|_X = \|\{w^0 - \tilde{w}^0, w^1 - \tilde{w}^1, v - \tilde{v}\}\|_X < \delta,$$

temos que

$$\begin{aligned}
\|B\{w^0, w^1, v\} - B\{\tilde{w}^0, \tilde{w}^1, \tilde{v}\}\|_Y &= \|B\{w^0 - \tilde{w}^0, w^1 - \tilde{w}^1, v - \tilde{v}\}\|_Y \\
&= \|w - \tilde{w}||_Y \\
&= \sup_{t\in[0,T]} |w(t) - \tilde{w}(t)| + \sup_{t\in[0,T]} \|w'(t) - \tilde{w}'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
&\leqslant C\left(|w^0 - \tilde{w}^0| + \|w^1 - \tilde{w}^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Sigma)}\right) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, B é contínua. ■

Observação 2.9 *Também podemos definir a solução por transposição w do problema reverso*

$$\begin{cases} Lw = 0 \ \ em \ Q, \\ w = v \ \ sobre \ \Sigma, \\ w(\cdot, T) = w^0(\cdot), \ w'(\cdot, T) = w^1(\cdot) \ \ em \ \Omega. \end{cases}$$

de maneira similar à obtida no problema (2.128). Além disso, O Teorema 2.9, de regularidade da solução por transposição, permanece válido para essa solução w. Isso é uma consequência das Observações 2.3 e 2.5.

Capítulo 3

Controlabilidade Exata

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar a controlabilidade exata da equação da onda no domínio cilindrico Q, com controle localizado em uma porção da fronteira. Para isso, utilizaremos o método HUM (Hilbert Uniqueness Method), idealizado por J.-L. Lions (ver [13], [15]). Essa metodologia fundamenta-se em um critério de unicidade e na construção de um espaço de Hilbert adequado, levando em consideração as propriedades das soluções da equação da onda apresentadas no Capítulo 2.

3.1 Descrição do problema

Inicialmente, resolveremos o problema da controlabilidade exata do sistema sobre o cilindro Q, a saber:

$$\begin{cases} w'' - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial w'}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \text{ em } Q, \\ w = v \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ w(\cdot,0) = w^0(\cdot), w'(\cdot,0) = w^1(\cdot) \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Após isso, no Capítulo 4, obteremos o resultado da controlabilidade exata para o problema sobre o domínio não-cilíndrico $\widehat{Q}$:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ em } \widehat{Q}, \\ u = g \;\text{ sobre }\; \widehat{\Sigma}, \\ u(\cdot,0) = u^0(\cdot), u'(\cdot,0) = u^1(\cdot) \text{ em } \Omega_0. \end{cases}$$

3.2 Controlabilidade exata no domínio cilíndrico

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} Lw = 0 \text{ em } Q, \\ w = \begin{cases} v & \text{sobre } \Sigma(x^0), \\ 0 & \text{sobre } \Sigma \backslash \Sigma(x^0), \end{cases} \\ w(\cdot, 0) = w^0(\cdot), \; w'(\cdot, 0) = w^1(\cdot) \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\Sigma(x^0)$ é uma parte de Σ, com medida positiva tal que $\overline{\Sigma(x^0)} \cap \overline{\Sigma \backslash \Sigma(x^0)} = \varnothing$.

Observação 3.1 *Tendo em conta que o sistema pode ser controlado na fronteira, é razoável tentar resolver o problema quando o controle atua somente sobre uma parte desta. Esse problema, além de mais interessante, permite minimizar um certo custo que surge de maneira natural. Dessa forma, consideraremos o caso em que o controle atua únicamente sobre o subconjunto $\Sigma(x^0)$ de Σ. Portanto, trata-se de um problema de controlabilidade exata na fronteira com controle localizado.*

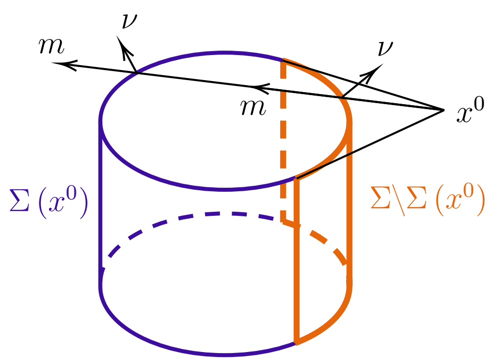

Figura 3.1: Porção da fronteira $\Sigma(x^0)$ em azul, onde acionamos o controle.

Formulação do Problema

O problema de controlabilidade exata pode ser formulado como segue: Dado $T > 0$ suficientemente grande, encontrar um espaço de Hilbert apropriado H tal que para quaisquer dados iniciais $\{w^0, w^1\} \in H$, exista um controle $v \in L^2(\Sigma(x^0))$, tal que a solução de (2.12) cumpra a condição de equilíbrio

$$w(\cdot, T, v) = 0 \quad \text{e} \quad w'(\cdot, T, v) = 0.$$

Observação 3.2 *Como a velocidade de propagação das ondas é finita, para que se tenha controle exato, o tempo T deverá ser suficientemente grande.*

Agora, iremos enunciar e provar o principal resultado para controlabilidade exata de (2.12).

Teorema 3.1 *Assumimos que as hipóteses* (H_1)-(H_4) *são satisfeitas. Seja* $T > T_0$. *Então, para cada dado inicial* $\{w^0, w^1\}$ *pertencente a* $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *existe um controle* $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ *tal que a solução por transposição* w *do problema (3.1) satisfaz*

$$w(\cdot, T) = 0, \quad w'(\cdot, T) = 0.$$

Prova. Seja φ a solução fraca do problema

$$\begin{cases} L^*\varphi = 0 \text{ em } Q, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi^0(\cdot), \ \varphi'(\cdot, 0) = \varphi^1(\cdot) \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

com $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Pelos Teoremas 2.2, 2.6 e 2.7 tem-se

$$\varphi \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma),$$

e

$$C_1(T - T_0)E_0 \leqslant \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))} \leqslant C_2(T+1)E_0, \tag{3.3}$$

em que C_1 e C_2 são constantes que independem de φ.

Com φ contruimos a solução por transposição ψ para o problema

$$\begin{cases} L\psi = 0 \text{ em } Q, \\ \psi = \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} & \text{sobre } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sobre } \Sigma \backslash \Sigma(x^0), \end{cases} \\ \psi(\cdot, T) = 0, \psi'(\cdot, T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Então, pelo Teorema 2.9 e Observação 2.9,

$$\psi \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega)).$$

Multiplicando $L\psi$ por φ e integrando em Q, obtemos, seguindo de modo análogo ao realizado para obter (2.135), que

$$\begin{aligned} \langle L\psi, \varphi \rangle = &- \left\langle \psi'(0) - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial \psi(0)}{\partial x_i}, \varphi^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (\psi(0), \varphi^1) \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_A} \, d\Gamma \, dt + \langle \psi, L^* \varphi \rangle. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Desde que $L\psi = L^*\varphi = 0$ em Q, a igualdade acima implica que

$$\left\langle \psi'(0) - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial \psi(0)}{\partial x_i}, \varphi^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\, H_0^1(\Omega)} - (\psi(0), \varphi^1) = \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \nu_j \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\Gamma\, dt. \quad (3.6)$$

Esta última expressão induz a introdução do seguinte operador:

$$\begin{aligned} \Lambda : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ \{\varphi^0, \varphi^1\} &\longmapsto \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \left\{ \psi'(0) - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial \psi(0)}{\partial x_i}, -\psi(0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Afirmação 3.1 *O operador Λ satisfaz*

$$a_0 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))} \leqslant \left\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \right\rangle \leqslant a_1 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))}.$$

De fato, de (3.6), tem-se que

$$\begin{aligned} \langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle &= \left\langle \psi'(0) - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial \psi(0)}{\partial x_i}, \varphi^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\, H_0^1(\Omega)} - (\psi(0), \varphi^1) \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \nu_j \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\Gamma\, dt. \end{aligned}$$

Recordando que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \Gamma,$$

temos que

$$\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle = \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij} \nu_i \nu_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma\, dt.$$

Usando o item (i) do Lema 2.4 e lembrando que $\nu_i^2 = |\nu|^2 = 1$, obtemos

$$\int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma\, dt \leqslant \langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle \leqslant \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma\, dt,$$

ou seja,

$$a_0 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))} \leqslant \left\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \right\rangle \leqslant a_1 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))}.$$

Afirmação 3.2 *Λ é injetivo.*

Para isso, mostremos que $\ker(\Lambda) = \{0, 0\}$. Suponhamos que $\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{0, 0\}$, então a Afirmação 3.1 e (3.3) implicam que

$$a_0 C_1 (T - T_0) E_0 \leqslant \langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle = 0.$$

Desde que $C_1, a_0, (T - T_0) > 0$, nos resta que $E_0 \leqslant 0$. Assim, pela coercividade de $a(t,\cdot,\cdot)$, obtemos

$$0 \geqslant E_0 = \frac{1}{2}|\varphi^1|^2 + \frac{1}{2}a(0,\varphi^0,\varphi^0) \geqslant \frac{1}{2}|\varphi^1|^2 + \frac{\alpha}{2}\|\varphi^0\|^2.$$

Portanto, $|\varphi^1| = \|\varphi^0\| = 0$, ou seja, $\{\varphi^0,\varphi^1\} = \{0,0\}$. O que nos permite concluir que $\ker(\Lambda) = \{0,0\}$ e consequentemente, a injetividade do operador Λ.

Afirmação 3.3 *Λ é coercivo.*

Com efeito, em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ consideremos a norma

$$\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} = \|\varphi^0\|^2 + |\varphi^1|^2.$$

Novamente pela Afirmação 3.1 e por (3.3), existe uma constante C tal que

$$CE_0 \leqslant \langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\}, \{\varphi^0,\varphi^1\}\rangle.$$

Daí, segue da coercividade de $a(t,\cdot,\cdot)$, que

$$\begin{aligned}\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\}, \{\varphi^0,\varphi^1\}\rangle &\geqslant C\left(\frac{|\varphi^1|^2}{2} + \frac{\|\varphi^0\|^2}{2}\right)\\ &\geqslant C(|\varphi^1|^2 + \|\varphi^0\|^2)\\ &\geqslant C\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Assim, Λ é coercivo.

Afirmação 3.4 *Λ é auto-adjunto.*

De fato, com $\{\widehat{\varphi}^0,\widehat{\varphi}^1\}$ determinamos a solução fraca $\widehat{\varphi}$ do problema (3.2) e com $\dfrac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\nu}$, a solução por transposição $\widehat{\psi}$ do problema (3.4). Se desenvolvermos $\langle L\psi, \widehat{\varphi}\rangle$, obtemos, assim como (3.5), que

$$\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\}, \{\widehat{\varphi}^0,\widehat{\varphi}^1\}\rangle = \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij}\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial x_i}\nu_j\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, d\Gamma\, dt$$

e desenvolvendo $\langle L\widehat{\psi}, \varphi\rangle$,

$$\langle \Lambda\{\widehat{\varphi}^0,\widehat{\varphi}^1\}, \{\varphi^0,\varphi^1\}\rangle = \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\nu_j\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\nu}\, d\Gamma\, dt.$$

Desde que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \nu_i\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ sobre Γ, tem-se

$$\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\}, \{\widehat{\varphi}^0,\widehat{\varphi}^1\}\rangle = \langle \Lambda\{\widehat{\varphi}^0,\widehat{\varphi}^1\}, \{\varphi^0,\varphi^1\}\rangle.$$

Dessa forma, Λ é auto-adjunto.

Afirmação 3.5 Λ *é contínuo.*

Consideremos $\widehat{\varphi}$ conforme estabelecida na demonstração da Afirmação 3.4. Usando o item (i) do Lema 2.4 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\begin{aligned}\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\widehat{\varphi}^0,\widehat{\varphi}^1\}\rangle &= \int_0^T\int_{\Gamma(x^0)} a_{ij}\nu_i\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\nu_j\,d\Gamma\,dt\\ &\leqslant \int_0^T\int_{\Gamma(x^0)} a_1\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\Gamma\,dt\\ &\leqslant a_1\left\|\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}\end{aligned}$$

e por (3.3),

$$\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\widehat{\varphi}^0,\widehat{\varphi}^1\}\rangle \leqslant a_1\sqrt{C_2(T+1)}\sqrt{E_{0\widehat{\varphi}}}\sqrt{C_2(T+1)}\sqrt{E_{0\varphi}}. \tag{3.8}$$

Usando a continuidade de $a(t,\cdot,\cdot)$, podemos escrever que

$$\begin{aligned}E_{0\varphi} &= \frac{1}{2}|\varphi^1|^2+\frac{1}{2}a(0,\varphi^0,\varphi^0)\\ &\leqslant \frac{1}{2}|\varphi^1|^2+\frac{C}{2}\|\varphi^0\|^2\\ &\leqslant C\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

e portanto, em (3.8) temos que

$$\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\widehat{\varphi}^0,\widehat{\varphi}^1\}\rangle \leqslant C\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\|\{\widehat{\varphi}^0,\widehat{\varphi}^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}.$$

Assim, Λ é contínuo.

Afirmação 3.6 Λ *é sobrejetivo.*

Considerando as Afirmações 3.3 e 3.5 e tomando $p(u,v)=\langle\Lambda u,v\rangle$, para todo $u,v\in H=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ no Teorema 1.4, temos que dado $f\in H'=H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)$, obtemos único $u=\{\varphi^0,\varphi^1\}\in H=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle\Lambda u,v\rangle=\langle f,v\rangle;\quad \forall v\in H,$$

ou seja,

$$\Lambda u=f,$$

concluindo a sobrejetividade.

Pelo Teorema 1.6 temos que Λ é um isomorfismo de $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ para $H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Assim, para qualquer $\{w^0, w^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, tomando em $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ o par

$$\left\{w^1 - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}, -w^0\right\},$$

existe único $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \left\{w^1 - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}, -w^0\right\}.$$

Pela definição do operador Λ temos que

$$\left\{\psi'(0) - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial \psi(0)}{\partial x_i}, -\psi(0)\right\} = \left\{w^1 - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}, -w^0\right\}.$$

Identificando coordenada a coordenada, temos $\psi(\cdot, 0) = w^0(\cdot)$ e $\psi'(\cdot, 0) = w^1(\cdot)$. Além disso, pela construção do problema (3.4) temos as condições $\psi(\cdot, T) = 0$ e $\psi'(\cdot, T) = 0$.

Com $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ obtida pelo Teorema 1.6 determinamos a solução fraca φ para o problema (3.2) e com $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu}$, a solução por transposição ψ do problema (3.4). Desde que $\psi(\cdot, 0) = w^0(\cdot)$ e $\psi'(\cdot, 0) = w^1(\cdot)$, tomando o controle $v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma(x^0))$, temos que ψ é solução por transposição de (3.1). Pela unicidade, $\psi = w$, e portanto,

$$w(\cdot, T) = w'(\cdot, T) = 0.$$

■

Capítulo 4

Equivalência de Controlabilidade

Nesse capítulo, mostraremos a equivalência da controlabilidade exata para a equação da onda no cilindro Q e no não cilindro $\widehat{Q}$. As coordenadas em Q são (x,t) e em $\widehat{Q}$ são (y,t), com a relação $y = k(t)x$.

Consideremos os espaços funcionais introduzidos no início do Capítulo 2, bem como os espaços caracterizados no Apêndice B, a saber: $L^p(0,T;H_0^m(\Omega_t))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; $L^{p'}(0,T;H^{-m}(\Omega_t))$ para $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$; $C([0,T];H_0^m(\Omega_t))$ e os espaços de funções contínuas $C([0,T];H^{-m}(\Omega_t))$, onde m é um inteiro positivo.

Representaremos por $\eta = (\eta_y, \eta_t)$ o vetor normal unitário a $\widehat{\Sigma}$, direcionado para o exterior de $\widehat{Q}$ e por ν^* o vetor $\nu^* = \dfrac{\eta_y}{|\eta_y|}$.

Lema 4.1 *O vetor normal unitário $\eta(y,t)$ para $(y,t) \in \widehat{\Sigma}$, direcionado para o exterior de $\widehat{Q}$, tem a forma*

$$\eta(y,t) = \frac{\{\nu(x), -k'(t)(x\cdot\nu(x))\}}{\sqrt{1+(k'(t))^2\,|(x\cdot\nu(x))|^2}}, \quad x = \frac{y}{k(t)}.$$

Prova. Fixemos $(y,t) \in \widehat{\Sigma}$. Seja $\varphi = 0$ uma parametrização de uma parte U de Γ, U contendo $x = \dfrac{y}{k(t)}$, com $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (k(t)x_1, k(t)x_2, \cdots, k(t)x_n)$. Então a parametrização de uma parte V de $\widehat{\Sigma}$, $(y,t) \in V$, é $\Psi(y,t) = \varphi\left(\dfrac{y}{k(t)}\right) = 0$.

Daí, note que, usando a regra da cadeia para funções de várias variáveis, temos que a derivada parcial em relação a variável espacial de Ψ é dada por

$$\nabla_y \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{k(t)}\nabla\varphi,$$

e em relação a variável temporal é

$$\nabla_t \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{k'(t)}{k^2(t)} y_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{k'(t)}{k(t)} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{k'(t)}{k(t)}(x\cdot\nabla\varphi).$$

Assim, temos

$$\nabla\Psi(y,t) = \frac{1}{k(t)}\{\nabla\varphi(x), -k'(t)(x\cdot\nabla\varphi(x))\}.$$

Daí,

$$|\nabla\Psi(y,t)| = \frac{1}{k(t)}\sqrt{|\nabla\varphi(x)|^2 + (k'(t))^2\,|(x\cdot\nabla\varphi(x))|^2},$$

e então

$$\eta(y,t) = \frac{\nabla\Psi(y,t)}{|\nabla\Psi(y,t)|} = \frac{\{\nabla\varphi(x), -k'(t)(x\cdot\nabla\varphi(x))\}}{\sqrt{|\nabla\varphi(x)|^2 + (k'(t))^2|(x\cdot\nabla\varphi(x))|^2}}. \tag{4.1}$$

Desde que $\nu(x) = \dfrac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}$, segue que $\nabla\varphi(x) = |\nabla\varphi(x)|\,\nu(x)$. Logo,

$$x\cdot\nabla\varphi(x) = |\nabla\varphi(x)|(x\cdot\nu(x)).$$

Portanto, em (4.1), temos

$$\eta(y,t) = \frac{\{\nu(x)|\nabla\varphi(x)|, -k'(t)|\nabla\varphi(x)|(x\cdot\nu(x))\}}{\sqrt{|\nabla\varphi(x)|^2 + (k'(t))^2|\nabla\varphi(x)|^2|(x\cdot\nu(x))|^2}},$$

ou seja,

$$\eta(y,t) = \frac{\{\nu(x), -k'(t)(x\cdot\nu(x))\}}{\sqrt{1 + (k'(t))^2\,|(x\cdot\nu(x))|^2}}, \quad x = \frac{y}{k(t)}.$$

Além disso, como $|\nu(x)| = 1$ e a componente espacial η_y de $\eta(y,t)$ é

$$\eta_y(y,t) = \frac{\nu(x)}{\sqrt{1 + (k'(t))^2\,|(x\cdot\nu(x))|^2}},$$

temos que

$$\nu^*(y,t) = \frac{\eta_y}{|\eta_y|} = \nu\left(\frac{y}{k(t)}\right). \tag{4.2}$$

■

Com o objetivo de motivar a definição de solução fraca e solução por transposição para a equação da onda no domínio não-cilíndrico $\widehat{Q}$, apresentamos algumas transfomações e relações funcionais. Consideramos

$$u(y,t) = w\left(\frac{y}{k(t)}, t\right), \quad \theta(y,t) = k^{-n}(t)z\left(\frac{y}{k(t)}, t\right),$$
$$g : \widehat{\Sigma} \to \mathbb{R}, \quad g(y,t) = k^{-n-1}(t)\,v\left(\frac{y}{k(t)}, t\right).$$

Temos, então, as seguintes relações diferenciais

$$u'(y,t) = -\frac{k'(t)}{k(t)}x_i\frac{\partial w}{\partial x_i}\left(\frac{y}{k(t)}, t\right) + w'\left(\frac{y}{k(t)}, t\right) \tag{4.3}$$

e

$$\begin{aligned}\theta'(y,t) &= -nk^{-n-1}(t)k'(t)\,z\left(\frac{y}{k(t)},t\right) + k^{-n}(t)\left[\frac{\partial z}{\partial x_i}\left(\frac{y}{k(t)},t\right)\left(-\frac{k'(t)}{k^2(t)}y_i\right) + z'\left(\frac{y}{k(t)},t\right)\right]\\ &= -nk^{-n-1}(t)k'(t)\,z\left(\frac{y}{k(t)},t\right) - k^{-n-1}(t)k'(t)x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\left(\frac{y}{k(t)},t\right) + k^{-n}(t)z'\left(\frac{y}{k(t)},t\right).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Seguindo de maneira análoga à realizada para obter (2.9) e (2.16), podemos escrever que

$$u''(y,t) - \Delta u(y,t) = Lw\left(\frac{y}{k(t)},t\right) \tag{4.5}$$

e

$$\theta''(y,t) - \Delta\theta(y,t) = k^{-n}(t)\,L^*z\left(\frac{y}{k(t)},t\right). \tag{4.6}$$

Perceba ainda que a matriz Jacobiana da mudança de variável $y = k(t)x$ é dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & k\end{pmatrix}.$$

Logo, $\det(J) = k^n(t)$. Assim, pelo Teorema da Mudança de Variáveis, $dy = |\det(J)|\,dx$, isto é, $dy = k^n(t)dx$.

Dessa forma, por (4.5) e (4.6), temos

$$\int_0^T\int_{\Omega_t}(u''-\Delta u)\theta\,dy\,dt = \int_0^T\int_\Omega Lw\,k^{-n}z\,k^n\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega Lw\,z\,dx\,dt \tag{4.7}$$

e

$$\int_0^T\int_{\Omega_t}u(\theta''-\Delta\theta)\,dy\,dt = \int_0^T\int_\Omega w\,k^{-n}L^*z\,k^n\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega w\,L^*z\,dx\,dt. \tag{4.8}$$

Pelas igualdades (4.2), (4.5), pelo fato de

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x,t) = k^n(t)\frac{\partial\theta}{\partial y_j}(y,t)k(t)\delta_{ij} = k^{n+1}(t)\frac{\partial\theta}{\partial y_i}(y,t),$$

e usando que sobre Γ temos $dy = k^{n-1}(t)dx$, podemos escrever que

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\Gamma_t}\left(\delta_{ij} - \frac{(k')^2y_iy_j}{k^2}\right)k^{n+1}\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\nu_j^*\,g\,d\Gamma\,dt\\ &\qquad = \int_0^T\int_\Gamma\left(\delta_{ij} - (k')^2x_ix_j\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_j\,k^{-n-1}\,v\,k^{n-1}\,d\Gamma\,dt\\ &\qquad = \int_0^T\int_\Gamma\left(\frac{\delta_{ij} - (k')^2x_ix_j}{k^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_j\,v\,d\Gamma\,dt.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ademais, pelas identidades (4.3) e (4.4), temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_t} [u'(t)\theta(t) - u(t)\theta'(t)]\, dy \\
&\qquad = \int_\Omega \left(-\frac{k'}{k} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(t) + w'(t) \right) (k^{-n} z) k^n \, dx \\
&\qquad\quad - \int_\Omega w(t) \left(-nk^{-n-1} k' z(t) - k^{-n-1} k' x_i \frac{\partial z}{\partial x_i}(t) + k^{-n} z'(t) \right) k^n \, dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t} [u'(t)\theta(t) - u(t)\theta'(t)]\ dy = \int_\Omega [w'(t)z(t) - w(t)z'(t)]\ dx - \int_\Omega \frac{k'}{k} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(t) z(t) \\
+ \int_\Omega w(t) n \frac{k'}{k} z(t)\, dx + \int_\Omega \frac{k'}{k} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i}(t) w(t).
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Green na última integral do lado direito da igualdade acima e recordando que $z(t) = 0$ sobre Γ (z é solução fraca de (2.66)), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t} [u'(t)\theta(t) - u(t)\theta'(t)]\ dy = \int_\Omega [w'(t)z(t) - w(t)z'(t)]\ dx - \int_\Omega \frac{k'}{k} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(t) z(t) \\
+ \int_\Omega w(t) n \frac{k'}{k} z(t)\, dx - \int_\Omega \frac{k'}{k} z(t) \left[n w(t) + x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(t) \right] dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\Omega_t} [u'(t)\theta(t) - u(t)\theta'(t)]\ dy = \int_\Omega [w'(t)z(t) - w(t)z'(t)]\ dx - \int_\Omega \frac{2k'}{k} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(t) z(t) \tag{4.10}$$

Seguindo de modo análogo ao ralizado para obter (2.131), ou seja, usando a fórmula de Green, integração por partes em $[0, T]$ e as condições $z(t) = 0$ sobre Γ e $w = v$ sobre Σ, temos

$$\int_0^T \int_\Omega Lw\, z\, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega w\, L^* z\, dx\, dt + N(T) - N(0) + J, \tag{4.11}$$

em que $N(t)$ denota o lado direito de (4.10) e J o lado direito de (4.9).

Utilizando as igualdades (4.7)-(4.9) em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega_t} (u'' - \Delta u)\theta\, dx\, dt = \int_{\Omega_t} [u'(T)\theta(T) - u(T)\theta'(T)]\, dy - \int_{\Omega_0} [u'(0)\theta(0) - u(0)\theta'(0)]\, dy \\
+ \int_0^T \int_{\Omega_t} \left(\delta_{ij} - \frac{(k')^2 y_i y_j}{k^2} \right) k^{n+1} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \nu_j^*\, g\, d\Gamma\, dt \\
+ \int_0^T \int_{\Omega_t} u(\theta'' - \Delta\theta)\, dy\, dt.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Motivados por (4.12), introduzimos o seguinte problema

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = \widehat{h} \ \text{ em } \widehat{Q}, \\ \theta = 0 \ \text{ sobre } \widehat{\Sigma}, \\ \theta(\cdot,0) = \theta^0(\cdot), \ \theta'(\cdot,0) = \theta^1(\cdot) \ \text{ em } \Omega_0, \end{cases} \tag{4.13}$$

com dados

$$\theta^0 \in H_0^1(\Omega_0), \quad \theta^1 \in L^2(\Omega_0) \quad \text{e} \quad \widehat{h} \in L^1(0,T;L^2(\Omega_t)). \tag{4.14}$$

Definição 4.1 *Dizemos que θ é uma solução fraca para o problema (4.13) se*

$$\theta \in C([0,T];H_0^1(\Omega_t)), \quad \theta' \in C([0,T];L^2(\Omega_t))$$

e verifica

$$-\int_0^T (\theta',\alpha')_{L^2(\Omega_t)}\,dt + \int_0^T ((\theta,\alpha))_{H_0^1(\Omega_t)}\,dt = \int_0^T (\widehat{h},\alpha)_{L^2(\Omega_t)}\,dt$$

para todo $\alpha \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t))$, $\alpha' \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$, $\alpha(\cdot,0) = \alpha(\cdot,T) = 0$, $\theta(\cdot,0) = \theta^0(\cdot)$ e $\theta'(\cdot,0) = \theta^1(\cdot)$.

Teorema 4.1 *Seja*

$$\theta(y,t) = k^{-n}(t) z\left(\frac{y}{k(t)},t\right).$$

Temos que z é uma solução fraca do problema (2.66) se, e somente se, θ é uma solução fraca do problema (4.13). Os dados $\{\theta^0,\theta^1,\widehat{h}\}$ e $\{z^0,z^1,h\}$ se relacionam por

$$\theta^0(y) = k^{-n}(0) z^0\left(\frac{x}{k(0)}\right) \tag{4.15}$$

e

$$\theta^1(y) = -n\,k^{-n-1}(0)\,k'(0)\,z^0\left(\frac{y}{k(0)}\right) - k^{-n-1}(0)\,k'(0)\,x_i\frac{\partial z^0}{\partial x_i}\left(\frac{y}{k(0)}\right) + k^{-n}(0)\,z^1\left(\frac{y}{k(0)}\right). \tag{4.16}$$

Prova. Sendo $z = z(x,t)$ solução fraca de (2.66), então satisfaz

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (z',\xi')\,dt + \int_0^T a(t,z,\xi)\,dt + \int_0^T \left\langle b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i},\xi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\,H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T (Pz,\xi)\,dt \\ &= \int_0^T (h,\xi)\,dt, \quad \forall\,\xi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ \xi' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \xi(\cdot,0) = \xi(\cdot,T) = 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

e as condições iniciais

$$z(\cdot,0) = z^0(\cdot) \quad \text{e} \quad z'(\cdot,0) = z^1(\cdot).$$

Na igualdade (4.17) faremos a mudança de variável $x = \dfrac{y}{k(t)}$. Notemos que a matriz Jacobiana para essa mudança é

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{y_1}{k}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial y_n}\left(\dfrac{y_1}{k}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{y_n}{k}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial y_n}\left(\dfrac{y_n}{k}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dfrac{1}{k} \end{pmatrix}.$$

Logo, pelo Teorema da mudança de variáveis, $dx = |\det(J)|\, dy$, ou seja, $dx = \dfrac{1}{k^n(t)} dy$.

Desde que $z(x,t) = k^n(t)\,\theta(k(t)x, t)$, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x,t) = k^{n+1}(t)\frac{\partial \theta}{\partial y_i}(y,t). \tag{4.18}$$

Daí, isolando z' em (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} z'(x,t) &= \left(\theta'(y,t) + nk^{-n-1}k'z(x,t) + k^{-n-1}k'x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}(x,t)\right)k^n \\ &= \left(\theta'(y,t) + nk^{-n-1}k'k^n\theta(y,t) + k^{-n-1}k'\frac{y_i}{k}k^{n+1}\frac{\partial \theta}{\partial y_i}(y,t)\right)k^n \\ &= \left(\theta'(y,t) + n\frac{k'}{k}\theta(y,t) + \frac{k'}{k}y_i\frac{\partial \theta}{\partial y_i}(y,t)\right)k^n. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Notando que $\alpha(y,t) = \xi\left(\dfrac{y}{k(t)}, t\right)$, tem-se, derivando em relação a variável temporal e usando a regra da cadeia para funções de várias variáveis, que

$$\xi'(x,t) = \frac{\partial \alpha}{\partial y_j}(y,t)\,x_j\,k'(t) + \alpha'(y,t) = \frac{\partial \alpha}{\partial y_j}(y,t)\,y_j\frac{k'(t)}{k(t)} + \alpha'(y,t) \tag{4.20}$$

e em relação a variável espacial obtemos

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x,t) = k(t)\frac{\partial \alpha}{\partial y_i}(y,t). \tag{4.21}$$

Usando (4.19) e (4.20) obtemos

$$-\int_0^T (z',\xi')\,dt = -\int_0^T\int_{\Omega_t}\left(\theta' + n\frac{k'}{k}\theta + \frac{k'}{k}y_i\frac{\partial \theta}{\partial y_i}\right)k^n\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_j}y_j\frac{k'}{k} + \alpha'\right)\frac{1}{k^n}\,dy\,dt. \tag{4.22}$$

Ademais, por (4.18) e (4.21), temos

$$\begin{aligned} \int_0^T a(t,z,\xi)\,dt &= \int_0^T\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_j}\,dx\,dt \\ &= \int_0^T\int_{\Omega_t}\left(\delta_{ij} - \frac{(k')^2y_iy_j}{k^2}\right)\frac{1}{k^2}k^{n+1}\frac{\partial \theta}{\partial y_i}k\frac{\partial \alpha}{\partial y_j}\frac{1}{k^n}\,dy\,dt \\ &= \int_0^T\int_{\Omega_t}\left(\delta_{ij} - \frac{(k')^2y_iy_j}{k^2}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y_i}\frac{\partial \alpha}{\partial y_j}\,dy\,dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T a(t,z,\xi)\,dt = \int_0^T\int_{\Omega_t} \frac{\partial\theta}{\partial y_i}\frac{\partial\alpha}{\partial y_i}\,dy\,dt - \int_0^T\int_{\Omega_t} \frac{(k')^2}{k^2} y_i y_j \frac{\partial\theta}{\partial y_i}\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}\,dy\,dt. \tag{4.23}$$

De (4.18) segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z'}{\partial x_i}(x,t) &= (n+1)k^n k' \frac{\partial\theta}{\partial y_i}(y,t) + k^{n+1}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y_j\partial y_i}(y,t)\,x_j k' + \frac{\partial\theta'}{\partial y_i}(y,t)\right)\\ &= (n+1)k^n k' \frac{\partial\theta}{\partial y_i}(y,t) + k^{n+1}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y_j\partial y_i}(y,t)\,y_j \frac{k'}{k} + \frac{\partial\theta'}{\partial y_i}(y,t)\right).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Além disso, vale que

$$b_i = -2\frac{k'}{k}x_i = -2\frac{k'}{k^2}y_i.$$

Assim, pela igualdade acima e pela equação (4.24), temos

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left\langle b_i\frac{\partial z'}{\partial x_i},\xi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\,H_0^1(\Omega)} dx\,dt\\ &= \int_0^T\int_{\Omega_t} -2\frac{k'}{k^2}\,y_i(n+1)k^n k' \frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha\frac{1}{k^n}\,dy\,dt\\ &\quad+ \int_0^T\int_{\Omega_t} -2\frac{k'}{k^2}\,y_i\,k^{n+1}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y_j\partial y_i}y_j\frac{k'}{k} + \frac{\partial\theta'}{\partial y_i}\right)\alpha\frac{1}{k^n}\,dy\,dt\\ &= \int_0^T\int_{\Omega_t} -2\frac{k'}{k^2}\,y_i\left[(n+1)k'\frac{\partial\theta}{\partial y_i} + k\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y_j\partial y_i}y_j\frac{k'}{k} + \frac{\partial\theta'}{\partial y_i}\right)\right]\alpha\,dy\,dt.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Por (4.18) e (4.19) podemos escrever que

$$\begin{aligned}\int_0^T (Pz,\xi)\,dt &= \int_0^T\int_{\Omega}\left(cz' + d_i\frac{\partial z}{\partial x_i} + fz\right)\xi\,dx\,dt\\ &= \int_0^T\int_{\Omega_t} -2n\frac{k'}{k}\left(\theta' + n\frac{k'}{k}\theta + \frac{k'}{k}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\right)k^n\alpha\frac{1}{k^n}\,dy\,dt\\ &\quad+ \int_0^T\int_{\Omega_t}\left(\frac{(n+1)(k')^2 - k''k}{k^2}\right)\frac{y_i}{k}\,k^{n+1}\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha\frac{1}{k^n}\,dy\,dt\\ &\quad+ \int_0^T\int_{\Omega_t}\left(\frac{n(n+1)(k')^2 - nk''k}{k^2}\right)k^n\,\theta\,\alpha\frac{1}{k^n}\,dy\,dt,\end{aligned} \tag{4.26}$$

e finalmente,

$$\int_0^T (h,\xi)\,dt = \int_0^T\int_{\Omega_t}\widehat{h}\,\alpha\,dy\,dt. \tag{4.27}$$

Substituindo (4.22), (4.23) e (4.25)-(4.27) em (4.17) e escrevendo $\iint$ para denotar $\displaystyle\int_0^T\int_{\Omega_t} dy\,dt$, temos

$$
\begin{aligned}
&-\iint \theta'\alpha' - \iint n\frac{k'}{k}\theta\alpha' - \iint \frac{k'}{k}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha' - \iint \theta'\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}y_j\frac{k'}{k} - \iint n\frac{(k')^2}{k^2}\theta\, y_j\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}\\
&-\iint \frac{(k')^2}{k^2}y_iy_j\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\frac{\partial\alpha}{\partial y_j} + \iint \frac{\partial\theta}{\partial y_i}\frac{\partial\alpha}{\partial y_i} - \iint \frac{(k')^2}{k^2}y_iy_j\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\frac{\partial\alpha}{\partial y_j} - \iint 2\frac{(k')^2}{k^2}y_i\, n\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha\\
&-\iint 2\frac{(k')^2}{k^2}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha - \iint 2\frac{(k')^2}{k^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial y_j\partial y_i}y_iy_j\alpha - \iint 2\frac{k'}{k}y_i\frac{\partial\theta'}{\partial y_i}\alpha - \iint 2n\frac{k'}{k}\theta'\alpha\\
&-\iint 2n^2\frac{(k')^2}{k^2}\theta\alpha - \iint 2n\frac{(k')^2}{k^2}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha + \iint n\frac{(k')^2}{k^2}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha + \iint \frac{(k')^2}{k^2}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha\\
&-\iint \frac{k''}{k}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha + \iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}\theta\alpha + \iint n\frac{(k')^2}{k^2}\theta\alpha - \iint n\frac{k''}{k}\theta\alpha = \iint \widehat{h}\alpha. \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

Usando o Teorema de Green no décimo primeiro termo do lado esquerdo da equação acima e notando que

$$
\frac{\partial}{\partial y_j}(y_i\, y_j\, \alpha) = \delta_{ij}\, y_j\, \alpha + y_i\left(n\alpha + y_j\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}\right),
$$

temos

$$
-\iint 2\frac{(k')^2}{k^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial y_j\partial y_i}y_i\, y_j\, \alpha = \iint 2\frac{(k')^2}{k^2}\frac{\partial\theta}{\partial y_i}y_i\, \alpha + \iint 2\frac{(k')^2}{k^2}\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\, y_i\, n\alpha + \iint 2\frac{(k')^2}{k^2}\frac{\partial\theta}{\partial y_i}y_i\, y_j\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}. \qquad (4.29)
$$

Ademais, usando o Teorema de Green no quinto termo do lado esquerdo de (4.28), segue que

$$
-\iint n\frac{(k')^2}{k^2}\theta\, y_j\frac{\partial\alpha}{\partial y_j} = \iint n\frac{(k')^2}{k^2}\alpha\left(\theta\, n + \frac{\partial\theta}{\partial y_j}y_j\right) = \iint n^2\frac{(k')^2}{k^2}\theta\alpha + \iint n\frac{(k')^2}{k^2}\alpha\frac{\partial\theta}{\partial y_j}y_j. \qquad (4.30)
$$

Substituindo (4.29) e (4.30) em (4.28) e anulando os termos semelhantes, podemos escrever que

$$
\begin{aligned}
&-\iint \theta'\alpha' - \iint n\frac{k'}{k}\theta\alpha' - \iint \frac{k'}{k}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha' - \iint \theta'\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}y_j\frac{k'}{k}\\
&+\iint \frac{\partial\theta}{\partial y_i}\frac{\partial\alpha}{\partial y_i} - \iint 2\frac{k'}{k}y_i\frac{\partial\theta'}{\partial y_i}\alpha - \iint 2n\frac{k'}{k}\theta'\alpha + \iint \frac{(k')^2}{k^2}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha\\
&-\iint \frac{k''}{k}y_i\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\alpha + \iint n\frac{(k')^2}{k^2}\theta\alpha - \iint n\frac{k''}{k}\theta\alpha = \iint \widehat{h}\alpha. \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

Usando integração por partes no segundo e terceiro termo do lado esquerdo da equação acima e o Teorema de Green no quarto termo, obtemos, respectivamente

$$
\begin{aligned}
-\iint n\frac{k'}{k}\theta\alpha' &= \iint n\alpha\left[\left(\frac{k''k-(k')^2}{k^2}\right)\theta + \frac{k'}{k}\theta'\right]\\
&= \iint n\alpha\frac{k''}{k}\theta - \iint n\alpha\frac{(k')^2}{k^2}\theta + \iint n\alpha\frac{k'}{k}\theta', \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\iint \frac{k'}{k} y_i \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \alpha' &= \iint y_i \alpha \left[\left(\frac{k'' k - (k')^2}{k^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y_i} + \frac{k'}{k} \frac{\partial \theta'}{\partial y_i} \right] \\
&= \iint y_i \alpha \frac{k''}{k} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} - \iint y_i \alpha \frac{(k')^2}{k^2} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} + \iint y_i \alpha \frac{k'}{k} \frac{\partial \theta'}{\partial y_i} \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
-\iint \theta' \frac{\partial \alpha}{\partial y_j} y_j \frac{k'}{k} &= \iint \frac{k'}{k} \alpha \left(\frac{\partial \theta'}{\partial y_j} y_j + \theta' n \right) \\
&= \iint \frac{k'}{k} \alpha \frac{\partial \theta'}{\partial y_j} y_j + \iint \frac{k'}{k} \alpha \, \theta' n. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.32)-(4.34) em (4.31) e anulando os termos semelhantes, temos que

$$
-\int_0^T (\theta', \alpha')_{L^2(\Omega_t)} \, dt + \int_0^T ((\theta, \alpha))_{H_0^1(\Omega_t)} \, dt = \int_0^T (\widehat{h}, \alpha)_{L^2(\Omega_t)} \, dt.
$$

. Já para os dados inciais, desde que

$$
\theta(y,t) = k^{-n}(t) z \left(\frac{y}{k(t)} \right), \qquad (4.35)
$$

para $t = 0$,

$$
\theta^0(y) = k^{-n}(0) z^0 \left(\frac{y}{k(0)} \right).
$$

E em (4.4) para $t = 0$, vale

$$
\theta^1(y) = -n k^{-n-1}(0) k'(0) z^0 \left(\frac{y}{k(0)} \right) - k^{-n-1}(0) k'(0) x_i \frac{\partial z^0}{\partial x_i} \left(\frac{y}{k(0)} \right) + k^{-n}(0) z^1 \left(\frac{y}{k(0)} \right).
$$

Pelo Teorema 2.2 temos $z \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$. Desde que estamos considerando (4.35), concluímos que

$$
\theta \in C([0,T]; H_0^1(\Omega_t)) \quad \text{e} \quad \theta' \in C([0,T]; L^2(\Omega_t)).
$$

A recíproca é feita de maneira análoga.

■

A unicidade da solução do problema (4.13) é uma consequência direta do Teorema 4.1.

Observação 4.1 *Temos que*

$$
\frac{\partial z}{\partial \nu}(x,t) = k^{n+1}(t) \frac{\partial \theta}{\partial \nu^*}(y,t).
$$

De fato, a derivada normal é dada por

$$
\frac{\partial z}{\partial \nu}(x,t) = \nabla z(x,t) \cdot \nu(x), \qquad (4.36)
$$

e de forma similar,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu^*}(y,t) = \nabla\theta(y,t)\cdot\nu^*(y,t).$$

De (4.18), $\nabla z = k^{n+1}\nabla\theta$, e substituindo (4.2) em (4.36) obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\nu}(x,t) &= \left(k^{n+1}(t)\nabla\theta(y,t)\right)\cdot\nu^*(y,t)\\ &= k^{n+1}(t)\left(\nabla\theta(y,t)\cdot\nu^*(y,t)\right)\\ &= k^{n+1}(t)\frac{\partial\theta}{\partial\nu^*}(y,t).\end{aligned}$$

Desde que $z \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, tem-se $\dfrac{\partial z}{\partial x_i} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e pelo Teorema 2.6, $\dfrac{\partial z}{\partial\nu} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$. Assim, por (4.18) e pela Observação 4.1, podemos afirmar que

$$\frac{\partial\theta}{\partial y_i},\ \frac{\partial\theta}{\partial\nu^*} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_t)). \tag{4.37}$$

Observação 4.2 *Podemos mudar o dado no tempo $t=0$ para $t=T$ no problema (4.13) e obter todos os resultados anteriores para a solução w do respectivo problema reverso.*

Consideremos o problema

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \ \text{ em } \widehat{Q},\\ u = g \ \text{ sobre } \widehat{\Sigma},\\ u(\cdot,0) = u^0(\cdot),\ u'(\cdot,0) = u^1(\cdot) \ \text{ em } \Omega_0,\end{cases} \tag{4.38}$$

com dados

$$u^0 \in L^2(\Omega_0), \quad u^1 \in H^{-1}(\Omega_0) \quad \text{e} \quad g \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_t)). \tag{4.39}$$

Motivados por (4.12) introduzimos a seguinte definição.

Definição 4.2 *Dizemos que $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))$ é uma solução por transposição do problema (4.38) se u verifica*

$$\int_0^T (u,\widehat{h})_{L^2(\Omega_t)}dt = \langle u^1,\theta(0)\rangle - (u^0,\theta'(0))_{L^2(\Omega_0)} - \int_0^T\int_{\Gamma_t}\left(\delta_{ij} - \frac{(k')^2 y_i y_j}{k^2}\right)k^{n+1}\frac{\partial\theta}{\partial y_i}\nu_j^*\,g\,d\Gamma dt,$$

para toda $\widehat{h} \in L^1(0,T;L^2(\Omega_t))$, onde θ é a solução fraca do problema

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = \widehat{h} \ \text{ em } \widehat{Q},\\ \theta = 0 \ \text{ sobre } \widehat{\Sigma},\\ \theta(\cdot,T) = 0,\ \theta'(\cdot,T) = 0 \ \text{ em } \Omega_T.\end{cases}$$

Teorema 4.2 *Seja*

$$u(y,t) = w\left(\frac{y}{k(t)}, t\right).$$

Temos que w é uma solução por transposição do problema (2.128) se, e somente se, u é uma solução por transposição do problema (4.38). Os dados $\{u^0, u^1, g\}$ e $\{w^0, w^1, v\}$ estão relacionados por

$$u^0(y) = w^0\left(\frac{y}{k(t)}\right), \tag{4.40}$$

$$\langle u^1, \alpha\rangle = \left\langle -\frac{k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i} + w^1, \beta\right\rangle, \quad \alpha \in H_0^1(\Omega_0), \tag{4.41}$$

$$\alpha(y) = k^{-n}(0)\beta\left(\frac{y}{k(0)}\right)$$

e

$$g(y,t) = k^{-n-1}(t)\, v\left(\frac{y}{k(t)}, t\right). \tag{4.42}$$

Prova. Suponhamos que w é uma solução por tranposição de (2.128). Desde que $Lw = u'' - \Delta u = 0$, $\theta'' - \Delta\theta = \widehat{h}$, $\theta(\cdot, T) = \theta'(\cdot, T) = 0$, $u(\cdot, 0) = u^0(\cdot)$ e $u'(0) = u^1(\cdot)$, podemos seguir de modo análogo ao realizado para obter (4.12) e escrever que

$$\int_0^T (u, \widehat{h})_{L^2(\Omega_t)} dt = \langle u^1, \theta(0)\rangle - (u^0, \theta'(0))_{L^2(\Omega_0)} - \int_0^T \int_{\Gamma_t} \left(\delta_{ij} - \frac{(k')^2 y_i y_j}{k^2}\right) k^{n+1} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \nu_j^* \, g \; d\Gamma dt.$$

Além disso, segue diretamente para os dados iniciais que

$$u^0(y) = w^0\left(\frac{y}{k(t)}\right)$$

e por (4.3) em $t = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\langle u^1, \alpha\rangle &= \left\langle -\frac{k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i} + w^1, k^{-n}(0)\beta\left(\frac{y}{k(0)}\right) k^n(0)\right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i} + w^1, \beta\right\rangle.
\end{aligned}$$

A recíproca é feita de maneira análoga. ■

Pelo Teorema 4.2 a unicidade de solução do problema (4.38) segue, e pelo Teorema 2.9, que

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega_t)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega_t)).$$

Observamos ainda que, para (4.9), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Gamma_t} \left(\delta_{ij} - \frac{(k')^2 y_i y_j}{k^2}\right) k^{n+1} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \nu_j^* \frac{\partial \theta}{\partial \nu^*} d\Gamma dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_{\Gamma} \left(\delta_{ij} - (k')^2 x_i x_j\right) \frac{\partial z}{\partial x_i} \nu_j \, k^{-n-1} \frac{\partial z}{\partial \nu} k^{n-1} d\Gamma dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_{\Gamma} \left(\frac{\delta_{ij} - (k')^2 x_i x_j}{k^2}\right) \frac{\partial z}{\partial x_i} \nu_j \frac{\partial z}{\partial \nu} d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Agora, enunciaremos e provaremos o resultado principal para estabelecer o controle para o sistema

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ em } \widehat{Q}, \\ u = \begin{cases} g & \text{sobre } \widehat{\Sigma}(x^0), \\ 0 & \text{sobre } \widehat{\Sigma}\backslash\widehat{\Sigma}(x^0), \end{cases} \\ u(\cdot,0) = u^0(\cdot), \;\; u'(\cdot,0) = u^1(\cdot) \text{ em } \Omega_0. \end{cases} \tag{4.43}$$

Teorema 4.3 *Assumimos que as hipóteses* (H_1)-(H_4) *são satisfeitas. Seja* $T > T_0$. *Então para cada dados* $\{u^0, u^1\}$ *pertencentes a* $L^2(\Omega_0) \times H^{-1}(\Omega_0)$, *existe um controle* $g \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_t))$ *tal que a solução* u *do sistema satisfaça*

$$u(\cdot,T) = 0 \quad e \quad u'(\cdot,T) = 0.$$

Prova. Vamos considerar o sistema (4.43) em que $\widehat{Q}$ é construído com $T > T_0$. Com (4.14) - (4.16) e (4.39) - (4.41), determinamos, respectivamente, os isomorfismos

$$\begin{aligned} G_1 : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega_0) \times L^2(\Omega_0) \\ \{z^0, z^1\} &\longmapsto G_1\{z^0, z^1\} = \{\theta^0, \theta^1\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_2 : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega_0) \times H^{-1}(\Omega_0) \\ \{w^0, w^1\} &\longmapsto G_2\{w^0, w^1\} = \{u^0, u^1\}. \end{aligned}$$

Consideremos os operadores

$$\begin{aligned} \sigma : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ \{w^0, w^1\} &\longmapsto \sigma\{w^0, w^1\} = \left\{ w^1 - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}, -w^0 \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ \{z^0, z^1\} &\longmapsto \Lambda\{z^0, z^1\} = \left\{ w'(0) - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w(0)}{\partial x_i}, -w(0) \right\}, \end{aligned}$$

em que Λ é o isomorfismo definido em (3.7) , isto é, z é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} L^* z = 0 \text{ em } Q, \\ z = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z^0(\cdot), \;\; z'(\cdot,0) = z^1(\cdot) \text{ em } \Omega \end{cases}$$

e w solução por transposição do problema

$$\begin{cases} Lw = 0 \text{ em } Q, \\ w = \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \nu} & \text{sobre } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sobre } \Sigma \backslash \Sigma(x^0), \end{cases} \\ w(\cdot, T) = 0, \;\; w'(\cdot, T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.44}$$

Desde que Λ é um isomorfismo temos que para cada $\{w^1, w^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe um único $\{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\Lambda\{z^0, z^1\} = \left\{ w^1 - \frac{2k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial w^0}{\partial x_i}, -w^0 \right\}. \tag{4.45}$$

Então, se w é a solução do problema (4.44) construída com $\{z^0, z^1\}$, temos

$$w(\cdot, 0) = w^0(\cdot) \quad \text{e} \quad w'(\cdot, 0) = w^1(\cdot).$$

Com os operadores acima determinamos o isomorfismo

$$\Lambda_1 = G_1 \circ \Lambda^{-1} \circ \sigma \circ G_2^{-1},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 : L^2(\Omega_0) \times H^{-1}(\Omega_0) &\longrightarrow H_0^1(\Omega_0) \times L^2(\Omega_0) \\ \{u^0, u^1\} &\longmapsto \Lambda_1\{u^0, u^1\} = \{\theta^0, \theta^1\}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Seja $\{u^0, u^1\} \in L^2(\Omega_0) \times H^{-1}(\Omega_0)$. A partir de (4.46) determinamos $\{\theta^0, \theta^1\}$. Com esses dados encontramos a solução fraca θ do problema

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = 0 \;\text{ em } \widehat{Q}, \\ \theta = 0 \;\text{ sobre } \widehat{\Sigma}, \\ \theta(\cdot, 0) = \theta^0(\cdot), \; \theta'(\cdot, 0) = \theta^1(\cdot) \;\text{ em } \Omega_0, \end{cases} \tag{4.47}$$

e com $\{z^0, z^1\} = G_1^{-1}\{\theta^0, \theta^1\}$, a solução z do problema

$$\begin{cases} L^* z = 0 \text{ em } Q, \\ z = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot, 0) = z^0(\cdot), \;\; z'(\cdot, 0) = z^1(\cdot) \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Agora, determinamos a solução por transposição $\tilde{w}$ do problema

$$\begin{cases} L\tilde{w} = 0 \text{ em } Q, \\ \tilde{w} = \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \nu} & \text{sobre } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sobre } \Sigma \backslash \Sigma(x^0), \end{cases} \\ \tilde{w}(\cdot, 0) = w^0(\cdot), \ \tilde{w}'(\cdot, 0) = w^1(\cdot) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.48}$$

onde $\{w^0, w^1\}$ e $\{z^0, z^1\}$ são relacionados por (4.45). Temos, da unicidade de solução do problema (4.48), que $\tilde{w} = w$, w solução de (4.44) construída com $\{z^0, z^1\}$. Portanto,

$$\tilde{w}(\cdot, T) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{w}'(\cdot, T) = 0.$$

Daí, pelo Teorema 4.2, segue que $u(y, t) = \tilde{w}\left(\dfrac{y}{k(t)}, t\right)$ é a solução por transposição do problema (4.43) e que satisfaz a condição final

$$u(\cdot, T) = 0 \quad \text{e} \quad u'(\cdot, T) = 0.$$

Por fim, pela Observação 4.1, (4.37) e (4.38), temos que o controle g tem a forma

$$g = \frac{\partial \theta}{\partial \nu^*},$$

com θ solução fraca de (4.47).

■

Observação 4.3 *No sistema (4.44) podemos considerar $\dfrac{\partial z}{\partial \nu_A}$ em vez de $\dfrac{\partial z}{\partial \nu}$ e obter também a controlabilidade exata para o sistema (4.43). Por outro lado, como $z(x,t) = k^n(t)\theta(k(t)x, t)$, com $y = k(t)x$, temos, por (2.7), (4.2) e (4.18), que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \nu_A} &= a_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_i}(x,t)\,\nu_j(x) \\ &= \frac{\delta_{ij} - (k'(t))^2 x_i x_j}{k^2(t)} \frac{\partial z}{\partial x_i}(x,t)\nu_j(x) \\ &= \left(\delta_{ij} - \frac{(k'(t))^2 y_i y_j}{k^2(t)}\right) k^{n-1}(t) \frac{\partial \theta}{\partial y_i}(y,t)\nu_j^*(y,t), \end{aligned} \tag{4.49}$$

e pela Observação 4.1,

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}(x,t) = k^{n+1}(t)\frac{\partial \theta}{\partial \nu^*}(y,t).$$

Notamos que o segundo membro de (4.49) possui uma derivada não conhecida da função θ. Por esta razão, consideramos $\dfrac{\partial z}{\partial \nu}$ em vez de $\dfrac{\partial z}{\partial \nu_A}$ em (4.44).

Observação 4.4 *O tempo T_0 definido em (2.111) considerado na prova do Teorema 4.3, como mostramos, é suficiente para assegurar a controlabilidade exata da equação da onda no domínio não-cilíndrico. Acreditamos que tal tempo seja ótimo, porém, não conhecemos, até o momento, uma prova que nos permita concluir tal afirmação.*

Em contraste, no domínio cilíndrico, o tempo $T_0 = 2R(x^0)$ estabelicido por J. L. Lions e V. Komornik (ver Observação 2.6) é provadamente ótimo, o que evidencia uma relevante diferença entre os contextos geométricos.

Apêndice A

Existência e Prolongamento de Soluções Aproximadas

Nosso objetivo neste apêndice é justificar a existência de soluções para o sistema (PA).

Seja $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : G \to \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. Dizemos que uma função absolutamente contínua $x(t)$ definida em algum intervalo da reta I tal que $(x(t), t) \in G$, $\forall\, t \in I$, é uma solução para o problema

$$x' = f(x,t) \tag{A.1}$$

se $x(t)$ satisfaz (A.1) q.s. em (x,t). Seja $(x_0, t_0) \in G$. Associado a (A.1) e a (x_0, t_0) considere o sguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{A.2}$$

Dizemos que uma função $f : G \to \mathbb{R}^n$ está nas **Condições de Carathéodory** sobre G se

(i) $f(x,t)$ é mensurável em t, para cada x fixado;

(ii) $f(x,t)$ é contínua em x, para cada t fixado;

(iii) para cada compacto K de G existe uma função integrável $m_K(t)$ tal que

$$\|f(x,t)\| \leqslant m_K(t), \quad \forall\, (x,t) \in K.$$

Consideremos o retângulo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - x_0| \leqslant b \;\text{ e }\; |t - t_0| \leqslant a,\; a, b > 0\}.$$

Teorema A.1 ***(Carathéodory):*** *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ nas condições de Carathéodory sobre R, então existe uma solução $x(t)$ de (A.2) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$.*

Prova: Ver Medeiros-Rivera [24].

Corolário A.1 *Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e f satisfazendo as Condições de Carathéodory sobre G, então (A.2) tem solução para qualquer $(x_0, t_0) \in G$.*

Prova: Ver Medeiros-Rivera [24].

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (A.1) sobre I e $I \subset I_1$. Diz-se que $\varphi(t)$ tem um prolongamento até I_1, se existe $\varphi_1(t)$ solução de (A.1) sobre I_1 e $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, $\forall\, t \in I$.

Teorema A.2 ***(Prolongamento)*** *Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e limitado e $f : G \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as duas primeiras Condições de Carathéodory sobre G e existe uma função integrável $m(t)$ tal que*

$$|f(x,t)| \leqslant m(t), \forall\, (x,t) \in G.$$

Seja φ uma solução da equação (A.1) sobre o intervalo $]a, b[$, então

(i) existem $\varphi(a^+)$, $\varphi(b^-)$;

(ii) se $(\varphi(b^-), b) \in G$ então φ pode ser prolongado até $]a, b_\delta[$ para algum $\delta > 0$. Resultado análogo para a;

(iii) $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\varphi(\gamma^+), \gamma)$, $(\varphi(\omega^-), \omega) \in \partial G$ (∂G é a fronteira de G).

Prova: Ver Medeiros-Rivera [24].

Corolário A.2 *Sejam $G = U \times [0, T]$, $T > 0$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant b,\ b > 0\}$ e f nas condições do Teorema A.2. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0, \quad |x_0| \leqslant b. \end{cases} \tag{A.3}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida tem-se $|\varphi(t)| \leqslant M$, $\forall\, t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então φ pode ser prolongada até $[0, T]$.

Prova: Ver Medeiros-Rivera [24].

Gostaríamos de utilizar o Corolário acima para garantir que o (PA) possui solução local no intervalo de $0 \leqslant t \leqslant t_m$. Para isso, precisamos escrevê-lo como um sistema de EDOs de primeira ordem e verificar se satisfazem as Condições de Carathéodory.

Voltemos agora ao nosso problema e recordemos que estamos considerando $V_m = [w_1, \ldots, w_m]$ o espaço gerado pelos m primeiros vetores da base Hilbetiana $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Queremos encontrar soluções aproximadas do tipo variáveis separáveis

$$z_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i(x),$$

em que os g_{im}'s satisfazem o sistema de EDOs (PA):

$$\begin{cases} (z_m''(t), \xi) + a(t, z_m(t), \xi) + \left(b_i \dfrac{\partial z_m'(t)}{\partial x_i}, \xi \right) + (P z_m, \xi) = (h, \xi), \ \forall \ \xi \in V_m \\ z_m(x,0) = z_m^0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i \to z^0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ z_m'(x,0) = z_m^1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \zeta_i w_i \to z^1 \text{ em } H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Note que podemos escrever

$$\begin{aligned} z_m(x,t) &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i(x); \\ z_m'(x,t) &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}'(t)\, w_i(x); \\ z_m''(x,t) &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}''(t)\, w_i(x). \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\xi = w_j(x)$ e substituindo as três igualdades acima em $(\text{PA})_1$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}''\, w_i, w_j \right) + a \left(t, \sum_{i=1}^{m} g_{im}\, w_i, w_j \right) + \left(b_i \sum_{i=1}^{m} g_{im}' \frac{\partial w_i}{\partial x_i}, w_j \right) \\ + \left(P \left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}\, w_i \right), w_j \right) = (h, w_j), \end{aligned} \tag{A.4}$$

com $j = 1, \cdots, m$. Denotemos por

$$F_i^m(t) = \left(b_i \sum_{i=1}^{m} g_{im}' \frac{\partial w_i}{\partial x_i}, w_j \right) + \left(P \left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}\, w_i \right), w_j \right) - (h, w_j)$$

e usemos o fato de que

$$a \left(t, \sum_{i=1}^{m} g_{im}\, w_i, w_j \right) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}\, a\left(t,\ w_i, w_j\right).$$

para reescrever (A.4) da forma

$$\sum_{i=1}^{m} g_{im}''\left(w_i, w_j\right) + \sum_{i=1}^{m} g_{im}\, a\left(t,\ w_i, w_j\right) + F_i^m = 0. \tag{A.5}$$

Considerando as matrizes

$$W = (w_{ij}), \quad \text{com} \quad w_{ij} = (w_i, w_j),$$

$$\mathcal{A} = (\tilde{a}_{ij}), \quad \text{com} \quad \tilde{a}_{ij} = a(t, w_i, w_j),$$

$$y = \begin{pmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{pmatrix} F_1^m(t) \\ F_2^m(t) \\ \vdots \\ F_m^m(t) \end{pmatrix},$$

o sistema (PA) se transforma em

$$\begin{cases} Wy'' + \mathcal{A}y + F_i(t, y, y') = 0 \\ y(0) = y^0,\ y'(0) = y^1. \end{cases} \tag{A.6}$$

Agora, considerando

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

segue que

$$X'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\mathcal{A}y - F_i(t, y, y') \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} X'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\mathcal{A}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{0} \\ -F_i(t, y, y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{0} \\ -F_i(t, y, y') \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

em que I é a matriz identidade $m \times m$, 0 é a matriz nula e $\overline{0}$ é a matriz nula $m \times 1$. Sejam,

$$G_1(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} X \quad \text{e} \quad G_2(x, t) = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ -F_i \end{pmatrix}.$$

Então, encontrar solução para o sistema (A.6) é equivalente a resolver o sistema

$$\begin{cases} X' = G_1(t, X) + G_2(t, X) \\ X(0) = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} = X^0. \end{cases} \tag{A.7}$$

Mostramos que o sistema (A.7) está nas Condições de Carathéodory. De fato, seja $[0,T]\times\mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}=\{x\in\mathbb{R}^{2m};\|x\|\leqslant b\}$, $b>0$. Então,

- Fixando X, temos que $G_1(t,X)$ é mensurável, pois $\mathcal{A}$ é contínua, definida em $[0,T]$ (usamos o fato de que $a_{ij}\in C^1(\overline{Q})$) e $G_2(t,X)$ é mensurável, pois $h\in L^1(0,T,L^2(\Omega))$, $b_i,c,d,f\in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega))$ e $w_j\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, que são espaços de funções mensuráveis.

- Fixando t, é possível observar que $G_1(t,X)$ é contínua pois $\mathcal{A}$ o é, e também
$$G_2(t,X)=\gamma_1(t,X)P_2(X)+\gamma_2(t,X)P_1(X)-(h,w_j),$$
em que (h,w_j) é constante em relação a X e γ_1 e γ_2 são funções contínuas. Logo, $G_2(t,X)$ é contínua e, consequentemente, $G_1(t,X)+G_2(t,X)$ é contínua.

- Como X varia em $\mathcal{U}$, então todas as entradas de $G_1(t,X)$ são limitadas por uma mesma constante que não dependem de t ou X. As entradas de $G_2(t,X)$ são funções integráveis em $[0,T]$, pois as m primeiras entradas são nulas e as m últimas são, em valor absoluto, iguais a
$$\begin{aligned}|F_i|&=\left|\left(b_i\sum_{i=1}^m g'_{im}\,\frac{\partial w_i}{\partial x_i},w_j\right)+\left(P\left(\sum_{i=1}^m g_{im}\,w_i\right),w_j\right)-(h,w_j)\right|\\&\leqslant C_1|h|+C_2C_{1K}+C_3C_{2K},\end{aligned}$$
em que C_1,C_{1K} e C_{2K} são constantes que não dependem de t ou X, mas apenas das normas das funções da base e dos coeficientes a_{ij}, b_i, d_i, c e f. Assim,
$$\|G_2(t,X)\|_{\mathbb{R}^{2m}}\leqslant m_K(t),\quad\forall\ (t,X)\in[0,T]\times\mathcal{U},$$
com $m_K(t)=C_4|h|+C_5$. Logo,
$$\|G_1(t,X)+G_2(t,X)\|_{\mathbb{R}^{2m}}\leqslant C+m_K(t),\quad\forall\ (t,X)\in[0,T]\times\mathcal{U}.$$
Desde que $h\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, temos
$$\int_0^T m_K(t)\,dt\leqslant C_4\int_0^T|h|\,dt+TC_5<\infty.$$
Assim, $m_K(t)$ é integrável.

Portanto, pelo Corolário A.1 concluimos que (PA) possui solução local no intervalo de $0\leqslant t\leqslant t_m<T$.

Apêndice B

Espaços em Domíno Não-Cilíndrico

Neste apêndice, apresentamos a caracterização dos espaços de funções definidos sobre o domínio não-cilíndrico Ω_t. Essa caracterização é fundamental para o desenvolvimento teórico empregado no Capítulo 4.

Seja $u : \widehat{Q} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$u(y,t) = k^{-n}(t)\,\xi\left(\frac{y}{k(t)}, t\right), \quad \xi \in L^p(0,T; W_0^{m,q}(\Omega)). \tag{B.1}$$

Derivando a equação acima, obtemos que

$$\begin{aligned} D_y u(y,t) &= D_y\left[k^{-n}(t)\xi\left(\frac{y}{k}, t\right)\right] \\ &= k^{-n}(t)\, D_x\xi(x,t)\frac{1}{k(t)} \\ &= k^{-n-1}(t)\, D_x\xi(x,t). \end{aligned}$$

Dessa forma, para a m-ésima derivada, desde que $k(t) > 0$, vale

$$|D_y^m u(y,t)| = k^{-n-m}(t)|D_x^m \xi(x,t)|,$$

e para $1 \leqslant q < \infty$, temos

$$|D_y^m u(y,t)|^q = k^{-nq-mq}(t)|D_x^m \xi(x,t)|^q.$$

Perceba ainda que a matriz Jacobiana da mudança de variável $y = k(t)x$ é dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

Logo, $\det(J) = k^n(t)$. Assim, pelo Teorema da Mudança de Variáveis, $dy = |\det(J)|\, dx$, isto é, $dy = k^n(t)dx$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega_t} |D_y^m u(y,t)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_{\Omega} k^{-nq-mq}(t)|D_x^m \xi(x,t)|^q k^n \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(k^{-nq-mq+n}(t)\int_{\Omega} |D_x^m \xi(x,t)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= k^{\frac{n}{q}-m-n}(t)\left(\int_{\Omega} |D_x^m \xi(x,t)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|D_y^m u(t)\|_{L^q(\Omega_t)} = k^{\frac{n}{q}-m-n}(t)\|D_x^m \xi(t)\|_{L^q(\Omega)}.$$

Temos que $u(t) \in W_0^{m,q}(\Omega_t)$ q.s. em $(0,T)$ e

$$\|u(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega_t)} = k^{\frac{n}{q}-m-n}(t)\|\xi(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega)}.$$

Desde que a função k é limitada inferiormente e superiormente, existem constantes C_3 e C_4 (que aqui denotam constantes genéricas) tais que

$$C_3\|\xi(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega)} \leqslant \|u(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega_t)} \leqslant C_4\|\xi(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega)}. \tag{B.2}$$

Denotemos por $L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, m não negativo) o espaço da classe de funções $u : \widehat{Q} \to \mathbb{R}$ tal que existe $\xi \in L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega))$ verificando (B.1), equipado com a norma

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|^p_{W_0^{m,q}(\Omega_t)} dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty \\ \|u\|_{L^\infty(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))} &= \sup_{t\in(0,T)} ess\, \|u(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega_t)}.\end{aligned}$$

Por (B.2), o espaço $X = L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))$ é um espaço de Banach e a aplicação linear

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{U} : L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega)) & \longrightarrow & X \\ \xi & \longmapsto & \mathcal{U}\xi = u\end{array} \tag{B.3}$$

é um isomorfismo. De fato, a sobrejetividade de $\mathcal{U}$ é garantida pela definição do espaço, pois para $u \in X$, existe $\xi \in L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega))$ que satisfaz (B.1). Além disso, suponha que $\mathcal{U}\xi = 0$, então $k^{-n}\xi(x,t) = 0$. Como $k > 0$, tem-se $\xi(x,t) = 0$. Logo, $\mathrm{Ker}(\mathcal{U}) = \{0\}$ e $\mathcal{U}$ é injetiva. Por (B.2) e pela Proposição 1.2, segue que $\mathcal{U}$ é um isomorfismo.

Escrevemos $C([0,T];W_0^{m,q}(\Omega_t))$ para denotar o subespaço fechado de $L^\infty(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))$ constituído pelas funções u cuja correspondente ξ dada por (B.1) pertencente a $C([0,T];W_0^{m,q}(\Omega))$.

O espaço dual de $X = L^p(0,T;H_0^1(\Omega_t))$ será identificado como $L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$, com $1 \leqslant p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. No que segue, caracterizaremos esse espaço dual.

Consideremos $Y = L^p(0,T;H_0^1(\Omega))$ e a aplicação definida em (B.3). Sabemos que $\mathcal{U} : Y \to X$ é um isomorfismo linear. Portanto, o operador adjunto $\mathcal{U}^*$ torna o dual X' no dual Y', ou seja, $\mathcal{U}^* : X' \longrightarrow Y'$. Assim, para todo $S \in X'$, vale

$$\langle S, u\rangle_{X',X} = \langle S, \mathcal{U}\xi\rangle_{X',X} = \langle \mathcal{U}^* S, \xi\rangle_{Y',Y}, \quad \forall\, \xi \in Y.$$

Seja $R = \mathcal{U}^* S \in Y'$. Para cada $S \in X'$, existe único $R \in Y' = L^p(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tal que

$$\langle S, u\rangle_{X',X} = \langle R, \xi\rangle_{Y',Y}, \quad \xi = \mathcal{U}^{-1}u.$$

Desde que

$$\|S\| = \sup_{\substack{u\in X\\ u\neq 0}} \frac{|\langle S,u\rangle|}{\|u\|_X} = \sup_{\substack{\xi\in Y\\ \xi\neq 0}} \frac{|\langle R,\xi\rangle|}{\|u\|_X}.$$

temos que (B.2) implica que

$$\|S\| \leqslant \sup_{\xi\in Y} \frac{|\langle R,\xi\rangle|}{C_4\|\xi\|_Y} = \frac{1}{C_4}\|R\| = C_4\|R\|$$

e de modo análogo,

$$\|S\| \geqslant C_3\|R\|,$$

ou seja,

$$C_3\|R\| \leqslant \|S\| \leqslant C_4\|R\|. \tag{B.4}$$

Por outro lado, com R definimos o operador $P(t)$, $t \in (0,T)$, como sendo

$$\langle P(t), \alpha\rangle_{H^{-1}(\Omega_t),\, H_0^1(\Omega_t)} = \langle R(t), \beta\rangle_{H^{-1}(\Omega),\, H_0^1(\Omega)},$$

para $\alpha \in H_0^1(\Omega_t)$ e $\beta(x) = k^n(t)\alpha(k(t)x)$. Perceba que vale, por (B.2), que

$$C_3\|\beta\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \|\alpha\|_{H_0^1(\Omega_t)} \leqslant C_4\|\beta\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

De modo análogo ao realizado para obter (B.4), obtemos

$$C_3\|R(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \|P(t)\|_{H^{-1}(\Omega_t)} \leqslant C_4\|R(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Identificando S com R e R com P, obtemos que o espaço $L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$ é constituído pelos funcionais S tais que

- $S : (0, T) \longrightarrow H^{-1}(\Omega_t)$, S mensurável;

- Existe $R \in L^{p'}(0, T; H^{-1}(\Omega))$ satisfazendo $\langle S(t), \alpha \rangle = \langle R(t), \beta \rangle$ q.s. em $(0, T)$, com $\beta(x) = k^n(t)\alpha(k(t)x)$,

e a norma é dada por

$$\|S\|_{L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))} = \left(\int_0^T \|S(t)\|^{p'}_{H^{-1}(\Omega_t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad 1 \leqslant p' < \infty$$

$$\|S\|_{L^{\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))} = \sup_{t \in (0,T)} ess \, \|S(t)\|_{H^{-1}(\Omega_t)}.$$

O espaço $C([0, T]; H^{-1}(\Omega_t))$ será definido como subespaço fechado de $L^{\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_t))$ constituído pelos funcionais S tais que o correspondente R pertence a $C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$.

Seja $u : \widehat{Q} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$u(y, t) = w\left(\frac{y}{k(t)}, t \right), \quad w : Q \to \mathbb{R},$$

então,

$$u'(y, t) = -\frac{k'(t)}{k(t)} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \left(\frac{y}{k(t)}, t \right) + w' \left(\frac{y}{k(t)}, t \right). \tag{B.5}$$

Seja $u \in L^p(0, T; L^2(\Omega_t))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, tal que $\xi' \in L^p(0, T; H^{-1}(\Omega))$, onde $\mathcal{U}\xi = u$.

Agora, seja $w = k^{-n}\xi$, isto é,

$$u(y, t) = k^{-n}(t)\xi \left(\frac{y}{k(t)}, t \right) = w \left(\frac{y}{k(t)}, t \right).$$

Então $w \in L^p(0, T; L^2(\Omega))$ e $w' \in L^p(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Por (B.5), temos

$$\begin{aligned} \langle u'(t), \alpha \rangle &= \int_{\Omega_t} u'(y, t)\alpha(y) \, dy \\ &= \int_{\Omega} \left(-\frac{k'(t)}{k(t)} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + w' \right) \alpha(k(t)x) \, k^n(t) \, dx \\ &= \left\langle -\frac{k'(t)}{k(t)} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + w', \beta \right\rangle, \end{aligned}$$

com $\alpha \in H_0^1(\Omega_t)$ e $\beta(x) = k^n(t)\alpha(k(t)x)$. Daí, $u' \in L^p(0, T; H^{-1}(\Omega_t))$.

Em particular, se $u \in L^p(0, T; H_0^1(\Omega_t))$ e $u' \in L^p(0, T; L^2(\Omega))$ então

$$(u'(t), \alpha)_{L^2(\Omega_t)} = \left(-\frac{k'(t)}{k(t)} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + w', \beta \right)_{L^2(\Omega)}$$

com $\alpha \in L^2(\Omega_t)$. Assim, $u' \in L^p(0, T; L^2(\Omega_t))$.

Denotemos por $L^2(0,T;L^2(\Gamma_t))$ o espaço de Hilbert de funções $g:\widehat{\Sigma}\to\mathbb{R}$ tais que existe $v\in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ verificando

$$g(y,t)=k^{-n-1}(t)\,v\left(\frac{y}{k(t)},t\right),$$

equipado com o produto interno

$$(g,\widehat{g})_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_t))}=\int_0^T(g(t),\widehat{g}(t))_{L^2(\Gamma_t)}\,dt.$$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS R. A., *Sobolev Space*, Academic Press, London, (1975). 11

[2] BARDOS C. and CHENG C., *Control and stabilization for the wave equation, part III: domais with moving boudary*, SIAM J. Control and Optimization, 19 (1981), p. 123-138. 5

[3] BARDOS C. and COOPER J., *A nonlinear wave equation in a time dependent domain*, J. Math. Anal. Appl., 42 (1973), p. 29-60. 5

[4] BOTELHO G., PELLEGRINO D. e TEIXEIRA E., *Fundamentos de análise funcional.* SBM, (2012). 15

[5] BREZIS H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Dunod, Paris, (1983). 11, 12, 13, 15, 16

[6] CORDUNEANU C., *Principles of Differential and Integral Equations,* Allyn and Bacon, Boston, (1971). 16

[7] DRAGOMIR S. S., *Some Gronwall Type Inequalities and Applications,* Melbourne: Victoria University of Technology, School of Communications and Informatics, (2002). 17

[8] EVANS L. C., *Partial Differential Equations,* Second edition, Graduate Studies in Mathematics, v.19. American Mathematical Society, Providence, RI, (2010). 13

[9] FERNÁNDEZ-CARA E. and ZUAZUA E., *History, mathematical achievements and perspectives,* Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, Sevilla, n. 26, p. 79–140, (2003). 2, 3

[10] FUENTES R., *Exact control for wave equations with variable coefficients*. Thesis, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Brasil, (1991). 5

[11] HO L. F., *Observabilité Frontière de l'Équation des Ondes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 302 (1986), 443-446. 3

[12] KOMORNIK V., *Exact controllability in short time for the wave equation,* Analyse Non Linéaire-Ann. Inst. Henri Poincaré 6 (1989) 153-164. 73

[13] LIONS J. L., *Contrôlabilité Exacte, Stabilisation et Pertubations de Systèmes Distribuées*, Tom 1, RMA 8, Masson, (1988). 3, 5, 73, 93

[14] LION J. L., *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, Collège de France, Département de Mathématiques, 3 rue d'Ulm, 75005 Paris, (1988). 5

[15] LIONS J. L., *Exact Controllability, Stabilization and Pertubation for Distributed Systems*, SIAM Rev., 30 (1988), 1-68. 3, 5, 93

[16] LIONS J. L., *Hidden Regularity in some Nonlinear Hyperbolic Equations*, Mat. Apl. Comput., 6 (1987), 7-15. 67

[17] LIONS J. L., *Une remarque sur les problémes d'évolution non liraéaires dans des domaines non cylindriques*, Rey. Roumanxe MatIm. Pure AppL, 9 (1964), p. 11-18.

[18] LIONS J. L. et MAGENES E., *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, (1968). 5

[19] MARKUS L., *Controllability of Nonlinear Processes*, SIAM J. Control, 3 (1965), 78-90. 10, 13, 79

[20] MEDEIROS L. A., *Nonlinear wave equations in domains with variable boundary*, Arch. Rat. Mech. Anal., 47 (1972), p. 47-58. 3

[21] MEDEIROS L. A. e MIRANDA M. M., *Espaços de Sobolev: Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos*, Rio de Jneiro, IM-UFRJ, (2000). 5

[22] MEDEIROS L. A. e MIRANDA M. M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989). 12

[23] MEDEIROS L. A. e MIRANDA M. M., *Introdução aos espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro: UFRJ/IM (2011). 8, 9, 13

[24] MEDEIROS L. A. e RIVERA P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).

[25] MIRANDA M. M., *Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des domaines non cylindriques*, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie *I* 317 (1993) 1-5. 9, 12, 116

[26] MIRANDA M. M., *Exact controllability for the wave equation in domains with variable boundary*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, Vol.9 (2): p. 317-341, (1996). 5

[27] MIRANDA M. M., *HUM and the wave equation with variable coefficients*, Asymptotic Analysis, 11, p. 317-341, (1995).

[28] MURILLO K. P., *Controlabilidade exata e aproximada da equação da onda linear*, 108 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, (2008). 5

[29] PELLEGRINI L., *MAT5721 – Análise Funcional,* São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, s.d. 5

[30] RIVERA J. M., *Exact controllability: coefficient depending on the time*, SIAM Journal on Control and Optimization, 28 (1990), 498-501. 15

[31] RUSSEL D. L., *A Unified Boundary Controllability Theory for Hyperbolic and Parabolic Partial Differential Equations*, Studies in Appl. Math., 52 (1973), 189-221. 5

[32] RUSSEL D. L., *Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations. Recent Progress and Open Questions*, SIAM Rev. 20 (1978), 639-739. 3

[33] SCHWARTZ L., *Theorie des Distributions*, Hermann, (1996). 3

[34] SIAM, *Control in an Information Rich World: Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics, and Systems*, SIAM, (2002). 8

[35] SIAM, *Future directions in Control Theory, report of the panel of future Directions in Control Theory*, SIAM Report on Issues in Mathematical Sciences, Philadelphia, (1988). 3

[36] SIKORAV J., *Équation des ondes das les ouvert non cylindriques: une approche globale*, C. R. Acad. Sci. Paris, 308, Serie I, (1989), p.345-358. 3

[37] SIMON J., *Compact sets in the space* $L^p(0;T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) CXLVI (1987) 65-96. 5

[38] ZUAZUA E., *An introduction to the exact controllability for distributed systems*, CMAF, Universidade de Lisboa, Portugal, (1990).

5