



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Cleyson de Medeiros Alves [†]

Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo Não Linearidade Com Zero Positivo

Campina Grande - PB

2026

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Cleyson de Medeiros Alves

Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo Não Linearidade Com Zero Positivo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa Equações Diferenciais Parciais Elípticas e área de concentração Matemática Pura como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira

Campina Grande - PB

2026

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

A474p

Alves, Cleyson de Medeiros.

Problemas elípticos semilineares envolvendo não linearidade com zero positivo / Cleyson de Medeiros Alves. – 2026.

113 f. ; il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.

"Orientação: Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira".

Referências.

1. EDP's Elípticas. 2. Não-linearidades com Zero. 3. Soluções de Viscosidade I. Pereira, Denilson da Silva. II. Título.

UFCG/BC

CDU 517.95(043.3)

Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo Não Linearidade Com Zero Positivo

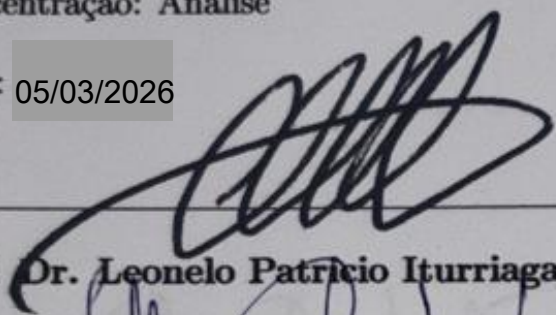
por

Cleyson de Medeiros Alves

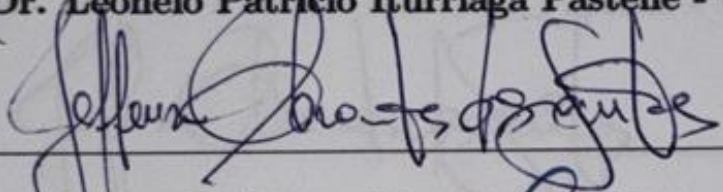
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

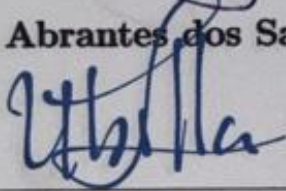
Aprovada em: 05/03/2026



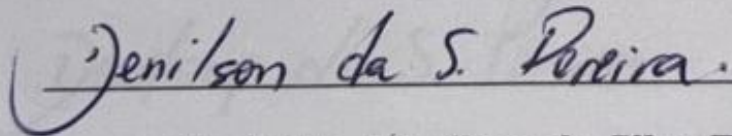
Prof. Dr. Leonelo Patricio Iturriaga Pastene - UTFSM(Chile)



Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG



Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla Lopez - USACH (Chile)



Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Fevereiro - 2026

Agradecimentos

Primeiramente, expresso minha gratidão ao senhor, Deus. Agradeço pela saúde e condição para chegar até aqui. Toda honra e glória sejam dadas a ti senhor!

Em seguinte, sou grato pela minha mãe Euzimar, apesar das dificuldades financeiras e de saúde nunca mediu esforços para criar seus filhos. E hoje, tenho prazer de se tornar mestre. Essa conquista é sua mãe!

Impreterivelmente, deixo minhas sinceras gratidões ao meu orientador e amigo Dr. Denilson Pereira. Obrigado pela paciência e confiança, por suas contribuições para que eu pudesse evoluir de forma significativa como matemático. Sou extremamente grato pelos seus ensinamentos!

Por conseguinte, agradeço a todos os amigos e colegas da "sala da pós", passamos juntos por momentos decisivos, compartilhando ideias, ensinamentos e, é claro, um companheirismo que tornou esta jornada mais leve. Aos amigos mais próximos, meu muito obrigado por tudo!

Por fim, quero expressar gratidão a UFCG, aos demais professores do departamento de matemática, dos "puxões de orelha" aos conselhos. Grato!!!

Dedicatória

Dedico a minha mãe, Euzimar.

Não fique triste porque acabou,
Fique feliz porque aconteceu...
Pense nisso!!! Alanzoka.

Resumo

Neste trabalho consideramos a seguinte classe de problemas elípticos semilineares

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) é um domínio suave, $\lambda > 0$ é um parâmetro e f uma função localmente lipschitz e não negativa possuindo um zero $\alpha > 0$ isolado. Sobre a não-linearidade, assumimos apenas hipóteses de crescimento em uma vizinhança de seu zero. Dispensando a necessidade de condições de crescimento no infinito ou na origem, mostramos que, para λ suficientemente grande, existem pelo menos duas soluções positivas $u_\lambda < v_\lambda$, satisfazendo $\|u_\lambda\|_\infty < \alpha < \|v_\lambda\|_\infty$ e $u_\lambda, v_\lambda \rightarrow \alpha$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω quando $\lambda \rightarrow +\infty$. Para a existência da primeira solução utilizamos o método de sub-super solução fraca combinado com a teoria de soluções no sentido da viscosidade. A segunda solução é obtida utilizando métodos variacional e técnicas de truncamento.

Palavras-chave: EDP's elípticas, não-linearidades com zero, soluções de viscosidade.

Abstract

In this work, we consider the following class of semilinear elliptic problems

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) is a smooth domain, $\lambda > 0$ is a parameter, and f is a locally Lipschitz and non-negative function with an isolated zero $\alpha > 0$. Regarding the nonlinearity, we assume only growth hypotheses in a neighborhood of its zero. By dispensing with the need for growth conditions at infinity or at the origin, we show that, for λ sufficiently large, there exist at least two positive solutions $u_\lambda < v_\lambda$, satisfying $\|u_\lambda\|_\infty < \alpha < \|v_\lambda\|_\infty$ and $u_\lambda, v_\lambda \rightarrow \alpha$ uniformly on compact subsets of Ω as $\lambda \rightarrow +\infty$. For the existence of the first solution, we employ the method of weak sub and super solutions combined with the theory of viscosity solutions. The second solution is obtained using variational methods and truncation techniques.

Key Words: Elliptic PDEs, nonlinearities with zero, viscosity solution.

Sumário

Introdução	3
1 Método de Sub-Super Solução Fraca	7
2 Topologia H^1 vs C^1	14
3 Soluções Viscosas Para Problemas Elípticos	24
4 Aplicação: Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo Não Linearidade Com Um Zero Positivo	40
4.1 Apresentação do Problema	40
4.2 A primeira solução	41
4.3 A segunda solução	56
A Resultados Básicos de EDP's Elípticas	84
A.1 Princípio de Máximo	87
A.2 Resultados de Medida e Integração	90
A.3 Definições e resultados da Análise Funcional	91
B Teoremas do Tipo Liouville	92
C Alguns Resultados Elementares	94
Bibliografia	104

Notações

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

$$e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

$B(x, r)$ bola aberta em \mathbb{R}^n de centro x e raio r

S^{n-1} esfera unitária de dimensão n

$\bar{\Omega}$ fecho do conjunto Ω

$\partial\Omega$ fronteira do conjunto Ω

$\text{dist}(x, \Omega)$ distância do ponto x ao conjunto Ω

$|\Omega|$ medida de Lebesgue do conjunto Ω

$\Omega' \subset\subset \Omega$ se $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ e $\bar{\Omega}'$ é um conjunto compacto

$\|\cdot\|$ norma euclidiana em \mathbb{R}^n

$c^+ = \max\{0, c\}$ parte não negativa da função c

$c^- = \min\{0, c\}$ parte não positiva da função c

u_{x_i} ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ derivada parcial de u com respeito a x_i

$\nabla u = Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ gradiente de u

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{Laplaciano de } u$$

D^2u matriz Hessiana

$a \cdot b$ produto interno de a e b

$f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow x_0$, ordem grande, significa que $\lim_{|x| \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C, C \geq 0$

$f = o(g)$ quando $x \rightarrow x_0$, ordem pequena, significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$

■ indica final de demonstração.

$$\|u\|_{\infty} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\Omega} |u|$$

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \text{ess sup } |u|(x), \quad x \in \Omega$$

$$[u]^{(\beta)} = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\beta}}$$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + [u]^{(\alpha)}$$

$$\|u\|_{C^{m,\beta}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}} + \sum_{|\alpha|=m} [D^{\alpha}u]^{(\beta)}$$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

Introdução

Neste trabalho, estudamos as soluções e propriedades qualitativas da classe de equações elípticas semilineares

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\lambda)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) é um domínio suave, f uma função localmente lipschitz e não negativa e $\lambda > 0$ um parâmetro. Também estamos assumindo que a função f possui um zero isolado α , e que satisfaz a seguinte hipótese

Existe $\delta > 0$ tal que a função

$$\frac{f(t)}{(t - \alpha)^{\frac{N+2}{N-2}}} \quad (H)$$

é decrescente para $t \in (\alpha, \alpha + \delta)$.

Uma primeira motivação que levou o estudo desse trabalho, segue de Lions em [24].

O objetivo do trabalho de Lions é fornecer um levantamento sobre o problema da existência de soluções positivas para problemas elípticos semilineares da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \quad u \in C^2(\bar{\Omega}), \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio regular limitado em \mathbb{R}^N , e $f(t)$ é uma não linearidade dada.

Tais problemas surgem em diversas situações:

- Na teoria de difusão não-linear gerada por fontes não-lineares;
- Na teoria de ignição térmica de gases.

Confira: [19] e [15].

- Em teoria quântica de campos e estatística mecânica.

Confira: [13] e [29].

- E na teoria do equilíbrio gravitacional de estrelas.

Confira: [19] e [23].

É conhecido na literatura, mais especificamente por Lions em [24], que a depender das condições impostas sobre o crescimento da não linearidade e seu comportamento próximo da origem, juntamente com hipóteses sobre o zero da função, interfere nos resultados de existência e multiplicidade. Porém, Lions provou diversos resultados de existência e multiplicidade de soluções usando condições sobre a origem e no infinito da não linearidade. Naturalmente, a existência de uma solução (ou de múltiplas soluções) depende significativamente das suposições feitas sobre f . Para obter as soluções, no trabalho de Lions foi impostas condições do tipo

(i) O caso quando $f(0) = 0$

1.1. Não linearidades com crescimento superlinear no infinito.

1.2. Não linearidades com crescimento sublineares no infinito.

(ii) O caso quando $f(0) > 0$

2.1. Não linearidades com crescimento superlinear no infinito.

2.2. Não linearidades com crescimento sublineares no infinito.

Em 2015, foi publicado o trabalho de B. Barrios, J. García-Melián e L. Iturriaga [14], Neste artigo, foi tratado a questão da multiplicidade de soluções positivas (clássicas) do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f é uma função não negativa, localmente Lipschitz, definida em $[0, +\infty)$, Ω é um domínio suave e limitado de \mathbb{R}^N ($N \geq 3$) e $\lambda > 0$ é um parâmetro. Assim, obtendo duas soluções sem impor condições sobre a não linearidade. Na construção da segunda solução,

foi utilizado um teorema do tipo Liouville da forma:

Teorema. Suponha $N \geq 3$ e seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e não negativa. Suponha, além disso, que para todo zero α de f exista $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} \frac{f(t)}{(t-\alpha)^{\frac{2(N-1)}{N-2}}} dt = +\infty.$$

Seja u uma solução positiva do problema anterior. Então $u \equiv \beta$ em \mathbb{R}^N , para algum β tal que $f(\beta) = 0$.

No que segue, nosso estudo é baseado no artigo de B. Barrios, J. García-Melián e L. Iturriaga [3], o qual a um avanço em relação ao trabalho de J. García-Melián e L. Iturriaga em [14]. Este último, por sua vez, aprimora os resultados de Lions [24] ao remover hipóteses restritivas sobre o comportamento da não-linearidade no infinito e próximo da origem. Em comparação com [14], o presente trabalho avança ao flexibilizar com a hipótese (H) apresentando-a em uma versão mais abrangente, ou seja, para obter a segunda solução citada em [14], foi usado um teorema do tipo Liouville que está intrinsecamente ligada à divergência da integral próximo do zero da não-linearidade (teorema anterior). No entanto, para a classe de exemplos da forma $f(t) = h(t)|t - \alpha|^q$, onde $h(t)$ é localmente lipschitz e $h(\alpha) > 0$, segue que a hipótese (em [14]) é válida para $q \leq \frac{N}{N-2}$. Por outro lado, se considerarmos o teorema do tipo Liouville desse trabalho, confira B.3, é possível generalizar o expoente para $q \leq \frac{N+2}{N-2}$ e mesmo assim conseguir obter a segunda solução v_λ mencionada anteriormente.

Esta dissertação está estruturada para demonstrar o principal resultado seguinte

Teorema: Assuma $N \geq 3$, e seja f uma função não negativa localmente Lipschitz com um zero isolado $\alpha > 0$, tal que a hipótese (H) é válida. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para $\lambda > \lambda_0$, o problema (P_λ) admite pelo menos duas soluções positivas u_λ e v_λ com $u_\lambda < v_\lambda$ em Ω , e $\|u_\lambda\|_\infty < \alpha < \|v_\lambda\|_\infty$. Além disso,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v_\lambda(x) = \alpha,$$

uniformemente em subconjuntos compactos de Ω .

Neste trabalho foi mostrado fazendo uso do Método de Perron para soluções Viscosas que a solução u_λ é de fato uma solução maximal dentre todas as soluções no intervalo $[0, \alpha]$. Com respeito a segunda solução v_λ , sua existência foi verificada usando método variacional e por fim, para mostrar as propriedades qualitativas a respeito da mesma, foi

utilizado os teoremas do tipo Liouville apresentados no apêndice B. É impreterivelmente necessário destacar que a existência de tais soluções não depende do comportamento de f na origem ou no infinito.

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

O Capítulo 1 foi baseado no livro de Struwe [30], sendo apresentado o Teorema de sub-super solução fraca, que será usado como meio para garantir as soluções principais deste trabalho.

O Capítulo 2 foi baseado em Brezis e Nirenberg [11], apresentamos o Teorema de H^1 vs C^1 , teorema este, é de certa forma surpreendente, uma vez que uma vizinhança $H_0^1(\Omega)$ é muito maior do que uma vizinhança $C_0^1(\Omega)$, com isso garantimos com certas condições a construção da segunda solução v_λ .

O Capítulo 3 baseado no livro do Koike [21], livro base para o estudo de soluções viscosas, apresentamos a teoria até o Teorema de Sub-Super Solução Viscosa (Método de Perron), usado para construção da primeira solução u_λ e garantir sua maximalidade.

O Capítulo 4 baseado no trabalho de Barrios, García-Melián e Leonelo [3], é de fato a principal parte desse trabalho, sendo apresentado o problema principal, e mostrado as duas soluções u_λ , v_λ e suas propriedades.

Capítulo 1

Método de Sub-Super Solução Fraca

Neste capítulo faremos um estudo do Método de sub-super solução fraca para a seguinte classe de problemas elípticos semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo a propriedade de ser limitada em conjuntos limitados da variável u , ou seja,

Dado arbitrariamente $R > 0$, existe uma constante $C(R) > 0$ tal que

$$|f(x, u)| \leq C(R), \quad (g)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathbb{R}$ com $|u| \leq R$. Este estudo é baseado em Struwe [30] e será utilizado no Capítulo 5 desta dissertação.

Definição 1.1 (i) Dizemos que $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ é uma **supersolução fraca** do problema (1.1) se

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v \, dx \geq \int_{\Omega} f(\cdot, \bar{u}) v \, dx \quad (1.2)$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$ q.t.p. (quase em todo ponto).

(ii) De modo similar, $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ é uma **subsolução fraca** se

$$\int_{\Omega} \nabla \underline{u} \cdot \nabla v \, dx \leq \int_{\Omega} f(\cdot, \underline{u}) v \, dx \quad (1.3)$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$ q.t.p.

(iii) Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma **solução fraca** de (1.1) se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(\cdot, u) v \, dx$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$.

Observação 1.1 Se $\bar{u}, \underline{u} \in C^2(\bar{\Omega})$, então de (1.2) e (1.3) segue que

$$-\Delta \bar{u} \geq f(\cdot, \bar{u}), \quad -\Delta \underline{u} \leq f(\cdot, \underline{u}) \quad \text{em } \Omega.$$

Teorema 1.1 Suponha que V seja um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|$, e seja $M \subset V$ um subconjunto fracamente fechado de V . Suponha $E : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é coerciva e (sequencialmente) fracamente semicontínua inferiormente em M em relação a V , isto é, suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(i) $E(u) \rightarrow \infty$ quando $\|u\| \rightarrow \infty$, $u \in M$.

(ii) Para qualquer $u \in M$, qualquer sequência (u_m) em M tal que $u_m \rightarrow u$ fracamente em V satisfaz:

$$E(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m).$$

Então E é limitada inferiormente em M e atinge seu ínfimo em M .

Demonstração: Seja $\alpha_0 = \inf_M E$ e seja (u_m) uma sequência minimizadora em M , isto é, satisfazendo $E(u_m) \rightarrow \alpha_0$. Pela coercividade, (u_m) é limitada em V . Como V é reflexivo, pelo Teorema de (Eberlein–Šmulian), podemos supor que $u_m \rightarrow u$ fracamente para algum $u \in V$. Mas M é fracamente fechado, portanto $u \in M$, e pela semicontinuidade inferior fraca

$$E(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m) = \alpha_0$$

■

Teorema 1.2 (Sub-Super Solução Fraca) Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory satisfazendo (g). Suponha que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ seja uma subsolução, enquanto $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ é uma supersolução para o problema (1.1) e assumamos que existam constantes tais que $\underline{c}, \bar{c} \in \mathbb{R}$ tais que

$$-\infty < \underline{c} \leq \underline{u}(x) \leq \bar{u}(x) \leq \bar{c} < \infty \quad \text{q.t.p. em } x \in \Omega.$$

Então existe uma solução fraca $u \in H^1(\Omega)$ de (1.1), satisfazendo a condição $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ em quase todo lugar em Ω .

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos assumir $u_0 = 0$.

Seja $G(x, u) = \int_0^u g(x, v) dv$ denotando uma primitiva de g . Note que o problema (1.1) tem o seguinte funcional energia associado

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx.$$

Como G é a primitiva de g e esta é uma função de Carathéodory, segue que G também é uma função de Carathéodory. Dessa maneira, não temos informações suficientes para garantir que o funcional E seja limitado ou até mesmo diferenciável em $V := H_0^1(\Omega)$.

Para garantir a coercividade de E vamos restringi-lo ao conjunto

$$M = \{u \in H_0^1(\Omega) : \underline{u} \leq u \leq \bar{u} \text{ q.t.p.}\}.$$

Como $\underline{u}, \bar{u} \in L^\infty(\Omega)$, temos que se $u \in M$ então $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, logo $u \in L^\infty(\Omega)$. Portanto,

$$z \in L^\infty(\Omega) \forall z \in M$$

Segue que $|g(x, u(x))| \leq C(\bar{c}), \forall |u(x)| \leq \bar{c}$ q.t.p em Ω . Tomando $u \in M$ então

$$-\infty < \underline{c} \leq \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u} \leq \bar{c} < +\infty$$

Daí,

$$|G(x, u(x))| = \left| \int_0^{u(x)} g(x, s) ds \right| \leq \int_0^{u(x)} |g(x, s)| ds \leq C(\bar{c})|u(x)| \leq C(\bar{c})\bar{c} := c$$

ou seja,

$$|G(x, u(x))| \leq c \forall u \in M \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p} \tag{1.4}$$

Agora, vamos verificar as hipóteses do Teorema 1.1

- (i) Temos que, $V := H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.
- (ii) O conjunto M é fechado em $H_0^1(\Omega)$ e convexo.

Com efeito, para mostrar que é fechado, seja $u \in \overline{M}^{H_0^1(\Omega)}$, então existe uma sequência $(u_n) \subset M$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

Pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (cf. Teorema A.8), segue que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega), s \in [1, 2^*)$$

Pelo Teorema A.11, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_k} \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Como $(u_{n_k}) \subset M$, assim

$$\underline{u}(x) \leq u_{n_k}(x) \leq \bar{u}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Passando ao limite quando $k \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x)$$

mostrando que $u \in M$, e assim M é fechado.

Agora para mostrar a convexidade, sejam $u, v \in M$, e $t \in [0, 1]$. Segue que

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \implies (1-t)\underline{u} \leq (1-t)u \leq (1-t)\bar{u} \quad (1.5)$$

e que

$$\underline{u} \leq v \leq \bar{u} \implies t\underline{u} \leq tv \leq t\bar{u} \quad (1.6)$$

Somando (1.5) e (1.6), temos

$$(1-t)\underline{u} + t\underline{u} \leq (1-t)u + tv \leq (1-t)\bar{u} + t\bar{u}$$

Logo

$$\underline{u} \leq (1-t)u + tv \leq \bar{u}$$

portanto M é convexo.

(iii) Coercividade:

Desde que para todo $u \in M$ seja essencialmente limitado, por (1.4), segue

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} G(x, u) \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - c|\Omega|. \end{aligned}$$

Daí, se $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow +\infty$ então $E(u) \rightarrow +\infty$, isto é, o funcional E é coercivo em M .

(iv) Finalmente, falta verificar que E é fracamente semicontínuo inferiormente em M .

Isto é, dadas $u_m, u \in M$ tais que $u_m \rightharpoonup u$ (fracamente) em $W_0^{1,2}(\Omega)$ então

$$E(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m).$$

De fato, seja $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, Note que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} G(x, u_n) dx \right) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(x, u_n) dx \end{aligned}$$

Pelo Teorema A.12 item (iii) temos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(x, u_n) dx \quad (1.7)$$

Para mostrar que E é fracamente semicontínua inferiormente, basta mostrar que

$$\int_{\Omega} G(x, u_n) dx \longrightarrow \int_{\Omega} G(x, u) dx$$

(pois caso isso aconteça, teremos $\liminf \int_{\Omega} G(x, u_n) dx = \lim \int_{\Omega} G(x, u_n) dx$)

De fato, como $u_n \rightharpoonup u$ (passando a uma subsequência se necessário), podemos assumir que

$$u_n \rightarrow u \quad q.t.p \quad \text{em } \Omega$$

Daí,

$$G(x, u_n) \rightarrow G(x, u)$$

pontualmente em quase toda parte. E ainda,

$$|G(x, u_n(x))| \leq c$$

uniformemente. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Teorema A.11)

$$\int_{\Omega} G(x, u) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(x, u_n) dx.$$

Como todas as condições do Teorema 1.1 são satisfeitas, podemos garantir a existência de um minimizador relativo $u \in M$. Portanto (1.7) se resume a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - \int_{\Omega} G(x, u) dx = E(u).$$

Portanto E é fracamente semicontínua inferiormente

Como todas as condições satisfeitas, podemos garantir a existência de um minimizador relativo u em M .

Para ver que u é solução fraca de (1.1), para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ seja

$$v_\varepsilon = \min\{\bar{u}, \max\{u, u + \varepsilon\}\} = u + \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon \in M$$

com

$$\varphi^\varepsilon = \max\{0, u + \varepsilon\varphi - \bar{u}\} \geq 0$$

e

$$\varphi_\varepsilon = \min\{0, u - (u + \varepsilon\varphi)\} \geq 0.$$

Observe que $\varphi^\varepsilon, \varphi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Como M é convexo, então $(1-t)u + tv_\varepsilon \in M$. Além disso, como u minimiza E em M e temos que E é diferenciável na direção de $(v_\varepsilon - u)$, obtemos que,

$$E(u) \leq E(u + t(v_\varepsilon - u)), \quad t \in [0, 1]$$

ou seja,

$$0 \leq E(u + t(v_\varepsilon - u)) - E(u), \quad t \in [0, 1]$$

Assim,

$$0 \leq \frac{\partial E(u)}{\partial (v_\varepsilon - u)} = \langle \nabla E(u), v_\varepsilon - u \rangle$$

Logo,

$$0 \leq \langle v_\varepsilon - u, \nabla E(u) \rangle = \langle \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon, \nabla E(u) \rangle = \varepsilon \langle \varphi, \nabla E(u) \rangle - \langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) \rangle + \langle \varphi_\varepsilon, \nabla E(u) \rangle$$

isto é,

$$\langle \varphi, \nabla E(u) \rangle \geq \frac{1}{\varepsilon} [\langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) \rangle - \langle \varphi_\varepsilon, \nabla E(u) \rangle].$$

Agora, já que u é supersolução, isto é,

$$\langle \nabla E(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\Omega} g(x, u) v \, dx \geq 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), v \geq 0 \quad (1.8)$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) \rangle &= \langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) + \nabla E(\bar{u}) - \nabla E(\bar{u}) \rangle \\ &= \langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(\bar{u}) \rangle + \langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) - \nabla E(\bar{u}) \rangle \end{aligned}$$

de (1.8), temos a desigualdade

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) \rangle &\geq \langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) - \nabla E(\bar{u}) \rangle \\
&= \langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) \rangle - \langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(\bar{u}) \rangle \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi^\varepsilon - \int_{\Omega} g(x, u) \varphi^\varepsilon dx - \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla \varphi^\varepsilon + \int_{\Omega} g(x, \bar{u}) \varphi^\varepsilon dx
\end{aligned}$$

agrupando os termos, segue

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) \rangle &\geq \int_{\Omega} \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla \varphi^\varepsilon dx - \left(\int_{\Omega} [g(x, u) - g(x, \bar{u})] \varphi^\varepsilon dx \right) \\
&= \int_{\Omega} \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla(u + \varepsilon \varphi - \bar{u}) dx - \left(\int_{\Omega} [g(x, u) - g(x, \bar{u})] (u + \varepsilon \varphi - \bar{u}) dx \right) \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla(u - \bar{u}) dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla \varphi dx \\
&\quad - \left(\int_{\Omega_\varepsilon} [g(x, u) - g(x, \bar{u})] (u - \bar{u}) dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} [g(x, u) - g(x, \bar{u})] \varphi dx \right)
\end{aligned}$$

pelo fato de que $\|\nabla(u - \bar{u})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{1/2} \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) \rangle &\geq \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega_\varepsilon} |g(x, u) - g(x, \bar{u})| |u - \bar{u}| dx \\
&\quad - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |g(x, u) - g(x, \bar{u})| |\varphi| dx \\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla \varphi dx - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |g(x, u) - g(x, \bar{u})| |\varphi| dx
\end{aligned}$$

onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid u(x) + \varepsilon \varphi \geq \bar{u}(x) > u(x)\}$.

Note que $|\Omega_\varepsilon| \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Da desigualdade acima obtemos que

$$\langle \varphi^\varepsilon, \nabla E(u) \rangle \geq o(\varepsilon),$$

onde $o(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De forma similar, concluimos que

$$\langle \varphi_\varepsilon, DE(u) \rangle \leq o(\varepsilon),$$

do que se segue que

$$\langle \varphi, DE(u) \rangle \geq 0$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Invertendo o sinal de φ e uma vez que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, finalmente vemos que $\nabla E(u) = 0$, como afirmado. \blacksquare

Capítulo 2

Topologia H^1 vs C^1

Nesse capítulo será exibido e demonstrado um importantíssimo Teorema de Brezis e Nirenberg [11], que será usado na construção da segunda solução no Capítulo 5 desse trabalho. O teorema é de certa forma surpreendente, uma vez que uma vizinhança $H_0^1(\Omega)$ é muito maior do que uma vizinhança C_0^1 .

Para funções u em $H_0^1(\Omega)$ em um domínio limitado Ω em \mathbb{R}^N com fronteira suave, consideramos o funcional

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u) \right) dx.$$

Aqui $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$ e assumimos a condição de crescimento natural

$$|f(x, u)| \leq C(1 + |u|^p) \quad \text{com } p \leq \frac{N+2}{N-2}, \quad (2.1)$$

bem como as suposições usuais de que f é mensurável em x e contínua em u .

Teorema 2.1 *Assuma que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ é um minimizador local de Φ na topologia C^1 , isso significa que existe algum $r > 0$ tal que*

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + v), \quad \forall v \in C_0^1(\bar{\Omega}) \text{ com } \|v\|_{C^1} \leq r. \quad (2.2)$$

Então u_0 é um minimizador local de Φ na topologia H_0^1 , isto é, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|v\|_{H_0^1} \leq \varepsilon_0. \quad (2.3)$$

Demonstração: Dividiremos a prova em três passos.

Passo 1:

Afirmção 2.1 $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall \alpha \leq 1$.

Como $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ é mínimo local de Φ , assim, u_0 é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u_0) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

No caso em que $p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$, provaremos a regularidade de u_0 no Passo 3.

Para $p = \frac{N+2}{N-2}$, apresentaremos o seguinte argumento. Escrevemos $f(x, u_0)$ na forma

$$f(x, u_0) = a(x)u_0 + b(x)$$

com

$$a(x) = \begin{cases} \frac{f(x, u_0(x))}{u_0(x)} & , \quad |u_0(x)| > 1 \\ 0 & , \quad |u_0(x)| \leq 1 \end{cases}$$

e

$$b(x) = \begin{cases} 0 & , \quad |u_0(x)| > 1 \\ f(x, u_0(x)) & , \quad |u_0(x)| \leq 1 \end{cases}$$

De (2.1) nos temos,

Caso 1: $|u_0(x)| > 1$.

Segue que,

$$|f(x, u_0(x))| \leq C(1 + |u_0|^p) \leq 2C|u_0(x)|^p.$$

Daí,

$$|a(x)| = \left| \frac{f(x, u_0(x))}{u_0(x)} \right| \leq \frac{2C|u_0(x)|^p}{|u_0(x)|} = 2C|u_0(x)|^{p-1}.$$

Caso 2: $|u_0(x)| \leq 1$

$$|a(x)| = 0 \leq C|u_0(x)|^{p-1}.$$

pela imersão de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow[\text{cont.}]{} L^s(\Omega), \quad s \in [1, 2^*)$$

Logo, $u_0 \in L^{2^*}(\Omega)$, e assim, $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, pois

$$\int_{\Omega} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx \leq C^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega} |u_0(x)|^{\frac{N}{2}(p-1)} dx = C^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega} |u_0(x)|^{\frac{2N}{N-2}} dx < \infty.$$

Por outro lado, $b \in L^\infty(\Omega)$, para ver isso, considere os casos

Caso 1: $|u_0(x)| > 1$.

Trivial.

Caso 2: $|u_0(x)| \leq 1$.

Segue que,

$$\|b\|_{L^\infty} = \max_{x \in \Omega} |b(x)| = \max_{x \in \Omega} |f(x, u_0(x))| \leq \max_{x \in \Omega} C(1 + |u_0|^p) \leq \max_{x \in \Omega} C \cdot 2 < +\infty.$$

Aplicando o Teorema 2.3 em [10], para $b(x) = g \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $-\lambda u_0(x) = a(x)u_0(x)$ temos que

$$u_0(x) \in L^q \quad \forall q < +\infty.$$

Desde que $f(x, u_0(x)) \in L^q(\Omega)$, $\forall q < +\infty$. Pelo Teorema A.3 [A.D.N] segue que

$$u_0 \in W^{2,q}(\Omega) \quad \forall q < +\infty.$$

Sabendo da imersão (cf. Teorema A.5)

$$W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Omega), \quad 0 < \alpha < 1 - \frac{N}{q}$$

para algum $q < +\infty$, fica provada a afirmação.

Agora sem perda de generalidade, assumiremos que

$$u_0 = 0$$

Passo 2: Caso quando $p < \frac{N+2}{N-2}$

Suponha por absurdo que (2.3) não vale, Então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon \in B_\varepsilon \text{ tal que } \Phi(v_\varepsilon) < \Phi(0) \tag{2.4}$$

onde $B_\varepsilon = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_{H^1} \leq \varepsilon\}$.

Como Φ é semicontínua inferiormente, segue que Φ atinge o mínimo na B_ε , onde denotaremos por v_ε tal que

$$\Phi(v_\varepsilon) = \min_{B_\varepsilon} \Phi$$

Iremos mostrar que $v_\varepsilon \rightarrow 0$ em C^1 , com isso, (2.2) e (2.4) irão se contradizer.

Seguimos com os funcionais $\Phi, \Psi : B_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , onde Ψ é dado por

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \varepsilon^2$$

e $M = \{u \in B_\varepsilon \mid \Psi(u) = 0\} = \Psi^{-1}(\{0\})$.

É claro que 0 é valor regular do funcional Ψ , isto é, $\Psi'(u) \neq 0, \forall u \in M = \Psi^{-1}(\{0\})$, pois

$$\Psi'(u)u = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = 2\varepsilon^2 \neq 0$$

Assim, pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange (cf. Teorema A.2), existe $\mu_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi'(v_\varepsilon) = \mu_\varepsilon \Psi'(v_\varepsilon) \quad (2.5)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla v_\varepsilon \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} f(x, v_\varepsilon) \varphi \, dx = \mu_\varepsilon \int_{\Omega} \nabla v_\varepsilon \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

ou ainda

$$(\mu_\varepsilon - 1) \int_{\Omega} \nabla v_\varepsilon \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f(x, v_\varepsilon) \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Pelas identidades de Green, tem-se

$$- \int_{\Omega} \Delta v_\varepsilon [\mu_\varepsilon - 1] \, dx = \int_{\Omega} f(x, v_\varepsilon) \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Daí,

$$\int_{\Omega} [-(1 - \mu_\varepsilon) \Delta v_\varepsilon - f(x, v_\varepsilon)] \cdot \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Logo pelo Teorema do Anulamento

$$-(1 - \mu_\varepsilon) \Delta v_\varepsilon = f(x, v_\varepsilon) \quad (2.6)$$

Afirmção 2.2 $\mu_\varepsilon \leq 0$

Com efeito, para todo $w \in B_\varepsilon$, temos que

$$tw + (1 - t)v_\varepsilon \in B_\varepsilon \quad \forall t \in [0, 1],$$

ou seja,

$$v_\varepsilon + t(w - v_\varepsilon) \in B_\varepsilon \quad \forall t \in [0, 1].$$

Como v_ε é mínimo global na bola B_ε , segue que

$$\Phi(v_\varepsilon + t(w - v_\varepsilon)) \geq \Phi(v_\varepsilon) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Por definição de derivada de Gateaux, obtemos

$$\Phi'(v_\varepsilon)(w - v_\varepsilon) \geq 0 \quad \forall w \in B_\varepsilon,$$

ou ainda,

$$\Phi'(v_\varepsilon)(v_\varepsilon - w) \leq 0 \quad \forall w \in B_\varepsilon.$$

Da igualdade em (2.5), dado arbitrariamente $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\mu_\varepsilon \cdot \psi'(v_\varepsilon) \cdot \varphi = \Phi'(v_\varepsilon) \cdot \varphi$$

tomando $\varphi = v_\varepsilon - w$, temos que

$$\mu_\varepsilon \cdot \psi'(v_\varepsilon)(v_\varepsilon - w) = \Phi'(v_\varepsilon)(v_\varepsilon - w) \leq 0.$$

isto é,

$$\mu_\varepsilon \left[\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 - \int_\Omega \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla w \right] \leq 0.$$

considerando $w = 0 \in B_\varepsilon$, obtemos que

$$\mu_\varepsilon \cdot \|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 0$$

logo

$$\mu_\varepsilon \leq 0$$

Afirmação 2.3 $\|v_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq K$

Com efeito, de (2.6) e usando (2.1), tem-se que

$$f \in L^{s/p}(\Omega) \quad \text{para } s \in [1, 2^*],$$

pois, pelo fato de $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ ser um mínimo global em B_ε , assim da imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega) \quad \forall s \in [1, 2^*]$$

temos que $v_\varepsilon \in L^s(\Omega)$, daí

$$\int_\Omega |f(x, v_\varepsilon)|^{\frac{s}{p}} dx \leq C^{\frac{s}{p}} \int_\Omega (1 + |v_\varepsilon|^p)^{\frac{s}{p}} dx \leq C^{\frac{s}{p}} |\Omega| \cdot C_{\frac{s}{p}} + \int_\Omega |v_\varepsilon|^s dx < +\infty.$$

pelo Teorema de [A.D.N.] (cf. A.3), temos que

$$v_\varepsilon \in W^{2, \frac{s}{p}}(\Omega).$$

Agora, consideremos os casos:

a) se $\frac{s}{p} > N$.

Pelo Teorema A.5 item (iii), temos a imersão contínua

$$W^{2, \frac{s}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1 - \frac{N}{\left(\frac{s}{p}\right)}$$

Logo

$$v_\varepsilon \in C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}),$$

daí, usando o fato de que $\mu_\varepsilon \leq 0$, ou seja, $\frac{1}{1-\mu_\varepsilon} \leq 1$ e que existe $M > 0$ tal que

$$\|v_\varepsilon\|_{C^{1, \alpha}} \leq M \|v_\varepsilon\|_{W^{2, \frac{s}{p}}} \leq M \left\| \frac{f}{1-\mu_\varepsilon} \right\|_{L^{\frac{s}{p}}} \leq C \|(1 + |v_\varepsilon|^p)\|_{L^{\frac{s}{p}}} < +\infty$$

b) Se, caso $t_0 := \frac{s}{p} \leq N$:

Pelo Teorema A.5 item (ii), temos a imersão contínua

$$W^{2, \frac{N}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{onde } \frac{1}{q} = \frac{1}{t_0} - \frac{2}{N}.$$

Logo $v_\varepsilon \in L^q(\Omega)$, e por (2.1), concluímos que

$$f \in L^{\frac{q}{p}}(\Omega),$$

e pelo Teorema [A.D.N.] segue que

$$v_\varepsilon \in W^{2, \frac{q}{p}}(\Omega).$$

Continuando com o mesmo argumento, teríamos que analisar os casos $\frac{q}{p} > N$ e $\frac{q}{p} \leq N$. Repetindo o processo conhecido como método de "bootstrap", é possível mostrar que, num número finito de interações, obtemos que

$$v_\varepsilon \in C^{1, \alpha}(\bar{\Omega})$$

e assim,

$$\|v_\varepsilon\|_{C^{1, \alpha}(\bar{\Omega})} \leq K(\text{independente de } \varepsilon).$$

Agora, da imersão compacta (cf. Teorema A.7)

$$C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$$

existe uma subsequência de v_ε (que ainda denotaremos por v_ε) tal que

$$v_\varepsilon \rightarrow v_0 \quad \text{em } C^1(\bar{\Omega}).$$

Temos que

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v_0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega)$$

daí, pelo fato de que $v_\varepsilon \rightarrow 0$ em $H^1(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pela unicidade do limite, temos que $v_0 = 0$, logo

$$v_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{em } C^1(\bar{\Omega})$$

Ou seja, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon^* > 0$ talque

$$\|v_\varepsilon\|_{C^1} < \delta \quad \text{quando } \varepsilon < \varepsilon^*$$

tomando $\delta = r$ para algum ε^* temos que (2.2) e (2.4) se contradizem, assim, fica provado o Passo 2.

Passo 3: caso crítico quando $p = \frac{N+2}{N-2}$.

Usaremos mais uma vez o Teorema 2.3 em [10] em conjunto do fato de que $\|v_\varepsilon\|_{H^1} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Suponha por contradição que (2.3) não vale. Então vale (2.4). Para cada $j > 0$ considere o truncamento

$$T_j(r) = \begin{cases} -j & \text{se } r \leq -j \\ r & \text{se } -j < r < j \\ j & \text{se } r \geq j \end{cases}$$

o conjunto

$$f_j(x, u) = f(x, T_j(u)), \quad F_j(x, u) = \int_0^u f_j(x, s) ds$$

e

$$\Phi_j(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F_j(x, u) \right) dx$$

Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, Note que para cada $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\Phi_j(u) \rightarrow \Phi(u) \quad \text{quando } j \rightarrow +\infty$$

Assim, para cada $\varepsilon > 0$, existe $j = j(\varepsilon) \geq 1$ tal que

$$\Phi_j(v_\varepsilon) < \Phi(0).$$

Claramente, existe $w_\varepsilon \in B_\varepsilon$ tal que

$$\Phi_{j(\varepsilon)}(w_\varepsilon) = \min_{u \in B_\varepsilon} \Phi_{j(\varepsilon)}(u)$$

Temos,

$$\Phi_{j(\varepsilon)}(w_\varepsilon) \leq \Phi_{j(\varepsilon)}(v_\varepsilon) < \Phi(0).$$

Afirmação 2.4 *Tem-se que $w_\varepsilon \in C^1(\bar{\Omega})$ e $w_\varepsilon \rightarrow 0$ em $C^1(\bar{\Omega})$.*

Com efeito, pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange, para w_ε , temos

$$-(1 - \mu_\varepsilon)\Delta w_\varepsilon = f_j(x, w_\varepsilon)$$

Agora observe que,

Afirmação 2.5 $|f_j(x, u)| \leq C(1 + |u|^p)$.

Com efeito, perceba que para qualquer $s \in \mathbb{R}$, temos

$$|T_j(s)| \leq \min(|s|, j)$$

Caso 1: $|u| \leq j$

Neste caso $T_j(u) = u$, então

$$|f_j(x, u)| = |f(x, T_j(u))| = |f(x, u)| \leq C(1 + |u|^p)$$

Caso 2: $|u| > j$

Neste caso, $T_j(u) = j$, então

$$|f_j(x, u)| = |f(x, T_j(u))| = |f(x, j)| \leq C(1 + |\pm j|^p) \leq C(1 + |u|^p)$$

Assim fica provada a Afirmação 2.5.

Como $w_\varepsilon \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$, pelas imersões de Sobolev, segue que

$$w_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{em } L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$$

e assim, existe $h \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ e uma subsequência (ainda denotada por w_ε) tal que

$$|w_\varepsilon| \leq h \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Portanto, pela Afirmação 2.5

$$|f_j(x, w_\varepsilon)| \leq C(1 + |w_\varepsilon|^p) = C(1 + |w_\varepsilon|^{p-1}|w_\varepsilon|) \leq C(1 + |h|^{p-1}|w_\varepsilon|) = C(1 + a|w_\varepsilon|)$$

onde $a = |h|^{p-1} \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$.

Isso implica, como mostrado no Passo 1, que (w_ε) é limitado em $L^q(\Omega) \forall q < \infty$.

Afirmção 2.6 $\|w_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq K$ (independente de ε)

Com efeito, para todo $r > 1$, temos que

$$\frac{1}{1 - \mu_\varepsilon} f_j(x, w_\varepsilon) \in L^r(\Omega)$$

Pois, usando a Afirmção 2.5 e o fato que $w_\varepsilon \in L^q(\Omega) \forall q < +\infty$ tem-se

$$\int_{\Omega} \left| \frac{f_j(x, w_\varepsilon)}{1 - \mu_\varepsilon} \right|^r dx \leq \frac{1}{|1 - \mu_\varepsilon|^r} \int_{\Omega} C^r (1 + |w_\varepsilon|^p)^r dx < \infty$$

Portanto, pelo Teorema de [A.D.N.] temos que

$$\|w_\varepsilon\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq \|f_j\|_{L^r(\Omega)}$$

Assim, para r suficientemente grande

$$W^{2,r}(\Omega) \underset{\text{cont.}}{\hookrightarrow} C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha < 1 - \frac{N}{r}$$

Assim, $\exists M > 0$ tal que

$$\|w_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq M \cdot \|w_\varepsilon\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq M \cdot C \cdot \|f_j\|_{L^r(\Omega)} =: K$$

Assim, da imersão compacta

$$C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$$

Segue que existe uma subsequência $w_{\varepsilon_k} \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que

$$w_{\varepsilon_k} \rightarrow w_0 \quad \text{em } C^1(\bar{\Omega}).$$

Portanto,

$$w_{\varepsilon_k} \rightarrow w_0 \quad \text{em } H^1(\Omega)$$

Daí,

$$w_{\varepsilon_k} \rightharpoonup w_0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega)$$

Mas como $w_\varepsilon \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$w_0 = 0.$$

E assim,

$$w_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{em } C^1(\bar{\Omega}).$$

Portanto fica provada a Afirmção 2.4.

Assim, para concluir a prova do Passo 3, pela Afirmação 2.4 , para ε suficientemente pequeno

$$\Phi(w_\varepsilon) = \Phi_{j(\varepsilon)}(w_\varepsilon) < \Phi(0)$$

e isso contradiz (2.2).

■

Capítulo 3

Soluções Viscosas Para Problemas Elípticos

Este capítulo foi baseado no livro [21], aqui foi apresentado a teoria de soluções viscosas para operadores mais gerais que possuem ordem dois, até chegar no teorema de Perron, teorema este de Sub-Super Soluções Viscosas, inspirado no Teorema de Perron clássico, que garante solução do tipo viscoso para problemas elípticos em certas condições.

No que segue, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado. Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno padrão em \mathbb{R}^N , e definimos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, para $x \in \mathbb{R}^N$. Usamos a seguinte notação de bolas abertas: Para $r > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$,

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \mid \|x - y\| < r\}, \text{ e } B_r := B_r(0).$$

Para uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos seu gradiente e matriz Hessiana em $x \in \Omega$, respectivamente, por

$$Du(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u(x)}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

e

$$D^2u(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_j} & \cdots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} & \cdots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n \partial x_j} & \cdots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Além disso, denotaremos por \mathcal{S}^N o conjunto de todas as matrizes simétricas $N \times N$ com valores reais. Note que se $u \in C^2(\Omega)$, então $D^2u(x) \in \mathcal{S}^N$ para $x \in \Omega$. Recordamos a relação de ordem em \mathcal{S}^N :

$$X \leq Y \iff \langle X\xi, \xi \rangle \leq \langle Y\xi, \xi \rangle \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

i.e., $Y - X$ é semidefinida positiva.

Estamos interessados no estudo de Equações Diferenciais Parciais gerais de segunda ordem

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \text{ em } \Omega. \quad (\text{P})$$

Iremos supor que

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

é contínua com respeito a todas as variáveis.

Retornemos a EDP de segunda ordem geral

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ em } \Omega. \quad (\text{P})$$

Usaremos a seguinte definição de soluções clássicas:

Definição 3.1 Dizemos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **subsolução clássica** (respec., **supersolução**, **solução**) de (P) se $u \in C^2(\Omega)$ e

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq 0 \quad (\text{respec., } \geq 0, = 0) \text{ em } \Omega.$$

Se F não depende variável X (i.e., $F(x, u, Du) = 0$ é uma EPD de primeira ordem), suporemos apenas $u \in C^1(\Omega)$ na definição acima no lugar de $u \in C^2(\Omega)$. Ao longo deste texto, também supomos a seguinte condição de monotonicidade em relação às variáveis X :

Definição 3.2 Dizemos que F é **elíptico (degenerado)** se

$$\text{para } X, Y \in \mathcal{S}^n \text{ com } X \geq Y \implies F(x, r, p, X) \leq F(x, r, p, Y)$$

para todo $x \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^N$.

Note que no exemplo do Laplaciano, tem-se $F(x, r, p, X) = -\text{traço}(X)$ elíptico.

No que segue, estudaremos propriedades válidas para o limite (uniforme), quando $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$), de soluções de

$$-\varepsilon \Delta u + F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (P_\varepsilon)$$

Note que se F é elíptico, então

$$-\varepsilon \text{traço}(X) + F(x, u, Du, D^2u)$$

é uniformemente elíptico. Na prática, é mais fácil resolver (P_ε) do que (P) .

Proposição 3.1 Assuma que F é elíptico. Seja $u_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ uma subsolução clássica (respec., supersolução) de (P_ε) . Se u_ε converge para $u \in C(\Omega)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformemente em qualquer compacto $K \subset \Omega$, então, para qualquer $\phi \in C^2(\Omega)$, tem-se

$$F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0 \quad (\text{respec.}, \geq 0)$$

sempre que $u - \phi$ atingir seu máximo (respec., mínimo) em $x \in \Omega$.

Observação. Quando F não depende de variáveis X , precisamos apenas supor que ϕ e u_ε estejam em $C^1(\Omega)$ como antes.

Demonstração: Fornecemos apenas uma demonstração da afirmação para subsoluções, pois a outra pode ser demonstrada de forma similar.

Suponha que $u - \phi$ atinge máximo em $\hat{x} \in \Omega$ para $\phi \in C^2(\Omega)$. Defina

$$\phi_\delta(y) := \phi(y) + \delta \|y - \hat{x}\|^4.$$

Note que $\phi_\delta(\hat{x}) = \phi(\hat{x})$. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} (u - \phi_\delta)(\hat{x}) &= (u - \phi)(\hat{x}) \\ &\geq (u - \phi)(y) \\ &= (u - \phi_\delta)(y) + \delta \|y - \hat{x}\|^4, \quad \forall y \in \Omega \\ &> (u - \phi_\delta)(y), \quad \text{para todo } y \in \Omega \setminus \{\hat{x}\}. \end{aligned}$$

Esta técnica nos permite trocar um ponto de máximo por um máximo estrito, i.e., enquanto \hat{x} é um máximo de $(u - \phi)$, este mesmo ponto passa a ser um ponto de máximo de $(u - \phi_\delta)$, com $(u - \phi_\delta)(\hat{x}) = (u - \phi)(\hat{x})$. Agora, seja $x_\varepsilon \in \bar{\Omega}$ um ponto tal que

$$(u_\varepsilon - \phi_\delta)(x_\varepsilon) = \max_{y \in \bar{\Omega}} (u_\varepsilon - \phi_\delta)(y).$$

Note que x_ε também depende de δ . Pelo Teorema de Weierstrass, a menos de subsequência $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x_0 \in \bar{\Omega}$. Uma vez que u_ε converge uniformemente para u em $B_r(\hat{x})$ e

$$(u_\varepsilon - \phi_\delta)(x_\varepsilon) \geq (u_\varepsilon - \phi_\delta)(y), \quad \forall y \in \bar{\Omega},$$

passando ao limite de $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$(u - \phi_\delta)(x_0) \geq (u - \phi_\delta)(y), \quad \forall y \in \bar{\Omega},$$

sendo \hat{x} o único ponto de máximo estrito de $u - \phi_\delta$, devemos ter $x_0 = \hat{x}$. Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = \hat{x}.$$

Sendo Ω aberto e $\hat{x} \in \Omega$, devemos ter $x_\varepsilon \in \Omega$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Observe que se utilizássemos o argumento acima para ϕ ao invés de ϕ_δ , o limite x_ε poderia ser diferente de \hat{x} . Usando a hipótese de que u_ε é solução de (P_ε) , temos

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon(x_\varepsilon) + F(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), Du_\varepsilon(x_\varepsilon), D^2 u_\varepsilon(x_\varepsilon)) \leq 0 \quad (3.1)$$

Sendo x_ε ponto de máximo da função suave $u_\varepsilon - \phi_\delta$, devemos ter

$$D(u_\varepsilon - \phi_\delta)(x_\varepsilon) = 0 \quad \text{e} \quad D^2(u_\varepsilon - \phi_\delta)(x_\varepsilon) \leq 0$$

o que implica

$$Du_\varepsilon(x_\varepsilon) = D\phi_\delta(x_\varepsilon) \quad \text{e} \quad D^2 u_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq D^2 \phi_\delta(x_\varepsilon),$$

tendo em vista a elipticidade de F , temos

$$F(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), D\phi_\delta(x_\varepsilon), D^2 \phi_\delta(x_\varepsilon)) \leq F(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), Du_\varepsilon(x_\varepsilon), D^2 u_\varepsilon(x_\varepsilon)).$$

Daí e de (3.1) temos

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon(x_\varepsilon) + F(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), D\phi_\delta(x_\varepsilon), D^2 \phi_\delta(x_\varepsilon)) \leq 0$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$F(\hat{x}, u(\hat{x}), D\phi_\delta(\hat{x}), D^2 \phi_\delta(\hat{x})) \leq 0$$

Sendo $D\phi_\delta(\hat{x}) = D\phi(\hat{x})$ e $D^2 \phi_\delta(\hat{x}) = D^2 \phi(\hat{x})$, concluímos a prova. ■

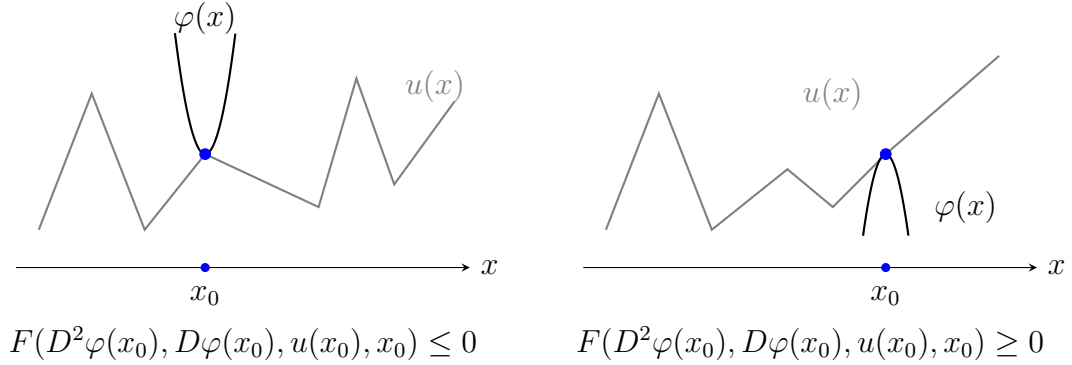
Definição 3.3 Dizemos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **subsolução viscosa** (respec., **supersolução**) de

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (\text{P})$$

se, para qualquer $\phi \in C^2(\Omega)$,

$$F(x, u, D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0 \quad (\text{respec.}, \geq 0)$$

sempre que $u - \phi$ atingir seu máximo (respec., mínimo) em $x \in \Omega$. Dizemos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **solução viscosa** quando u é, simultaneamente, sub e supersolução viscosa de (P).



Proposição 3.2 Para $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, as seguintes afirmações (1) e (2) são equivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad u \text{ é uma subsolução (respec., supersolução) de viscosidade de (P),} \\ (2) \quad \text{se } 0 = (u - \phi)(\hat{x}) > (u - \phi)(x) \text{ (respec., } < (u - \phi)(x) \\ \text{para } \phi \in C^2(\Omega), \hat{x} \in \Omega \text{ e } x \in \Omega \setminus \{\hat{x}\}, \\ \text{então } F(\hat{x}, \phi(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x})) \leq 0 \text{ (respec., } \geq 0). \end{array} \right.$$

Demonstração: (1) \Rightarrow (2) é trivial, pois segue da definição.

(2) \Rightarrow (1): Suponha que $u - \phi$ atinja seu máximo em $\hat{x} \in \Omega$. $[(u - \phi)(x) \leq (u - \phi)(\hat{x})]$

Para $\delta > 0$, defina

$$\phi_\delta(x) = \phi(\hat{x}) + \delta|x - \hat{x}|^4 + (u - \phi)(\hat{x}) \in C^1(\Omega)$$

Note que

- $\phi_\delta(\hat{x}) = u(\hat{x})$.

Assim,

$$\begin{aligned} (u - \phi_\delta)(x) &= u(x) - \phi(\hat{x}) - \delta|x - \hat{x}|^4 - (u - \phi)(\hat{x}) \\ &= (u - \phi)(x) - \delta|x - \hat{x}|^4 - (u - \phi)(\hat{x}) \\ &\leq (u - \phi)(\hat{x}) - \delta|x - \hat{x}|^4 - (u - \phi)(\hat{x}) \\ &= -\delta|x - \hat{x}|^4 < 0 = (u - \phi_\delta)(\hat{x}) \quad \forall x \in \Omega \setminus \{\hat{x}\} \end{aligned}$$

De (2), teríamos: $F(\hat{x}, \phi_\delta(\hat{x}), D\phi_\delta(\hat{x}), D^2\phi_\delta(\hat{x})) \leq 0$. logo por definição u é subsolução viscosa. ■

Para a próxima proposição, reconhecemos que soluções de viscosidade são candidatas corretas de soluções fracas quando F é **elíptica**.

Proposição 3.3 *Assuma que F é elíptico. A função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma subsolução clássica (resp. super solução) de (P) se u é uma subsolução viscosa (resp. super solução) de (P) e $u \in C^2(\Omega)$.*

Demonstração:

(\Leftarrow) Assuma que $u \in C^2(\Omega)$ é uma subsolução viscosa de (P). Tome $\phi = u \in C^2(\mathbb{R})$. Note que $u - \phi$ atinge seu máximo $\forall x \in \Omega$. Assim, da definição de viscosidade produz

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0$$

Daí,

$$F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \leq 0$$

logo u é subsolução clássica de (P).

(\Rightarrow) Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ é uma subsolução clássica de (P). Fixe arbitrariamente $\phi \in C^2(\Omega)$. Assumindo que $u - \phi$ atinge o máximo em $\hat{x} \in \Omega$, temos

$$D(u - \phi)(\hat{x}) = 0 \text{ e } D^2(u - \phi)(\hat{x}) \leq 0.$$

Pela elipticidade de F , obtemos

$$0 \geq F(\hat{x}, u(\hat{x}), Du(\hat{x}), D^2u(\hat{x})) \geq F(\hat{x}, u(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x}))$$

Introduzimos os conjuntos de funções semicontínuas superior e inferior: ■

Para $K \subset \mathbb{R}^N$,

$$\text{USC}(K) := \{u : K \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é semi-contínua superiormente em } K\},$$

e

$$\text{LSC}(K) := \{u : K \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é semi-contínua inferiormente em } K\}.$$

Observação 3.1 *Ao longo do curso, usamos o seguinte princípio do máximo para funções semicontínuas: Uma função semicontínua superiormente em um conjunto compacto atinge seu máximo.*

Para uso nos próximos resultados, introduziremos as definições de \limsup e \liminf da seguinte forma:

Definição 3.4

$$\limsup_{y \rightarrow x} u(y) = \inf_{\eta > 0} \left\{ \sup_{y \in B_\eta(x) \cap \bar{\Omega}} u(y) \right\}$$

$$\liminf_{y \rightarrow x} u(y) = \sup_{\eta > 0} \left\{ \inf_{y \in B_\eta(x) \cap \bar{\Omega}} u(y) \right\}$$

Definição 3.5 Para qualquer função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos o envelope semicontínuo superior e inferior de u por u^* e u_* , respectivamente, que são definidos por

$$u^*(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{y \in B_\varepsilon(x) \cap \bar{\Omega}} u(y) \quad e \quad u_*(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{y \in B_\varepsilon(x) \cap \bar{\Omega}} u(y).$$

Nós apresentamos algumas propriedades elementares para u^* e u_* .

Proposição 3.4 Para $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, temos

- (i) $u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x)$ para $x \in \bar{\Omega}$,
- (ii) $u^*(x) = -(-u)_*(x)$ para $x \in \bar{\Omega}$,
- (iii) u^* (resp., u_*) é semicontínua superior (resp., inferior) em $\bar{\Omega}$, i.e.,

$$\limsup_{y \rightarrow x} u^*(y) \leq u^*(x), \quad (\text{resp.}, \quad \liminf_{y \rightarrow x} u_*(y) \geq u_*(x)) \quad \text{para } x \in \bar{\Omega},$$

- (iv) se u é semicontínua superior (resp., inferior) em $\bar{\Omega}$, então $u(x) = u^*(x)$ (resp., $u(x) = u_*(x)$) para $x \in \bar{\Omega}$.

Demonstração: (i) para provar a segunda desigualdade, segue:

$$u(x) \leq \sup_{y \in B_\varepsilon(x) \cap \bar{\Omega}} u(y)$$

passando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ temos $u(x) \leq u^*(x)$. O mesmo raciocínio vale para a primeira desigualdade (i).

- (ii) Sabendo que $\sup(-S) = -\inf(S)$, considere

$$S = \{-u(y), \quad y \in B_\varepsilon(x) \cap \bar{\Omega}\}$$

Daí,

$$\sup(-S) = -\inf(S)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{y \in B_\varepsilon(x) \cap \Omega} u(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \inf_{y \in B_\varepsilon(x) \cap \Omega} -u(y) \right) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{y \in B_\varepsilon(x) \cap \Omega} -u(y)\end{aligned}$$

Portanto

$$u^*(x) = -(-u)_*(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

(iii) Da definição de lim sup, segue que

$$\begin{aligned}\limsup_{y \rightarrow x} u^*(y) &= \inf_{\eta > 0} \left\{ \sup_{y \in B_\eta(x) \cap \Omega} u^*(y) \right\} \\ &\leq \sup_{y \in B_R(x) \cap \Omega} u^*(y)\end{aligned}$$

Passando o limite ao $\eta \rightarrow 0$, tem-se

$$\lim_{y \rightarrow x} \sup_{y \in B_R(x) \cap \Omega} u^*(y) \leq u^*(x).$$

(iv) Pelo item (i), vimos que $u_*(x) \leq u(x)$, por outro lado, sendo u semicontínua superiormente, isto é,

$$\limsup_{y \rightarrow x} u(y) \leq u(x)$$

Segue que

Afirmção 3.1 $u^*(x) \leq \limsup_{y \rightarrow x} u(y)$

Com efeito, suponha por contradição que

$$u^*(x) > \limsup_{y \rightarrow x} u(y) := \inf_{\eta > 0} \left\{ \sup_{y \in B_\eta(x) \cap \Omega} u(y) \right\}$$

Assim, para

$$\eta := u^*(x) - \limsup_{y \rightarrow x} u(y) > 0$$

Pela definição de ínfimo, existe $r_\eta > 0$ tal que

$$\limsup_{y \rightarrow x} u(y) + \eta > \sup_{y \in B_{r_\eta}(y) \cap \Omega} u(y) \quad (r_\eta \text{ fixo!})$$

Logo

$$u^*(x) > \sup_{y \in B_{r_\eta}(y) \cap \Omega} u(y) \geq \sup_{y \in B_\varepsilon(y) \cap \Omega} u(y) \quad \forall \varepsilon < r_\eta$$

Passando ao limite de $\varepsilon \rightarrow 0$, temos

$$u^*(x) > \sup_{y \in B_{r_\eta}(y) \cap \Omega} u(y) > \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{y \in B_\varepsilon(y) \cap \Omega} u(y) = u^*(x)$$

O que é um absurdo. Portanto $u(x) = u_*(x)$

■

Teorema 3.1 *Seja S um conjunto não vazio de subsoluções de viscosidade semi-contínua superiormente (respec. supersoluções de viscosidade semi-contínua inferiormente) de (P).*

$$\text{Seja } u(x) := \sup_{v \in S} v(x) \quad (\text{resp. } u(x) := \inf_{v \in S} v(x))$$

Se $\sup_{x \in K} |u(x)| < \infty$ para qualquer conjunto compacto $K \subset \Omega$, então u é uma subsolução viscosa (resp. supersolução) de (P).

Demonstração: iremos provar para subsoluções, para o caso de supersoluções, a prova é simétrica.

Para $\hat{x} \in \Omega$, suponhamos que $0 = (u^* - \phi)(\hat{x}) > (u^* - \phi)(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus \{\hat{x}\}$ e $\phi \in C^2(\Omega)$. Mostraremos que

$$F(\hat{x}, \phi(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x})) \leq 0.$$

Seja $r > 0$ tal que $B_{2r}(\hat{x}) \subset \Omega$. Podemos encontrar $s > 0$ tal que

$$\max_{\partial B_R(\hat{x})} (u^* - \phi) \leq -s \tag{3.2}$$

[Basta considerar $s := \frac{|\max_{\partial B_R(\hat{x})} (u^* - \phi)|}{j}$ com $j \in \mathbb{N}$]

Tome $x_k \in B_r(\hat{x})$ tal que

- $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x}$
- $u^*(\hat{x}) - \frac{1}{k} \leq u(x_k)$
- $|\phi(x_k) - \phi(\hat{x})| < \frac{1}{k}$

Justificando cada item, o segundo item segue: Dado arbitrariamente $\frac{1}{2K} = \eta > 0$, existe

$\epsilon_\eta > 0$

tal que

$$\left| u^*(\hat{x}) - \sup_{y \in B_\epsilon(\hat{x}) \cap \Omega} u(y) \right| < \eta \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_\eta)$$

Como \mathbb{N} é ilimitado superiormente, existe $m \in \mathbb{N}$

tal que

$$m > \frac{1}{\epsilon_\eta}$$

ou seja,

$$\frac{1}{m} < \epsilon_\eta$$

Assim,

$$u^*(\hat{x}) - \sup_{y \in B_{\frac{1}{m}}(\hat{x}) \cap \Omega} u(y) < \frac{1}{2K}$$

isto é,

$$u^*(\hat{x}) < \sup_{y \in B_{\frac{1}{m}}(\hat{x}) \cap \Omega} u(y) + \frac{1}{2K}$$

Daí,

$$u^*(\hat{x}) - \frac{1}{K} < \sup_{y \in B_{\frac{1}{m}}(\hat{x}) \cap \Omega} u(y) - \frac{1}{2K}$$

Pela definição de $\sup_{y \in B_{\frac{1}{m}}(\hat{x}) \cap \Omega} u(y)$, existe $x_k \in B_{\frac{1}{m}}(\hat{x}) \cap \bar{\Omega}$ onde

$$u^*(\hat{x}) - \frac{1}{k} < \sup_{y \in B_{\frac{1}{m}}(\hat{x}) \cap \Omega} u(y) - \frac{1}{2k} \leq u(x_k)$$

segue a desigualdade desejada.

O terceiro item: segue da continuidade de ϕ .

Além disso, considere $u_k \in S$ tal que

$$u_k(x_k) + \frac{1}{k} \geq u(x_k)$$

Isso é possível, pois pela definição de supremo

para $\epsilon = \frac{1}{K}$, existe $u_K \in S$ tal que

$$\sup_{v \in S} v(x_K) - \frac{1}{K} \leq u_K(x_K)$$

ou seja,

$$u(x_K) \leq u_K(x_K) + \frac{1}{K}$$

Por (3.2), observe que

$$\begin{aligned}
(u_k - \phi)(x_k) &= u_k(x_k) - \phi(x_k) \\
&\geq u(x_k) - \frac{1}{k} - \phi(x_k) \\
&\geq u^*(\hat{x}) - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \phi(x_k) \\
&= u^*(\hat{x}) - \phi(x_k) - \frac{2}{k} \\
&= \phi(\hat{x}) - \phi(x_k) - \frac{2}{k} \\
&> -\frac{1}{k} - \frac{2}{k} \\
&= -\frac{3}{k}
\end{aligned}$$

Para que $0 > -\frac{3}{k} > -s$, é preciso que $\frac{3}{k} < s$. Assim, para $\frac{3}{k} < s$ temos

$$\max_{\partial B_r(\hat{x})} (u^* - \phi) < (u_k - \phi)(x_k)$$

Assim, para $k > \frac{3}{s}$, existe $y_k \in B_r(\hat{x})$ tal que $(u_k - \phi)$ atinge seu máximo sobre $\overline{B_r(\hat{x})}$ em y_k . A partir disso, pela Proposição 3.2, como u_k é subsolução, pois mora em S , temos

$$F(y_k, u_k(y_k), D\phi(y_k), D^2\phi(y_k)) \leq 0.$$

Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $z := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$. Note que

$$(u^* - \phi)(\hat{x}) \leq (u_k - \phi)(x_k) + \frac{3}{k} \leq (u_k - \phi)(y_k) + \frac{3}{k} \leq (u^* - \phi)(y_k) + \frac{3}{k} \quad (3.3)$$

Sabendo que u^* é semicontínua superiormente, obtemos

$$(u^* - \phi)(\hat{x}) \leq \limsup_{y_k \rightarrow z} (u^* - \phi)(y_k) \leq (u^* - \phi)(z)$$

Como \hat{x} é o ponto em que $(u^* - \phi)$ atinge o máximo, assim

$$\hat{x} = z.$$

Além disso, das desigualdades (3.3), temos

$$u^*(\hat{x}) - \phi(\hat{x}) + \phi(x_k) - \frac{3}{k} \leq u_k(x_k) \leq u^*(y_k) - \phi(y_k) + \phi(x_k)$$

Portanto, passando o \limsup , pela continuidade de ϕ , tem-se

$$\limsup_{y_k \rightarrow \hat{x}=z} \left(u^*(\hat{x}) - \phi(\hat{x}) + \phi(x_k) - \frac{3}{k} \right) = u^*(\hat{x})$$

Por outro lado, sendo $y_k \rightarrow z = \hat{x}$ e u^* s.c.s. tem-se,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (u^*(y_k) - \phi(y_k) + \phi(x_k)) \leq u^*(\hat{x})$$

Logo $\limsup_{y_k \rightarrow z = \hat{x}} u_k(x_k) = u^*(\hat{x}) = \phi(\hat{x})$ Portanto, passando o limite $k \rightarrow \infty$ em

$$F(y_k, u_k(y_k), D\phi(y_k), D^2\phi(y_k)) \leq 0$$

pela continuidade de F obtemos

$$F(\hat{x}, u^*(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x})) = F(\hat{x}, \phi(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x})) \leq 0.$$

■

Teorema 3.2 (Sub-Super Solução Viscosa) *Assuma que F é elíptica. Assuma também que existem uma subsolução de viscosidade $\xi \in USC(\bar{\Omega}) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ e uma supersolução de viscosidade $\eta \in LSC(\bar{\Omega}) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ de (P) tais que*

$$\xi \leq \eta \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

Então, $u(x) := \sup_{v \in \mathcal{S}} v(x)$ (resp., $\hat{u}(x) = \inf_{w \in \hat{\mathcal{S}}} w(x)$) é uma solução de viscosidade de (P), onde

$$\mathcal{S} := \left\{ v \in USC(\Omega) \left| \begin{array}{l} v \text{ é uma subsolução de viscosidade} \\ \text{de (P) tal que } \xi \leq v \leq \eta \text{ em } \Omega \end{array} \right. \right\}$$

$$\left(\text{resp., } \hat{\mathcal{S}} := \left\{ w \in LSC(\Omega) \left| \begin{array}{l} w \text{ é uma supersolução de viscosidade} \\ \text{de (P) tal que } \xi \leq w \leq \eta \text{ em } \Omega \end{array} \right. \right\} \right).$$

Demonstração: Primeiro note que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pois $\xi \in \mathcal{S}$. Note que,

$$\sup_{x \in K} |u(x)| = \sup_{x \in K} \left| \sup_{v \in \mathcal{S}} v(x) \right| \leq \sup_{x \in K} \eta < \infty$$

onde $K \subset\subset \Omega$, compacto. Pelo Teorema 3.1, segue que u é subsolução viscosa, basta apenas mostrar que u é supersolução viscosa.

Suponha que $u \in USC(\bar{\Omega})$. Assumindo que

$$0 = (u - \phi)(\hat{x}) < (u - \phi)(x) \quad \text{para } x \in \Omega \setminus \{\hat{x}\},$$

com $\phi \in C^2(\Omega)$, mostraremos que

$$F(\hat{x}, \phi(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x})) \geq 0. \tag{3.4}$$

Suponha por contradição que (3.4) não vale, assim existe $\theta > 0$ tal que

$$F(\hat{x}, \phi(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x})) \leq -2\theta.$$

Portanto, existe $r > 0$ tal que

$$F(x, \phi(x) + t, D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq -\theta \quad \text{para } x \in B_r(\hat{x}) \subset \Omega \text{ e } |t| \leq r. \quad (3.5)$$

Justificativa: Pela continuidade de F , tomamos $\varepsilon = \theta \exists r > 0$ tal que $|x - \hat{x}| < r$ implica

$$|F(x, \phi(x) + t, D\phi(x), D^2\phi(x)) - F(\hat{x}, \phi(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x}))| < \theta$$

Daí,

$$F(x, \phi(x) + t, D\phi(x), D^2\phi(x)) < \theta + c \leq \theta - 2\theta = -\theta$$

onde $c = F(\hat{x}, \phi(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x}))$

Afirmação 3.2 $\phi(\hat{x}) < \eta(\hat{x})$.

De fato, caso contrário $\phi(\hat{x}) \geq \eta(\hat{x})$, desde que

$$\phi \leq u \leq \eta \quad \text{em } \Omega \quad (3.6)$$

Assim a função $\eta - \phi$ atinge seu mínimo em $\hat{x} \in \Omega$. Como η é supersolução por definição temos que

$$F(\hat{x}, \eta(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x})) = F(\hat{x}, \phi(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x})) \geq 0$$

pois contraria (3.5) quando $x = \hat{x}$ e $t = 0$.

Afirmação 3.3 $\xi(\hat{x}) < \eta(\hat{x})$

Com efeito, caso contrário, teríamos que $\xi(\hat{x}) \geq \eta(\hat{x})$. Como já temos que

$$\xi(x) \leq \eta(x) \quad \text{em } \bar{\Omega}$$

então

$$\xi(\hat{x}) = \eta(\hat{x})$$

Desde que u satisfaz

$$\xi(x) \leq u(x) \leq \eta(x) \quad \text{em } \Omega.$$

Teríamos

$$\xi(\hat{x}) = u(\hat{x}) = \eta(\hat{x})$$

$$\Rightarrow \xi(\hat{x}) = u(\hat{x}) = \phi(\hat{x}) = \eta(\hat{x}),$$

Absurdo! pois $\phi(\hat{x}) < \eta(\hat{x})$.

Agora definindo $3\tau := \eta(\hat{x}) - u(\hat{x}) > 0$, a partir da semicontinuidade inferior e superior de η e ξ , respectivamente, podemos escolher $s \in (0, r]$ tal que

$$\xi(x) + \hat{\tau} \leq \phi(x) + 2\hat{\tau} \leq \eta(x) \quad \text{para } x \in B_{2s}(\hat{x}).$$

Com efeito, Considere $\varepsilon := \hat{\tau}/2 > 0$. Pela semicontinuidade inferior de $\eta \exists \delta_\eta > 0$ tal que

$$\eta(\hat{x}) - \varepsilon \leq \eta(x) \quad \forall x \in B_{\delta_\eta}(\hat{x})$$

Pela semicontinuidade superior de $\xi \exists \delta_\xi > 0$ tal que

$$\xi(x) \leq \xi(\hat{x}) + 3\varepsilon \quad \forall x \in B_{\delta_\xi}(\hat{x})$$

Pela continuidade de $\phi \exists \delta_\phi > 0$ tal que

$$|\phi(x) - \phi(\hat{x})| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B_{\delta_\phi}(\hat{x})$$

ou seja,

$$\phi(x) \leq \phi(\hat{x}) + \varepsilon \quad \forall x \in B_{\delta_\phi}(\hat{x})$$

Definimos

$$s := \frac{1}{2} \min\{r, \delta_\eta, \delta_\xi, \delta_\phi\} > 0.$$

Então, para todo $x \in B_{2s}(\hat{x})$, valem simultaneamente as estimativas anteriores.

(1) *Desigualdade à esquerda:*

$$\begin{aligned} \xi(x) - \phi(x) &\leq \xi(\hat{x}) - \phi(\hat{x}) + 3\varepsilon - \varepsilon \\ &= (\xi(\hat{x}) - \phi(\hat{x})) + 2\varepsilon \\ &\leq 0 + 2\varepsilon = \hat{\tau}, \end{aligned}$$

pois $\xi(\hat{x}) \leq \phi(\hat{x})$. Assim, $\xi(x) + \hat{\tau} \leq \phi(x) + 2\hat{\tau}$.

(2) *Desigualdade à direita:*

$$\begin{aligned} \eta(x) - \phi(x) &\geq (\eta(\hat{x}) - \varepsilon) - (\phi(\hat{x}) + \varepsilon) \\ &= (\eta(\hat{x}) - \phi(\hat{x})) - 2\varepsilon \\ &= 3\hat{\tau} - \hat{\tau} = 2\hat{\tau}, \end{aligned}$$

logo $\phi(x) + 2\hat{\tau} \leq \eta(x)$. Concluimos, portanto, que para todo $x \in B_{2s}(\hat{x})$ vale

$$\xi(x) + \hat{\tau} \leq \phi(x) + 2\hat{\tau} \leq \eta(x),$$

Além disso, podemos escolher $\varepsilon \in (0, s)$ e $\tau_0 \in (0, \min\{\hat{\tau}, r\})$ tal que

$$\phi(x) + 2\tau_0 \leq u(x) \quad \text{para } x \in \overline{B_{s+\varepsilon}(\hat{x})} \setminus B_{s-\varepsilon}(\hat{x})$$

Se pudermos definir uma função $w \in S$ tal que $w(\hat{x}) > u(\hat{x})$, então terminamos nossa prova devido à maximalidade de u em cada ponto. Agora, definimos

$$w(x) := \begin{cases} \max(u(x), \phi(x) + \tau_0) & \text{em } B_s(\hat{x}), \\ u(x) & \text{em } \Omega \setminus B_s(\hat{x}). \end{cases}$$

Observação 3.2 *Obeserve que se $x = \hat{x}$ então*

$$w(\hat{x}) = \max\{u(x), \phi(x) + \tau_0\}$$

como $u(\hat{x}) = \phi(\hat{x}) < \phi(\hat{x}) + \tau_0$ tem-se que

$$w(\hat{x}) = \max\{u(x), \phi(x) + \tau_0\} = \phi(\hat{x}) + \tau_0 > u(\hat{x})$$

Basta mostrar que $w \in S$. Devido à nossa escolha de $\tau_0, s > 0$, é fácil ver que $\xi \leq w \leq \eta$ em Ω . Portanto, só precisamos mostrar que w é uma subsolução de viscosidade de (P). Para isso, supomos que $(w^* - \psi)(x) \leq (w^* - \psi)(z) = 0$ para $x \in \Omega$. Mostraremos que

$$F(z, w^*(z), D\psi(z), D^2\psi(z)) \leq 0 \tag{3.7}$$

Se $z \in \Omega \setminus B_s(\hat{x}) = \Omega'$, por definição $w = u$ e assim $u^* - \psi$ atinge seu máximo em $z \in \Omega'$, pela Proposição 3.2 obtemos (3.7), pois u é subsolução viscosa.

Se $z \in \partial B_s(\hat{x})$, então (3.7) se mantém, pois $w = u$ em $B_{s+\varepsilon}(\hat{x}) \setminus \overline{B_{s-\varepsilon}(\hat{x})}$.

Resta mostrar (3.7) quando $z \in B_s(\hat{x})$. Uma vez que $\phi + \tau_0$ é uma subsolução de viscosidade de (P) em $B_s(\hat{x})$, o Teorema 3.1 com $\Omega := B_s(\hat{x})$ produz (3.7). Agora, supondo que $u \in LSC(\Omega)$ aqui, temos que trabalhar com u_* .

Suponha que $0 = (u_* - \phi)(\hat{x}) < (u_* - \phi)(x)$ para $x \in \Omega \setminus \{\hat{x}\}$ para algum $\phi \in C^2(\Omega)$, $\hat{x} \in \Omega$, $\theta > 0$ e

$$F(\hat{x}, \phi(\hat{x}), D\phi(\hat{x}), D^2\phi(\hat{x})) \leq -2\theta.$$

Assim, obtemos (3.5) mesmo neste caso. Nós também mostramos que o w definido acima é uma subsolução de viscosidade de (P) .

Resta apenas verificar que $\sup_{\Omega}(w - u) > 0$.

De fato, escolhendo $x_k \in B_{1/k}(\hat{x})$ tal que

$$u_*(\hat{x}) + \frac{1}{k} \geq u(x_k),$$

nós facilmente verificamos que se $1/k \leq \min\{\tau_0/2, s\}$ e $|\phi(\hat{x}) - \phi(x_k)| < \tau_0/2$, então temos

$$B_{\frac{1}{k}}(\hat{x}) \subset B_s(\hat{x})$$

por definição, segue que

$$w = \max\{u(x), \phi(x) + \tau_0\}$$

Assim, pela continuidade da ϕ

$$w(x_k) \geq \phi(x_k) + \tau_0 > \phi(\hat{x}) + \frac{\tau_0}{2} = u_*(\hat{x}) + \frac{\tau_0}{2} \geq u(x_k).$$

■

Capítulo 4

Aplicação: Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo Não Linearidade Com Um Zero Positivo

4.1 Apresentação do Problema

O propósito deste capítulo é o estudo do problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\lambda)$$

onde f é uma função não-negativa, localmente Lipschitz, definida em $[0, +\infty)$, Ω é um domínio suave e limitado de \mathbb{R}^N ($N \geq 3$) com um zero α e $\lambda > 0$ será considerado como um parâmetro. Nosso principal objetivo é analisar a existência e a multiplicidade de soluções clássicas positivas de (P_λ) quando λ é grande. Dentre isso, para mostrar uma condição qualitativa a respeito da segunda solução precisaremos que a função f verifique a seguinte hipótese:

Existe $\delta > 0$ tal que a seguinte função

$$\frac{f(t)}{(t - \alpha)^{\frac{N+2}{N-2}}}, \quad (H)$$

seja decrescente para $t \in (\alpha, \alpha + \delta)$.

O principal objetivo desse capítulo é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.1 *Assuma $N \geq 3$, e seja f uma função não negativa localmente Lipschitz com um zero isolado $\alpha > 0$, tal que a hipótese (H) é válida. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para $\lambda > \lambda_0$, o problema (P_λ) admite pelo menos duas soluções positivas u_λ e v_λ com $u_\lambda < v_\lambda$ em Ω , e $\|u_\lambda\|_\infty < \alpha < \|v_\lambda\|_\infty$. Além disso,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v_\lambda(x) = \alpha,$$

uniformemente em subconjuntos compactos de Ω .

Para isso, dividiremos a seção em duas subseções, onde cada subseção será mostrado como é obtido as soluções requeridas no Teorema 4.1.

4.2 A primeira solução

Nesta seção, lidaremos com a construção da solução positiva u_λ de (P_λ) que está abaixo de α . Ela será obtida com o conhecido método de sub e supersoluções fraco no sentido viscoso. Em todo o trabalho, $d(x)$ representará a distância de um ponto x a fronteira de Ω .

O principal resultado desta subseção é demonstrar o seguinte Teorema

Teorema 4.2 *Assuma $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz e não negativa e seja $\alpha > 0$ um zero isolado de f . Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema (P_λ) admite uma solução u_λ para todo $\lambda > \lambda_0$, verificando $0 < u_\lambda < \alpha$. Além disso, u_λ é a solução maximal no intervalo $[0, \alpha]$ e é crescente em λ . Além disso,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda = \alpha,$$

uniformemente em conjuntos compactos de Ω , e para todo $\delta \in (0, \alpha)$ existe $\lambda_1 = \lambda_1(\delta) > \lambda_0$ e $c = c(\delta) > 0$ tal que para todo $\lambda > \lambda_1$

$$u_\lambda(x) \geq \alpha - \delta \quad \text{se } d(x) \geq c\lambda^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.1)$$

Analisaremos o problema (P_λ) em uma configuração radial. Para este fim, escolheremos um ponto arbitrário $x_0 \in \Omega$, e escolheremos $R > 0$ tal que o fecho da bola $B_R(x_0)$ esteja contido em Ω . Para simplificar, de agora em diante denotaremos $B = B_R(0)$. Considerando agora o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_0 f(v) & \text{em } B, \lambda_0 > 0, \\ v = 0 & \text{em } \partial B, \end{cases} \quad (4.2)$$

A ideia para obter a primeira solução é construir uma subsolução \underline{v} de (4.2), em seguida usar o fato de que a raiz α é uma supersolução de (4.2), e assim pelo Teorema de Sub-Super solução Fraca (cf. Teorema 1.2) garantir a existência de uma solução fraca v_{λ_0} de (4.2). Depois, para cada $\lambda > \lambda_0$, usar a solução v_{λ_0} e o conjunto das soluções v_λ (essas obtidas de mesmo modo que a v_{λ_0} para cada λ) para garantir a existência de duas subsoluções \underline{u} e u_λ , sendo essa última no sentido de viscosidade, e por fim, pelo Teorema 3.2 de Sub-Super soluções garantir a existência de uma solução maximal no sentido de viscosidade u_λ (que coincide com a subsolução u_λ) e depois pela teoria de regularidade pode-se mostrar que a solução u_λ é clássica.

Assim faremos, primeiro iremos apresentar e demonstrar o seguinte lema.

Lema 4.1 *Assuma f é uma função localmente Lipschitz não negativa com um zero isolado $\alpha > 0$. Então, para cada $\delta > 0$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema (4.2) admite uma solução positiva, radialmente simétrica v , além disso, verifica $\alpha - \delta < \|v\|_\infty < \alpha$.*

Demonstração: Seja $B = B_R(0) \subset \Omega$. Agora considere o anel $A = \{x \in B; |x| > \frac{R}{2}\}$. Primeiro, tentaremos determinar uma subsolução radialmente simétrica de (4.2), seja ela $w(r)$, $r = |x|$. Portanto precisamos resolver (cf. Apêndice C)

$$\begin{cases} -w'' - \frac{N-1}{r}w' \leq \lambda_0 f(w), & \frac{R}{2} < r < R, \\ w\left(\frac{R}{2}\right) = w(R) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Efetuada uma mudança de variável $w(r) = z(s)$, onde $\varphi(r) = s = \frac{r^{2-N}}{N-2}$, $N \geq 3$.

Afirmção 4.1 φ é decrescente.

Com efeito, a derivada de φ em relação a r é dada por

$$\frac{d\varphi}{dr}(r) = \frac{2-N}{N-2}r^{1-N} = -r^{1-N} = -\frac{1}{r^{N-1}}$$

Como $r \in (\frac{R}{2}, R)$ e $N > 2$, temos que $\frac{d\varphi}{dr}(r) < 0$ para todo $r \in (\frac{R}{2}, R)$, o que confirma que φ é decrescente.

Ademais, definindo os valores de φ nos extremos do intervalo:

$$\begin{aligned} a &= \varphi(R) = \frac{R^{2-N}}{N-2} = \frac{1}{R^{N-2}(N-2)} \\ b &= \varphi\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^{2-N}}{N-2} = \frac{2^{N-2}}{R^{N-2}(N-2)} \end{aligned}$$

Como $\frac{R}{2} < R$ e φ é decrescente, segue que $a = \varphi(R) < \varphi\left(\frac{R}{2}\right) = b$.

Além disso, pelas condições de contorno de w , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= w(R) = z(\varphi(R)) = z(a) \\ 0 &= w\left(\frac{R}{2}\right) = z\left(\varphi\left(\frac{R}{2}\right)\right) = z(b) \end{aligned}$$

Calculando as derivadas de $w(r) = z(\varphi(r))$, pela Regra da Cadeia, segue que:

$$w'(r) = z'(\varphi(r)) \cdot \varphi'(r) = -\frac{z'(\varphi(r))}{r^{N-1}}, \quad \text{onde } \varphi'(r) = -\frac{1}{r^{N-1}}$$

Por outro lado, calculando $w''(r)$

$$\begin{aligned} w''(r) &= \left(-\frac{z'(\varphi(r))}{r^{N-1}}\right)' \\ &= -\left(\frac{z''(\varphi(r))\varphi'(r) \cdot r^{N-1} - z'(\varphi(r)) \cdot (N-1)r^{N-2}}{(r^{N-1})^2}\right) \\ &= -\left(\frac{z''(\varphi(r))\left(-\frac{1}{r^{N-1}}\right)r^{N-1} - z'(\varphi(r))(N-1)r^{N-2}}{r^{2(N-1)}}\right) \\ &= -\left(\frac{-z''(\varphi(r)) - z'(\varphi(r))(N-1)r^{N-2}}{r^{2(N-1)}}\right) \\ &= \frac{z''(\varphi(r)) + (N-1)r^{N-2}z'(\varphi(r))}{r^{2(N-1)}} \end{aligned}$$

Aqui utilizaremos a notação $s = \varphi(r)$.

$$w''(r) = \frac{z'(s)(N-1)}{r^N} + \frac{z''(s)}{r^{2(N-1)}}$$

Daí, o operador $-\Delta w = -w'' - \frac{N-1}{r}w'$ se torna

$$\begin{aligned} -w'' - \frac{N-1}{r}w' &= -\left(\frac{z'(s)(N-1)}{r^N} + \frac{z''(s)}{r^{2(N-1)}}\right) - \frac{N-1}{r}\left(-\frac{z'(s)}{r^{N-1}}\right) \\ &= -\frac{z'(s)(N-1)}{r^N} - \frac{z''(s)}{r^{2(N-1)}} + \frac{z'(s)(N-1)}{r^N} \\ &= -\frac{z''(s)}{r^{2(N-1)}} \end{aligned}$$

Portanto, o problema original (4.3) na variável r se resume ao seguinte problema de contorno para z na variável s

$$\begin{cases} -\frac{z''(s)}{r^{2(N-1)}} \leq \lambda_0 f(z(s)) & , a < s < b, \\ z(a) = z(b) = 0. \end{cases}$$

Reescrevendo a inequação em termos apenas da variável s .

$$-z''(s) \leq \lambda r^{2(N-1)} f(z(s))$$

A relação entre s e r é dada por:

$$s = \frac{r^{2-N}}{N-2} \implies r^{N-2} = \frac{1}{s(N-2)} \implies r = \left(\frac{1}{s(N-2)} \right)^{\frac{1}{N-2}}$$

Assim, a função $r^{2(N-1)}$ em termos de s é:

$$r^{2(N-1)} = \left[\left(\frac{1}{s(N-2)} \right)^{\frac{1}{N-2}} \right]^{2(N-1)} = \left(\frac{1}{s(N-2)} \right)^{\frac{2(N-1)}{N-2}} = g(s)$$

O problema se reescreve como

$$\begin{cases} -z''(s) \leq \lambda_0 g(s) f(z(s)), & a < s < b, \\ z(a) = z(b) = 0. \end{cases}$$

Como f é não-negativa, procuramos uma solução para o problema simplificado

$$\begin{cases} -z'' = \lambda_0 \left(\frac{R}{2} \right)^{2(N-1)} f(z), & a < s < b, \\ z(a) = z(b) = 0. \end{cases}$$

Para resolver esta EDO, multiplicamos ambos os lados por $z'(s)$:

$$-z''(s)z'(s) = \lambda_0 \left(\frac{R}{2} \right)^{2(N-1)} f(z(s))z'(s)$$

Agora, integramos ambos os lados de s até $\frac{a+b}{2}$, temos

$$\int_s^{\frac{a+b}{2}} -z''(t)z'(t)dt = \lambda_0 \left(\frac{R}{2} \right)^{2(N-1)} \int_s^{\frac{a+b}{2}} f(z(t))z'(t)dt$$

Para a integral do lado esquerdo (L.E.), utilizando a substituição $u = z'(t)$, e mudando os intervalos de integração temos que

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^s -z''(t)z'(t)dt = \int_0^{z'(s)} u du = \frac{[z'(s)]^2}{2} + \frac{[z'(\frac{a+b}{2})]^2}{2}$$

Assumindo que a solução z é simétrica em relação ao ponto médio $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ é um ponto crítico, e segue que $z'(\frac{a+b}{2}) = 0$.

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^s -z''(t)z'(t)dt = \frac{[z'(s)]^2}{2}$$

Para a integral do lado direito (L.D.), utilizando a substituição $u = z(t)$ e definindo $\bar{z} = z(\frac{a+b}{2}) = \max\{z(s), s \in (a, b)\}$, e $F(u) = \int_0^u f(t)dt$, assim

$$\lambda_0 \left(\frac{R}{2}\right)^{2(N-1)} \int_s^{\frac{a+b}{2}} f(z(t))z'(t) = \lambda_0 \left(\frac{R}{2}\right)^{2(N-1)} \int_{z(s)}^{\bar{z}} f(u)du$$

Daí,

$$\lambda_0 \left(\frac{R}{2}\right)^{2(N-1)} \int_s^{\frac{a+b}{2}} f(z(t))z'(t) = \lambda_0 \left(\frac{R}{2}\right)^{2(N-1)} [F(\bar{z}) - F(z(s))]$$

Igualando os resultados, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{1}{2}[z'(s)]^2 = \lambda_0 \left(\frac{R}{2}\right)^{2(N-1)} [F(\bar{z}) - F(z(s))]$$

notando que para $t \in (a, \frac{a+b}{2})$, $z'(t) > 0$, segue

$$z'(t) = \sqrt{2\lambda_0} \left(\frac{R}{2}\right)^{(N-1)} \sqrt{F(\bar{z}) - F(z(t))}$$

Separando as variáveis e integrando de a até s , onde $z(a) = 0$:

$$\int_a^s \frac{z'(t)}{\sqrt{F(\bar{z}) - F(z(t))}} dt = \int_a^s \sqrt{2\lambda_0} \left(\frac{R}{2}\right)^{N-1} dt$$

Usando a substituição $s = z(t)$, obtemos

$$\int_{z(a)}^{z(s)} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{z}) - F(s)}} = \sqrt{2\lambda_0} \left(\frac{R}{2}\right)^{N-1} (s - a)$$

Assim, a solução $z(s)$ simétrica em relação a $\frac{a+b}{2}$ é dada implicitamente por

$$\int_0^{z(s)} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{z}) - F(s)}} = \sqrt{2\lambda_0} \left(\frac{R}{2}\right)^{N-1} (s - a), \quad a < s < \frac{a+b}{2} \quad (4.4)$$

Onde $\bar{z} = \max z(s)$ é determinado pela condição de simetria: $z(\frac{a+b}{2}) = \bar{z}$. Tomando $s = \frac{a+b}{2}$ na equação acima e usando λ_0 para o valor de λ que permite essa solução, tem-se

$$\int_0^{\bar{z}} \frac{du}{\sqrt{F(\bar{z}) - F(u)}} = (2\lambda_0)^{1/2} \left(\frac{R}{2}\right)^{(N-1)} \frac{b-a}{2}. \quad (4.5)$$

Para resolver (4.4), tomemos um valor arbitrário $\bar{z} \in (\alpha - \delta, \alpha)$, e definimos λ_0 pelos meios de (4.5). Assim, w escolhido verifica (4.3).

Consideramos agora a função

$$\underline{v}(x) = \begin{cases} w(x), & x \in A, \\ 0, & x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Note que por construção \underline{v} é uma subsolução de (4.2). Pela continuidade da função f (pois f é localmente lipschitz), se

$$\forall u \text{ tal que } |u(x)| \leq R \text{ q.t.p em } \Omega$$

tem-se que λf é contínua e limitada em $[-R, R]$, ou seja,

$$|\lambda f(u(x))| \leq C(R) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Pela construção da função \underline{v} , temos que $\underline{v}, \alpha \in H^1(B_R) \cap L^\infty(B_R)$ além de que $\bar{v} = \alpha$ é trivialmente uma supersolução e vale desigualdade $\underline{v} \leq \bar{v}$ q.t.p em Ω . Pelo Teorema 1.2 obtemos uma solução fraca positiva v_{λ_0} de (4.2), que claramente verifica $\alpha - \delta < \tilde{z} \leq \|v_{\lambda_0}\|_\infty \leq \alpha$.

Afirmção 4.2 $v := v_{\lambda_0}$ é uma solução clássica e positiva

Primeiro mostraremos que $v > 0$. De fato, como f é nao negativa temos que

$$-z''(s) = \lambda_0 \left(\frac{R}{2}\right)^{2/(N-1)} f(z(s)) \geq 0, \quad a < s < b.$$

ou seja,

$$z''(x) \leq 0.$$

Assim $z(s)$ é uma função côncava em (a, b) , ou seja,

$$z(s) \leq z(c) + z'(c)(s - a) \quad \text{para quaisquer } c, s \in [a, b] \quad (4.6)$$

Daí, todo ponto crítico de z é ponto de máximo, pois caso $k \in [a, b]$ seja ponto crítico temos que $z'(k) = 0$, logo

$$z(s) \leq z(k)$$

Além disso como z é côncava, vale que

$$\frac{z(s) - z(b)}{s - b} \leq \frac{z(b) - z(a)}{b - a} \leq \frac{z(s) - z(a)}{s - a}, \quad a < s < b.$$

Como $z(a) = z(b) = 0$, temos:

$$\frac{z(s)}{s - b} \leq 0 \leq \frac{z(s)}{s - a}, \quad s \in (a, b).$$

Como $s < b$, então $s - b < 0$, assim, para valer a primeira desigualdade tem-se que $z(s) \geq 0$. Para a segunda desigualdade, como $s - a > 0$ segue que a segunda desigualdade é verdadeira quando $z(s) \geq 0$. Portanto,

$$v \geq z(s) \geq 0 \quad \forall s \in (a, b).$$

Além disso,

$$z > 0$$

Com efeito, suponha que exista $p \in (a, b)$ tal que $z(p) = 0$, assim p seria ponto de mínimo, ou seja,

$$z'(p) = 0$$

mas de (4.6) teríamos,

$$0 \leq z(s) \leq z(p) + 0(s - a) = z(p) = 0 \quad \forall s \in [a, b]$$

o que seria um absurdo, pois deveríamos ter que $z(p) \leq z(s) \quad \forall s \in (a, b)$ já que p é ponto de mínimo e além disso teríamos que a função z é constante igual a zero, o que é um absurdo também pois $z(\frac{a+b}{2}) \neq 0$.

Agora, para mostrar que v é uma solução clássica, observe que

$$v \in L^\infty(B_R)$$

pois

$$0 < v \leq \alpha$$

Assim,

$$v \in L^\infty(B_R) \subset L^r(B_R) \quad \forall r > 1.$$

Além disso, como v é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_0 f(v) & \text{in } B_R, \lambda_0 > 0, \\ v = 0 & \text{on } \partial B_R, \end{cases} \quad (4.7)$$

Defina,

$$\bar{f}(x) = \lambda_0 f(v(x)) \geq 0$$

Note que $\bar{f} \in L^r(B_R)$. De fato, como $v \in L^\infty(\Omega)$, ou seja,

$$0 \leq v(x) \leq \|v\|_{L^\infty(B_R)} \quad \text{q.t.p. em } B_R$$

e f é contínua (pois f é localmente lipschitz) temos $f|_{[0, \|v\|_{L^\infty}]}$ é limitada. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$|f(v(x))| \leq C \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Daí,

$$\int_{B_R} |\bar{f}(x)|^r dx = \lambda_0^r \int_{B_R} |f(v(x))|^r dx \leq \lambda_0^r C^r |B_R| < +\infty$$

Como v é solução fraca do problema (4.7), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta v = \bar{f}(x) & \text{in } B_R, \lambda_0 > 0, \\ v = 0 & \text{on } \partial B_R, \end{cases}$$

Pelo Teorema de [A.D.N] A.3, então $v \in W^{2,r}(B_R)$.

Agora para justificar que $v \in C^{2,\alpha}(B_R)$ usaremos o teorema de Schauder, para esse fim mostraremos primeiro que $\bar{f} \in C^{0,\alpha}(B_R)$. Com efeito, como f é localmente Lipschitz, \bar{f} também é, e assim dados $x, y \in B_R$ existe $L > 0$ tal que

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| = |\lambda_0 f(v(x)) - \lambda_0 f(v(y))| \leq L \lambda_0 |v(x) - v(y)| \quad (4.8)$$

Agora, para r suficientemente grande, temos que

$$W^{2,r}(B_R) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\bar{B}_R), \quad 0 < \alpha < 1 - \frac{N}{r}$$

como $C^{1,\alpha}(\bar{B}_R) \subset C^{0,\alpha}(\bar{B}_R)$, logo

$$v \in C^{0,\alpha}(\bar{B}_R)$$

Ou seja, dados $x, y \in \bar{B}_R$, existe $M > 0$ tal que

$$|v(x) - v(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

assim de (4.8), tem-se

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

donde $K := L \cdot M \cdot \lambda_0$, logo $\bar{f} \in C^{0,\alpha}(\bar{B}_R)$. Por fim, pelo teorema de Schauder, temos que

$$v \in C^{2,\alpha}(B_R)$$

e portanto, v é solução clássica de (4.2).

Além disso como f é localmente Lipschitz o resultado em [16] (pg. 219) garante que v é radialmente simétrica. Por fim para concluir a prova do Lema 4.1, segue

Afirmção 4.3 (Denotando $v := v_{\lambda_0}$) $\|v\|_{L^\infty(B_R)} < \alpha$

Suponha por absurdo que exista $\bar{x} \in B_R(0)$ tal que

$$v(\bar{x}) = \alpha$$

Defina

$$w(x) = \alpha - v(x) \geq 0 \quad \text{em } B_R(0).$$

Note que

$$\Delta w = -\Delta v = \lambda_0 f(v).$$

Como α é um zero isolado de f , temos $f(\alpha) = 0$. Podemos, portanto, reescrever a expressão acima como

$$\Delta w = \lambda_0 [f(v) - f(\alpha)].$$

Dado que f é uma função localmente Lipschitz, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\Delta w = \lambda_0 [f(v) - f(\alpha)] \leq \lambda_0 c |v - \alpha|.$$

ou seja,

$$\Delta w - \lambda_0 c |w| \leq 0.$$

Definindo o operador $Lw = \Delta w - \lambda_0 c |w| \leq 0$. Pela nossa hipótese de absurdo significa que w atinge o seu mínimo igual a zero no interior de $B_R(0)$. Pelo Princípio do Máximo Forte (cf. Teorema (A.9))

$$w \equiv \text{constante},$$

ou seja, $w = 0$, e portanto

$$v \equiv \alpha \quad \text{em } B_R(0).$$

Absurdo! Pois, a condição de contorno exige que $v = 0$ em $\partial B_R(0)$. Portanto, o valor máximo α não pode ser atingido no interior, concluindo que

$$\|v\|_\infty < \alpha.$$

Agora, demonstraremos um dos teoremas mais importantes dessa seção:

Demonstração: Primeira solução do Teorema 4.1:

Seja v_{λ_0} dado pelo lema 4.1, solução de (4.2) com $\delta = \alpha/2$. Defina

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} v_{\lambda_0}(x - x_0), & B_R(x_0) \\ 0, & \Omega \setminus B_R(x_0) \end{cases}$$

Afirmação 4.4 \underline{u} é subsolução de (P_λ) para $\lambda > \lambda_0$.

Com efeito, efetuando o cálculo do laplaciano de \underline{u} ,

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}(x) &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(\underline{u}(x))}{\partial x_i^2} \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial(v_{\lambda_0}(x-x_0))}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}(x) &= -\Delta v_{\lambda_0}(x-x_0) = \lambda_0 f(v_{\lambda_0}(x-x_0)) \\ &= \lambda_0 f(\underline{u}(x)) < \lambda f(\underline{u}(x)) \quad , x \in B_R(x_0) \quad \text{com } \lambda > \lambda_0. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\bar{u} = \alpha$ é supersolução de (P_λ) . Usando novamente o Teorema 1.2, como $\underline{u}, \bar{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, pois

$$0 < \|\underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|v_{\lambda_0}\|_{L^\infty(B)} < \alpha$$

logo, existe uma solução fraca $u(= u(\lambda)) \in H_0^1(\Omega)$ de (P_λ) tal que

$$\underline{u} \leq u(\lambda) \leq \bar{u} \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

Além disso, segue como na Afirmação 4.3 que $\|u(\lambda)\|_\infty < \alpha$.

Agora defina pontualmente

$$u_\lambda(x) = \sup_{h \in S} h(x) \tag{4.9}$$

onde $S = \{h(x) \mid h \text{ é solução de } (P_\lambda) \text{ com } 0 < h < \alpha\}$

Afirmação 4.5 u_λ é subsolução de (P_λ) no sentido de viscosidade.

Com efeito, fazendo uso do Teorema 3.1, note primeiro que $S \neq \emptyset$, pois $u(\lambda)(x) \in S$.

Além disso, dado arbitrariamente um subconjunto compacto $K \subset \Omega$, tem-se que

$$\sup_{x \in K} |u_\lambda(x)| = \sup_{x \in K} \left(\sup_{h \in S} h(x) \right) \leq \sup_{x \in K} \alpha = \alpha < +\infty.$$

Portanto, usando o Teorema 3.1, segue a afirmação.

Afirmação 4.6 $u_\lambda \in USC(\bar{\Omega})$.

Com efeito, fixando $h \in S$, pela continuidade de h (pois são soluções de P_λ), temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{y \in B_r(x) \cap \bar{\Omega}} h(y) = h(x),$$

ou seja, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r_\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{y \in B_r(x) \cap \bar{\Omega}} h(y) \leq h(x) + \varepsilon \quad \forall r < r_\varepsilon$$

tomando o supremo em $h \in S$, segue que

$$\sup_{h \in S} \sup_{y \in B_r(x) \cap \bar{\Omega}} h(y) \leq \sup_{h \in S} h(x) + \varepsilon = u_\lambda(x) + \varepsilon.$$

agora, tomando o ínfimo em r , obtemos

$$\inf_{r > 0} \left\{ \sup_{h \in S} \sup_{y \in B_r(x) \cap \bar{\Omega}} h(y) \right\} \leq u_\lambda(x) + \varepsilon$$

por sua vez

$$\inf_{r > 0} \left\{ \sup_{y \in B_r(x) \cap \bar{\Omega}} u_\lambda(y) \right\} \leq u_\lambda(x) + \varepsilon$$

por fim, usando a Definição 3.4, e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos que

$$\limsup_{y \rightarrow x} u_\lambda(y) \leq u_\lambda(x)$$

Portanto, $u_\lambda \in USC(\bar{\Omega})$ e assim a afirmação fica provada.

Como $\alpha \in LSC(\bar{\Omega})$, além disso existe uma ordem entre elas da forma

$$u_\lambda \leq \alpha \quad \text{em } \bar{\Omega}$$

Assim, pelo Teorema 3.2, (*teorema de sub-super solução viscosa*) existe uma solução no sentido da viscosidade v de (P_λ) tal que

$$u_\lambda \leq v \leq \alpha \quad \text{em } \Omega$$

onde

$$v(x) := \sup_{z \in \bar{S}} z(x)$$

e

$$\bar{S} := \left\{ z \in USC(\Omega) \mid \begin{array}{l} z \text{ é sub solução viscosa} \\ \text{de } (P_\lambda) \text{ tal que} \\ u_\lambda \leq z \leq \alpha \text{ em } \Omega \end{array} \right\}$$

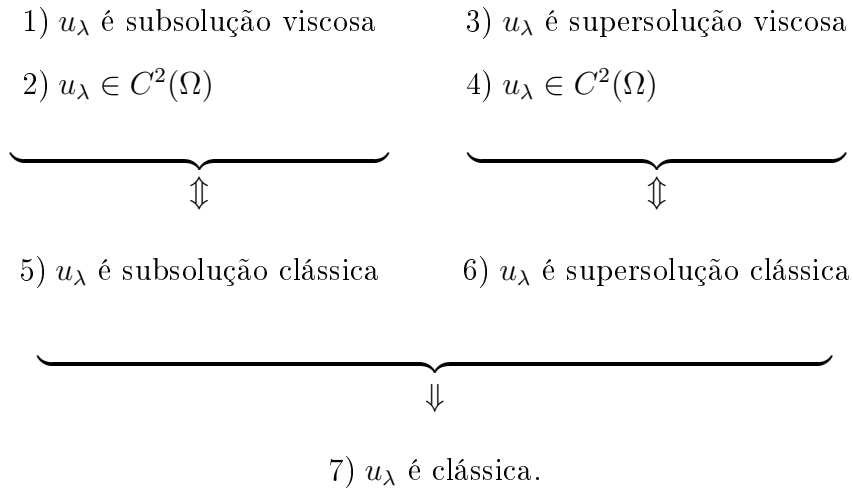
Agora, note que $v \in S$ e então por (4.9), pela maximalidade da solução u_λ temos que

$$v = u_\lambda$$

ou seja, u_λ é na verdade solução de (P_λ) e a solução maximal no intervalo $[0, \alpha]$.

Mostraremos que u_λ é solução clássica. Para isso, usaremos a Proposição 3.3. Note que, desde que $u_\lambda \in C^2(\Omega)$, assim será solução clássica se for subsolução clássica e supersolução clássica.

Segue um esboço com a ideia para mostrar que u_λ é clássica.



De fato, como v é uma solução clássica, temos que $u_\lambda = v \in C^2(\Omega)$, assim verificando os itens (2) e (4). Pela Afirmação 4.5 temos que u_λ é subsolução viscosa, portanto juntando os itens (1) e (2), pela Proposição 3.3 o item (5) é satisfeito. Por outro lado, seguindo as linhas da demonstração no Teorema 3.2 e pela definição que foi dada a u_λ , temos que u_λ é uma supersolução viscosa, e assim satisfazendo o item (3). Portanto pela Proposição 3.3, o item (6) é satisfeito. Assim, juntando os itens (5) e (6) por definição, segue que u_λ é uma solução clássica.

Afirmção 4.7 u_λ é crescente em λ desde que $\lambda < \lambda'$.

Com efeito, defina

$$u_{\lambda'} := \sup \{h; h \text{ é solução de } (P_\lambda) \text{ com } 0 < h < \alpha\}$$

quando $\lambda < \lambda'$, segue que u_λ é subsolução de (P_λ) , pois

$$-\Delta u_\lambda = \lambda f(u_\lambda) \leq \lambda' f(u_\lambda)$$

Daí, usando o Teorema 3.2, obtemos que

$$\bar{u}(x) = \sup_{z \in \bar{S}} z(x) \text{ é solução de } (P_\lambda)$$

onde

$$\bar{S} = \{z \in USC(\bar{\Omega}); z \text{ é subsolução viscosa de } (P_\lambda) \text{ tal que } u_\lambda \leq z \leq \alpha\}$$

pela maximalidade, segue que

$$u_{\lambda'} = \bar{u}$$

e que

$$u_\lambda \leq u_{\lambda'}$$

Agora, defina,

$$w(x) = u_{\lambda'}(x) - u_\lambda(x) \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Temos que

$$\begin{aligned} -\Delta w &= -\Delta u_{\lambda'} + \Delta u_\lambda = \lambda' f(u_{\lambda'}) - \lambda f(u_\lambda) = \lambda' [f(u_{\lambda'}) - f(u_\lambda)] + (\lambda' - \lambda) f(u_\lambda) \\ &= \lambda' c(x) \cdot w(x) + (\lambda' - \lambda) f(u_\lambda) \end{aligned}$$

onde

$$c(x) = \begin{cases} \frac{f(u_{\lambda'}) - f(u_\lambda)}{u_{\lambda'} - u_\lambda} & , \text{ se } u_{\lambda'}(x) \neq u_\lambda(x) \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, como f é localmente Lipschitz, segue que $c(x)$ é limitada e assim

$$k(x) = \lambda' c(x) \in L^\infty(\Omega)$$

Assim, temos

$$\begin{cases} \Delta w + k(x) \cdot w = -(\lambda' - \lambda) f(u_\lambda) \leq 0 & , \text{ em } \Omega \\ w = 0 & , \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema A.2 item (ii), temos que

$$w > 0 \text{ em } \Omega$$

e assim

$$u_{\lambda'} > u_\lambda$$

como queríamos mostrar.

Vamos finalmente mostrar (4.1).

Escolhemos $\delta \in (0, \alpha)$ e seja λ_1, v_{λ_1} dados pelo Lema 4.1. Para cada $x \in \Omega$, defina $v_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v_\lambda(y) = \begin{cases} v_{\lambda_1} \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{2}} (y - x) \right) & , y \in B_{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} R}(x) \\ 0 & , y \in \Omega \setminus B_{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} R}(x) \end{cases}$$

Para garantir que v_λ esteja bem definida é necessário que $z(y) := \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{2}} (y - x) \in B_R(0)$, o que de fato acontece pois $y \in B_{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} R}(x)$. Além disso, para garantir que $B_{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} R}(x) \subset \Omega$ também é necessário que

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} R \leq d(x).$$

De fato, caso contrário, ou seja, $d(x) < \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} R$, então existe algum ponto $y \in B_{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} R}(x)$ tal que $y \notin \Omega$.

Com efeito, seja $\delta = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} R > 0$, considere $\Gamma = \partial\Omega$ e a bola aberta

$$B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < \delta\}.$$

Por definição da função distância,

$$d(x) = \inf\{|x - z| : z \in \Gamma\}.$$

Por definição de ínfimo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $z_\varepsilon \in \Gamma$ tal que

$$|x - z_\varepsilon| < d(x) + \varepsilon.$$

Tome $\varepsilon = \frac{\delta - d(x)}{2} > 0$ (pois $d(x) < \delta$ por hipótese). Existe $z \in \Gamma$ tal que

$$|x - z| < d(x) + \varepsilon = d(x) + \frac{\delta - d(x)}{2} = \frac{d(x) + \delta}{2}.$$

Temos que,

- $|z - x| < \frac{d(x) + \delta}{2} < \frac{\delta + \delta}{2} = \delta$, logo $z \in B_\delta(x)$
- $z \in \Gamma = \partial\Omega$, portanto $z \notin \Omega$ (pois Ω é aberto e Γ é sua fronteira)

basta considerar o ponto $y = z$ donde

$$y \in B_{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} R}(x)$$

e

$$y \notin \Omega$$

Portanto, se $d(x) < \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} R$, existe $y \in B_{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} R}(x)$ tal que $y \notin \Omega$.

Afirmção 4.8 v_λ é subsolução de (P_λ) .

Com efeito, definindo $z(y) := \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}(y - x) \in B_R(0)$, temos que

$$\begin{aligned} -\Delta v_\lambda(y) &= -\Delta v_{\lambda_1}(z(y)) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \cdot (-\Delta v_{\lambda_1}(z(y))) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \cdot \lambda_1 f(v_{\lambda_1}(z(y))) \\ &= \lambda f(v_\lambda(y)) \end{aligned}$$

Agora, pela maximalidade, $v_\lambda(y) \leq u_\lambda(y)$ para $y \in \Omega$. Em particular, tomando $y = x$, obtemos que

$$u_\lambda(x) \geq v_\lambda(x) = v_{\lambda_1}(0) = \|v_{\lambda_1}\|_\infty > \alpha - \delta,$$

quando $d(x) \geq c_{\lambda_1}(\delta)\lambda^{-\frac{1}{2}}$ onde $c_{\lambda_1}(\delta) = \lambda_1^{\frac{1}{2}}R$. Assim fica provada (4.1).

Para concluir a prova do Teorema 4.2, segue a afirmação:

Afirmção 4.9 Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e K subconjunto compactamente contido em Ω . Tomando $(\delta = \frac{\varepsilon}{2}) < \varepsilon < \alpha$, $\exists \lambda_\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \lambda > \lambda_\varepsilon, x \in K \implies \|u_\lambda(x) - \alpha\|_\infty < \varepsilon$$

Demonstração: Seja

$$d_K = \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$$

Existe $x_0 \in K$ tal que $d(x_0) = \text{dist}(x_0, \partial\Omega) = d_K$.

Tomando λ suficientemente grande, de tal modo que, $\lambda > \frac{c^2(\delta)}{d^2(x_0)} = \lambda_\varepsilon$, ou seja,

$$d(x_0) \geq c(\delta)\lambda^{-1/2}$$

Note que, para $x \in K$, tem-se

$$d(x) \geq d_K \geq c(\delta)\lambda^{-1/2}$$

o que implica, por (4.1), em

$$0 < \alpha - \delta \leq u_\lambda(x) \leq \alpha, \quad \forall x \in K$$

isto é,

$$-\delta < u_\lambda(x) - \alpha < 0 < \delta < \varepsilon, \quad \forall x \in K$$

ou ainda,

$$|u_\lambda(x) - \alpha| < \delta, \quad \forall x \in K$$

Daí,

$$\|u_\lambda - \alpha\|_\infty = \sup_{x \in K} |u_\lambda(x) - \alpha| < \delta < \varepsilon$$

Portanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda(x) = \alpha.$$

■

Com isso concluímos a prova do Teorema 4.2. ■

4.3 A segunda solução

Observação 4.1 *Para seu uso nesta subseção, mencionemos que a solução maximal u_λ também admite a caracterização variacional*

$$J_\lambda(u_\lambda) = \inf\{J_\lambda(v) : v \in H_0^1(\Omega), u_\lambda \leq v \leq \alpha \text{ em } \Omega\}, \quad (4.10)$$

onde J_λ é o funcional associado ao problema (P_λ) , a saber

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega F(u), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad (4.11)$$

com $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

Isto é verdade, porque, de acordo com o Teorema 1.2, o ínfimo em (4.10) é atingido em uma solução $v \in H_0^1(\Omega)$ que pertence ao intervalo $[u_\lambda, \alpha]$. Por maximalidade, necessariamente obtemos que $v = u_\lambda$.

Esta seção será dedicada a provar a existência de uma segunda solução v_λ de (P_λ) para λ grande, verificando $v_\lambda > u_\lambda$ em Ω e $\|v_\lambda\|_\infty > \alpha$.

Já que não estamos assumindo nenhuma restrição de crescimento sobre a função f , nosso primeiro passo é truncar a não linearidade.

Tomando δ dado pela hipótese (H) nós definimos

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(0) & t \leq 0, \\ f(t) & 0 \leq t \leq \alpha + \delta, \\ \frac{f(\alpha+\delta)}{\delta^p} (t - \alpha)^p & t > \alpha + \delta, \end{cases} \quad (4.12)$$

para algum $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$. Pela hipótese, \tilde{f} é uma função localmente Lipschitz em $[0, +\infty)$ (cf. Afirmação C.4).

Ao longo da maior parte dessa subseção, nós analisaremos o problema truncado

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \tilde{f}(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{T})$$

Em relação a este problema, nós primeiro provaremos o seguinte

Teorema 4.3 *Seja λ_0 dado pelo Teorema 4.2. Para cada $\lambda > \lambda_0$, existe uma solução v_λ do problema (T) que verifica $v_\lambda > u_\lambda$ em Ω e $\|v_\lambda\|_\infty > \alpha$.*

Para provar este teorema, nós procuraremos por uma solução na forma

$$v_\lambda := u_\lambda + w_\lambda,$$

onde u_λ é a solução do Teorema 4.2 com $w_\lambda > 0$.

Para simplificar a notação em alguns momentos, no que segue, denotaremos $w := w_\lambda$. Observe que se por ventura v_λ for de fato uma solução de (T), e então por (T), nós obtemos que

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda(\tilde{f}(u_\lambda + w) - f(u_\lambda)) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.13)$$

A fim de garantir que a solução v_λ é de fato maior que u_λ , nós precisamos obter que w_λ é positivo. Para conseguir isso, é conveniente modificar ligeiramente o problema (4.13) e considerar

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda(\tilde{f}(u_\lambda + w^+) - f(u_\lambda)) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.14)$$

onde, como de costume, $w^+ = \max\{w, 0\}$.

Agora, note que

Afirmação 4.10 *Soluções fracas não triviais $w \in H_0^1(\Omega)$ de (4.14) são não negativas em Ω .*

De fato, tomando $w^- := \min\{w, 0\} \leq 0$ como função teste na formulação fraca de (4.14) nós temos

$$\int_{\Omega} \nabla w_{\lambda} \nabla w_{\lambda}^{-} dx = \int_{\Omega} \lambda(\tilde{f}(u_{\lambda} + w_{\lambda}^{+}) - f(u_{\lambda})) \cdot w_{\lambda}^{-} dx$$

ou seja,

$$\langle \nabla w_{\lambda}, \nabla w_{\lambda}^{-} \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \lambda(\tilde{f}(u_{\lambda} + w_{\lambda}^{+}) - f(u_{\lambda})) w_{\lambda}^{-} dx \quad (4.15)$$

Observe que o lado esquerdo da igualdade acima pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle \nabla w_{\lambda}, \nabla w_{\lambda}^{-} \rangle_{H_0^1(\Omega)} &= \langle \nabla w_{\lambda}^{+} + \nabla w_{\lambda}^{-}, \nabla w_{\lambda}^{-} \rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \langle \nabla w_{\lambda}^{+}, \nabla w_{\lambda}^{-} \rangle + \langle \nabla w_{\lambda}^{-}, \nabla w_{\lambda}^{-} \rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \langle \nabla w_{\lambda}^{-}, \nabla w_{\lambda}^{-} \rangle_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Além disso, o lado direito pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda(\tilde{f}(u_{\lambda} + w_{\lambda}^{+}) - f(u_{\lambda})) w_{\lambda}^{-} dx &= \int_{\{w_{\lambda} \geq 0\}} \lambda(\tilde{f}(u_{\lambda} + w_{\lambda}^{+}) - f(u_{\lambda})) w_{\lambda}^{-} dx + \\ &+ \int_{\{w_{\lambda} \leq 0\}} (\tilde{f}(w_{\lambda} + w_{\lambda}^{+}) - f(w_{\lambda})) w_{\lambda}^{-} dx \\ &= \lambda[0 + 0] = 0 \end{aligned}$$

Logo a igualdade em (4.15) se resume a

$$\langle \nabla w_{\lambda}, \nabla w_{\lambda}^{-} \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla w_{\lambda}^{-}|^2 dx = 0$$

Portanto $w_{\lambda}^{-} = 0$ e, assim, $w_{\lambda} \geq 0$. Além disso, pela teoria de regularidade, w_{λ} será uma solução clássica, de modo que, pelo princípio do máximo forte, $w_{\lambda} > 0$ em Ω .

Portanto, nosso objetivo é provar a existência de uma solução fraca não trivial de (4.14). Para isso, usaremos o Teorema do Passo da Montanha (cf. Teorema A.1) para encontrar pontos críticos em $H_0^1(\Omega)$ do funcional C^1 dado por

$$I_{\lambda}(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \lambda \int_{\Omega} \tilde{F}(u_{\lambda} + w^{+}) - \tilde{F}(u_{\lambda}) - f(u_{\lambda}) w^{+}$$

Aqui, $\tilde{F}(t) = \int_0^t \tilde{f}(s) ds$.

Observe que, devido ao crescimento da não-linearidade truncada \tilde{f} no infinito, o funcional anterior é bem definido em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, pontos críticos não triviais de I_λ fornecem soluções clássicas positivas de (4.13) e, conseqüentemente, uma solução de (T) maior que u_λ .

A função $g_\lambda(x, w^+) = \lambda(\tilde{f}(u_\lambda + w^+) - f(u_\lambda))$ possui um crescimento subcrítico, isto é, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|g_\lambda(x, t)| \leq C_1 + C_2|t|^p, \quad \forall x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.16)$$

onde $p \in (1, 2^* - 1)$ se $N \geq 3$ e $p \in (1, +\infty)$ se $N = 1, 2$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Com efeito, cf. Afirmação C.1.

Antes de provar o resultado principal desta seção, apresentamos uma propriedade importante, embora bastante padrão, do funcional I_λ . Segue o Lema

Lema 4.2 *O funcional I_λ verifica a condição $(PS)_c$ para todo $c > 0$ e $\lambda > \lambda_0$.*

Demonstração: Seja $\{w_n\}$ uma sequência de Palais-Smale para I_λ no nível $c > 0$, ou seja,

$$I_\lambda(w_n) \rightarrow c, \quad I'_\lambda(w_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Observe que podemos supor que $\|w_n\|_{H_0^1}^2 \geq \eta > 0$ (caso contrário, não há nada a ser provado).

Tome $\theta \in (0, p + 1)$ existe uma constante C tal que

$$\theta \tilde{F}(u_\lambda + t^+) - t^+ \tilde{f}(u_\lambda + t^+) \leq C, \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \Omega \quad (4.17)$$

Com efeito, confira a Afirmação C.2.

Daí,

$$\begin{aligned} O(\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}) &= \theta I_\lambda(w_n) - \langle I'_\lambda(w_n), w_n \rangle \\ &= \theta \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left(\tilde{F}(u_\lambda + w_n^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda)w_n^+ \right) dx \right) \\ &\quad - \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left(\tilde{f}(u_\lambda + w_n^+) - f(u_\lambda) \right) w_n^+ dx \right) \end{aligned}$$

Agrupando termos iguais, temos que

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx \\ &\quad - \lambda \int_\Omega \left[\theta \left(\tilde{F}(u_\lambda + w_n^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda)w_n^+ \right) - \left(\tilde{f}(u_\lambda + w_n^+) - f(u_\lambda) \right) w_n^+ \right] dx \end{aligned}$$

agora reajustando os termos, obtemos

$$= \frac{\theta - 2}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} \left[\left(\theta \tilde{F}(u_\lambda + w_n^+) - w_n^+ \tilde{f}(u_\lambda + w_n^+) \right) - \theta \tilde{F}(u_\lambda) - (\theta - 1) f(u_\lambda) w_n^+ \right] dx$$

em seguida aplicando a condição de (4.17) e usando a Desigualdade de Poincaré, a expressão se torna

$$\begin{aligned} \theta I_\lambda(w_n) - \langle I'_\lambda(w_n), w_n \rangle &\geq \frac{\theta - 2}{2} \|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C - \lambda(\theta - 1) \int_{\Omega} f(u_\lambda) w_n^+ dx \\ &\geq \frac{\theta - 2}{2} \|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C - C(|\Omega|) \|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{1/2} \end{aligned}$$

(estamos usando a convenção padrão de que C denota uma constante positiva que pode ter valores diferentes em lugares diferentes, mesmo estando na mesma linha).

Como $I_\lambda(w_n) \rightarrow c$ e $I'_\lambda(w_n) \rightarrow 0$, temos que

$$-\langle I'_\lambda(w_n), w_n \rangle \leq |\langle I'_\lambda(w_n), w_n \rangle| \leq \|I'_\lambda(w_n)\| \cdot \|w_n\| = o_n(1) \cdot \|w_n\|$$

Daí

$$\theta I_\lambda(w_n) - \langle I'_\lambda(w_n), w_n \rangle \leq \theta(c + o_n(1)) + o_n(1) \cdot \|w_n\| \quad (4.18)$$

Assim, para $\theta > 2$ a sequência $\{w_n\}$ é limitada, pois caso contrário, de (4.18), teríamos

$$\frac{\theta - 2}{2} \cdot \|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C - C(|\Omega|) \cdot \|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{1/2} \leq \theta(c + o_n(1)) + o_n(1) \cdot \|w_n\|$$

ou seja,

$$\frac{\theta - 2}{2} - \frac{C}{\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2} - \frac{C(|\Omega|)}{\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{3/2}} \leq \frac{\theta(c + o_n(1))}{\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2} + \frac{o_n(1)}{\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$$

e assim

$$\theta \leq 2 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

O que é um absurdo. Logo $\{w_n\}$ é limitada.

É então bastante padrão obter que $\{w_n\}$ tem uma subsequência convergente, Cf. Proposição A.2 e, portanto, a prova está concluída. \blacksquare

Agora segue a **Prova do Teorema 4.3**: Primeiramente,

Afirmção 4.11 *a funcional I_λ possui um mínimo local em $w = 0$.*

De fato, tomando J_λ como em (4.11) e $w \in C_0^1(\bar{\Omega})$, com $\|w\|_\infty$ suficientemente pequena (é requerido que $\|w\|_{C^1} < \delta$), de tal modo que $u_\lambda + w^+ \leq \|u_\lambda\|_\infty + \|w^+\|_\infty < \alpha + \delta$. Desse modo podemos substituir F substituído por \tilde{F} , pois $\tilde{F}(u_\lambda + w^+) = \int_0^{u_\lambda + w^+} \tilde{f}(s) ds = \int_0^{u_\lambda + w^+} f(s) ds = F(u_\lambda + w^+)$ por um cálculo direto, obtemos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_\lambda + w^+) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla(u_\lambda + w^+)|^2 - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(u_\lambda + w^+) \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u_\lambda|^2 + 2\nabla u_\lambda \cdot \nabla w^+ + |\nabla w^+|^2) - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(u_\lambda + w^+) \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^+|^2 + \int_\Omega \nabla u_\lambda \cdot \nabla w^+ - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(u_\lambda + w^+) \end{aligned}$$

como u_λ é solução de (P_λ) essa também é solução fraca, ou seja, $\int_\Omega \nabla u_\lambda \cdot \nabla w^+ = \lambda \int_\Omega f(u_\lambda)w^+$, daí

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_\lambda + w^+) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^+|^2 + \lambda \int_\Omega f(u_\lambda)w^+ - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(u_\lambda + w^+) \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(u_\lambda) \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^+|^2 - \lambda \int_\Omega \left(\tilde{F}(u_\lambda + w^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda)w^+ \right) \right) \\ &= J_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(w^+) \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} I_\lambda(w^+) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^+|^2 - \lambda \int_\Omega \left(\tilde{F}(u_\lambda + w^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda)w^+ \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^+|^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^-|^2 \right) - \lambda \int_\Omega \left(\tilde{F}(u_\lambda + w^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda)w^+ \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^+|^2 - \lambda \int_\Omega \left(\tilde{F}(u_\lambda + w^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda)w^+ \right) \right) - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^-|^2 \\ &= I_\lambda(w) - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^-|^2 \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$J_\lambda(u_\lambda + w^+) = J_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(w) - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w^-|^2$$

Portanto, por (4.10) segue que

$$I_\lambda(w) \geq J_\lambda(u_\lambda + w^+) - J_\lambda(u_\lambda) \geq 0 = I_\lambda(0),$$

Então $w = 0$ é um mínimo local na topologia C^1 . Finalmente, pelo Teorema 2.1, $w = 0$ também é um mínimo para I_λ na topologia H_0^1 , como queríamos demonstrar.

Pela continuidade do funcional I_λ , para $r > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$I_\lambda(w) \geq 0 \quad \text{se} \quad \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2r.$$

Agora note que se tivermos $\inf\{I_\lambda(w) \mid \|w\|_{H_0^1(\Omega)} = r\} = 0$ pela definição de ínfimo, existe uma sequência $\{w_n\}$ com $\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)} = r$ tal que

$$I_\lambda(w_n) \rightarrow 0.$$

Por outro lado, como I_λ é semicontínuo inferiormente e a sequência $\{w_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ (pois $\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)} = r$), existe uma subsequência que ainda denotaremos por $\{w_n\}$ tal que

$$w_n \rightharpoonup w_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

e,

$$I_\lambda(w_0) \leq \liminf_n I_\lambda(w_n) = 0$$

logo

$$0 \leq I_\lambda(w_0) \leq 0$$

portanto

$$I_\lambda(w_0) = 0$$

e assim w_0 é um mínimo local não trivial (pois $\|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} = r > 0$ [cf. afirmação 4.12]).

Afirmação 4.12 $\|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} = r$.

Com efeito, sabendo que $w_n \rightharpoonup w_0$ em $H_0^1(\Omega)$, logo w_n é limitada (cf. Teorema A.12), pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s$, $s \in [1, 2^*)$ (cf. Teorema A.8), existe uma subsequência $\{w_{n_j}\}, \subset \{w_n\}$ tal que

$$w_{n_j} \rightarrow w_0 \quad \text{em} \quad L^s(\Omega)$$

Pelo Teorema A.11 (a menos de subsequência)

$$w_{n_j} \rightarrow w_0 \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad \Omega$$

Daí, pela continuidade de \tilde{F} e f , resulta

$$\tilde{F}(u_\lambda + w_{n_j}^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda) \cdot w_{n_j}^+ \rightarrow \tilde{F}(u_\lambda + w_0^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda) \cdot w_0^+ \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad \Omega$$

Por outro lado, pelo crescimento subcrítico da função $g_\lambda(x, w^+) = \lambda \left[\tilde{f}(u_\lambda + w^+) - f(u_\lambda) \right]$, assim existem $A, B > 0$ tais que

$$|G_\lambda(x, w^+)| = \lambda \left| \tilde{F}(u_\lambda + w^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda) \cdot w_n^+ \right| \leq A|w| + \frac{B}{p+1}|w^+|^{p+1}.$$

onde $G_\lambda(x, w^+) = \int_0^{w^+} g_\lambda(x, s) ds$.

Assim, o funcional $I_\lambda(w_{n_j})$ é limitado. De fato

$$\begin{aligned} |I_\lambda(w_{n_j})| &= \left| \frac{1}{2} \|w_{n_j}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \lambda \int_\Omega \left[F(u_\lambda + w_{n_j}^+) - F(u_\lambda) - f(u_\lambda) \cdot w_{n_j}^+ \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|w_{n_j}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + A|w_n| + \frac{B}{p+1} |w_{n_j}^+|^{p+1} \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Teorema A.11), temos

$$\begin{aligned} \lim_{n_j} I_\lambda(w_{n_j}) &= \lim_{n_j} \left(\frac{1}{2} \|w_{n_j}\|_{H_0^1}^2 - \lambda \int_\Omega \left[\tilde{F}(u_\lambda + w_{n_j}^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda) \cdot w_{n_j}^+ \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} r^2 - \lambda \int_\Omega \left[\tilde{F}(u_\lambda + w_0^+) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda) \cdot w_0^+ \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabendo que $\|w_{n_j}\| = r$, note que

$$|I_\lambda(w_0) - I_\lambda(w_{n_j})| \rightarrow \frac{1}{2} \left(\|w_0\|_{H_0^1}^2 - r^2 \right).$$

Além disso, como $w_n \rightharpoonup w_0$ em $H_0^1(\Omega)$, segue que

$$\|w_0\|_{H_0^1} \leq \liminf \|w_{n_j}\|_{H_0^1} \leq r$$

ou seja $\|w_0\|_{H_0^1}^2 - r^2 \leq 0$. Daí, tomando o limite em

$$0 \leq |I_\lambda(w_0) - I_\lambda(w_{n_j})|$$

obtemos

$$0 \leq \frac{1}{2} \left(\|w_0\|_{H_0^1}^2 - r^2 \right) \leq 0$$

ou seja

$$\frac{1}{2} \left(\|w_0\|_{H_0^1}^2 - r^2 \right) = 0$$

Portanto

$$\|w_0\|_{H_0^1} = r$$

assim fica provada a afirmação.

Podemos supor também que $\inf\{I_\lambda(w) : \|w\|_{H_0^1} = r\} > 0$. Escolhemos agora uma função $e \in C_0^\infty(\Omega)$ com $e > 0$ em Ω e devido à definição de \tilde{f} , temos (cf. Afirmação C.3) que

$$\tilde{F}(u_\lambda + te) \geq At^{p+1} - B$$

para alguns $A, B > 0$, assim existem $C, D > 0$ onde

$$\begin{aligned}
I_\lambda(te) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla te|^2 - \lambda \int_\Omega (\tilde{F}(u_\lambda + te)) - \tilde{F}(u_\lambda) - f(u_\lambda)te \\
&\leq \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla e|^2 + \lambda \int_\Omega (B - At^{p+1}) + \tilde{F}(u_\lambda) + f(u_\lambda)te \\
&= \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla e|^2 + \lambda B|\Omega| - \lambda A|\Omega|t^{p+1} + \lambda F(u_\lambda)|\Omega| + t \int_\Omega f(u_\lambda)e \\
&= \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla e|^2 - Ct^{p+1} + D + t \int_\Omega f(u_\lambda)e.
\end{aligned}$$

onde $C := \lambda A|\Omega|$ e $D := \lambda B|\Omega| + \lambda F(u_\lambda)|\Omega|$.

Como $p > 1$, assim $p + 1 > 2$, daí

$$I_\lambda(te) < 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty$$

Em resumo, I_λ tem a estrutura passo da montanha. Pelo Lema 4.2, I_λ verifica a condição de Palais-Smale, então podemos aplicar o Teorema da Passo da Montanha A.1 para obter que I_λ tem um ponto crítico não trivial w_0 . Portanto, w_0 é uma solução clássica positiva de (4.13) (cf. Afirmação C.5).

Finalmente, como anunciamos, concluímos que $v_\lambda = u_\lambda + w_0$ é uma solução de (T), pois como u_λ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

e w_0 é solução de

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda(\tilde{f}(u_\lambda + w) - f(u_\lambda)) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

segue que

$$\begin{aligned}
-\Delta v_\lambda &= -(\Delta u_\lambda + \Delta w_0) \\
&= -\Delta u_\lambda - \Delta w_0 \\
&= \lambda f(u_\lambda) + \lambda \tilde{f}(u_\lambda + w_0) - \lambda f(u_\lambda) \\
&= \lambda \tilde{f}(u_\lambda + w_0) \\
&= \lambda \tilde{f}(v_\lambda)
\end{aligned}$$

desde que $u_\lambda = w_0 = 0$ na $\partial\Omega$, portanto de fato v_λ é solução de (T) e que verifica $v_\lambda > u_\lambda$ como desejado. Como u_λ é a solução máxima no intervalo $[0, \alpha]$, obtemos que $\|v_\lambda\|_\infty > \alpha$,

e a prova do Teorema 4.3 está concluída. \square

Agora o passo final para completar a prova do Teorema 4.1 é mostrar que, para λ grande, as soluções v_λ recém-obtidas que verificam $v_\lambda \leq \alpha + \delta$, para que se tornem soluções do problema original (P_λ) . Para conseguir isso, primeiro precisamos mostrar cotas superiores para todas as soluções possíveis de (T) .

Lema 4.3 *Para todo $\Lambda > 0$, existe uma constante positiva M tal que se u é uma solução positiva de (T) para algum $\lambda \geq \Lambda$, então*

$$\|u\|_\infty \leq M.$$

Demonstração: Suponha por contradição que exista uma sequência de soluções positivas de (T) $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ correspondente a $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset [\Lambda, +\infty)$, tal que $M_n := \|u_n\|_\infty \rightarrow +\infty$. Escolhemos pontos $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$ com $u_n(x_n) = M_n$ e definimos

$$v_n(y) = u_n(x_n + \mu_n y) / M_n,$$

onde $\mu_n = \lambda_n^{-1/2} M_n^{-\frac{p-1}{2}} \rightarrow 0$. Então essas funções verificam

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p} & \text{em } \Omega_n, \\ v_n = 0 & \text{em } \partial\Omega_n, \end{cases}$$

onde $\Omega_n = \{y \in \mathbb{R}^N : x_n + \mu_n y \in \Omega\}$.

(Até o final da demonstração por questão de notação indexaremos $u_n := u$, lembrando que a demonstração segue para todo $n \in \mathbb{N}$).

De fato, como a função u satisfaz a equação (T) , ou seja,

$$-\Delta_x u(x) = \lambda_n \tilde{f}(u(x))$$

Queremos calcular o Laplaciano de v_n em relação a y , $\Delta_y v_n = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v_n}{\partial y_i^2}$.

Calculamos a primeira derivada parcial de v_n em relação a y_i usando a regra da cadeia.

$$\frac{\partial v_n}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{M_n} u(x_n + \mu_n y) \right) = \frac{1}{M_n} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

Dado que $x_j = (x_n)_j + \mu_n y_j$, a derivada $\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \mu_n \delta_{ij}$. Assim,

$$\frac{\partial v_n}{\partial y_i} = \frac{1}{M_n} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} (\mu_n \delta_{ij}) = \frac{\mu_n}{M_n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Agora derivamos a expressão anterior novamente em relação a y_i .

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial y_i^2} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\mu_n}{M_n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu_n}{M_n} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

Daí,

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial y_i^2} = \frac{\mu_n}{M_n} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} (\mu_n \delta_{ij}) = \frac{\mu_n^2}{M_n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Assim a expressão que desejamos, segue

$$-\Delta_y v_n = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v_n}{\partial y_i^2} = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mu_n^2}{M_n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) = - \frac{\mu_n^2}{M_n} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = - \frac{\mu_n^2}{M_n} \Delta_x u$$

usando a equação (T), ou seja, $-\Delta_x u = \lambda_n \tilde{f}(u)$ tem-se,

$$-\Delta_y v_n = \frac{\mu_n^2}{M_n} (-\Delta_x u) = \frac{\mu_n^2 \lambda_n}{M_n} \tilde{f}(u)$$

Daí, usando o fato que $u = M_n v_n$ e a definição de μ_n , segue

$$\mu_n^2 = \left(\lambda_n^{-1/2} M_n^{-\frac{p-1}{2}} \right)^2 = \lambda_n^{-1} M_n^{-(p-1)}$$

Portanto

$$\begin{aligned} -\Delta_y v_n &= \frac{(\lambda_n^{-1} M_n^{-(p-1)}) \lambda_n}{M_n} \tilde{f}(M_n v_n) \\ -\Delta_y v_n &= \frac{1}{M_n^{p-1} M_n} \tilde{f}(M_n v_n) \\ -\Delta_y v_n &= \frac{1}{M_n^p} \tilde{f}(M_n v_n) \end{aligned}$$

Além disso temos que $y \in \partial\Omega_n \Leftrightarrow x_n + \mu_n y \in \partial\Omega$.

De fato, Dado $y \in \partial\Omega_n$ e arbitrariamente $\varepsilon > 0$, Defina

$$r := \frac{\varepsilon}{\mu_n}$$

Como $y \in \partial\Omega_n$, existem

$$z \in B(y, r) \cap \Omega_n \quad \text{e} \quad w \in B(y, r) \cap (\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n)$$

Pela definição de Ω_n , temos

$$x_n + \mu_n z \in \Omega \quad \text{e} \quad x_n + \mu_n w \notin \Omega$$

Agora note que,

$$|(x_n + \mu_n z) - (x_n + \mu_n y)| = \mu_n |z - y| < \mu_n \cdot r = \varepsilon$$

Ou seja,

$$x_n + \mu_n z \in B_\varepsilon(x_n + \mu_n y), \quad \text{onde } x_n + \mu_n z \in \Omega$$

Da mesma forma,

$$x_n + \mu_n w \in B_\varepsilon(x_n + \mu_n y), \quad \text{onde } x_n + \mu_n w \notin \Omega$$

Assim, pela definição de fronteira,

$$x_n + \mu_n y \in \partial\Omega$$

O lado contrário é direto, pois $u(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega$. Portanto,

$$v_n(y) = 0, \quad \forall y \in \partial\Omega_n$$

O que segue $d(x_n) := d_n$ representa a distância de x_n a $\partial\Omega$.

Assumindo que

$$\lim_n x_n = \tilde{p}$$

Temos duas possibilidades,

(i) $\tilde{p} \in \text{int}(\Omega)$

(ii) $\tilde{p} \in \partial\Omega$.

Para a possibilidade do primeiro item (i) as consequência são:

Denote por $d = \text{dist}(\tilde{p}, \partial\Omega)$, note que para n suficientemente grande $v_n(y)$ está definida em $B_{\frac{d-a}{\mu_n}}(0)$, para qualquer constante positiva a tal que $a < d$.

De fato, para n suficientemente grande de tal modo que $B_{d-a}(x_n) \subset \Omega$ com $0 < a < d$, para $x \in B_{d-a}(x_n)$ então

$$\|x - x_n\| < d - a$$

assim

$$\|\mu_n y\| < d - a, \quad \text{com } y \in \Omega_n$$

ou seja,

$$\|y\| < \frac{d-a}{\mu_n}, \text{ com } y \in \Omega_n$$

Agora, fizemos um raio $R_1 \geq 1$, considere os índices $R_n \geq 3R_1$ e defina

$$g_n = \frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p}$$

Portanto para qualquer raio R_n tal que $B_{R_n}(0) \subset B_{\frac{d-a}{\mu_n}}(0)$, obtemos os resultados seguintes.

Afirmção 4.13 $g_n \in C^{0,\alpha}(\overline{B_{R_1}})$, com $\overline{B_{R_1}} \subset \subset \Omega_n$.

Com efeito, para mostrar isso, mostraremos e faremos uso da seguinte afirmação:

Afirmção 4.14 *Toda função localmente lipschitz e limitada é Holder contínua.*

De fato, seja $h : D_h \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitz, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe uma vizinhança V_x e $C_x > 0$, tal que,

$$|h(a) - h(b)| \leq C_x |a - b|, \forall a, b \in V_x$$

Para $0 < \alpha \leq 1$, considere os casos

Caso 1: Quando $|a - b| \leq 1$.

Temos que

$$|h(a) - h(b)| \leq C_x |a - b| = C_x |a - b|^{1-\alpha} \cdot |a - b|^\alpha \leq C_x |a - b|^\alpha$$

Caso 2: Quando $|a - b| > 1$.

Nesse caso usando o fato de que f é limitada isto é,

$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in D_h$$

Assim,

$$|f(a) - f(b)| \leq 2K \leq 2K |a - b|^\alpha$$

Ficando assim provada a Afirmção.

Afirmção 4.15 g_n é localmente lipschitz em $\overline{B_{R_1}}$.

Com efeito, usando o fato de que u é solução de (T), isto é,

$$M_n v_n = u \in C^2(\Omega)$$

Daí, temos que $M_n v_n(\overline{B_{R_1}}) \subset [\alpha, \beta]$, para

$$\alpha = \min_{B_{R_1}} M_n v_n \quad \text{e} \quad \beta = \max_{B_{R_1}} M_n v_n$$

Agora, usando o fato de que \tilde{f} é localmente lipschitz, isto é, dado qualquer $t_0 \in (\alpha, \beta)$, existem $C_{t_0}, \delta_{t_0} > 0$ tais que

$$|\tilde{f}(t) - \tilde{f}(s)| \leq C_{t_0} |t - s| \quad \forall t, s \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$$

Assim, para qualquer $w_0 \in B_{R_1}$, como B_{R_1} é aberto existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$B_{\varepsilon_0}(w_0) \subset B_{R_1}$$

Assim, para quaisquer $z, y \in B_\varepsilon(w_0)$, com $z \neq y$, segue que

$$|g_n(z) - g_n(y)| = \left| \frac{1}{M_n^p} \tilde{f}(M_n v_n(z)) - \frac{1}{M_n^p} \tilde{f}(M_n v_n(y)) \right|$$

Note que $M_n v_n(z), M_n v_n(y) \in [\alpha, \beta]$, assim existe uma constante de lipschitz de \tilde{f} , que denotaremos por $C_{\tilde{f}}$ tal que

$$\left| \frac{1}{M_n^p} \tilde{f}(M_n v_n(z)) - \frac{1}{M_n^p} \tilde{f}(M_n v_n(y)) \right| \leq \frac{C_{\tilde{f}}}{M_n^p} |M_n v_n(z) - M_n v_n(y)|$$

Portanto da desigualdade acima, temos que

$$|g_n(z) - g_n(y)| \leq \frac{C_{\tilde{f}}}{M_n^p} |M_n v_n(z) - M_n v_n(y)| \leq \frac{C_{\tilde{f}}}{M_n^p} |\beta - \alpha| \leq \frac{C_{\tilde{f}}}{M_n^p} |\beta - \alpha| |z - y|$$

Como $M_n \rightarrow +\infty$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{M_n^p} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N_0.$$

Portanto

$$|g_n(z) - g_n(y)| \leq K |z - y| \quad \forall z, y \in B_\varepsilon(w_0)$$

onde $K = \frac{C_{\tilde{f}}}{2} |\beta - \alpha|$ é a constante de lipschitz de g_n . Para os pontos $w_0 \in \partial B_{R_1}$, basta seguir o mesmo argumento, ajustando os máximo e mínimo da função $M_n v_n$ na bola de raio $R_1 + 1$.

Portanto a Afirmação 4.15 fica provada.

Para concluir a prova da Afirmação 4.13, segue que sendo g_n localmente lipschitz e $g_n|_{\overline{B_{R_1}}}$ é limitada, pela Afirmação 4.14 $g_n \in C^{0,\alpha}(\overline{B_{R_1}})$.

De maneira geral, para cada $R_1 = 1, 2, 3, \dots$ (notação $n := R_n$), tem-se que a função g_n é Hölder contínua em uma vizinhança $\Gamma_\lambda \subset B_{R_1+1}$ onde a reunião da família $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in L}$ contém B_{R_1} , ou seja,

$$B_{R_1} \subset \bigcup_{\lambda \in L} \Gamma_\lambda =: K$$

Como $\overline{B_{R_1}}$ é compacto, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, a cobertura $K \subset \mathbb{R}^N$ admite uma subcobertura finita listada por $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, onde

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$$

Assim, defina $\Omega_i \cap B_{R_1} = \Omega'_i$ temos que

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega'_i = B_{R_1}$$

Assim, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, existe C_i tal que

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq C_i |x - y|^\alpha$$

Tomando o $\max_{i \leq 1 \leq N} C_i =: C(B_{R_1})$ tem-se que g_n é Hölder contínua na bola B_{R_1} , isto é,

$$\frac{|g_n(x) - g_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(B_{R_1}), \text{ para cada índice } R_1 \in \mathbb{N} \quad (4.19)$$

Afirmção 4.16

$$\|v_n\|_{C^{2,\alpha}(B_{R_1})} \leq C(B_{R_1+1})$$

Com efeito, temos a sequência

$$B_{R_1} \subset\subset B_{R_2} \subset\subset B_{R_3} \subset\subset \dots \subset\subset B_{R_k} \subset\subset B_{R_{k+1}} \subset\subset \dots \subset\subset \Omega_n$$

tais que

$$\bigcup_{R_1=1}^{\infty} B_{R_k} = \Omega$$

Denotando por v_k a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v_k = g_n & \text{em } B_{R_k} \\ v_k = 0 & \text{na } \partial B_{R_k} \end{cases}$$

como $g_n \in C^{0,\alpha}(\overline{B_{R_k}})$ temos que $v_k \in C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_k}}) \cap C^0(\overline{B_{R_k}})$ e fixado $k \geq 1$, para cada $n \geq k + 1$ vale

$$-\Delta v_n = g_n,$$

e $v_n \in C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_k}})$, além disso, Além disso pelo Teorema A.4

$$\|v_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_k}})} \leq C(k) \left[\|v_n\|_{L^\infty(B_{R_{k+1}})} + \|g_n\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_{R_{k+1}}})} \right]$$

Note que, pelo fato de que $v_n(y) = \frac{u(x_n + \mu_n y)}{M_n} \leq \frac{\|u\|_\infty}{M_n} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{C^{2,\alpha}(B_k)} \leq C(B_k) & \left[1 + \sup_{y \in B_{k+1}} \left| \frac{\tilde{f}(M_n v_n(y))}{M_n^p} \right| \right. \\ & \left. + \sup_{\substack{x, y \in \overline{B_{k+1}} \\ x \neq y}} \frac{1}{M_n^p} \left| \frac{\tilde{f}(M_n v_n(x)) - \tilde{f}(M_n v_n(y))}{|x - y|^\alpha} \right| \right] \end{aligned}$$

Para mostrar que o lado direito dessa desigualdade fica limitada por uma constante que não depende de n , analisando o primeiro supremo dividiremos em dois casos,

Caso 1:

$$\Gamma = \{y \in B_{k+1} : 0 \leq M_n v_n(y) \leq \alpha + \delta\}$$

Caso 2:

$$\Gamma' = \{y \in B_{k+1} : M_n v_n(y) > \alpha + \delta\}$$

Considerando o caso 2, segue

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Gamma'} \frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p} &= \sup_{x \in \Gamma'} \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p M_n^p} (M_n v_n - \alpha)^p \\ &= \sup_{x \in \Gamma'} \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p M_n^p} (u(x_n + \mu_n y) - \alpha)^p \end{aligned}$$

usando que $u \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ e pelo fato de que $M_n \rightarrow +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Gamma'} \frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p} &\leq \sup_{x \in \Gamma'} \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p M_n^p} (\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \alpha)^p \\ &= \sup_{x \in \Gamma'} \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p M_n^p} (M_n - \alpha)^p \\ &= \sup_{x \in \Gamma'} \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} \left(1 - \frac{\alpha}{M_n}\right)^p \\ &= \sup_{x \in \Gamma'} \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^p := K_1 \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Para o caso 1, como a função f é contínua tem-se

$$\sup_{y \in \Gamma} \frac{f(M_n v_n)}{M_n^p} \leq \sup_{[0, \alpha + \delta]} \frac{f(M_n v_n)}{M_n^p} := K_2$$

Assim, juntando ambos os casos

$$\sup_{y \in B_{R_{k+1}}} \left| \frac{\tilde{f}(M_n v_n(y))}{M_n^p} \right| \leq \sup_{\Gamma} \left| \frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p} \right| + \sup_{\Gamma'} \left| \frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p} \right| \leq K_1 + K_2 := A \quad \forall n \geq N.$$

Para limitação do segundo supremo usando o fato de que existe uma constante $C(B_{k+1})$ consequência de (4.19), portanto a sequência v_n é limitada na norma $C^{2,\alpha}$.

Afirmção 4.17 *Existe uma subsequência $(v_{n_k}) \subset (v_n)$ tal que*

$$v_{n_k} \rightarrow v \text{ em } C_{loc}^2(\mathbb{R}^N).$$

Com efeito, considere $R_1 = 1, 2, 3, \dots$ encontramos C_1, C_2, C_3, \dots tais que

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}_1 \cap \Omega_n)} &\leq C_1, \quad \forall n > 1. \\ \|v_n\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}_2 \cap \Omega_n)} &\leq C_2, \quad \forall n > 6. \\ &\vdots \\ \|v_n\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}_{R_1} \cap \Omega_n)} &\leq C_{R_1}, \quad \forall n > 3R_1. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina

$$v_n^i \equiv v_n(x)|_{\bar{B}_i}, \quad n > 3i$$

Temos que $B_i \subset B_{i+1}$ e que $(v_n^{i+1})_{n>3(i+1)}$ é uma subsequência de $(v_n^i)_{n>3i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Como a sequência é $(v_n^i)_{n>3i}$ é limitada, usando a imersão compacta

$$C^{2,\alpha}(\bar{B}_i) \hookrightarrow C^2(\bar{B}_i), \quad i \in \mathbb{N}$$

Existem funções $v^i \in C^2(\bar{B}_i)$, tais que a menos de subsequências

$$\begin{aligned} v_4^1, v_5^1, v_6^1, \dots &\longrightarrow v^1 \text{ em } C^2(\bar{B}_1) \\ v_7^2, v_8^2, v_9^2, \dots &\longrightarrow v^2 \text{ em } C^2(\bar{B}_2) \\ v_{10}^3, v_{11}^3, v_{12}^3, \dots &\longrightarrow v^3 \text{ em } C^2(\bar{B}_3) \\ &\vdots \\ v_{3i+1}^i, v_{3i+2}^i, v_{3i+3}^i &\longrightarrow v^i \text{ em } C^2(\bar{B}_i) \end{aligned}$$

Defina

$$v(x) = v^i(x) \quad \text{para } x \in \overline{B_i}.$$

Então $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e a sequência diagonal $U_i = v_{4i}^i$ verifica

$$U_i \longrightarrow v \text{ em } C^2(\overline{B_i})$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. E satisfaz,

$$\begin{cases} -\Delta U_i = g_n & \text{em } B_i \\ U_i = 0 & \text{na } \partial B_i \end{cases}$$

Logo quando $i \rightarrow +\infty$ obtemos

$$-\Delta v = \frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p} \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

Por outro lado, para cada $z \in \Omega_n$, onde $v_n(z) \neq 0$, como $M_n \rightarrow \infty$ existe $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_n v_n(z) > \alpha + \delta, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$\frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p} = \frac{f(\alpha + \delta) \cdot (M_n v_n - \alpha)^p}{\delta^p \cdot M_n^p} = \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} \cdot \left(v_n - \frac{\alpha}{M_n} \right)^p$$

Passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$, tem-se

$$\frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p} \longrightarrow \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} \cdot v^p$$

Assim, (a menos de subsequência) $v_n \rightarrow v$ em $C_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$, onde v é uma solução positiva de

$$-\Delta v = \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} v^p \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

com $v(0) = 1$. Isso contradiz o Teorema [B.1](#), uma vez que $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.

Agora caso a possibilidade do segundo item (ii) ocorra, $\tilde{p} \in \partial\Omega$. Com uma determinada retificação em uma vizinhança de \tilde{p} tem-se $\partial\Omega$ está contido no hiperplano $x_N = 0$.

(*)

(*)

Definição 4.1 Dizemos que Ω é um **domínio** C^1 se para todo ponto $x \in \partial\Omega$, existe um sistema de coordenadas $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \equiv (y', y_n)$ com origem em \mathbf{x} , uma bola $B(x)$ e uma função φ definida em uma vizinhança $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de $y' = 0'$, tal que

$$\varphi \in C^1(\mathcal{N}), \quad \varphi(0') = 0$$

e

$$(i) \quad \partial\Omega \cap B(x) = \{(y', y_n) : y_n = \varphi(y'), y' \in \mathcal{N}\},$$

$$(ii) \quad \Omega \cap B(x) = \{(y', y_n) : y_n > \varphi(y'), y' \in \mathcal{N}\}.$$

A primeira condição expressa o fato de que $\partial\Omega$ coincide localmente com o gráfico de uma função C^1 . A segunda requer que Ω seja localmente colocado em um dos lados de sua fronteira.

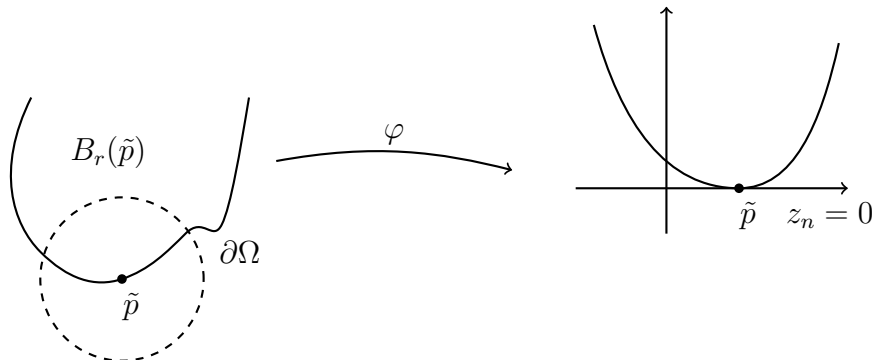
A fronteira de um domínio C^1 não possui cantos, arestas ou hiperplanos tangentes em qualquer ponto $p \in \partial\Omega$; uma reta (para $n = 2$) ou um plano (para $n = 3$) ou um hiperplano (para $n > 3$) tangente está bem definido, juntamente com os vetores normais unitários externo e interno. Além disso, estes vetores variam continuamente em $\partial\Omega$.

Os pares (φ, \mathcal{N}) que aparecem na definição acima são chamados de cartas locais. Se eles forem todos funções C^k , para algum $k \geq 1$, Ω é dito ser um **domínio** C^k . Se Ω é um domínio C^k para todo $k \geq 1$, ele é dito ser um domínio C^∞ . Estes são os domínios que consideramos **domínios suaves**.

Como nosso domínio Ω é suave, ou seja, localmente pode ser visto como o gráfico de um função $\Phi \in C^\infty$. Podemos fazer um endireitamento local do ponto \tilde{p} , ou seja, Observe que a transformação (*difeomorfismo*) $z = \Phi(y)$ dada por

$$\begin{cases} z' = y' \\ z_n = y_n - \varphi(y') \end{cases} \quad (4.20)$$

mapeia $\partial\Omega \cap B_r(\tilde{p})$ (com algum $r > 0$) para um subconjunto do hiperplano $z_n = 0$, de modo que $\partial\Omega \cap B_r(\tilde{p})$ se “endireita”, conforme mostrado na figura abaixo.



Agora analisando a segunda possibilidade item (ii). Definindo novamente

$$v_n(y) = \frac{u(x_n + \mu_n y)}{M_n} \quad \text{onde} \quad \mu_n = \lambda_n^{-1/2} M_n^{-\frac{p-1}{2}} \rightarrow 0.$$

Como já mencionado que $d_n = \text{dist}(x_n, \partial\Omega) =: d(x_n)$, assim $d_n = \langle x_n, e_N \rangle$. Note que para n suficientemente grande, v_n está definida em $B_{\frac{\delta}{\mu_n}}(0) \cap \left\{ y_N > -\frac{d_n}{\mu_n} \right\}$ para algum $\delta > 0$, pois, após rotação e translação do sistema de coordenadas, podemos supor que localmente:

$$\Omega \subset \{x_N > 0\}, \quad \partial\Omega \subset \{x_N = 0\},$$

Temos que $v_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\Omega_n = \{y \in \mathbb{R}^n : x_n + \mu_n y \in \Omega\}$. Desde que $x_n + \mu_n y \in \Omega$, implica que na N -ésima coordenada tem-se

$$(x_n + \mu_n y)_N = (x_n)_N + \mu_n y_N > 0$$

ou seja,

$$y_N > -\frac{d_n}{\mu_n}$$

Como Ω é aberto, assim para cada $x_n \in \Omega \exists \delta := \delta_n > 0$ tal que

$$B_\delta(x_n) \subset \Omega.$$

Tome $y \in B_{\delta_n/\mu_n}(0)$, isto é, $|y| < \frac{\delta_n}{\mu_n}$. Então

$$\|x_n + \mu_n y - x_n\| = \|\mu_n y\| = |\mu_n| \|y\| < \mu_n \frac{\delta_n}{\mu_n} = \delta_n = \delta$$

Logo $x_n + \mu_n y \in B_\delta(x_n) \subset \Omega$, e assim $y_N > -\frac{d_n}{\mu_n}$.

Por outro lado, desde que $x_n + \mu_n y \in \partial\Omega$, na N -ésima coordenada tem-se

$$(x_n + \mu_n y)_N = 0$$

e assim,

$$y_N = \frac{-d_n}{\mu_n}$$

Assim para $y \in B_{\delta/\mu_n}(0) \cap \left\{ y_N > -\frac{d_n}{\mu_n} \right\}$ temos que $x_n + \mu_n y \in \Omega$ e portanto $v_n(y)$ está bem definida e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p} & \text{em } B_{\frac{\delta}{\mu_n}}(0) \cap \left\{ y_N > -\frac{d_n}{\mu_n} \right\} \\ v_n = 0 & \text{em } \left\{ y_N = -\frac{d_n}{\mu_n} \right\} \end{cases}$$

assim, como $\sup v_n \leq 1$, tem-se

$$\sup_{A_n} v_n(y) = v_n(0) = 1$$

onde $A_n = B_{\frac{\delta}{\mu_n}}(0) \cap \left\{ y_N > -\frac{d_n}{\mu_n} \right\}$.

Afirmação 4.18 $\frac{d_n}{\mu_n} \geq C_1 > 0$ uniformemente para alguma constante C_1

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta_n \in \mathbb{R}^N$ no seguimento de reta que liga os pontos 0 e $(0', -\frac{d_n}{\mu_n})$ tal que

$$\left| v_n(0) - v_n\left(0', -\frac{d_n}{\mu_n}\right) \right| = |\nabla v_n(\theta_n)| \left| -\frac{d_n}{\mu_n} \right| \leq \|\nabla v_n\|_\infty \frac{d_n}{\mu_n}$$

Pelo fato de Ω ser limitado, existe $R > 0$ tal que

$$\|x\| \leq R \quad \forall x \in \Omega.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, tem-se que Ω_n é limitado. De fato, dado $y \in \Omega_n$ tem-se

$$y = \frac{x - x_n}{\mu_n}$$

Daí,

$$\|y\| = \left\| \frac{x - x_n}{\mu_n} \right\| = \frac{1}{\mu_n} (\|x\| + \|x_n\|) \leq \frac{2R}{\mu_n} =: R_n \quad (n \text{ fixo!})$$

Como mostrado na Afirmação 4.16 que v_n é limitada na norma $C^{2,\alpha}$, logo para R_1 suficientemente grande, temos $\Omega_n \subset B_{R_1}(0)$ (n fixo!) assim existe $M > 0$ tal que

$$\|v_n\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_n)} \leq M.$$

Da desigualdade acima, temos que

$$\|\nabla v_n\|_{L^\infty(\Omega_n)} \leq M.$$

Portanto,

$$\left| v_n(0) - v_n\left(0', -\frac{d_n}{\mu_n}\right) \right| \leq M \cdot \frac{d_n}{\mu_n}$$

Agora, observe

$$v_n\left(0', -\frac{d_n}{\mu_n}\right) = \frac{u\left(x_n + \mu_n\left(0', -\frac{d_n}{\mu_n}\right)\right)}{M_n} = \frac{u\left(x_n^1, \dots, x_n^{N-1}, x_n^N - d_n\right)}{M_n}$$

Note que

$$x_n^N - d_n = x_n^N - \langle x_n, e_N \rangle = x_n^N - x_n^N = 0.$$

Assim, $\tilde{x} = (x_n^1, \dots, x_n^{N-1}, x_n^N - d_n) \in \partial\Omega$. Daí,

$$\frac{u(\tilde{x})}{M_n} = 0.$$

Portanto, obtemos

$$1 = |v_n(0) - v_n\left(0', -\frac{d_n}{\mu_n}\right)| \leq M \frac{d_n}{\mu_n}$$

Daí nós concluímos que $\frac{d_n}{\mu_n}$ é uniformemente limitada inferiormente.

Afirmção 4.19 $\frac{d_n}{\mu_n}$ é uniformemente limitado superiormente.

Caso contrário, existiria uma subsequência $\left\{\frac{d_{n_j}}{\mu_{n_j}}\right\} \subset \left\{\frac{d_n}{\mu_n}\right\}$ tal que

$$\frac{d_{n_j}}{\mu_{n_j}} \rightarrow +\infty \quad \text{quando } n_j \rightarrow +\infty$$

e assim v_{n_j} estaria definida em $B_{\frac{d_{n_j}}{\mu_{n_j}}}(0)$. Seguindo as mesmas linhas da possibilidade do item (i), existe uma subsequência $\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\}$ tal que

$$v_{n_j} \rightarrow v \quad \text{em } C^2(\mathbb{R}^N)$$

onde v é solução de

$$-\Delta v = \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} v^p \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

onde $v(0) = 1$, pois

$$v_{n_j}(0) = \frac{u(x_{n_j})}{M_{n_j}} = 1$$

Daí,

$$v(0) = 1 \quad \text{quando } n_j \rightarrow +\infty.$$

O que contradiz o Teorema [B.1](#).

Assim $\frac{d_n}{\mu_n}$ é uniformemente limitada (passando a uma subsequência se necessário)

$$\frac{d_n}{\mu_n} \rightarrow d \quad \text{com } d > 0.$$

Repetindo o argumento de compacidade na Afirmção [4.17](#) nós concluímos que existe uma subsequência $\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\}$ tal que $v_{n_j} \rightarrow v$ em $C^2(B_\nu(0))$ e $B_\nu(0) \subset \{y_N > -d\}$ onde v satisfaz

$$-\Delta v = \frac{\tilde{f}(M_n v_n)}{M_n^p}$$

no semi-espço superior $y_N > -d$ e $v(0) = 1$.

Desde que

$$v_n(y) = \frac{1}{M_n} u(x_n + \mu_n y) = 0, \text{ tem-se } x_n + \mu_n y \in \partial\Omega$$

ou seja,

$$v(y) = 0 \quad \text{em } \{y_N = -d\}.$$

Assim v verifica

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} v^p & \text{em } \mathbb{R}_+^N - de_N, \\ v = 0 & \text{em } \partial(\mathbb{R}_+^N - de_N), \end{cases}$$

e $v(0) = 1$, onde $\mathbb{R}_+^N = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$, contradizendo o Teorema B.2. Essa contradição mostra a existência de uma constante positiva M tal que $\|u\|_\infty \leq M$ para toda solução positiva u de (T) com $\lambda \geq \Lambda$, como queríamos demonstrar. ■

Prova do Teorema 4.1: Segue que a existência e as propriedades da solução abaixo de α estão contidas no Teorema 4.2. Portanto, apenas as afirmações relativas à segunda solução precisam ser mostradas. Pelo Teorema 4.3, existe uma solução positiva $v_\lambda = u_\lambda + w_0$ do problema truncado (T) para todo $\lambda > \lambda_0$, onde $\|u_\lambda\|_\infty < \alpha$ e $\|w_0\|_\infty < \delta$ com $\|v_\lambda\|_\infty > \alpha$, ou seja,

$$v_\lambda \leq \alpha + \delta \quad \text{em } \Omega \text{ para } \lambda \text{ suficientemente grande,}$$

então por (4.12), v_λ será uma solução positiva do problema original (T).

Por fim,

Afirmção 4.20 $v_\lambda \rightarrow \alpha$ uniformemente em compactos de Ω quando $\lambda \rightarrow +\infty$.

Primeiro escolhemos uma sequência arbitrária $\lambda_n \rightarrow +\infty$, com soluções correspondentes $v_n := v_{\lambda_n}$ verificando $\|v_n\|_\infty > \alpha$, $v_n > u_{\lambda_n}$, e seja $x_n \in \Omega$ tal que $v_n(x_n) = \|v_n\|_\infty$. Podemos assumir $x_n \rightarrow x_0 \in \bar{\Omega}$. Agora, para concluir a prova da Afirmção 4.20, demonstraremos e faremos uso das seguintes afirmações:

Afirmção 4.21 $d(x_n)\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rightarrow +\infty$

Prova: Por contradição, assumimos o contrário, isto é, existe uma subsequência de $d(x_n)\lambda_n^{\frac{1}{2}}$ onde essa subsequência é limitada. Pelo teorema de Bolzano Weierstrass existe uma subsequência da subsequência (que denotamos com os mesmos índices) tal que

$d(x_n)\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rightarrow d \geq 0$. Sem perda de generalidade, $x_0 \in \partial\Omega$. Com a usual retificação da fronteira $\partial\Omega$ próximo a x_0 , podemos supor que $\partial\Omega$ é dada numa vizinhança de x_0 por $x_N = 0$, enquanto Ω é dado por $x_N > 0$ próximo a x_0 (como feito na prova do Lema 4.3) Introduzimos agora as funções

$$w_n(y) := v_n(x_n + \lambda_n^{-\frac{1}{2}}y),$$

para $y \in \Omega_n = \{y \in \mathbb{R}^N : x_n + \lambda_n^{-\frac{1}{2}}y \in \Omega\}$. Pelo Lema 4.3, a sequência v_n é uniformemente limitada. Além disso, calculando o laplaciano de w_n , considere

$$w_n(y) = v_n(x), \quad \text{onde } x = x_n + \lambda_n^{-\frac{1}{2}}y$$

Pela regra da cadeia:

$$\nabla_y w_n(y) = \nabla_y [v_n(x_n + \lambda_n^{-\frac{1}{2}}y)] = \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \cdot \nabla_x v_n(x)$$

Mais precisamente, para cada componente:

$$\frac{\partial w_n}{\partial y_i}(y) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial v_n}{\partial x_j}(x) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) \cdot \lambda_n^{-\frac{1}{2}}$$

Calculando a segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y_i^2}(y) &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) \cdot \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \\ &= \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i^2}(x) \cdot \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \\ &= \lambda_n^{-1} \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i^2}(x) \end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta_y w_n(y) = \sum_{i=1}^N \lambda_n^{-1} \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i^2}(x) = \lambda_n^{-1} \cdot \Delta_x v_n(x)$$

sendo v_n solução de (T), ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \lambda_n f(v_n) & \text{em } \Omega \\ v_n = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

assim, sabendo que $v_n \leq \alpha + \delta$, tem-se

$$-\Delta_y w_n(y) = \lambda_n^{-1} \cdot (-\Delta_x v_n(x)) = \lambda_n^{-1} \lambda_n \cdot f(v_n(x)) = \tilde{f}(v_n)$$

Portanto,

$$-\Delta w_n = \tilde{f}(w_n) \quad \text{em } \Omega_n.$$

Como \tilde{f} é localmente Lipschitz, por regularidade elíptica obtemos limitantes locais para as normas $C^{2,\alpha}$ da sequência $\{w_n\}$. Observe que, sendo $\xi_n \in \partial\Omega$ ponto que minimiza a distância de x_n a fronteira de Ω , então

$$\begin{aligned} |w_n(0) - w_n(\lambda_n^{1/2}(\xi_n - x_n))| &= |v_n(x_n) - v_n(x_n + \lambda_n^{-1/2}(\lambda_n^{1/2}(\xi_n - x_n)))| \\ &= \|v_n\|_\infty - v_n(\xi_n) \\ &= \|v_n\|_\infty > \alpha \end{aligned} \tag{4.21}$$

Por outro lado, usando o teorema do valor médio e pela limitação local de w_n na norma $C^{2,\alpha}$, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |w_n(0) - w_n(\lambda_n^{1/2}(\xi_n - x_n))| &\leq \|\nabla w_n\|_\infty \cdot |\lambda_n^{1/2}(\xi_n - x_n)| \\ &\leq C \cdot |\lambda_n^{1/2} \cdot d(x_n)| \end{aligned} \tag{4.22}$$

Portanto, de (4.21) e (4.22),

$$0 < \alpha \leq C \cdot \lambda_n^{1/2} d(x_n)$$

passando ao limite em $n \rightarrow \infty$, temos

$$d > 0$$

Podemos então passar ao limite ao longo de uma subsequência para obter $w_n \rightarrow w$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}_+^N - de_N)$, onde w verifica

$$\begin{cases} -\Delta w = \tilde{f}(w) & \text{em } \mathbb{R}_+^N - de_N \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^N - de_N. \end{cases}$$

Além disso, $w(0) = \|w\|_\infty \geq \alpha$, de modo que como x_n é o ponto onde v_n atinge o máximo, logo $\nabla w(0) = 0$. No entanto, isto contradiz, por exemplo, o Corolário A.1, que afirma que $\frac{\partial w}{\partial x_N} > 0$ em $\mathbb{R}_+^N - de_N$ e a afirmação segue.

Portanto, pela Afirmação 4.21, usando um argumento similar como no Lema 4.3, obtemos que $w_n \rightarrow w$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$, onde w é uma solução de

$$-\Delta w = \tilde{f}(w) \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, também conseguimos obter o seguinte resultado

Afirmação 4.22 $w \geq \alpha$ em \mathbb{R}^N .

Demonstração: Observe, como resultado do absurdo da Afirmação 4.21, temos que $x_0 \in \text{int}(\Omega)$. Seja $y_0 \in \Omega_n$ tal que

$$x_0 = x_n + \lambda_n^{-1/2} y_0.$$

Mostraremos que dado $\delta > 0$ e $A > 0$ com $B_R(x_0) \subset \Omega$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$w_n(y) \geq \alpha - \delta \quad \forall y \in B_{R'_n}(y_0) \quad \forall n \geq n_0$$

com $R'_n := \lambda_n^{1/2} \cdot R > 0$

Pela Afirmação 4.21, e pelo fato de que $x_n \rightarrow x_0 \in \text{int}(\Omega)$, dado arbitrariamente $A > 0$, e $R > 0$ tal que $B_R(x_0) \subset \Omega$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

se $n \geq n_0$, então para todo $\tilde{x}_n = x_n + \lambda_n^{-1/2} y \in B_R(x_0)$

$$|d(x_n + \lambda_n^{-1/2} y) \cdot \lambda_n^{1/2}| > A.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in B_R(x_0)$, temos que

$$\|y - y_0\| = \|(x - x_n)\lambda_n^{1/2} - (x_0 - x_n)\lambda_n^{1/2}\| = \|\lambda_n^{1/2}(x - x_0)\| < \lambda_n^{1/2} R := R'_n$$

Logo, para cada $x \in B_R(x_0)$, temos que

$$(x - x_n)\lambda_n^{1/2} = y \in B_{R'_n}(y_0)$$

Assim, dado arbitrariamente $\delta > 0$ e tomando $A = c(\delta) > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n + \lambda_n^{1/2} y) \cdot \lambda_n^{1/2} \geq c(\delta) \quad \forall n \geq n_0$$

ou seja,

$$d(x_n + \lambda_n^{-1/2} y) \geq \lambda_n^{-1/2} c(\delta) \quad \forall n \geq n_0$$

onde $c(\delta)$ é dado no Teorema 4.2.

Portanto, por (4.1), para $y \in B_{R'_n}(y_0)$, $\delta > 0$ e $n \geq n_0$, obtemos

$$w_n(y) = v_n(x_n + \lambda_n^{-1/2} y) \geq u_{\lambda_n}(x_n + \lambda_n^{-1/2} y) \geq \alpha - \delta$$

fazendo $\delta \rightarrow 0$ e $n \rightarrow +\infty$, obtemos que

$$R'_n \rightarrow +\infty$$

e assim

$$w(y) \geq \alpha \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

■

Agora, finalmente podemos concluir a prova do Teorema 4.1.

De fato, seja $z = w - \alpha$ e $g(t) = \tilde{f}(t + \alpha)$ para $t > 0$. Pela afirmação 4.22 segue que z é uma solução não negativa de

$$-\Delta z = g(z) \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

pois,

$$-\Delta z = -\Delta(w - \alpha) = -\Delta w + \Delta\alpha = -\Delta w = \tilde{f}(w) = \tilde{f}(z + \alpha) = g(z)$$

Além disso, por nossa hipótese (H) e a definição de \tilde{f} em (4.12), temos que

Afirmção 4.23 A função $h(t)$, definida por

$$h(t) := \frac{g(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$$

é decrescente para $t > 0$.

Com efeito, tomando $s = t + \alpha$, desde que $t > 0$ tal que $t + \alpha = s \in (\alpha, \alpha + \delta)$ tem-se que

$$h(s - \alpha) = \frac{g(s - \alpha)}{(s - \alpha)^{\frac{N+2}{N-2}}} = \frac{\tilde{f}(s)}{(s - \alpha)^{\frac{N+2}{N-2}}} = \frac{f(s)}{(s - \alpha)^{\frac{N+2}{N-2}}}$$

Pela hipótese (H), $h(s - \alpha)$ é decrescente. Assim, podemos usar o Teorema de Liouville Teorema B.3 resultando que $g(z) = 0$ para obter $z \equiv 0$, isto é, $w \equiv \alpha$.

De fato, consideremos os casos:

(i) $0 \leq z + \alpha \leq \alpha + \delta$.

Nesse caso temos que $g(z) = \tilde{f}(z + \alpha) = 0$ ou seja,

$$f(z + \alpha) = 0$$

Como α é o zero isolado de f , logo $z + \alpha = \alpha$, isto é, $w - \alpha = z = 0$, portanto

$$w = \alpha$$

(ii) $z + \alpha > \alpha + \delta$.

Para esse caso, segue que

$$\tilde{f}(z + \alpha) = \frac{f(\alpha + \delta)(z + \alpha - \alpha)^p}{\delta^p} = 0$$

isto é, $z = 0$, portanto

$$w = \alpha$$

Isso significa que $\|v_n\|_\infty \rightarrow \alpha$, e como a sequência $\{\lambda_n\}$ é arbitrária, $\|v_\lambda\|_\infty \rightarrow \alpha$ quando $\lambda \rightarrow +\infty$. A prova está concluída. \square

Apêndice A

Resultados Básicos de EDP's Elípticas

Teorema A.1 (*Passo da Montanha*) *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ verificando*

(i) *Existem $r, \rho > 0$ tais que*

$$I(u) \geq r > I(0) \quad \text{para } \|u\| = \rho;$$

(ii) *Existe $e \in X \setminus \overline{B_\rho(0)}$ tal que*

$$I(e) < 0.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$ com

$$\|I'(u_\varepsilon)\| < 2\varepsilon,$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq r$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$$

Demonstração: Veja [31]. ■

Teorema A.2 [*Teorema dos Multiplicadores de Lagrange*] *Sejam X um espaço de Banach, $J, F : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e $M = \{u \in X; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ com $F'(u) \neq 0, \forall u \in M$. Se J é limitado inferiormente sobre M e existe $u_0 \in M$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u),$$

então existe $\delta \in \mathbb{R}$ verificando

$$J'(u_0) = \delta F'(u_0).$$

Demonstração: Veja [20] ■

Teorema A.3 [Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg] [A.D.N] *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, $f \in L^r(\Omega)$, com $r > 1$ e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma solução fraca do problema*

$$(P_L) \begin{cases} -\Delta u = f(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $C > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^r(\Omega)}.$$

O Teorema acima afirma que dado $f \in L^r(\Omega)$ então existe uma única solução $u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ do (P_L) . Além disso vale a seguinte afirmação

$$f \in W^{k,r}(\Omega) \implies u \in W^{k+2,r}(\Omega)$$

Demonstração: Veja [18] ■

Teorema A.4 (Teorema de Schauder) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Então existe $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ solução do problema (P_L) . Além disso, existe $C > 0$ (independente de u) tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

e vale a seguinte afirmação

$$f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \implies u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Demonstração: Veja [18] ■

Teorema A.5 [Imersões de Sobolev] *Seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^N , com fronteira suave, $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então valem as seguintes imersões contínuas*

(i) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$.

(ii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$.

(iii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ para $0 \leq k < m - \frac{N}{p}$.

No caso (iii), k é um inteiro verificando

$$k < m - \frac{N}{p} \leq k + 1$$

e λ um real satisfazendo

$$0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p} = \lambda_0 \text{ se } \lambda_0 < 1 \text{ e } 0 < \lambda < 1 \text{ se } \lambda_0 = 1.$$

Demonstração: Veja [1] e [26] ■

Teorema A.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, as imersões:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

são contínuas, quando

$$1 \leq s \leq 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3 \\ \infty, & \text{se } N = 1, 2 \end{cases}$$

e existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demonstração: Veja [7] e [2]. ■

Teorema A.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então, para cada k e para todos $0 < \alpha < \beta \leq 1$, temos as seguintes imersões:*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$

$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Se Ω é limitado, então as duas últimas imersões são compactas, e se Ω é convexo e limitado, então todas as três imersões são compactas. Se Ω é convexo, valem duas imersões adicionais,

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}),$$

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

sendo a última compacta se Ω for também limitado.

Demonstração: Veja [6] ■

Teorema A.8 *[Imersões Compactas de Sobolev] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, as imersões:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

são compactas, quando

$$1 \leq s < 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3 \\ \infty, & \text{se } N = 1, 2 \end{cases}$$

Demonstração: Veja [7] e [2]. ■

Proposição A.1 *Seja Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^N cuja fronteira é uma variedade suave. Seja p satisfazendo*

$$(\hat{p}_1) \quad p \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ e}$$

(\hat{p}_2) *existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que*

$$|p_\xi(x, \xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^{s-1}$$

onde $0 \leq s < (n+2)(n-2)^{-1}$ e $n \geq 3$.

Se

$$P(x, \xi) \equiv \int_0^\xi p(x, t) dt$$

e

$$I(u) \equiv \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x, u(x)) \right) dx.$$

então $I \in C^2(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, I' é dado por

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi - p(x, u)\varphi) dx$$

e

$$I''(u)(\varphi, \psi) = \int_\Omega (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi - p_\xi(x, u)\varphi\psi) dx$$

para todos $\varphi, \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Demonstração: Veja [28]. ■

Proposição A.2 *Seja p satisfazendo $(\hat{p}_1) - (\hat{p}_2)$ e seja I definido por*

$$I(u) \equiv \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x, u) \right) dx,$$

Se (u_m) é uma sequência limitada em $E \equiv W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $I'(u_m) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, então (u_m) possui uma subsequência convergente

Demonstração: Veja Proposição B.35 em [28]. ■

A.1 Princípio de Máximo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio (aberto e conexo). Considere o operador diferencial de segunda ordem

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)u, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

onde os coeficientes a_{ij} são funções contínuas sobre $\bar{\Omega}$ e os coeficientes b_i e c são funções limitadas em Ω .

Definição A.1 Diremos que o operador L é um **operador elíptico**, se a matriz coeficiente $(a_{ij}(x))$ é positiva, ou seja, se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ denotam, respectivamente, o autovalor mínimo e máximo de $(a_{ij}(x))$, então

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2,$$

para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Diremos que L é um **operador estritamente elíptico**, se $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ para alguma constante λ_0 . Diremos que L é um **operador uniformemente elíptico**, se Λ/λ é limitado em Ω .

Teorema A.9 (Princípio do máximo forte) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Seja L um operador uniformemente elíptico tal que $c = 0$. Suponha que u satisfaz $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$) em Ω . Se u atinge seu máximo (mínimo) no interior de Ω , então u é constante. Se $c \leq 0$ e c/λ é limitado, então se u atinge um máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de Ω , então u é constante. Independente do sinal de c , se u atinge um máximo igual a zero (mínimo igual a zero) no interior de Ω , então u é constante.

Demonstração: Veja [27]. ■

Teorema A.10 (Princípio do Máximo Fraco) Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfaça $\Delta u = 0$ em Ω . Se Ω é limitado, temos que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u,$$

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Consequentemente, segue que

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Resultados semelhantes valem para funções sub e super-harmônicas:

- se u é uma função sub-harmônica ($\Delta u \geq 0$), então $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$;
- se u é uma função super-harmônica ($\Delta u \leq 0$), então $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.

Demonstração: Veja [6]. ■

Lema A.1 (Lema de Hopf) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Considere L um operador uniformemente elíptico. Suponha que u é uma subsolução de L , ou seja, $Lu \geq 0$ em Ω . Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0 , que u é contínua em x_0 e que $u(x_0) \geq u(x)$, para todo $x \in \Omega$. Suponha que pelo menos uma das hipóteses abaixo seja válida:

(i) $c = 0$ ou

(ii) $c \leq 0$ e $u(x_0) \geq 0$ ou

(iii) $u(x_0) = 0$.

Então, se existir a derivada normal em x_0 , ela deve satisfazer

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν denota o vetor normal exterior.

Demonstração: Veja [18], Lema 3.4]. ■

Lema A.2 (Lema de Hopf refinado) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ uma função não identicamente nula e $c \in L^\infty(\Omega)$. Suponhamos que

$$\begin{cases} \Delta u + cu \leq 0, & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Então:

(i) Se para algum $x_0 \in \partial\Omega$, temos que $u(x_0) = 0$ e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0 , então

$$\nu(x_0) \cdot Du(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

onde ν denota o vetor normal unitário exterior.

(ii) Além disso,

$$u > 0, \quad \text{em } \Omega.$$

Demonstração: Seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}$. Defina a função $w(x) = e^{-\lambda x_1} u(x)$, onde $\lambda > 0$ será determinada posteriormente. Então por (A.1),

$$\begin{aligned} -cu &\geq \Delta u = \Delta(e^{\lambda x_1} w) \\ &= w\Delta(e^{\lambda x_1}) + e^{\lambda x_1} \Delta w + 2D(e^{\lambda x_1})Dw \\ &= \lambda^2 u + 2\lambda e^{\lambda x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + e^{\lambda x_1} \Delta w. \end{aligned}$$

Portanto, se $\lambda = \|c\|_{L^\infty}^{1/2}$ então

$$-\Delta w - 2\lambda \frac{\partial w}{\partial x_1} \geq (\lambda^2 + c)w \geq 0.$$

Logo, pelo princípio do máximo forte Teorema A.9, concluímos que $w > 0$ em Ω . De fato, suponha que para algum $y_0 \in \Omega$ obtemos $w(y_0) = 0$. Como $e^{-\lambda x_1} > 0$, devemos ter

$u(y_0) = 0$. Sabemos que $u \geq 0$ em $\bar{\Omega}$, então y_0 é um ponto de mínimo para w . Portanto, pelo princípio do máximo Teorema A.9 $w \equiv 0$ em $\bar{\Omega}$. Pela continuidade de w em $\bar{\Omega}$, devemos ter $w \equiv 0$ em Ω , o que implica $u \equiv 0$ em Ω , o que é uma contradição, pois por hipótese u é uma função não identicamente nula. Logo, $w > 0$ em Ω .

Por hipótese, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $w(x_0) = 0$ e $\partial\Omega$ satisfaz a condição da bola interior em x_0 . Como $w > 0$ em Ω , temos que $w(x_0) < w(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Desta forma, pelo Lema A.2

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Como $u(x_0) = 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) &= Dw(x_0) \cdot \nu(x_0) \\ &= (-\lambda e^{-\lambda x_1} u(x_0) + e^{-\lambda x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0), \dots, e^{-\lambda x_1} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_0)) \cdot \nu(x_0) \\ &= e^{-\lambda x_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0), \end{aligned}$$

o que demonstra (i). A tese (ii) segue do fato de $w > 0$ em Ω . ■

Corolário A.1 No semi-espaço $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, suponha que u é uma solução de

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \quad u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Então, quando $N = 2$ ou quando $N \geq 3$ e $f(0) \geq 0$, a função u satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} > 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Demonstração: Veja [5]. ■

A.2 Resultados de Medida e Integração

Teorema A.11 (Teorema da Convergência Dominada) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:

(a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p., $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$$

Demonstração: Veja [4]. ■

A.3 Definições e resultados da Análise Funcional

Teorema A.12 *Seja (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$. Então existe uma subsequência (u_{n_j}) tal que:*

- (i) $u_{n_j} \rightarrow u$ q.t.p. em Ω .
- (ii) $|u_{n_j}| \leq h(x), \forall n_j \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω , com $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Veja [8]. ■

Teorema A.13 *Seja E um espaço vetorial normado e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ uma sequência. Então valem as seguintes afirmações:*

- (i) $x_n \rightarrow x \iff f(x_n) \rightarrow f(x)$ para todo $f \in E^*$.
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ então $x_n \rightharpoonup x$.
- (iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\{x_n\}$ é limitada, e além disso,

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$$

- (iv) Se $x_n \rightarrow x$ e $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ então $x_n \rightarrow x$.

Demonstração: Veja [8]. ■

Apêndice B

Teoremas do Tipo Liouville

Apesar de sua importância na literatura, as demonstrações dos Teoremas do tipo Liouville apresentados a seguir serão omitidas. Esta escolha deve-se aos seus pré-requisitos teóricos e ao fato de que detalhá-los extrapolaria os objetivos deste trabalho. As devidas referências para consulta são listadas abaixo.

Teorema B.1 *Seja $u(x)$ uma solução não-negativa C^2 de*

$$\Delta u + u^\alpha = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad n > 2 \tag{B.1}$$

com $1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2}$. Então $u(x) \equiv 0$.

Demonstração: Em 1981, Gidas e Spruck provaram em seu famoso trabalho [16] que a única solução do problema B.1 é identicamente igual a zero. Uma demonstração alternativa foi dada por Chen e Li usando o método do plano móvel que pode ser vista em [12].

■

Teorema B.2 *Seja \mathbb{R}_+^N o semi-espaço $\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Suponha que $u(x)$ é uma solução não-negativa $C^2(\mathbb{R}_+^N) \cap C^0(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x_N \geq 0\})$ de*

$$\Delta u + u^\alpha = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}_+^N \tag{B.2}$$

$$u = 0 \quad \text{em } x_N = 0 \tag{B.3}$$

com $1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2}$. Então $u(x) \equiv 0$.

Demonstração: Veja Teorema 1.3 em [17].

■

Assuma que $\mu > 0, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 3,$

$$(1) u(x) = \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2 |x - \bar{x}|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(g1) g é localmente limitada em $(0, \infty),$

(g2) $g(s)s^{-\frac{n+2}{n-2}}$ é não-crescente em $(0, \infty).$

Teorema B.3 *Seja g satisfazendo (g1) e (g2), e seja u uma solução (contínua) de*

$$-\Delta u = g(u), \quad u > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

Então, ou para algum $b > 0,$ bu é da forma (1) e

$$s^{-\frac{n+2}{n-2}}g(s) \equiv n(n-2)b^{\frac{4}{n-2}} \quad \text{em } (0, \max_{\mathbf{R}^n} u];$$

ou

$$u \equiv a \quad \text{para alguma constante } a > 0 \text{ satisfazendo } g(a) = 0.$$

Demonstração: Veja [25]. Para mais detalhes confira a dissertação em [22]. ■

Apêndice C

Alguns Resultados Elementares

Na seção deste Apêndice foi demonstrado alguns resultados usados durante o trabalho.

Desde que a equação de Laplace é invariante sob rotações, conseqüentemente parece aconselhável buscar primeiro por soluções radiais, isto é, funções de $r = |x|$.

Seja $u(x) = u(|x|) = u(r)$ uma função radial. Para uma função radial, o laplaciano é dado por

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr}.$$

De fato, como

$$r = |\mathbf{x}| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2},$$

temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}} = \frac{x_i}{r}.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{du}{dr} \frac{x_i}{r}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2} \right) = \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

donde

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{d^2 u}{dr^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right) \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr}\end{aligned}$$

Logo, se $u = u(r)$ é uma função radial harmônica, ela satisfaz a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) = 0.$$

Afirmção C.1 *A não linearidade em (4.14) tem crescimento subcrítico, ou seja, a função $g_\lambda(x, w^+) = \lambda(\bar{f}(u_\lambda + w^+) - f(u_\lambda))$ possui um crescimento subcrítico, isto é, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que*

$$|g_\lambda(x, t)| \leq C_1 + C_2 |t|^p, \quad \forall x \in \Omega \text{ e } t \in \mathbb{R}$$

onde $p \in (1, 2^* - 1)$ se $N \geq 3$ e $p \in (1, +\infty)$ se $N = 1, 2$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Com efeito, para mostrar isso dividiremos em 3 casos. Para $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$, e usando o fato que a função f é localmente Lipschitz, existe $L > 0$ onde

- Caso 1: $u_\lambda + t^+ \leq 0$.

$$|g_\lambda(x, t)| = \lambda |f(u_\lambda + t^+) - f(u_\lambda)| = \lambda |f(0) - f(0)| = 0 \leq C_1 + C_2 |t|^p$$

com $C_1, C_2 > 0$.

- Caso 2: $0 \leq u_\lambda + t^+ \leq \alpha + \delta$

$$|g_\lambda(x, t)| = \lambda |f(u_\lambda + t^+) - f(u_\lambda)| \leq \lambda L |t| = A |t|$$

onde $A := \lambda L$

- Caso 3: $u_\lambda + t^+ > \alpha + \delta$.

fazendo uso da desigualdade para $p > 0$, existe uma constante C_p tal que

$$|a + b|^p \leq C_p (|a|^p + |b|^p).$$

Dai,

$$\begin{aligned}
|g_\lambda(x, t)| &= \lambda \left| \frac{f(\alpha + \delta)(t - \alpha)^p}{\delta^p} - f(u_\lambda) \right| \\
&\leq \lambda \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} |t - \alpha|^p + \lambda |f(u_\lambda)| \\
&\leq \frac{\lambda f(\alpha + \delta) \cdot C_p |t|^p}{\delta^p} + \frac{\lambda f(\alpha + \delta) |\alpha|^p}{\delta^p} + \lambda \|f\|_\infty \\
&\leq B + C |t|^p
\end{aligned}$$

onde

$$B := \frac{\lambda f(\alpha + \delta) |\alpha|^p}{\delta^p} + \lambda \|f\|_\infty$$

e

$$C := \frac{\lambda f(\alpha + \delta)}{\delta^p}$$

Juntando os casos 2 e 3, segue

$$|g_\lambda(x, t)| \leq A |t| + B + C |t|^p$$

Daí, usando a desigualdade de Young, para $p > 1$ e $q = \frac{p}{p-1}$, tem-se

$$|t| = 1 \cdot |t| \leq \frac{1^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} + \frac{|t|^p}{p} = \frac{p-1}{p} + \frac{|t|^p}{p}$$

Daí

$$|g_\lambda(x, t)| \leq \left(\frac{p-1}{p} + \frac{|t|^p}{p} \right) A + B + C |t|^p$$

Portanto

$$|g_\lambda(x, t)| \leq C_1 + C_2 |t|^p$$

onde

$$C_1 := A \left(\frac{p-1}{p} \right) + C \quad \text{e} \quad C_2 := \frac{A}{p} + B$$

Segue uma afirmação auxiliar usado na demonstração do Lema [4.2](#)

Afirmação C.2 Tome $\theta \in (0, p + 1)$ existe uma constante C tal que

$$\theta \tilde{F}(u_\lambda + t^+) - t^+ \tilde{f}(u_\lambda + t^+) \leq C, \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \Omega$$

Com efeito, para demonstrar a desigualdade, dividiremos em três casos. Tome $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$, tem-se:

- Caso 1: $u_\lambda + t^+ \leq 0$

observe que, como $u_\lambda > 0$ em Ω , e $t^+ = \max\{t, 0\}$, segue que

$$0 \leq u_\lambda + t^+ \leq 0 \implies \begin{cases} u_\lambda(x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ t^+ = 0 \end{cases}$$

Assim existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\theta F(u_\lambda + t^+) - t^+ f(u_\lambda + t^+) = \theta(u_\lambda + t).f(0) - \theta f(0) = 0. < C.$$

- Caso 2: $0 \leq u_\lambda + t^+ \leq \alpha + \delta$.

Nesse caso temos que $\tilde{F} = F(s)$ e $\tilde{f}(s) = f(s)$, com $s \in [0, \alpha + \delta]$. Daí,

$$\theta F(u_\lambda + t^+) - t^+ f(u_\lambda + t^+) = \int_0^{u_\lambda + t^+} f(s) ds - t^+ f(u_\lambda + t^+) = h(x, t^+).$$

Note que $h(x, t^+)$ é contínua e $D_h = \{(x, t^+); u_\lambda(x) + t^+ \in [0, \alpha + \delta]\}$ é compacto.

De fato:

- D_h é limitado:

Note que $D_h \subset \Omega \times [0, \alpha + \delta]$ que é limitado em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$.

- D_Ω é fechado:

Com efeito, tome $(x_n, t_n^+) \in D_h$ tal que $(x_n, t_n^+) \rightarrow (x_0, t_0^+)$. Daí,

$$0 \leq u_\lambda(x_n) + t_n^+ \leq \alpha + \delta$$

passando ao limite em $n \rightarrow \infty$, tem-se

$$0 \leq u_\lambda(x_0) + t_0^+ \leq \alpha + \delta$$

logo $(x_0, t_0^+) \in D_h$. Portanto h atinge seu máximo em D_h . Assim, existe $C \geq 0$ onde

$$h(x, t^+) \leq C.$$

- Caso 3: $s = u_\lambda + t^+ > \alpha + \delta$.

Considere $\frac{f(\alpha+\delta)}{\delta^p} = C$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{t^+ f(s)}{\tilde{F}(s)} &= \frac{(s - u_\lambda) \cdot C \cdot (s - \alpha)^p}{\tilde{F}(u_\lambda + t^+) + \frac{C}{p+1} [(s - \alpha)^{p+1} - \delta^{p+1}]} \\
&= \frac{s \cdot C (1 - \frac{u_\lambda}{s}) \cdot (1 - \frac{\alpha}{s})^p}{\tilde{F}(u_\lambda + t^+) + \frac{C}{p+1} [s^{p+1} (1 - \frac{\alpha}{s})^{p+1} - \delta^{p+1}]} \\
&= \frac{s^{p+1} C (1 - \frac{u_\lambda}{s}) (1 - \frac{\alpha}{s})^p}{s^{p+1} \left[\frac{\tilde{F}(u_\lambda + t^+)}{s^{p+1}} + \frac{C}{p+1} \left[(1 - \frac{\alpha}{s})^{p+1} - \frac{\delta^{p+1}}{s^{p+1}} \right] \right]} \\
&= \frac{C \cdot (1 - \frac{u_\lambda}{s}) (1 - \frac{\alpha}{s})^p}{\frac{\tilde{F}(u_\lambda + t^+)}{s^{p+1}} + \frac{C}{p+1} \left[(1 - \frac{\alpha}{s})^{p+1} - \frac{\delta^{p+1}}{s^{p+1}} \right]}
\end{aligned}$$

passando ao limite quando $s \rightarrow +\infty$, tem-se

$$\frac{t^+ \tilde{f}(s)}{\tilde{F}(s)} \rightarrow p + 1 \quad \text{quando } s \rightarrow +\infty.$$

Assim, como $\frac{t^+ \tilde{f}(s)}{\tilde{F}(s)} \rightarrow p + 1$, existe $R_\theta > 0$ tal que

$$\frac{t^+ \tilde{f}(s)}{\tilde{F}(s)} > \theta \quad \forall s > R_\theta.$$

Onde $\theta < p + 1$, ou seja,

$$\theta F(s) - t^+ f(s) < 0 \quad \forall s > R_\theta.$$

Para o caso em que $0 \leq s \leq R_\theta$, como a função $\theta F(s) - t^+ f(s)$ é contínua no compacto $[0, R_\theta]$, logo atinge seu máximo. Portanto existe $C > 0$ tal que

$$\theta F(u_\lambda + t^+) - t^+ f(u_\lambda + t^+) \leq C \quad \forall x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Segue uma terceira afirmação auxiliar usada na demonstração do Lema 4.2.

Afirmação C.3 *Devido à definição de \tilde{f} , temos que*

$$\tilde{F}(u_\lambda + te) \geq At^{p+1} - B \quad \text{para alguns } A, B > 0.$$

De fato, para t suficientemente grande, segue que $s := u_\lambda + te > \alpha + \delta$, temos

$$\tilde{f}(s) = \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} (s - \alpha)^p.$$

Integrando para obter $\tilde{F}(s)$:

$$\tilde{F}(s) = \int_0^s \tilde{f}(t) dt = \tilde{F}(\alpha + \delta) + \int_{\alpha+\delta}^s \tilde{f}(t) dt.$$

Calculemos a integral

$$\int_{\alpha+\delta}^s \tilde{f}(t) dt = \frac{f(\alpha+\delta)}{\delta^p} \int_{\alpha+\delta}^s (t-\alpha)^p dt.$$

Fazendo a substituição $u = t - \alpha$ ($du = dt$), e efetuando as devidas mudanças nos intervalos de integração, temos

$$\int_{\alpha+\delta}^s (t-\alpha)^p dt = \int_{\delta}^{s-\alpha} u^p du = \left[\frac{u^{p+1}}{p+1} \right]_{\delta}^{s-\alpha} = \frac{(s-\alpha)^{p+1} - \delta^{p+1}}{p+1}.$$

Portanto,

$$\int_{\alpha+\delta}^s \tilde{f}(t) dt = \frac{f(\alpha+\delta)}{\delta^p(p+1)} [(s-\alpha)^{p+1} - \delta^{p+1}].$$

Assim,

$$\tilde{F}(s) = \tilde{F}(\alpha+\delta) + \frac{f(\alpha+\delta)}{\delta^p(p+1)} [(s-\alpha)^{p+1} - \delta^{p+1}].$$

Logo,

$$\tilde{F}(s) = \frac{f(\alpha+\delta)}{\delta^p(p+1)} (s-\alpha)^{p+1} + \left[F(\alpha+\delta) - \frac{f(\alpha+\delta)\delta}{p+1} \right].$$

Para s suficientemente grande, temos

$$\tilde{F}(s) \geq As^{p+1} - B,$$

onde:

$$A = \frac{f(\alpha+\delta)}{2\delta^p(p+1)} \quad \text{e} \quad B = \left| F(\alpha+\delta) - \frac{f(\alpha+\delta)\delta}{p+1} \right|.$$

Proxima afirmação usada no Capítulo 5 sobre a função truncada \tilde{f}

Afirmção C.4 $\tilde{f} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz.

Com efeito, considere os casos:

Caso 1: $x_0 \leq 0$

Pela definição de \tilde{f} segue que

$$|\tilde{f}(t) - \tilde{f}(s)| = |f(0) - f(0)|$$

Como f é localmente Lipschitz, $L \geq 0$ e uma vizinhança de x_0 (V_{x_0}), tal que

$$|\tilde{f}(t) - \tilde{f}(s)| = |f(0) - f(0)| = 0 \leq |t - s| \quad \forall t, s \in V_{x_0}.$$

Caso 2: $0 < x_0 < \alpha + \delta$

Usando novamente o fato que f é localmente Lipschitz, existe V_{x_0} e $L \geq 0$ tais que

$$|\tilde{f}(t) - \tilde{f}(s)| = |f(t) - f(s)| \leq L|t - s| \quad \forall t, s \in V_{x_0}.$$

Caso 3: $x_0 > \alpha + \delta$

Aqui, é possível encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (\alpha + \delta, +\infty)$$

Assim, para quaisquer que $t, s \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ temos

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(t) - \tilde{f}(s)| &= \left| \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} (t - \alpha)^p - \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} (s - \alpha)^p \right| \\ &= \frac{|f(\alpha + \delta)|}{\delta^p} |(t - \alpha)^p - (s - \alpha)^p| \end{aligned} \tag{C.1}$$

Note que as funções

$$h(t) = (t - \alpha)^p$$

e

$$k(s) = (s - \alpha)^p$$

são contínuas, portanto atingem o máximo no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = B_\varepsilon(x_0)$, digamos

$$\max_{t \in B_\varepsilon(x_0)} h(t) = L_1$$

e

$$\max_{s \in B_\varepsilon(x_0)} k(s) = L_2$$

Portanto, (C.1) torna-se

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\alpha + \delta)}{\delta^p} (t - \alpha)^p - (s - \alpha)^p \right| &\leq \frac{|f(\alpha + \delta)|}{\delta^p} [|t - \alpha|^p + |s - \alpha|^p] \\ &\leq \frac{|f(\alpha + \delta)|}{\delta^p} [L_1 + L_2] \\ &\leq M|t - s| \quad \forall t, s \in B_\varepsilon(x_0) \end{aligned}$$

onde $M = \frac{|f(\alpha + \delta)|}{\delta^p} [L_1 + L_2]$.

Caso 4: $x_0 = \alpha + \delta$.

Neste caso note que para qualquer $\varepsilon > 0$ existem pontos t_2, t_1 tais que

$$t_2 < x_0 < t_1$$

Assim, como no Caso 3, para quaisquer $t, s > \alpha + \delta$, $\exists L_1 > 0$ tal que

$$|f(t) - f(s)| \leq L_1 |t - s| \quad \forall t, s > \alpha + \delta$$

De mesmo modo, como no Caso 2, para quaisquer $x, y < \alpha + \delta$, $\exists L_2 > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L_2 |x - y| \quad \forall x, y < \alpha + \delta.$$

Portanto, tomando $L := \max\{L_1, L_2\}$ temos que

$$|f(a) - f(b)| \leq L |a - b| \quad \forall a, b \in B_\varepsilon(\alpha + \delta); \varepsilon > 0.$$

Para o caso $x_0 = 0$ é trivial, portanto, \tilde{f} é localmente lipschitz.

Resultado usado no Capítulo 5, seção 3.

Afirmção C.5 w_0 solução do problema (4.13) é solução clássica e positiva.

Com efeito, afirmamos que $w_0 \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $g_\lambda \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Se isso for verdade, pelo Teorema de Schauder segue que $w_0 \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Provaremos primeiros que $w_0 \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Usaremos um método padrão chamado "bootstrap". Sabendo que $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca, pela imersão contínua (cf. Teorema A.6)

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$$

temos que $w_0 \in L^{2^*}(\Omega)$, e portanto $g_\lambda \in L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)$ pois, da desigualdade (4.16), temos

$$\int_{\Omega} |g(x, w_0)|^{\frac{2^*}{p}} dx \leq \int_{\Omega} |C_1 + C_2 |w_0|^P|^{\frac{2^*}{p}} dx \leq C_3 + C_4 \int_{\Omega} |w_0|^{2^*} dx < +\infty$$

Usando o Teorema A.D.N (cf. A.3), obtemos

$$w_0 \in W^{2,p_1}(\Omega), \text{ onde } p_1 = \frac{2^*}{p}$$

temos então dois casos a considerar:

Caso 1: $2 \cdot p_1 > N$

Nesse caso usando o item (iii) do Teorema A.5 é fácil ver que quando $2 \cdot p_1 > N$ então $1 < 2 - \frac{N}{p_1}$, e como as imersões

$$W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$$

são contínuas, obtemos que

$$w_0 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Caso 2: $2p_1 < N$.

Neste caso, usando o item (i) do Teorema A.5, obtemos

$$w_0 \in W^{2,p_1}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont.}} L^{q_1}(\Omega), \quad q_1 = \frac{Np_1}{N - 2p_1}$$

Assim, $g_\lambda \in L^{p_2}(\Omega)$, onde $p_2 = \frac{q_1}{p}$, e portanto $w_0 \in W^{2,p_2}(\Omega)$. Se $2 \cdot p_2 > N$ usamos o Caso e provamos que $w_0 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Caso contrário, podemos iterar esse processo k vezes para obter números p_m, q_m com $m = 1, \dots, k$, tais que

$$p_1 = \frac{2}{p}, \quad p_{m+1} = \frac{q_m}{p}, \quad q_m = \frac{2 \cdot p_m}{N - 2 \cdot p_m}$$

Além disso, $w_0 \in W^{2,p_m}(\Omega)$ para todo $m = 1, \dots, k$. Para $K \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, vale que $2 \cdot p_k > N$, e assim,

$$w_0 \in W^{2,p_k}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$$

e portanto $w_0 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Agora, para mostrar que $g_\lambda(x, w) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, segue do fato de que, desde que $\|w\|_{C^1} < \delta$, temos que $u_\lambda + w < \alpha + \delta$. Assim, a função $g_\lambda \Big|_{[0, \alpha + \delta]}$ é limitada, e sem dificuldades segue que g_λ é localmente lipschitz pois \tilde{f} é localmente lipschitz. De fato, como \tilde{f} é localmente lipschitz, dado qualquer $z \in [0, \alpha + \delta]$, existe $M > 0$ tal que

$$|g_\lambda(x, a) - g_\lambda(x, b)| = \lambda |\tilde{f}(u_\lambda + a) - \tilde{f}(u_\lambda + b)| \leq \lambda M |a - b| \quad \forall a, b \in [0, \alpha + \delta]$$

Portanto da Afirmação 4.14, $g_\lambda \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Por fim, pelo Teorema de Schauder, segue que

$$w_0 \in C^{2,\alpha}(\Omega),$$

Logo w_0 solução clássica.

Por fim, para mostrar que $w_0 > 0$, podemos escrever o problema (4.13), da seguinte forma

$$-\Delta w = \lambda \left(\tilde{f}(u_\lambda + w) - f(u_\lambda) \right) = \lambda c(x) \cdot w$$

onde

$$c(x) = \begin{cases} \frac{\tilde{f}(u_\lambda + w) - f(u_\lambda)}{w} & , \text{ se } w(x) \neq 0, \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \Delta w + \lambda c(x) \cdot w = 0 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

Segue que $c(x)$ é limitada pois \tilde{f} e f são localmente Lipschitz. Portanto, pelo Lema A.2, temos que

$$w_0 > 0$$

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. F. **Sobolev Spaces**. Academy Press, New York, 1975. [86](#)
- [2] ALVES, C. O. **Introdução às Equações Elípticas**. Apostila LENAMA, UFRJ, 2007. [86](#)
- [3] BARRIOS, B.; GARCIA-MELIAN, J.; ITURRIAGA, L. **Semilinear elliptic equations and nonlinearities with zeros**. *Nonlinear Analysis*, v. 134, p. 117-126, 2016. [5](#), [6](#)
- [4] BARTLE, R. **The elements of integration and Lebesgue measure**. John Wiley and Sons, 2014. [90](#)
- [5] BERESTYCKI, H.; CAFFARELLI, L.; NIRENBERG, L. **Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains**. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, v. 25, n. 1-2, p. 69-94, 1997. [90](#)
- [6] BIEZUNER, R. **Notas de Aula: Equações Diferenciais Parciais I/II**. *Minas Gerais*, v. 6, 2010. [86](#), [88](#)
- [7] Brezis, H. **Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones**. Version española de Juan Ramon Esteban, Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984. [86](#)
- [8] Brezis, H. **Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones**. Versión española de Juan Ramon Esteban, Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984. [91](#)
- [9] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New York: Springer, 2011.

- [10] BREZIS, H.; KATO, T. **Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials**. 1978. [16](#), [20](#)
- [11] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. H^1 versus C^1 local minimizers. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, v. 317, n. 5, p. 465-472, 1993. [6](#), [14](#)
- [12] CHEN, W.; LI, C. **Methods on nonlinear elliptic equations**. Springfield, Mo, USA: American Institute of Mathematical Sciences, 2010. [92](#)
- [13] COLEMAN, S.; GLAZER, V.; MARTIN, A. **Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations**. *Comm. Math. Phys.*, v. 58, p. 211-221, 1978.
- [14] GARCÍA-MELIÁN, J.; ITURRIAGA, L. **Multiplicity of solutions for some semilinear problems involving nonlinearities with zeros**. *Israel Journal of Mathematics*, v. 210, n. 1, p. 233-244, 2015. [5](#)
- [15] GELFAND, I. M. **Some problems in the theory of quasilinear equations**. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, v. 29, p. 295-381, 1963.
- [16] GIDAS, Basilis; NI, Wei-Ming; NIRENBERG, Louis. **Symmetry and related properties via the maximum principle**. *Communications in mathematical physics*, v. 68, n. 3, p. 209-243, 1979. [48](#), [92](#)
- [17] GIDAS, B.; SPRUCK, J. **A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations**. *Communications in Partial Differential Equations*, v. 6, n. 8, p. 883-901, 1981. [92](#)
- [18] Gilbarg, D.; Trudinger, N. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Berlin, 1977. [85](#), [89](#)
- [19] JOSEPH, D. D.; LUNDGREN, T. S. **Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources**. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 49, p. 241-269, 1973.
- [20] Kavian O. **Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques**. Springer-Verlag, Madrid. Heidelberg, 1993. [85](#)

- [21] KOIKE, S. **A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2010. [6](#), [24](#)
- [22] LIMA, J. A. et al. **Teoremas Tipo Liouville e Desigualdades Tipo Harnack para Equações Elípticas Semilineares via Método Moving Spheres**. 2011. [93](#)
- [23] LIONS, P. L. **Minimization problems in $L^1(\mathbb{R}^3)$** . J. Funct. Anal., v. 41, p. 236â275, 1981.
- [24] LIONS, P. **On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations**. SIAM review, v. 24, n. 4, p. 441-467, 1982. [3](#), [4](#), [5](#)
- [25] LI, Y.; ZHANG, L. **Liouville-type theorems and Harnack-type inequalities for semilinear elliptic equations**. Journal dâAnalyse Mathématique, v. 90, n. 1, p. 27-87, 2003. [93](#)
- [26] Medeiros, L. A.; Miranda, M. M. **Espaços de Sobolev**. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Rio de Janeiro, 1997. [86](#)
- [27] MELO JÚNIOR, J. C. **Propriedades Qualitativas de Soluções de Problemas Elípticos Semilineares em Domínios Não Limitados**. 2013. Dissertação (Mestrado Acadêmico) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2013. [88](#)
- [28] RABINOWITZ, P. H. et al. (Ed.). **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations**. American Mathematical Soc., 1986. [87](#)
- [29] STRAUSS, W. **Existence of solitary waves in higher dimensions**. Comm. Math. Phys., v. 55, p. 149â162, 1977.
- [30] STRUWE, M. **Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems**. 4. ed. Heidelberg: Springer, 2008. [6](#), [7](#)
- [31] WILLEM, M. **Minimax theorems**. Springer Science and Business Media, 2012.