



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Laryssa Kely Alves Rodrigues [†]

Existência de soluções com norma prescrita para uma classe de equações elípticas semilineares

Campina Grande - PB

2025

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Laryssa Kely Alves Rodrigues

Existência de soluções com norma prescrita para uma classe de equações elípticas semilineares

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa Análise e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima.

Campina Grande - PB

2025

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

R696e

Rodrigues, Laryssa Kely Alves.

Existência de soluções com norma prescrita para uma classe de equações elípticas semilineares / Laryssa Kely Alves Rodrigues. – 2025.

107 f. : il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

“Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima”.

Referências.

1. Equações Elípticas Semilineares. 2. Soluções Normalizadas. 3. Métodos Variacionais. 4. Problema de Autovalor não-linear. 5. Abordagem Minimax. I. Lima, Romildo Nascimento de. II. Título.

UFCG/BC

CDU 517.9(043.3)

Existência de soluções com norma prescrita para uma classe de equações elípticas semilineares

por

Laryssa Kely Alves Rodrigues

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada em: 21 de novembro de 2025.

Cesar t.

Prof. Dr. César Enrique Torres Ledesma - UNT

MAS

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

Romildo N. de Lima

Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Novembro - 2025

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por todo o cuidado e força que me concede. Obrigada, Senhor, que tudo que eu faça seja para tua honra e glória. Também, não posso esquecer de agradecer a Nossa Senhora, que tanto intercedeu por mim e me ajudou nos momentos mais difíceis. Acaso não sabeis que sou da Imaculada? Sem a ajuda divina, não conseguiria chegar até aqui. E também pelos Santos que rogaram por mim nessa caminhada.

Agradeço aos meus pais, Valéria e Luciano, por todo o apoio, ajuda e por estarem sempre comigo, sempre dispostos a fazer de tudo para me ver feliz. Sei que foi uma recompensa dos céus ter pais como vocês. Obrigada pela paciência, compreensão e por todo o suporte durante todo o meu período de estudos. Cresci vendo pessoas suarem para me dar oportunidades melhores. Obrigada, pai, por enfrentar o Sol para que não deixasse nada faltar. Obrigada, mãe, por todo cuidado. Sem vocês, eu nada seria. Não posso deixar de agradecer a Tia Braizinha (*in memoriam*) que viveu tanto tempo comigo e tinha o sonho de me ver formada. Deus a levou mais cedo, mas espero que a senhora possa estar comemorando do céu essa nossa conquista. Obrigada, madrinha Vanusa, por estar sempre presente em minha vida e sempre pensar no melhor para mim.

Em especial, quero agradecer ao meu noivo, Iuri. Obrigada por ter muita paciência comigo, por me acalmar em semanas de provas, por me incentivar e sempre acreditar em mim e no meu potencial. Obrigada por me apoiar em todas as minhas decisões, por enxugar as minhas lágrimas e me dar forças, mesmo quando eu achava que tudo estava perdido. Sou muito sortuda por te ter em minha vida.

Como diz São Maximiliano Kolbe, Deus nos envia amigos para ser nosso firme apoio no redemoinho da luta. Na companhia de amigos, encontraremos forças para atingir nosso sublime ideal. É com essa frase desse querido santo, que começo agradecendo a todos os amigos que tenho e que fiz durante essa caminhada. Obrigada aos meus amigos boqueirãoenses, que sempre me entendiam quando eu estava ausente por conta dos estudos. Obrigada Gicelly, pelas suas orações e por compartilharmos tantos momentos, princi-

palmente por ter nos dado a princesinha Stella. Obrigada, Mayara, pelas boas risadas, companheirismo e conversas reflexivas. Obrigada, Bia, que mesmo distante fisicamente, se fazia presente. Obrigada, Jordanna, por oferecer apoio constante e sempre me ouvir. Agradeço a Sileia, que mesmo com nossas agendas lotadas, conseguíamos um tempinho para desabafar. Obrigada, Ângelo, por me acompanhar desde a infância e crescermos juntos. Agradeço aos meus amigos por me acompanharem desde pequenos e por termos essa amizade tão duradoura. Sou muito feliz por contar sempre com o apoio e orações de vocês. Obrigada, Geovana, por me dar suporte em casa quando eu estava ausente.

Agradeço aos meus amigos que fiz no início da graduação: Celine, Pedro, Ísis e os que fiz no mestrado, Marisa e Joice. Agradeço a minha dupla que sempre esteve comigo, Celine. Obrigada, amiga, por fazer parte da minha vida e sempre me ajudar. Agradeço a Pedro e Ísis, por serem apoio constante e por compartilharmos momentos felizes. Obrigada, Marisa e Joice, conhecer vocês no mestrado tornou essa caminhada mais leve, obrigada por tantos ensinamentos. Agradeço também aos meus amigos da sala da pós. Obrigada, amigos gringos, Josias e Alberto, vocês são exemplos de força e dedicação. Agradeço pela amizade de vocês. Obrigada Ary, por transmitir tanta alegria na sala da pós e por sempre me incentivar. Expresso igualmente minha gratidão a Rodrigo e Diego, por sempre estarem disponíveis para tirar dúvidas com muita paciência e bondade. Também deixo meus agradecimentos a Mateus e Cleyson, por compartilharmos tantas disciplinas e aprendizados. Expresso também minha gratidão pela convivência na sala da pós a Mateus Vinicius, Sillas, Dominike, Erica, Rafaela, Bia, Cecília, Joaquim e Aninha.

De maneira muito especial, registro também minha gratidão ao professor Romildo. Professor, obrigada por me acompanhar desde a graduação, por me incentivar e ser calma-ria em muitos momentos. Não tenho palavras para agradecer o quanto o senhor me ajuda. Obrigada por ser meu orientador, mas também por me aconselhar e sempre acreditar em mim. Obrigada pela paciência, por tirar minhas dúvidas. Suas orientações contribuem muito para a minha formação pessoal e acadêmica. Também agradeço a professora Itailma que também me incentivou bastante para que eu fizesse o mestrado, obrigada por acreditar em mim. Agradeço também ao professor Denilson, que sempre se disponibilizou a tirar minhas dúvidas nas disciplinas.

Agradeço sinceramente aos professores da banca, Marco Aurélio e César, pela disponibilidade, pelas valiosas contribuições e sugestões. E, agradeço a Coordenação de

Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo apoio financeiro, que tornou possível o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, peço desculpas por aqueles que não citei, mas que de maneira direta ou indireta contribuíram nesse período de mestrado. Sou muito grata a Deus por ter pessoas tão especiais ao meu redor. Espero um dia conseguir retribuir pelo menos um pouquinho do que cada um fez e faz por mim. Que Deus possa derramar muitas bênçãos na vida de cada um. Como diz Santa Gianna Molla, “o segredo da felicidade é viver momento a momento e agradecer a Deus pelo que Ele nos envia todos os dias em Sua bondade”.

E, como tão lindamente escreveu Lygia Fagundes Telles, "Do início até o último porto, só interessa a viagem: às vezes tem tempestade, ondas enormes cobrem o barco; depois vem a calmaria e podemos desfrutar de um horizonte claro. Mas se durante essa travessia a gente prosseguir desejando o bom, o belo e o verdadeiro, então tudo terá valido a pena". Levo comigo a aprendizagem, as pessoas e os momentos que tornaram essa travessia possível.

Dedicatória

Aos meus pais do céu, Deus e
Nossa Senhora, e aos meus pais
da Terra, Valéria e Luciano. E,
ao meu noivo, Iuri.

Resumo

Neste trabalho, pretendemos estudar a existência de soluções normalizadas para uma classe de equações elípticas semilineares do tipo $-\Delta u = \lambda u + g(u)$ em \mathbb{R}^N , com certas condições sobre a função g . Nos últimos anos, esse tipo de problema tem despertado grande interesse, devido ao fato de que a norma é preservada da evolução, sendo relevante para a física. Sabemos que, em \mathbb{R}^N , perdemos a compacidade nas imersões de Sobolev. Dessa forma, para contornar a situação, Jeanjean (1997) trabalhou no espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$. Por meio de uma abordagem variacional baseada no Princípio Variacional de Ekeland e no Passo da Montanha, o autor estabelece a existência de soluções. Nesse sentido, apresentaremos em detalhes os resultados obtidos por Jeanjean (1997), no qual trata-se de um dos primeiros trabalhos a abordar esse tema, sendo amplamente referenciado.

Palavras-chave: soluções normalizadas; métodos variacionais; problema de autovalor não-linear; abordagem minimax.

Abstract

In this work, we intend to study the existence of normalized solutions for a class of semilinear elliptic equations of the type $-\Delta u = \lambda u + g(u)$ in \mathbb{R}^N , with certain conditions on the function g . In recent years, this type of problem has attracted great interest because the norm is preserved from evolution, being relevant for physics. We know that, in \mathbb{R}^N , we lose compactness in Sobolev embeddings. Thus, to circumvent this situation, Jeanjean (1997) worked in the space $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$. Through a variational approach based on Ekeland's Variational Principle and the Mountain Pass, the author establishes the existence of solutions. In this sense, we will present in detail the results obtained by Jeanjean (1997), which is one of the first works to address this topic and widely referenced.

Key Words: Normalized solutions; variational methods; nonlinear eigenvalue problem; minimax approach.

Símbolos e Notações

- \mathbb{R}^N denota o Espaço Euclidiano N-dimensional;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\}$, $p \in [1, +\infty)$, com norma dada por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

- $L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \exists c > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq c \text{ q.t.p. em } \Omega \}$, com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf \{ C > 0 ; |u(x)| < C \text{ q.t.p. em } \Omega \};$$

- $L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_A |u(x)| dx < +\infty, \text{ para qualquer } A \subset\subset \Omega \right\}$;

- $H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) (i \in \{1, \dots, n\}) \right\}$;

- $C([0, 1])$ é o conjunto das funções contínuas de $[0, 1]$ em \mathbb{R} ;

- $C^k(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável} \}$;

- Dizemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

- $H^1_0(\Omega)$ é o fecho de $C^\infty_0(\Omega)$ na norma do espaço $H^1(\Omega)$;

- $H = L^2(\mathbb{R}^N)$;

- $E = H^1(\mathbb{R}^N)$;

- $\mathbf{E} = H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}$;

- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ retrata o gradiente de u ;

- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u ;

- \rightharpoonup simboliza a convergência fraca em espaços vetoriais normados;

- \rightarrow simboliza a convergência forte em espaços vetoriais normados;
- $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev (se $N \geq 3$, caso $N = 1, 2$ temos $2^* = +\infty$);
- $A \hookrightarrow B$ designa que A está imerso em B ;
- $S(c) = \{u \in E; \|u\|_H = c\}$ denota a esfera unitária de raio $c > 0$ definida com a norma $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$;
- χ_B é a função característica de B ;
- E^* dual topológico do espaço de Banach E ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E^*, E}$ produto de dualidade, em que se $u, v \in E$, u pode ser vista como funcional em E^* com $u(v) := \langle u, v \rangle_{E^*, E} = \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx$;
- Dados $(u_n) \subset E^*$ e $u \in E^*$, diremos que $u_n \rightarrow u$ em E^* se

$$\langle u_n, \varphi \rangle_{E^*, E} = \int_{\mathbb{R}^N} u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u \varphi \, dx = \langle u, \varphi \rangle_{E^*, E};$$

- C, C_1, C_2, \dots denota várias constantes positivas cujos valores exatos podem mudar de uma linha para outra.

Sumário

Introdução	1
1 Princípio Variacional de Ekeland	7
1.1 Minimização de funcionais semicontínuos inferiormente	7
1.2 Funcionais definidos em Espaços de Banach	9
1.3 Princípio Variacional de Ekeland	10
1.4 Aplicações do Teorema 1.6 a funcionais definidos em espaços de Banach. .	15
2 Soluções com norma prescrita para $N \geq 2$	17
2.1 Observações Preliminares	20
2.2 A abordagem minimax	22
2.3 Existência de uma Sequência Palais-Smale limitada	29
2.4 Outras propriedades da sequência de Palais-Smale	44
2.5 Convergência da sequência Palais-Smale para $N \geq 2$	46
3 Soluções com norma prescrita para $N \geq 1$	51
3.1 Caracterização adicional de $\gamma(c)$	51
3.2 Convergência da sequência (PS) para $N \geq 1$	68
4 Resultados de Bifurcação para problemas com norma prescrita	73
A Resultados utilizados	83
B Solução normalizada para o caso potência com massa subcrítica	86
Bibliografia	93

Introdução

Neste trabalho, consideraremos uma classe de problemas elípticos não linear da forma

$$-\Delta u = \lambda u + g(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$. O objetivo é encontrar solução não trivial para essa classe de soluções com norma definida antecipadamente empregando os conceitos estudados em Métodos Variacionais. As condições precisas sobre $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ serão dadas mais adiante. Por enquanto, podemos considerar que g é da forma

$$g(s) = \sum_{i=1}^m a_i |s|^{\sigma_i} s, \quad (2)$$

para todos $1 \leq i \leq m$, com

$$(1) \ a_i > 0;$$

$$(2) \ 0 < \sigma_i < \frac{4}{N-2} \text{ se } N \geq 3 \text{ e } \sigma_i > 0 \text{ se } N = 1, 2,$$

os casos que consideramos no trabalho contemplam tal situação.

Vale salientar que, os problemas semilineares com norma prescrita são motivados, em particular, pela busca por certos tipos de ondas solitárias (estados estacionários) em equações não lineares do tipo Klein-Gordon ou Schrödinger. Além disso, o propósito essencial para estudar a existência de soluções normalizadas é a equação de Schrödinger não linear, dada de forma geral por

$$i\psi_t = -\Delta\psi + V(x, t)\psi + g(x, t)|\psi|^{2\theta}\psi, \text{ em } \mathbb{R}^N \quad (3)$$

com $\theta \in \mathbb{R}$. Essa é uma das equações mais relevantes para a Física Matemática, devido ao fato de que ela está presente na modelagem de muitos fenômenos físicos com aplicações

na Mecânica Quântica, Física de Semicondutores, no estudo da estrutura atômica, Óptica Não Linear, entre outros.

Por outro lado, uma solução de onda estacionária é dada da seguinte forma

$$\psi(x, t) = e^{-i\lambda t}u(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função que não depende do tempo. Se substituirmos ψ em (3), obtemos

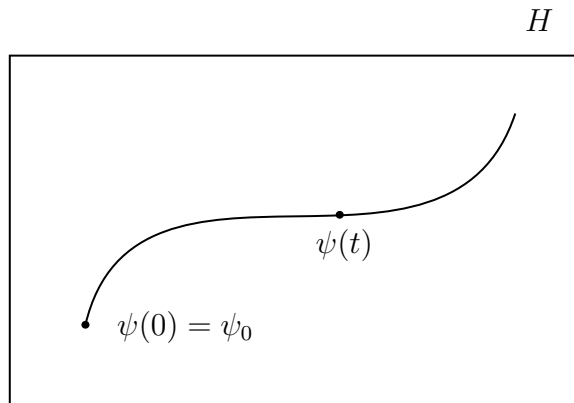
$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u + g(|u|^2)u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (5)$$

que possui uma estrutura semelhante à classe de problemas que estamos buscando solução. Em nosso caso, temos $V(x) \equiv 0$.

Para as equações de Schrödinger, vigora a lei de conservação da massa, que garante que em todos os instantes de uma trajetória, a massa de uma partícula não varia com a evolução do tempo, ou seja, se $|\psi_0|_H = a$, então

$$|\psi(t)|_H = a, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Figura 1 - Conservação da massa



Agora, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função na forma $f(t) = |t|^{p-2}t$, $p \in (2, 2^*)$. Os problemas para encontrar soluções normalizadas são classificadas em três tipos:

Tipo 1) L^2 -subcrítico: $2 < p < 2 + \frac{4}{N}$;

Tipo 2) L^2 -crítico: $p = 2 + \frac{4}{N}$;

Tipo 3) L^2 -supercrítico: $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$.

Nesse contexto, mencionaremos alguns exemplos. O caso puramente crítico, foi estudado por Cheng e Miao (2014) [15]. Em relação ao caso L^2 -subcrítico, temos Stuart (1982) [30], Cazenave e Lions (1982) [14] e Shibata (2014) [27]. Quanto ao caso L^2 -supercrítico, cabe citar os artigos abordados por Bartsch e Valeriola (2012) [8], Jean-Jean (1997) [17] e Bartsch *et al.* (2021) [7].

De acordo com Alves *et al.* [3], na última década, a questão de encontrar soluções de equações com norma L^2 -prescrita tem recebido bastante atenção. Segundo os autores, a busca por esses resultados tem significância na física, pois tal norma é uma quantidade preservada da evolução e a caracterização variacional de tais soluções é de grande ajuda para analisar estabilidade orbital, veja Jeanjean e Lu (2021) [18], Cazenave e Lions (1982) [14] e as referências neles contidas. Entretanto, é importante ressaltar que a investigação acerca dessas soluções teve início há bastante tempo, como pode ser verificado em Lions (1984) [22] - [23] e Berestycki e Lions (1983) [10] - [11].

Recentemente, podemos citar Alves, Ji e Miyagaki (2021) [3], que se inspiraram no artigo de Jeanjean (1997) [17] e complementaram os resultados vistos em Soave (2020) [28] usando uma abordagem diferente.

Em [8], Bartsch e Valeriola (2012), exploraram o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u - g(u) = \lambda u, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in E, \quad \int_{\mathbb{R}^N} u^2 = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que $N \geq 2$. Nesse caso, g é superlinear, subcrítica e possivelmente não homogênea. Eles estudaram o caso em que o funcional associado não é limitado inferiormente na L^2 -esfera unitária e mostraram que existem infinitas soluções. Um outro trabalho que trata da multiplicidade de soluções normalizadas para a equação de Schrödinger não linear com crescimento crítico é vista em Alves *et al.* (2021) [2].

Sendo assim, o foco dessa dissertação é o primeiro artigo escrito nessa temática por Jeanjean (1997) [17] em que se estudou a existência de soluções normalizadas para uma grande classe de equações de Schrödinger do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2, \end{cases}$$

com $N \geq 2$, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento supercrítico em relação a massa que satisfaz algumas condições técnicas. Esse trabalho possui grande relevância no

estudo das soluções normalizadas, tendo sido citado 525 vezes até o momento, de acordo com o American Mathematical Society (MathSciNet).

Tendo isso em mente, consideramos para cada $c > 0$ fixado, o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar um par } (u_c, \lambda_c) \in \mathbf{E} \text{ de soluções fracas de (1) tal que} & \quad (P_c) \\ \|u_c\|_H = c. \end{aligned}$$

Note que, se $m = 1$, g é homogêneo. Neste caso, (P_c) tem uma solução para todo $c > 0$ e todo $\sigma \neq \frac{4}{N}$ que satisfaz os limites acima.

Em alguns trabalhos, Stuart [33] - [32] desenvolveu uma abordagem alternativa que permite tratar não linearidade não homogênea. Essa técnica exige condições de crescimento mais restritivas sobre g . No caso particular da equação (2), o resultado diz que, para $1 \leq i \leq m$, se $0 < \sigma_i < \frac{4}{N}$, então (P_c) tem solução para todo $c > 0$.

Seja $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{\sigma_i + 2} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\sigma_i+2} dx.$$

É conhecido que, se $u_0 \in E$ é um ponto crítico de F submetido à restrição

$$S(c) = \{u \in E; \|u\|_H = c\},$$

então existe um multiplicador de Lagrange λ_0 tal que (u_0, λ_0) satisfaz (1) (veja uma situação particular no Apêndice B). Com a condição $0 < \sigma_i < \frac{4}{N}$ para $1 \leq i \leq m$, Stuart mostrou que

$$\inf_{u \in S(c)} F(u) > -\infty,$$

obtendo um ponto crítico, provando que o ínfimo é atingido (veja [33] e [32]).

Nesse trabalho, explicitamos uma classe diferente de não lineariades para as quais (P_c) tem uma solução para todo $c > 0$, precisamente a classe exposta por Jeanjean (1997) [17].

O resultado também é obtido procurando um ponto crítico de F restrito a $S(c)$. Entretanto, passar de $\sigma_i < \frac{4}{N}$ para $\sigma_i > \frac{4}{N}$ implica em uma modificação na estrutura do funcional. De fato, temos

$$\inf_{u \in S(c)} F(u) = -\infty.$$

Dessa forma, não é mais possível buscar um mínimo de F em $S(c)$. Com isso, devemos procurar um ponto crítico com caracterização minimax. Mostraremos que existe

$u_1, u_2 \in S(c)$ tal que

$$\gamma(c) = \inf_{g \in \Gamma(c)} \max_{s \in [0,1]} F(g(s)) > \max\{F(u_1), F(u_2)\},$$

com

$$\Gamma(c) = \{g \in C([0, 1], S(c)), g(0) = u_1, g(1) = u_2\}.$$

Assim, F possui uma estrutura geométrica do Passo da Montanha em $S(c)$ e parece razoável buscar um ponto crítico para F em $S(c)$ no nível $\gamma(c)$. O Princípio Variacional de Ekeland garante a existência de uma sequência $(u_n) \subset S(c)$ de Palais-Smale tal que

$$F(u_n) \rightarrow \gamma(c) \quad \text{e} \quad F'_{|S(c)}(u_n) \rightarrow 0.$$

Se for possível provar que $u_n \rightarrow u_c$ em E , obtemos uma solução de (P_c) . Para estabelecer a convergência de (u_n) , o primeiro passo é mostrar que a sequência é limitada em E . Entretanto, não está claro em nossa situação, e isso explica porque nenhum teorema do tipo minimax pode ser utilizado. Ambrosetti e Struwe (ver [5] e [6]) introduziram algumas ideias para superar isso, entretanto, envolve cálculos longos e complicados.

O método aqui estabelecido baseia-se na introdução de um funcional auxiliar $\tilde{F} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\tilde{F}(u, s) = \frac{e^{2s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{e^{sN}} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{sN}{2}} u(x)) dx,$$

com $G(s) = \int_0^1 g(t) dt$.

Primeiro, mostramos que \tilde{F} em $S(c) \times \mathbb{R}$ tem a mesma estrutura geométrica que F em $S(c)$. Aplicando a esse funcional o Princípio Variacional de Ekeland, obtemos uma sequência $((v_n, s_n)) \subset S(c) \times \mathbb{R}$ que pode ser usada para construir uma sequência de Palais-Smale limitada $(u_n) \subset S(c)$ para F no nível $\gamma(c)$. De forma geral, a introdução de \tilde{F} permite a incorporação, no método variacional, da informação de que todas as soluções fracas de (1) devem satisfazer a Identidade de Pohozaev.

Como (u_n) é limitado, $u_n \rightharpoonup u_c$ em E , a menos de subsequência. Contudo, enfrentamos uma aparente falta de compacidade quando queremos mostrar a convergência forte de (u_n) . Para superar isso, utilizamos duas abordagens:

Primeira abordagem: Ao invés de trabalhar em todo E , desenvolvemos inicialmente o método variacional no subespaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \subset E$, que consiste nas funções radialmente simétricas. Com base em Strauss (1977) [29], $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso compactamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$ ou $p > 2$ se $N = 2$. Usando esse

recurso, conseguimos provar que $u_n \rightarrow u_c$ e assim, obtemos uma solução para (P_c) . Para $N = 1$ não temos compacidade, então essa abordagem não funciona.

Segunda abordagem: Válida para todo $N \geq 1$, contudo, exige condições mais restritivas sobre g . Tais condições permitem mostrar que

$$\gamma(c) = \inf_{u \in \kappa(c)} F(u),$$

em que

$$\kappa(c) = \{u \in S(c); F'_{|S(c)}(u) = 0\}.$$

Em seguida, baseado em Lions [22] e [23], vemos que uma sequência de Palais-Smale (u_n) possui apenas alguns comportamentos possíveis. Usando a caracterização adicional de $\gamma(c)$, conseguimos mostrar que $u_n \rightarrow u_c$. Nessa abordagem, Jeanjean (1997) [17] se beneficiou de técnicas desenvolvidas por Buffoni (1992) [13] e outros.

Por conseguinte, provaremos que, quando $c \rightarrow 0$,

$$\|\nabla u_c\|_H \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad \lambda_c \rightarrow -\infty.$$

Além disso, ao usarmos a caracterização variacional adicional, conseguimos também mostrar que, quando $c \rightarrow +\infty$,

$$\|\nabla u_c\|_H \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \lambda_c \rightarrow 0.$$

Essa dissertação está dividida da seguinte maneira. No Capítulo 1, exibimos alguns resultados auxiliares para assim, demonstrarmos o Princípio Variacional de Ekeland, o qual desempenha papel essencial na prova dos teoremas principais. No Capítulo 2, está subdividido em algumas seções. Nele, primeiramente, introduzimos a configuração do funcional e definimos um princípio do tipo minimax para \tilde{F} em $S(c) \times \mathbb{R}$. Em seguida, construímos uma sequência de Palais-Smale limitada e obtemos algumas propriedades e depois, sua convergência para $N \geq 2$. O Capítulo 3, também dividido em algumas seções, é dedicado a obter a caracterização variacional adicional de $\gamma(c)$ para assim, obter a convergência no caso geral $N \geq 1$. Dando prosseguimento, o Capítulo 4 é destinado a alguns resultados de bifurcação para esse problema com norma prescrita. Já o Apêndice A traz alguns resultados que foram utilizados ao longo dessa dissertação. Por fim, o Apêndice B exibe um caso particular de solução normalizada para o caso potência.

Capítulo 1

Princípio Variacional de Ekeland

O Princípio Variacional de Ekeland foi introduzido por volta do ano de 1972 e desde então, trouxe uma infinidade de aplicações em diversas áreas da Análise, sendo uma ferramenta essencial para encontrar solução de equações. Sendo assim, neste capítulo, exibimos alguns resultados advindos desse método, pois posteriormente usaremos tal teorema para auxiliar a solucionar o problema principal.

1.1 Minimização de funcionais semicontínuos inferiormente

Inicialmente, recordemos algumas definições:

Definição 1.1 *Um espaço topológico (X, τ) é chamado de Hausdorff se, para quaisquer pontos distintos $x, y \in X$, existem $G_x, G_y \in \tau$ tais que*

$$x \in G_x, \quad y \in G_y \quad e \quad G_x \cap G_y = \emptyset.$$

Definição 1.2 *Seja X um espaço de Hausdorff. Um funcional $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dito fortemente semicontínuo inferiormente se, para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$\{x \in X; \Phi(x) > a\} = \Phi^{-1}(a, +\infty)$$

é aberto em X .

Definição 1.3 *Um espaço topológico de Hausdorff X é compacto se toda cobertura de X por conjuntos abertos admite uma subcobertura finita.*

Teorema 1.1 *Seja X um espaço topológico compacto e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Então,*

- a) Φ é limitado inferiormente;
- b) O ínfimo de Φ é atingido em um ponto $x_0 \in X$.

Demonstração. a) Os conjuntos abertos

$$A_n = \{x \in X; \Phi(x) > -n\},$$

para $n \in \mathbb{N}$ constituem uma cobertura aberta de X , pois Φ é semicontínua inferiormente, desta forma,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(-n, +\infty).$$

Como X é compacto, toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j = \bigcup_{j=1}^{n_0} \Phi^{-1}(-n, +\infty),$$

daí, $\Phi(x) > -n_0$ para todo $x \in X$. Portanto, concluímos que Φ é limitado inferiormente.

b) Pelo item anterior, via Postulado de Dedekind, temos

$$l = \inf_X \Phi, \quad l > -\infty.$$

Suponhamos, por contradição, que $\Phi(x) > l$ para todo $x \in X$. Então, podemos escrever

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x \in X; \Phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Phi^{-1} \left(l + \frac{1}{n}, +\infty \right) = X.$$

Da compacidade de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{n=1}^k \left\{ x \in X; \Phi(x) > l + \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{n=1}^k \Phi^{-1} \left(l + \frac{1}{n}, +\infty \right) = X.$$

Logo, $\Phi(x) > l + \frac{1}{k}$ para todo $x \in X$. Ou seja, $l + \frac{1}{k}$ é uma cota inferior para o conjunto $\Phi(X)$. Da definição de ínfimo, temos

$$l \geq l + \frac{1}{k},$$

o que é um absurdo! Portanto, existe $x_0 \in X$ tal que

$$\Phi(x_0) = l = \inf_X \Phi(x).$$

■

Definição 1.4 Uma função $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dita *seqüencialmente semicontínua inferiormente*, se para cada seqüência (x_n) com $\lim x_n = x_0$, temos

$$\Phi(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x_n).$$

A relação entre as duas noções de semicontinuidade inferior é mostrada na proposição a seguir.

Proposição 1.1

- a) Toda função semicontínua inferiormente $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é seqüencialmente semicontínua inferiormente.
- b) Se X satisfaz o Primeiro Axioma da Contabilidade, então toda função seqüencialmente semicontínua inferiormente é semicontínua inferiormente.

Demonstração. Ver Figueiredo (1989) [16]. ■

Corolário 1.1 Se X é um espaço métrico, então as noções de semicontinuidade inferior e seqüencialmente semicontínuo inferior coincidem.

Definição 1.5 Seja $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional e $x_0 \in X$. Dizemos que Φ é *semicontínuo inferiormente em x_0* se para todo $a < \Phi(x_0)$ existe uma vizinhança aberta V de x_0 tal que $a < \Phi(x)$ para todo $x \in V$.

Observação 1.1 Um funcional semicontínuo inferiormente é semicontínuo inferiormente em todos os pontos $x \in X$. Reciprocamente, um funcional que é semicontínuo inferiormente em todos os pontos é semicontínuo inferiormente.

1.2 Funcionais definidos em Espaços de Banach

Agora, definiremos e apresentaremos o caso "fraco" do que foi feito na seção anterior.

Definição 1.6 Seja X um espaço normado. Uma função $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional *fracamente semicontínuo inferiormente* quando Φ é um funcional semicontínuo inferiormente considerando-se X com sua topologia fraca.

Observação 1.2 Como a topologia fraca está contida na topologia forte, segue que um funcional fracamente semicontínuo inferiormente $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, com X sendo um espaço de Banach, é também (fortemente) semicontínuo inferiormente.

Em geral, um funcional (fortemente) semicontínuo inferiormente não é necessariamente fracamente semicontínuo inferiormente. No entanto, o seguinte resultado vale.

Teorema 1.2 *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa. Então, as noções de semicontinuidade inferior (forte) e semicontinuidade inferior fraca coincidem.*

Demonstração. Ver Figueiredo (1989) [16]. ■

Teorema 1.3 *Seja X um espaço reflexivo de Banach, A um subconjunto limitado de X , x_0 um ponto no fechamento fraco de A . Então, existe uma sequência $(x_k) \subset A$ convergindo fracamente para x_0 em X .*

Demonstração. Ver Figueiredo (1989) [16]. ■

1.3 Princípio Variacional de Ekeland

Nesta seção, apresentaremos o principal resultado do capítulo.

Teorema 1.4 (Princípio de Ekeland - forma forte) *Sejam X um espaço métrico completo e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Dado $\varepsilon > 0$ e $\bar{u} \in X$ tais que*

$$\Phi(\bar{u}) \leq \inf_X \Phi + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.1)$$

Então, para todo $\lambda > 0$, existe $u_\lambda \in X$ tal que

$$(i) \quad \Phi(u_\lambda) \leq \Phi(\bar{u}); \quad (1.2)$$

$$(ii) \quad d(u_\lambda, \bar{u}) \leq \lambda; \quad (1.3)$$

$$(iii) \quad \Phi(u_\lambda) < \Phi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda), \forall u \neq u_\lambda. \quad (1.4)$$

Demonstração. Para simplificar a notação, seja

$$d_\lambda(x, y) = \frac{1}{\lambda} d(x, y).$$

Definiremos uma ordem parcial em X por

$$u \leq v \iff \Phi(u) \leq \Phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v). \quad (1.5)$$

Realmente, (1.5) é uma relação de equivalência, pois satisfaz as seguintes propriedades, tomando $u, v \in X$:

a) Reflexividade: Basta observar que

$$u \leq u \iff \Phi(u) \leq \Phi(u) - \varepsilon d_\lambda(u, u) \iff \Phi(u) = \Phi(u).$$

b) Simetria: Sejam $u \leq v$ e $v \leq u$, então

$$u \leq v \iff \Phi(u) \leq \Phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v) \quad (1.6)$$

e

$$v \leq u \iff \Phi(v) \leq \Phi(u) - \varepsilon d_\lambda(v, u). \quad (1.7)$$

Somando (1.6) e (1.7),

$$\Phi(u) + \Phi(v) \leq \Phi(u) + \Phi(v) - 2\varepsilon d_\lambda(u, v) \Rightarrow 0 \leq -2\varepsilon d_\lambda(u, v),$$

sendo assim, claro que $2\varepsilon d_\lambda(u, v) \leq 0$. Logo, $d(u, v) = 0$ e $u = v$.

c) Transitividade: Sejam $u \leq v$ e $v \leq w$, então

$$u \leq v \iff \Phi(u) \leq \Phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v) \quad (1.8)$$

e

$$v \leq w \iff \Phi(v) \leq \Phi(w) - \varepsilon d_\lambda(v, w). \quad (1.9)$$

Daí, por (1.8) e (1.9)

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\leq \Phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v) \\ &\leq \Phi(w) - \varepsilon d_\lambda(v, w) - \varepsilon d_\lambda(u, v) \\ &= \Phi(w) + \varepsilon(-d_\lambda(u, v) - d_\lambda(v, w)) \\ &\leq \Phi(w) + \varepsilon(-d_\lambda(u, w)) \\ &= \Phi(w) - \varepsilon d_\lambda(u, w). \end{aligned}$$

Ou seja, $\Phi(u) \leq \Phi(w) - \varepsilon d_\lambda(u, w)$. Assim, $u \leq w$.

Agora, definamos uma sequência (S_n) de subconjuntos de X da seguinte maneira: comece com $u_1 = \bar{u}$ e defina

$$S_1 = \{u \in X; u \leq u_1\} \text{ e } u_2 \in S_1 \text{ tal que } \Phi(u_2) \leq \inf_{S_1} \Phi + \frac{\varepsilon}{2^2},$$

e, indutivamente,

$$S_n = \{u \in X; u \leq u_n\} \text{ e } u_{n+1} \in S_n \text{ tal que } \Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Afirmção 1.1 Cada S_n é fechado e

$$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots$$

Seja $(x_j) \subset S_n$ com $x_j \rightarrow x$ em X . Como $(x_j) \subset S_n$, pela definição de ordem dada inicialmente, temos

$$x_j \leq u_n \Rightarrow \Phi(x_j) \leq \Phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x_j, u_n). \quad (1.10)$$

Como Φ é semicontínua inferiormente, temos

$$\Phi(x) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \Phi(x_j). \quad (1.11)$$

Assim, em (1.10), fica claro que

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \Phi(x_j) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} (\Phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x_j, u_n)),$$

e por (1.11), tem-se

$$\Phi(x) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} (\Phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x_j, u_n)) = \Phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x, u_n),$$

isto é,

$$\Phi(x) \leq \Phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x, u_n).$$

Consequentemente, $x \leq u_n$, ou seja, $x \in S_n$. Provando que S_n é fechado.

Resta provar que $S_{n+1} \subset S_n$. O que, de fato, é válido. Veja,

$$\begin{aligned} x \in S_{n+1} &\Rightarrow x \leq u_{n+1} \text{ e } u_{n+1} \in S_n \\ &\Rightarrow x \leq u_{n+1} \leq u_n \\ &\Rightarrow x \leq u_n \\ &\Rightarrow x \in S_n. \end{aligned}$$

Provando a afirmação.

Afirmação 1.2 $\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, seja $x \in S_n$. Por um lado,

$$x \leq u_n \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x, u_n). \quad (1.12)$$

Por outro lado, observe que $x \in S_{n-1}$, pois

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_{n-1} \supset S_n \supset S_{n+1} \supset \cdots .$$

Assim,

$$\Phi(u_n) \leq \inf_{S_{n-1}} \Phi + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad (1.13)$$

De (1.12) e (1.13), temos

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\leq \Phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x, u_n) \leq \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{2^n} - \varepsilon d_\lambda(x, u_n) \\ \Rightarrow \varepsilon d_\lambda(x, u_n) &\leq \frac{\varepsilon}{2^n} \\ \Rightarrow d_\lambda(x, u_n) &\leq 2^{-n}, \forall x \in S_n.\end{aligned}$$

Dessa forma, para $x, y \in S_n$, tem-se

$$d_\lambda(x, y) \leq d_\lambda(x, u_n) + d_\lambda(u_n, y) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad (1.14)$$

logo,

$$\text{diam } S_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Provando a afirmação. Consequentemente, pelo Teorema de Baire A.1, existe um único $u_\lambda \in X$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}.$$

Afirmação 1.3 *Um único ponto u_λ verifica as condições (i)-(iii).*

Prova de i): Como $u_\lambda \in S_1$,

$$u_\lambda \leq u_1 \Rightarrow \Phi(u_\lambda) \leq \Phi(u_1) - \varepsilon d_\lambda(u_\lambda, u_1).$$

Mas $u_1 = \bar{u}$, daí

$$\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(\bar{u}) - \varepsilon d_\lambda(u_\lambda, \bar{u}) \leq \Phi(\bar{u}).$$

Prova de ii): Escrevendo

$$d_\lambda(\bar{u}, u_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d_\lambda(u_j, u_{j+1}) \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-j},$$

em que usamos (1.14). E, tomando o limite com $n \rightarrow +\infty$, obtemos

$$d_\lambda(\bar{u}, u_\lambda) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} d(\bar{u}, u_\lambda) \leq 1 \Rightarrow d(\bar{u}, u_\lambda) \leq \lambda.$$

Prova de iii): Dado $u \in X$ com $u \neq u_\lambda$, não podemos ter $u \leq u_\lambda$, pois do contrário

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$

o que é um absurdo, visto que $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset$. Portanto,

$$\Phi(u) > \Phi(u_\lambda) - \varepsilon d_\lambda(u, u_\lambda).$$

■

Um resultado que é consequência do que foi mostrado anteriormente é o Teorema do Ponto Fixo de Caristi. Veja-o a seguir.

Teorema 1.5 (Teorema do Ponto Fixo de Caristi) *Seja X um espaço métrico completo e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Tome $T : X \rightarrow 2^X$ um operador de múltiplos valores tal que*

$$\Phi(y) \leq \Phi(x) - d(x, y), \forall x \in X, \forall y \in T_x, \quad (1.15)$$

em que $T_x = T(x)$. Então, existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in T_{x_0}$.

Demonstração. Usando o Princípio de Ekeland na forma fraca com $\varepsilon = 1$, encontramos $x_0 \in X$ tal que

$$\Phi(x_0) < \Phi(x) + d(x, x_0), \forall x \in X \setminus \{x_0\}. \quad (1.16)$$

Afirmção 1.4 $x_0 \in T_{x_0}$.

Caso contrário, $y \neq x_0$ para todo $y \in T_{x_0}$. Então, temos de (1.15) e (1.16) que

$$\Phi(y) \leq \Phi(x_0) - d(x_0, y) \text{ e } \Phi(x_0) < \Phi(y) + d(x_0, y),$$

que não pode ser mantido simultaneamente, pois

$$\Phi(y) \leq \Phi(x_0) - d(x_0, y) < \Phi(y) + d(x_0, y) - d(x_0, y) \Rightarrow \Phi(y) < \Phi(y),$$

o que é um absurdo! Portanto, segue o resultado. ■

Teorema 1.6 (Princípio de Ekeland - forma fraca) *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Tome $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in X$ tal que*

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon \quad (1.17)$$

e

$$\Phi(u_\varepsilon) < \Phi(u) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon), \forall u \in X, \text{ com } u \neq u_\varepsilon. \quad (1.18)$$

Demonstração. Usaremos a notação $d_1 = \varepsilon d$, que é uma distância equivalente em X . Suponha, por contradição, que não existe u_ε satisfazendo (1.18). Assim, para cada $x \in X$, o conjunto

$$T_x = \{y \in X : \Phi(x) \geq \Phi(y) + d_1(x, y); y \neq x\}$$

é não vazio.

Dessa forma, produzimos uma aplicação de múltiplos valores T em (X, d_1) que satisfaz a condição (1.15). Pelo Teorema 1.5, deveria existir $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in T_{x_0}$. Mas isso é impossível pois, a partir da própria definição de T_x , temos que $x \notin T_x$. Concluindo assim a demonstração. ■

Observação 1.3 *Se T é uma contração em um espaço métrico completo, isto é, se existe uma constante $k, 0 \leq k < 1$ tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X,$$

então T satisfaz a condição (1.15) com $\Phi(x) = \frac{1}{1-k}d(x, Tx)$.

1.4 Aplicações do Teorema 1.6 a funcionais definidos em espaços de Banach.

Teorema 1.7 *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente que é limitado inferiormente. Além disso, suponha que Φ é diferenciável à Gâteaux em cada ponto $x \in X$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in X$ tal que*

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon \tag{1.19}$$

e

$$\|\Phi'(u_\varepsilon)\|_{X'} \leq \varepsilon. \tag{1.20}$$

Demonstração. Segue do Teorema 1.6 que existe $u_\varepsilon \in X$ tal que (1.19) é verdadeiro e

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u) + \varepsilon\|u - u_\varepsilon\|, \quad \forall u \in X. \tag{1.21}$$

Seja $v \in X$ e $t > 0$ arbitrário. Tome $u = u_\varepsilon + tv$ em (1.21) e obtemos

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u_\varepsilon + tv) + \varepsilon\|u_\varepsilon + tv - u_\varepsilon\|,$$

logo,

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u_\varepsilon + tv) + \varepsilon t\|v\| \Rightarrow t^{-1}[\Phi(u_\varepsilon) - \Phi(u_\varepsilon + tv)] \leq \varepsilon\|v\|.$$

Passando o limite quando $t \rightarrow 0$, temos

$$-\langle \Phi'(u), v \rangle \leq \varepsilon\|v\|, \quad \forall v \in X.$$

Como essa desigualdade é verdadeira para v e $-v$, obtemos

$$|\langle \Phi'(u), v \rangle| \leq \varepsilon\|v\|, \quad \forall v \in X,$$

consequentemente, fica claro que

$$\|\Phi'(u)\|_{X'} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\langle \Phi'(u), v \rangle|}{\|v\|} \leq \varepsilon.$$

■

Teorema 1.8 *Além das hipóteses do Teorema 1.7, assuma que existem constantes $k, c > 0$ tais que*

$$\Phi(u) \geq k\|u\| - c.$$

Seja B^ a bola unitária em torno da origem X^* . Então, $\Phi'(X)$ é denso em kB^* .*

Demonstração. Ver Figueiredo (1989) [16].

■

Corolário 1.2 *Além das hipóteses do Teorema 1.7, suponha que existe uma função contínua $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\varphi(t)}{t} \rightarrow +\infty$, quando $t \rightarrow +\infty$, e $\Phi(u) \geq \varphi(\|u\|)$ para todo $u \in X$. Então $\Phi'(X)$ é denso em X^* .*

Demonstração. Ver Figueiredo (1989) [16].

■

Teorema 1.9 *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional C^1 que satisfaz a condição Palais-Smale. Além disso, suponha que Φ é limitado inferiormente. Então o ínfimo de Φ é atingido em um ponto $u_0 \in X$ e u_0 é ponto crítico de Φ , ou seja, $\Phi'(u_0) = 0$.*

Demonstração. Ver Figueiredo (1989) [16].

■

Capítulo 2

Soluções com norma prescrita para $N \geq 2$

Neste capítulo, assumimos que $c > 0$ é arbitrário, mas fixo. Consideramos o problema de autovalor não linear

$$-\Delta u = \lambda u + g(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por conveniência, teremos as seguintes condições que serão necessárias sobre a função g :

(H1) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e ímpar;

(H2) Existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{2N+4}{N} < \alpha \leq \beta < \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3 \\ \frac{2N+4}{N} < \alpha \leq \beta, & \text{se } N = 1, 2 \end{cases}$$

tal que

$$0 < \alpha G(s) \leq g(s)s \leq \beta G(s) \text{ com } G(s) = \int_0^s g(t)dt.$$

Para referências futuras, note que, de (H1) e (H2) segue que, para $\gamma \in (0, 1]$,

$$\begin{aligned} \alpha G(\gamma t) \leq g(\gamma t)\gamma t &\Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} \leq \frac{g(\gamma t)}{G(\gamma t)}t \\ &\Rightarrow \alpha \int_s^1 \frac{1}{\gamma} d\gamma \leq \int_s^1 \frac{g(\gamma t)}{G(\gamma t)} t d\gamma. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Resolveremos a integral do lado direito de (2.2), ou seja, $\int \frac{g(\gamma t)}{G(\gamma t)} t d\gamma$. Façamos uma mudança de variáveis $u = G(\gamma t)$, logo $du = g(\gamma t) t d\gamma$. Dessa forma, voltando para (2.2), temos

$$\begin{aligned}
\alpha \int_s^1 \frac{1}{\gamma} d\gamma &\leq \int_s^1 \frac{g(\gamma t)}{G(\gamma t)} t d\gamma \Rightarrow \alpha \ln(\gamma) \Big|_s^1 \leq \ln G(\gamma t) \Big|_s^1 \\
&\Rightarrow -\alpha \ln s \leq \ln G(t) - \ln G(ts) \\
&\Rightarrow -\ln s^\alpha \leq \ln G(t) - \ln G(ts) \\
&\Rightarrow \ln s^\alpha \geq \ln G(ts) - \ln G(t) \\
&\Rightarrow \ln s^\alpha \geq \ln \frac{G(ts)}{G(t)} \\
&\Rightarrow s^\alpha \geq \frac{G(ts)}{G(t)},
\end{aligned}$$

isto é,

$$G(ts) \leq s^\alpha G(t). \quad (2.3)$$

Por outro lado, por argumentos análogos,

$$\begin{aligned}
g(\gamma t) \gamma t \leq \beta G(\gamma t) &\Rightarrow \frac{g(\gamma t)}{G(\gamma t)} t \leq \frac{\beta}{\gamma} \\
&\Rightarrow \int_s^1 \frac{g(\gamma t)}{G(\gamma t)} t d\gamma \leq \beta \int_s^1 \frac{1}{\gamma} d\gamma \\
&\Rightarrow \ln G(\gamma t) \Big|_s^1 \leq \beta \ln(\gamma) \Big|_s^1 \\
&\Rightarrow \ln G(t) - \ln G(ts) \leq -\ln s^\beta \\
&\Rightarrow \ln \frac{G(ts)}{G(t)} \geq \ln s^\beta \\
&\Rightarrow \frac{G(ts)}{G(t)} \geq s^\beta
\end{aligned}$$

ou seja,

$$s^\beta G(t) \leq G(ts). \quad (2.4)$$

De (2.3) e (2.4), temos, para $s \in (0, 1]$, que

$$s^\beta G(t) \leq G(ts) \leq s^\alpha G(t).$$

Analogamente, se $s \geq 1$,

$$s^\alpha G(t) \leq G(ts) \leq s^\beta G(t).$$

Sendo assim, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $s \geq 0$

$$\begin{cases} s^\beta G(t) \leq G(ts) \leq s^\alpha G(t), & \text{se } s \leq 1, \\ s^\alpha G(t) \leq G(ts) \leq s^\beta G(t), & \text{se } s \geq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Além disso, por (H1), (H2) e da definição de $\tilde{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{G}(s) = g(s)s - 2G(s)$, temos para todo $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta-2} \tilde{G}(s) \leq G(s) \leq \frac{1}{\alpha-2} \tilde{G}(s), \\ \frac{\beta}{\beta-2} \tilde{G}(s) \leq g(s)s \leq \frac{\alpha}{\alpha-2} \tilde{G}(s). \end{cases} \quad (2.6)$$

De fato, por hipótese,

$$\begin{aligned} \alpha G(s) \leq g(s)s &\Rightarrow \alpha G(s) - 2G(s) \leq g(s)s - 2G(s) \\ &\Rightarrow (\alpha - 2)G(s) \leq \tilde{G}(s), \end{aligned}$$

daí,

$$G(s) \leq \frac{1}{\alpha-2} \tilde{G}(s). \quad (2.7)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(s)s \leq \beta G(s) &\Rightarrow g(s)s - 2G(s) \leq \beta G(s) - 2G(s) \\ &\Rightarrow \tilde{G}(s) \leq (\beta - 2)G(s), \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{1}{\beta-2} \tilde{G}(s) \leq G(s). \quad (2.8)$$

Por (2.7) e (2.8), evidencia-se que

$$\frac{1}{\beta-2} \tilde{G}(s) \leq G(s) \leq \frac{1}{\alpha-2} \tilde{G}(s). \quad (2.9)$$

Agora, multiplicando a equação (2.9) por 2 e usando a definição de \tilde{G} , temos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\beta-2} \tilde{G}(s) \leq 2G(s) \leq \frac{2}{\alpha-2} \tilde{G}(s) &\Rightarrow \frac{2}{\beta-2} \tilde{G}(s) \leq g(s)s - \tilde{G}(s) \leq \frac{2}{\alpha-2} \tilde{G}(s) \\ &\Rightarrow \frac{2}{\beta-2} \tilde{G}(s) + \tilde{G}(s) \leq g(s)s \leq \frac{2}{\alpha-2} \tilde{G}(s) + \tilde{G}(s) \\ &\Rightarrow \frac{\beta}{\beta-2} \tilde{G}(s) \leq g(s)s \leq \frac{\alpha}{\alpha-2} \tilde{G}(s). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Portanto, fica justificado (2.6).

2.1 Observações Preliminares

Com o objetivo de abordar o problema variacionalmente, definamos o funcional $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$F(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx.$$

Agora, definamos o operador $H : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$

$$H(u, s)(x) = e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x).$$

Dessa forma, fazendo uma composição entre F e H , consideraremos o funcional auxiliar $\tilde{F} : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{F}(u, s) = \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{1}{e^{sN}} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{sN}{2}} u(x)) dx.$$

Em outras palavras,

$$\tilde{F}(u, s) = F(H(u, s)). \quad (2.11)$$

Primeiramente, observemos que

$$\nabla(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x)) = e^{\frac{sN}{2}} (\nabla(u(e^s x))) = e^{\frac{sN}{2}} e^s (\nabla u(e^s x)) = e^{\frac{s(N+2)}{2}} \nabla u(e^s x). \quad (2.12)$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{\frac{s(N+2)}{2}} \nabla u(e^s x) \right|^2 dx = e^{sN+2s} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(e^s x)|^2 dx,$$

fazendo uma mudança de variáveis $y = e^s x$ obtemos $x = e^{-s} y$, daí

$$dy = \det \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = e^{Ns} dx \Rightarrow dx = e^{-Ns} dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\nabla H(u, s)\|_H^2 &= \left\| \nabla \left(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x) \right) \right\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{\frac{s(N+2)}{2}} \nabla u(e^s x) \right|^2 dx \\ &= e^{sN+2s} e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy \\ &= e^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy \\ &= e^{2s} \|\nabla u\|_H^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por conseguinte, fazendo também a mesma mudança de variáveis na integral $\int_{\mathbb{R}^N} G \left(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x) \right) dx$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G \left(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x) \right) dx = \frac{1}{e^{sN}} \int_{\mathbb{R}^N} G \left(e^{\frac{sN}{2}} u(y) \right) dy. \quad (2.14)$$

Com isso, usando (2.13) e (2.14),

$$\begin{aligned}
F(H(u, s)) &= \|\nabla H(u, s)\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(H(u, s)) dx \\
&= \frac{1}{2} \left\| \nabla \left(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x) \right) \right\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G \left(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x) \right) dx \\
&= \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{1}{e^{sN}} \int_{\mathbb{R}^N} G \left(e^{\frac{sN}{2}} u(y) \right) dy \\
&= \tilde{F}(u, s).
\end{aligned}$$

É possível justificar ainda que F e \tilde{F} são funcionais de classe C^1 , por argumentos padrões.

Além disso, para todo $s \in \mathbb{R}$ fixado, a aplicação $H_s(u) := H(u, s)$ tem a propriedade que $H_s(S(c)) \subset S(c)$. De fato, como

$$\|H(u, s)\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{sN} |u(e^s x)|^2 dx,$$

fazendo $y = e^s x$, temos $dy = \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx = e^{Ns} dx$, daí

$$\|H(u, s)\|_H^2 = e^{sN} \cdot e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 dy = \|u\|_H^2 = c.$$

Observação 2.1 Em (2.5), fazendo $t = 1$, temos

$$\begin{cases} s^\beta G(1) \leq G(s) \leq s^\alpha G(1), & \text{se } s \leq 1, \\ s^\alpha G(1) \leq G(s) \leq s^\beta G(1), & \text{se } s \geq 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Definindo $G(1) = M \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} Ms^\beta \leq G(s) \leq Ms^\alpha, & \text{se } s \leq 1, \\ Ms^\alpha \leq G(s) \leq Ms^\beta, & \text{se } s \geq 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Assim, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$G(s) \leq M(s^\alpha + s^\beta) \leq M(|s|^\alpha + |s|^\beta). \quad (2.17)$$

Observação 2.2 Pelas hipóteses estabelecidas e por (2.5), (2.6), existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|g(t)| \leq C_1 |t|^{\alpha-1} + C_2 |t|^{\beta-1}.$$

Com efeito,

$$sg(s) \leq \beta G(s) \leq C_\beta (s^\alpha + s^\beta) \Rightarrow |g(s)| \leq C_1 |s|^{\alpha-1} + C_2 |s|^{\beta-1}.$$

2.2 A abordagem minimax

Nesta seção, para mostrar que \tilde{F} quando restrita a $S(c) \times \mathbb{R}$ possui uma estrutura geométrica do Passo da Montanha, será necessário estabelecer dois lemas preliminares.

Lema 2.1 *Assumindo que valem (H1), (H2) e tomando $u \in S(c)$ arbitrário, porém fixado, tem-se*

$$a) \|\nabla H(u, s)\|_H \rightarrow 0 \text{ e } F(H(u, s)) \rightarrow 0, \text{ quando } s \rightarrow -\infty;$$

$$b) \|\nabla H(u, s)\|_H \rightarrow +\infty \text{ e } F(H(u, s)) \rightarrow -\infty, \text{ quando } s \rightarrow +\infty.$$

Demonstração. Note que,

$$\|H(u, s)\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x) \right|^2 dx = e^{sN} \int_{\mathbb{R}^N} |u(e^s x)|^2 dx.$$

Fazendo uma mudança de variáveis $y = e^s x$ logo $dy = e^{sN} dx$ e, temos

$$\|H(u, s)\|_H^2 = e^{sN} \cdot e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 dy = \|u\|_H^2 = c^2.$$

Ou seja, $\|H(u, s)\|_H = c$. Além disso,

$$\|\nabla H(u, s)\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{\frac{s(N+2)}{2}} \nabla u(e^s x) \right|^2 dx = e^{sN+2s} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(e^s x)|^2 dx.$$

Realizando mais uma vez uma mudança de variáveis, obtemos

$$\|\nabla H(u, s)\|_H = e^s \|\nabla u\|_H.$$

Logo, $\|\nabla H(u, s)\|_H \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow -\infty$, e quando $s \rightarrow +\infty$, temos $\|\nabla H(u, s)\|_H \rightarrow +\infty$.

Agora, usando (2.5), obtemos para $s < 0$,

$$\begin{aligned} |F(H(u, s))| &= \left| \frac{1}{2} \|\nabla H(u, s)\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(H(u, s)(x)) dx \right| \\ &= \left| \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{1}{e^{sN}} \int_{\mathbb{R}^N} G\left(e^{\frac{sN}{2}} u(x)\right) dx \right| \\ &\leq \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 + \frac{1}{e^{sN}} (e^{\frac{sN}{2}})^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx \\ &= \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 + e^{sN(\frac{\alpha-2}{2})} \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx, \end{aligned}$$

daí, fazendo $s \rightarrow -\infty$ temos $F(H(u, s)) \rightarrow 0$. Portanto, o primeiro item está provado.

Para finalizar a prova do segundo item, novamente por (2.5), temos para $s > 0$

$$\begin{aligned} F(H(u, s)) &= \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{1}{e^{sN}} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{sN}{2}} u(x)) dx \\ &\leq \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{1}{e^{sN}} (e^{\frac{sN}{2}})^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx \\ &= \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - e^{sN(\frac{\alpha-2}{2})} \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx. \end{aligned}$$

Considerando que, de (H2),

$$\begin{aligned} \frac{2N+4}{N} < \alpha &\Rightarrow N(2-\alpha) < -4 \\ &\Rightarrow -N(\alpha-2) < -4 \\ &\Rightarrow \frac{N(\alpha-2)}{2} > 2, \end{aligned}$$

segue que $sN\frac{(\alpha-2)}{2} > 2s$, assim $F(H(u, s)) \rightarrow -\infty$, quando $s \rightarrow +\infty$. ■

Lema 2.2 *Assuma que valem (H1) e (H2). Então, existe $K(c) > 0$ suficientemente pequeno, tal que*

$$0 < \sup_{u \in A} F(u) < \inf_{u \in B} F(u)$$

com

$$A = \{u \in S(c), \|\nabla u\|_H^2 \leq K(c)\}$$

e

$$B = \{u \in S(c), \|\nabla u\|_H^2 = 2K(c)\}.$$

Demonstração. Seja $u \in S(c)$ arbitrário. Precisaremos estimar $\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx$ a partir do que foi dado acima. Para isso, escrevamos $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$ com

$$u_1(x) = \chi_{\{|u(x)| \leq 1\}} u(x)$$

e

$$u_2(x) = \chi_{\{|u(x)| > 1\}} u(x).$$

Chamaremos de

$$X_1 \equiv \{x : |u(x)| \leq 1\} \text{ e } X_2 \equiv \{x : |u(x)| > 1\}.$$

Note que, como $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} G(u_1(x) + u_2(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G((\chi_{X_1} + \chi_{X_2})u(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G(u_1(x)) dx + \int_{\mathbb{R}^N} G(u_2(x)) dx. \end{aligned}$$

A partir das condições de crescimento de (2.5), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(u_1(x))dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_1(x)|^\alpha G(1)dx \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G(u_1(x))dx &\leq G(1) \int_{\mathbb{R}^N} |u_1(x)|^\alpha dx. \end{aligned} \quad (2.18)$$

E, também

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_2(x))dx \leq G(1) \int_{\mathbb{R}^N} |u_2(x)|^\beta dx. \quad (2.19)$$

Como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e temos $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^N)$, $t \in (2, 2^*)$, segue que $u, u_1, u_2 \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^\beta(\mathbb{R}^N)$. Assim, somando (2.18) e (2.19), concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx &\leq G(1) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\beta dx \right) \\ &= G(1) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\chi_{X_1}(x)u(x)|^\alpha + |\chi_{X_2}(x)u(x)|^\beta dx \right) \\ &\leq G(1) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^\alpha + |u(x)|^\beta dx \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \leq G(1) \left\{ \|u\|_{L^\alpha}^\alpha + \|u\|_{L^\beta}^\beta \right\}. \quad (2.20)$$

Agora, utilizando a desigualdade de Gagliardo-Sobolev (A.1) com $\gamma = N \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)$ podendo ser $p = \alpha$ ou $p = \beta$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \leq C \left\{ \|\nabla u\|_H^{N \left(\frac{\alpha-2}{2} \right)} \|u\|_H^{(1-\gamma)\alpha} + \|\nabla u\|_H^{N \left(\frac{\beta-2}{2} \right)} \|u\|_H^{(1-\gamma)\beta} \right\}.$$

Lembrando que $\|u\|_H = c$, obtemos $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \leq C_1 \left\{ \|\nabla u\|_H^{N \left(\frac{\alpha-2}{2} \right)} + \|\nabla u\|_H^{N \left(\frac{\beta-2}{2} \right)} \right\}. \quad (2.21)$$

Como $\beta \geq \alpha$, temos para $\|\nabla u\|_H$ suficientemente pequeno

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \leq C_2 \|\nabla u\|_H^{N \left(\frac{\alpha-2}{2} \right)}, \quad (2.22)$$

para $C_2 > 0$ constante.

Agora, seja $K > 0$ suficientemente pequeno arbitrário, mas fixo, e suponha $u, v \in$

$S(c)$ tais que $\|\nabla u\|_H^2 \leq K$ e $\|\nabla v\|_H^2 = 2K$. Então,

$$\begin{aligned}
F(v) - F(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx - \frac{1}{2}\|\nabla u\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla v\|_H^2 - \frac{1}{2}\|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx + \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \\
&\geq K - \frac{1}{2}K - \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx + \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \\
&= \frac{K}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx + \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \\
&\geq \frac{K}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x))dx.
\end{aligned}$$

Usando (2.22), conseguimos

$$\begin{aligned}
F(v) - F(u) &\geq \frac{K}{2} - C_2\|\nabla v\|_H^{N(\frac{\alpha-2}{2})} \\
&= \frac{K}{2} - C_2\left[(2K)^{\frac{1}{2}}\right]^{N(\frac{\alpha-2}{2})} \\
&= \frac{K}{2} - C_3K^{N(\frac{\alpha-2}{4})} \\
&\geq \frac{K}{4}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Para $K > 0$ suficientemente pequeno, temos também que, para todo $u \in S(c)$ satisfazendo $\|\nabla u\|_H^2 \leq K$, temos ainda por (2.22)

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_H^2 - C_4K^{N(\frac{\alpha-2}{4})} > 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Assim, por (2.23) e (2.24),

$$\begin{aligned}
F(v) - F(u) &\geq \frac{K}{4} \Rightarrow F(v) \geq \frac{K}{4} + F(u) \\
&\Rightarrow \inf_{v \in B} F(v) \geq \frac{K}{4} + F(u) \\
&\Rightarrow \inf_{v \in B} F(v) \geq \frac{K}{4} + \sup_{u \in A} F(u) > \sup_{u \in A} F(u) > 0,
\end{aligned}$$

então,

$$0 < \sup_{u \in A} F(u) < \inf_{v \in B} F(v).$$

Concluindo a demonstração. ■

Proposição 2.1 *Primeiramente, assuma que valem (H1) e (H2). Então, existem $u_1, u_2 \in S(c)$ tais que*

- a) $\|\nabla u_1\|_H^2 \leq K(c)$;
- b) $\|\nabla u_2\|_H^2 > 2K(c)$;
- c) $F(u_1) > 0 \geq F(u_2)$

($K(c)$ é definido no Lema 2.2). Além disso, definindo

$$\tilde{\gamma}(c) = \inf_{h \in \tilde{\Gamma}(c)} \max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(h(t))$$

com

$$\tilde{\Gamma}(c) = \{\tilde{h} \in C([0, 1], S(c) \times \mathbb{R}), \tilde{h}(0) = (u_1, 0), \tilde{h}(1) = (u_2, 0)\},$$

temos

$$\tilde{\gamma}(c) > \max\{\tilde{F}(u_1, 0), \tilde{F}(u_2, 0)\} \equiv \tilde{\gamma}_0(c) > 0.$$

Demonstração. Primeiramente, iremos mostrar que existem $u_1, u_2 \in S(c)$ satisfazendo as condições da proposição.

Seja $u \in S(c)$, segue do Lema 2.1 que, se $s \rightarrow -\infty$, obtêm-se

$$\|\nabla H(u, s)\|_H^2 \rightarrow 0,$$

isso nos diz que existe $s \approx -\infty$ tal que

$$\|\nabla H(u, s)\|_H^2 \leq K(c) \Rightarrow \|\nabla u_1\|_H^2 \leq K(c),$$

em que $u_1 := H(u, s)$.

Agora, note que

$$\begin{aligned} F(H(u, s)) &= \frac{1}{2} \|\nabla H(u, s)\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(H(u, s)) dx \\ &= \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G\left(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x)\right) dx \\ &= \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} G\left(e^{\frac{sN}{2}} u(y)\right) dy. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como

$$G(ts) \leq s^\alpha G(t), \text{ se } s \leq 1,$$

então

$$G\left(e^{\frac{sN}{2}} u\right) \leq e^{\frac{sN}{2}\alpha} G(u).$$

Logo, em (2.25)

$$\begin{aligned} F(H(u, s)) &\geq \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - e^{-sN} e^{\frac{sN}{2}\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx \\ &= \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - e^{sN(\frac{\alpha-2}{2})} \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx. \end{aligned}$$

Como estamos tomando s negativo,

$$N \left(\frac{\alpha - 2}{2} \right) > 2 \Rightarrow (-s)N \left(\frac{\alpha - 2}{2} \right) > 2(-s),$$

daí,

$$F(H(u, s)) \geq \frac{1}{2e^{-2s}} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{1}{e^{-sN(\frac{\alpha-2}{2})}} \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx > 0,$$

consequentemente, $F(u_1) > 0$.

Concluindo que, se $s \approx -\infty$, existe $u_1 \in S(c)$ com

$$F(u_1) > 0 \text{ e } \|\nabla u_1\|_H^2 \leq K(c).$$

Por outro lado, para $s \approx +\infty$, usando o fato de que $G(ts) \geq s^\alpha G(t)$ se $s \geq 1$, temos

$$F(H(u, s)) \leq \frac{e^{2s}}{2} \|\nabla u\|_H^2 - e^{sN(\frac{\alpha-2}{2})} \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx \leq 0$$

Ainda pelo Lema 2.1,

$$\|\nabla H(u, s)\|_H^2 \rightarrow +\infty,$$

e $F(H(u, s)) \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow +\infty$, daí, sendo $u_2 = H(u, s)$, temos $F(u_2) \leq 0$, ou seja,

$$\|\nabla u_2\|_H^2 > 2K(c).$$

Concluindo que

$$F(u_1) > 0 \geq F(u_2).$$

Agora, defina

$$\gamma(c) = \inf_{h \in \Gamma(c)} \max_{t \in [0,1]} F(h(t))$$

com

$$\Gamma(c) = \{h \in C([0, 1], S(c)), h(0) = u_1, h(1) = u_2\}.$$

Observe que, como

$$F(u_1) > 0 \geq F(u_2),$$

temos

$$F(u_1) = \max\{F(u_1), F(u_2)\}.$$

Por $h : [0, 1] \rightarrow S(c)$ e

$$\|\nabla h(0)\|_H^2 = \|\nabla u_1\|_H^2 \leq K(c) \quad \text{e} \quad \|\nabla h(1)\|_H^2 = \|\nabla u_2\|_H^2 > 2K(c),$$

segue, do Teorema do Valor Intermediário, que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\|\nabla h(t_0)\|_H^2 = 2K(c).$$

Daí, pelo Lema 2.2, com $u_1 \in A$, obtemos

$$0 < F(u_1) \leq \sup_{u \in A} F(u) < \inf_{u \in B} F(u) \leq F(h(t_0)) \leq \max_{t \in [0,1]} F(h(t)).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} 0 < F(u_1) &< \inf_{u \in B} F(u) \leq \inf_{h \in \Gamma(c)} \max_{t \in [0,1]} F(h(t)) = \gamma(c) \\ &\Rightarrow \gamma(c) > F(u_1) = \max\{F(u_1), F(u_2)\} > 0 \\ &\Rightarrow \gamma(c) > 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$F(u_1) = \frac{1}{2} \|\nabla u_1\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u_1(x)) dx = F(H(u_1, 0)) = \tilde{F}(u_1, 0)$$

e

$$F(u_2) = F(H(u_2, 0)) = \tilde{F}(u_2, 0).$$

Assim, nosso resultado será provado se mostrarmos que

$$\tilde{\gamma}(c) \geq \gamma(c) > \max\{F(u_1), F(u_2)\} > 0.$$

Isso decorre da seguinte observação:

Afirmção 2.1 *Para todo $\tilde{h} \in \tilde{\Gamma}(c)$, existe $h \in \Gamma(c)$ tal que*

$$\max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(\tilde{h}(t)) = \max_{t \in [0,1]} F(h(t)).$$

De fato, seja $\tilde{h} \in \tilde{\Gamma}(c)$, temos

$$\tilde{h}(t) := (\tilde{h}_1(t), \tilde{h}_2(t)) \in S(c) \times \mathbb{R},$$

assim, para todo $t \in [0, 1]$

$$\tilde{F}(\tilde{h}(t)) = \tilde{F}((\tilde{h}_1(t), \tilde{h}_2(t))) = F((H(\tilde{h}_1(t), \tilde{h}_2(t))).$$

Dessa forma, basta definir $h(t) = H(\tilde{h}_1(t), \tilde{h}_2(t)) \in \Gamma(c)$.

Verifica-se que, efetivamente, $h(t)$ definida acima pertence a $\Gamma(c)$, pois

- $h \in C([0, 1], S(c))$, pois é composição de funções contínuas e

$$\|h(t)\|_H = \|H(\tilde{h}_1(t), \tilde{h}_2(t))\|_H = c;$$

- $h(0) = H(\tilde{h}_1(0), \tilde{h}_2(0)) = H(\tilde{h}(0)) = H(u_1, 0) = u_1$
 $h(1) = H(\tilde{h}_1(1), \tilde{h}_2(1)) = H(\tilde{h}(1)) = H(u_2, 0) = u_2.$

Portanto,

$$\max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(\tilde{h}(t)) \geq \inf_{h \in \Gamma(c)} \max_{t \in [0,1]} F(h(t)) = \gamma(c),$$

desse modo,

$$\inf_{h \in \tilde{\Gamma}(c)} \max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(\tilde{h}(t)) \geq \gamma(c) \Rightarrow \tilde{\gamma}(c) \geq \gamma(c) > 0.$$

■

Observação 2.3 *Acabamos de mostrar que $\tilde{\gamma}(c) \geq \gamma(c)$. Agora, vejamos que $\tilde{\gamma}(c) \leq \gamma(c)$, a fim de concluirmos que $\tilde{\gamma}(c) = \gamma(c)$.*

Com efeito,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(c) &= \inf_{\tilde{h} \in \tilde{\Gamma}(c)} \max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(\tilde{h}(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(\tilde{h}(t)), \forall \tilde{h} \in \tilde{\Gamma}(c) \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(h_0(t)), \text{ com } h_0(t) = (h(t), 0) \in \tilde{\Gamma}(c) \text{ e } h \in \Gamma(c) \\ &= \max_{t \in [0,1]} F(h(t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{\gamma}(c) \leq \inf_{h \in \Gamma(c)} \max_{t \in [0,1]} F(h(t)) \Rightarrow \tilde{\gamma}(c) \leq \gamma(c).$$

Portanto, fica claro que $\tilde{\gamma}(c) = \gamma(c)$.

2.3 Existência de uma Sequência Palais-Smale limitada

Queremos mostrar que existe uma sequência de Palais-Smale para F restrita a $S(c)$ no nível $\gamma(c)$ que é limitada em E . Com esse objetivo, estabeleceremos alguns resultados.

Lema 2.3 *Assuma que valem (H1) e (H2). Seja $0 < \varepsilon < \tilde{\gamma}(c) - \tilde{\gamma}_0(c)$ e $g \in \tilde{\Gamma}(c)$ tais que*

$$\max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(g(t)) \leq \tilde{\gamma}(c) + \varepsilon.$$

Então, existe $(u, s) \in S(c) \times \mathbb{R}$ tal que:

- (a) $\tilde{F}(u, s) \in [\tilde{\gamma}(c) - \varepsilon, \tilde{\gamma}(c) + \varepsilon]$;
- (b) $\min_{t \in [0,1]} \|(u, s) - g(t)\|_{\mathbf{E}} \leq \sqrt{\varepsilon}$;
- (c) $\|\tilde{F}'_{|_{S(c) \times \mathbb{R}}}(u, s)\| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$,

lembrando que

$$\tilde{\gamma}_0(c) \equiv \max\{\tilde{F}(u_1, 0), \tilde{F}(u_2, 0)\} > 0.$$

Demonstração. Definamos a função $\Phi : \tilde{\Gamma}(c) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(h) = \max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(h(t)),$$

e introduza em $\tilde{\Gamma}(c)$ a métrica

$$d(h_1, h_2) \equiv \max_{t \in [0,1]} \|h_1(t) - h_2(t)\|_{\mathbf{E}}.$$

Pela Proposição 2.1

$$\inf_{h \in \tilde{\Gamma}(c)} \Phi(h) = \inf_{h \in \tilde{\Gamma}(c)} \max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(h(t)) = \tilde{\gamma}(c) > -\infty,$$

e, por Φ ser contínuo, então podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland para Φ em $\tilde{\Gamma}(c)$. Logo, existe $f \in \tilde{\Gamma}(c)$ tal que

- (i) $\Phi(f) \leq \Phi(g)$;
- (ii) $d(f, g) \leq \sqrt{\varepsilon}$;
- (iii) $\Phi(h) > \Phi(f) - \sqrt{\varepsilon} d(h, f)$, para todo $h \in \tilde{\Gamma}(c)$ com $h \neq f$.

Para mostrar o lema, precisaremos provar o seguinte:

Afirmção 2.2 *Existe algum $t \in [0, 1]$ tal que*

$$\tilde{\gamma}(c) - \varepsilon \leq \tilde{F}(f(t)) \text{ e } \langle \tilde{F}'(f(t)), z \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \geq -2\sqrt{\varepsilon}$$

sempre que

$$z \in \tilde{T}_{(f_1(t), f_2(t))} \equiv \tilde{T}_{f(t)} \text{ e } \|z\|_{\mathbf{E}} = 1.$$

Suponha, por contradição, que este não é o caso. Então, para cada $t \in S$, em que

$$S = \{t \in [0, 1] : \tilde{\gamma}(c) - \varepsilon \leq \tilde{F}(f(t))\},$$

existe $z(t) \in \tilde{T}_{f(t)}$, $\|z\|_{\mathbf{E}} = 1$ tal que

$$\langle \tilde{F}'(f(t)), z(t) \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} < -2\sqrt{\varepsilon}.$$

A partir de agora, dividiremos a demonstração em alguns passos:

1º passo: Construiremos uma aplicação contínua $W : S \rightarrow \mathbf{E}$ tal que

- i) $\|W(t)\|_{\mathbf{E}} = 1$;
- ii) $W(t) \in \tilde{T}_{f(t)}$;
- iii) $\langle \tilde{F}'(f(t)), z(t) \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} < -2\sqrt{\varepsilon}$.

Essa construção é baseada na noção de fluxo pseudo-gradiente e é bastante padrão. Veja o trabalho de Berestycki e Lions (1983) [10] ou ainda Mawhin e Willem (1989) [24] e Rabinowitz (1986) [26].

2º passo: Seja $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua tal que

$$\begin{cases} \Psi(t) = 1, & \text{se } \tilde{\gamma}(c) \leq \tilde{F}(f(t)) \\ \Psi(t) = 0, & \text{se } \tilde{F}(f(t)) \leq \tilde{\gamma}(c) - \varepsilon. \end{cases}$$

Para $r \in [0, \frac{1}{2}]$, definimos uma família de operadores

$$g_r : [0, 1] \rightarrow S(c) \times \mathbb{R},$$

com

$$\begin{cases} g_r(t) = \left(\sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)} f_1(t) + r\Psi(t)W_1(t), f_2(t) + r\Psi(t)W_2(t) \right), & \text{se } t \in S \\ g_r(t) = f(t) = (f_1(t), f_2(t)), & \text{se } t \in [0, 1] \setminus S. \end{cases}$$

Note que, $g_r : [0, 1] \rightarrow S(c) \times \mathbb{R}$ está bem definida. De fato,

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)} f_1(t) + r\Psi(t)W_1(t) \right\|_H^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)} f_1(t) + r\Psi(t)W_1(t) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)\right) f_1^2(t) + 2 \left(1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} f_1(t) r\Psi(t)W_1(t) \right. \\ & \quad \left. + r^2 \Psi^2(t) W_1^2(t) \right| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)\right) \int_{\mathbb{R}^N} f_1^2(t) dx + r^2 \Psi^2(t) \int_{\mathbb{R}^N} W_1^2(t) dx \\
&\quad + 2 \left(1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} r \Psi(t) \int_{\mathbb{R}^N} f_1(t) W_1(t) dx \\
&= \left(\frac{c^2 - r^2 \|W_1(t)\|_H^2 \Psi^2(t)}{c^2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} f_1^2(t) dx + r^2 \Psi^2(t) \|W_1\|_H^2 \\
&\quad + 2 \left(1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} r \Psi(t) \int_{\mathbb{R}^N} f_1(t) W_1(t) dx \\
&= c^2 - r^2 \|W_1(t)\|_H^2 \Psi^2(t) + r^2 \|W_1(t)\|_H^2 \Psi(t) + 2 \left(1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad r \Psi(t) \int_{\mathbb{R}^N} f_1(t) W_1(t) dx \\
&= c^2 + 2 \left(1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} r \Psi(t) \langle f_1(t), W_1(t) \rangle_H \\
&= c^2,
\end{aligned}$$

pois $W \in \tilde{T}_f(t) \equiv \tilde{T}_{(f_1(t), f_2(t))}$. Além disso, $f_2(t) + r\Psi(t)W_2(t) \in \mathbb{R}$. Por definição, temos $f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \in S(c) \times \mathbb{R}$, daí segue a boa definição.

Por conseguinte, note que $g_r : [0, 1] \rightarrow S(c) \times \mathbb{R}$ é uma função contínua para cada $r \in [0, \frac{1}{2}]$. Ademais, $g_r \in \tilde{\Gamma}(c)$. De fato, para $t = 0$, temos pela Proposição 2.1

$$\tilde{F}(f(0)) = \tilde{F}(u_1, 0) < \tilde{\gamma}(c) - \varepsilon.$$

Também, para $t = 1$,

$$\tilde{F}(f(1)) = \tilde{F}(u_2, 0) < \tilde{\gamma}(c) - \varepsilon.$$

Assim,

$$\Psi(0) = \Psi(1) = 0.$$

Como $\tilde{F}(f(0)), \tilde{F}(f(1)) < \tilde{\gamma}(c) - \varepsilon$, segue que $0, 1 \notin S$. Dessa forma,

$$g_r(0) = f(0) = (u_1, 0)$$

e

$$g_r(1) = f(1) = (u_2, 0).$$

Provando a afirmação.

Afirmação 2.3 $\|f_1(t)\|_E^2$ é uniformemente limitado em relação a t .

De fato, por $f \in \tilde{\Gamma}(c)$, temos que f é uma função contínua definida em um compacto, portanto, limitada. Assim,

$$\|f_1(t)\|_E \leq \|f_1(t)\|_E + |f_2(t)| = \|f(t)\|_{\mathbf{E}} \leq M, \forall t \in [0, 1].$$

Concluído a afirmação.

Agora, para $r > 0$ pequeno, procuraremos uma estimativa de $d(g_r, f)$. Temos, para todo $t \in [0, 1]$,

$$\|g_r(t) - f(t)\|_{\mathbf{E}}^2 = \|(g_r)_1(t) - f_1(t)\|_E^2 + |(g_r)_2(t) - f_2(t)|_{\mathbb{R}}^2,$$

porém, deve-se observar que

$$\begin{aligned} \|(g_r)_1(t) - f_1(t)\|_E^2 &= \left\| \left(\sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2}} \Psi^2(t) - 1 \right) f_1(t) + r\Psi(t)W_1(t) \right\|_E^2 \\ &\leq \left\{ \left| \sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2}} \Psi^2(t) - 1 \right| \|f_1(t)\|_E + r\Psi(t)\|W_1(t)\|_E \right\}^2 \\ &\leq \left\{ 2r^2 \left(\frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t) \right) \|f_1(t)\|_E + \Psi(t)\|W_1(t)\|_E \right\}^2 \\ &\leq 2r^2 \{ \Psi^2(t)\|W_1(t)\|_H^2 \}. \end{aligned}$$

para $r > 0$ suficientemente pequeno. Usamos uma expansão de Taylor e o fato de que $\|f_1(t)\|_E^2$ é uniformemente limitado em relação a t .

Além disso,

$$\begin{aligned} |(g_r)_2(t) - f_2(t)|^2 &= |f_2(t) + r\Psi(t)W_2(t) - f_2(t)|^2 \\ &= |r\Psi(t)W_2(t)|^2 \\ &= r^2(\Psi^2(t)|W_2(t)|^2). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|g_r(t) - f(t)\|_{\mathbf{E}}^2 &= \|(g_r)_1(t) - f_1(t)\|_E^2 + |(g_r)_2(t) - f_2(t)|^2 \\ &\leq 2r^2 \{ \Psi^2(t)\|W_1(t)\|_E^2 \} + r^2 \{ \Psi^2(t)|W_2(t)|^2 \} \\ &= \Psi^2(t)2r^2 \left[\|W_1(t)\|_E^2 + \frac{1}{2}|W_2(t)|^2 \right] \\ &\leq \Psi^2(t)2r^2\|W(t)\|_{\mathbf{E}}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|g_r(t) - f(t)\|_{\mathbf{E}} &= \sqrt{2r}\Psi(t)\|W(t)\|_{\mathbf{E}}^2 \Rightarrow \|g_r(t) - f(t)\|_{\mathbf{E}} \leq \sqrt{2r} \\
&\Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} \|g_r(t) - f(t)\|_{\mathbf{E}} \leq \sqrt{2r} \\
&\Rightarrow d(g_r, f) \leq \sqrt{2r}. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

3º Passo: Para $r > 0$ suficientemente pequeno, iremos comparar $\Phi(g_r)$ e $\Phi(f)$. Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $t \in [0, 1]$, existe $0 < \tau(t) < 1$ tal que

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}(g_r(t)) - \tilde{F}(f(t)) = \\
&= \langle \tilde{F}'(f(t) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), g_r(t) - f(t) \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\
&= \left\langle \tilde{F}'(f(t) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), \left[\left(\sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)} - 1 \right) f_1(t) + r\Psi(t)W_1(t), \right. \right. \\
&\quad \left. \left. f_2(t) + r\Psi(t)W_2(t) \right] - (f_1(t), f_2(t)) \right\rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\
&= \left\langle \tilde{F}'(f(t) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), \left[\left(\sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)} - 1 \right) f_1(t) + r\Psi(t)W_1(t), \right. \right. \\
&\quad \left. \left. r\Psi(t)W_2(t) \right] \right\rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\
&= \left\langle \tilde{F}'(f(t) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), \left(\left(\sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)} - 1 \right) f_1(t), 0 \right) \right. \\
&\quad \left. + (r\Psi(t)W_1(t), r\Psi(t)W_2(t)) \right\rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\
&= \left\langle \tilde{F}'(f(t) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), \left(\sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)} - 1 \right) f_1(t) + r\Psi(t)W(t) \right\rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\
&= \left\langle \tilde{F}'(f(t) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), \left(\left(\sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)} - 1 \right) f_1(t), 0 \right) \right\rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\
&\quad + \langle \tilde{F}'(f(t) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), r\Psi(t)W(t) \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\
&= r\Psi(t) \langle \tilde{F}'(f(t) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), W(t) \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\
&\quad + \left(\sqrt{1 - r^2 \frac{\|W_1(t)\|_H^2}{c^2} \Psi^2(t)} - 1 \right) \langle \tilde{F}'(f(t) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), (f_1(t), 0) \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}}
\end{aligned}$$

Pela compacidade de $[0, 1]$ e a continuidade de \tilde{F}' (pois $\tilde{F} \in C^1$), sabemos que existe

$\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u\| < \tilde{\delta} &\Rightarrow \|\tilde{F}'(f(t) + u)\| < -2\sqrt{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \langle \tilde{F}'(f(t) + u), W(t) \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} < -2\sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$ e todo $u \in \mathbf{E}$. Assim, a partir de (2.26), segue que, para $r > 0$ suficientemente pequeno,

$$r\Psi(t) \langle \tilde{F}'(f(t)) + \tau(t)(g_r(t) - f(t)), W(t) \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} < -2\sqrt{\varepsilon} r\Psi(t).$$

Ademais, como na demonstração do 2º passo, o segundo termo pode ser desconsiderado, pois $r \rightarrow 0$. Consequentemente, para $r > 0$ suficientemente pequeno e $t \in S$,

$$\tilde{F}(g_r(t)) - \tilde{F}(f(t)) \leq -2\sqrt{\varepsilon} r\Psi(t). \quad (2.27)$$

Se $t \notin S$, temos

$$\tilde{\gamma}(c) - \varepsilon \geq \tilde{F}(f(t)),$$

então $\Psi(t) = 0$ e

$$\begin{aligned} \tilde{F}(g_r(t)) - \tilde{F}(f(t)) &= \tilde{F}(f(t)) - \tilde{F}(f(t)) = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{F}(g_r(t)) = \tilde{F}(f(t)). \end{aligned}$$

4º passo: Fixemos $r > 0$ suficientemente pequeno e assumamos $\hat{t} \in [0, 1]$ tal que

$$\tilde{F}(g_r(\hat{t})) = \Phi(g_r),$$

que existe, pois $\tilde{F} \circ g$ é uma função contínua definida em um compacto $[0, 1]$.

Pelo 3º passo e pelo fato de que $g_r \in \tilde{\Gamma}(c)$,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(g_r(\hat{t})) - \tilde{F}(f(\hat{t})) &\leq -2\sqrt{\varepsilon} r\Psi(\hat{t}) \Rightarrow \tilde{F}(g_r(\hat{t})) + 2\sqrt{\varepsilon} r\Psi(\hat{t}) \leq \tilde{F}(f(\hat{t})) \\ &\Rightarrow \tilde{F}(f(\hat{t})) \geq \tilde{F}(g_r(\hat{t})) \geq \tilde{\gamma}(c). \end{aligned}$$

Daí, pela definição, $\hat{t} \in S$, logo $\Psi(\hat{t}) = 1$ e de (2.27), obtemos

$$\tilde{F}(g_r(\hat{t})) - \tilde{F}(f(\hat{t})) \leq -2\sqrt{\varepsilon} r.$$

Isso mostra em particular que,

$$\Phi(g_r) + 2\sqrt{\varepsilon} r \leq \max \tilde{F}(f(t)) = \Phi(f).$$

Dessa forma, como $d(g_r, f) \leq \sqrt{2}r$, como verificado em (2.26) vemos que

$$\begin{aligned}\Phi(g_r) + \sqrt{\varepsilon} d(g_r, f) &\leq \Phi(f) - 2\sqrt{\varepsilon}r + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{2}r \\ &\leq \Phi(f) - \sqrt{\varepsilon}r(2 - \sqrt{2}) \\ &\leq \Phi(f).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\Phi(g_r) + \sqrt{\varepsilon}d(g_r, f) > \Phi(f),$$

pelo item (iii) do Princípio Variacional de Ekeland. Isso gera uma contradição.

Logo, provamos que para algum $t \in [0, 1]$ tal que

$$\tilde{\gamma}(c) - \varepsilon \leq \tilde{F}(f(t)) \quad \text{e} \quad \langle \tilde{F}'(f(t)), z \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \geq -2\sqrt{\varepsilon}$$

sempre que $z \in \tilde{T}_{(f_1(t), f_2(t))} \equiv \tilde{T}_{f(t)}$ com $\|z\|_{\mathbf{E}} = 1$, ou seja, para algum $t_0 \in [0, 1]$, temos

$$\tilde{\gamma}(c) - \varepsilon \leq \tilde{F}(f(t_0)) \leq \max_{t \in [0, 1]} \tilde{F}(f(t)) = \Phi(f) \leq \Phi(g) \leq \tilde{\gamma}(c) + \varepsilon,$$

em que $f(t_0) := (u, s) \in S(c) \times \mathbb{R}$. Daí, mostramos que $\tilde{F}(u, s) \in [\tilde{\gamma}(c) - \varepsilon, \tilde{\gamma}(c) + \varepsilon]$.

Provando a validade de (a).

Por outro lado, observa-se que

$$d(f, g) \leq \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \max_{t \in [0, 1]} \|f(t) - g(t)\|_{\mathbf{E}} \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\|f(t_0) - g(t)\|_{\mathbf{E}} &= \|f(t_0) - f(t) + f(t) + g(t)\|_{\mathbf{E}} \\ &\leq \|f(t_0) - f(t)\|_{\mathbf{E}} + \|f(t) - g(t)\|_{\mathbf{E}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\min_{t \in [0, 1]} \|(u, s) - g(t)\|_{\mathbf{E}} &\leq \min_{t \in [0, 1]} \|f(t_0) - f(t)\|_{\mathbf{E}} + \max_{t \in [0, 1]} \|f(t) - g(t)\|_{\mathbf{E}} \\ &\leq \max_{t \in [0, 1]} \|f(t) - g(t)\|_{\mathbf{E}} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Provando assim o item (b).

Por fim, recordemos que existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$\tilde{\gamma}(c) - \varepsilon < \tilde{F}(f(t_0)) \quad \text{e} \quad \langle \tilde{F}'(f(t_0)), z \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \geq -2\sqrt{\varepsilon}, \forall z \in T_{f(t_0)}$$

e $\|z\|_{\mathbf{E}} = 1$.

Como $z \in T_f(t_0)$, então $-z \in T_f(t_0)$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}'(f(t_0)), -z \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \geq -2\sqrt{\varepsilon} &\Rightarrow -\langle \tilde{F}'(f(t_0)), z \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \geq -2\sqrt{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \langle \tilde{F}'(f(t_0)), z \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \leq 2\sqrt{\varepsilon} \\ &\Rightarrow |\langle \tilde{F}'(f(t_0)), z \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}}| \leq 2\sqrt{\varepsilon}, \forall z \in T_f(t_0), \|z\|_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\tilde{F}'(f(t_0))\| \leq 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Desde que $f(t_0) = (u, s) \in S(c) \times \mathbb{R}$, obtemos

$$\|\tilde{F}'_{|_{S(c) \times \mathbb{R}}}(u, s)\| \leq 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Concluindo assim a demonstração do Lema. ■

Proposição 2.2 *Assuma que valem (H1), (H2) e seja $(g_n) \subset \tilde{\Gamma}(c)$ tal que*

$$\max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(g_n(t)) \leq \tilde{\gamma}(c) + \frac{1}{n}.$$

Então, existe uma sequência $((u_n, s_n)) \subset S(c) \times \mathbb{R}$ tal que

- (a) $\tilde{F}(u_n, s_n) \in [\tilde{\gamma}(c) - \frac{1}{n}, \tilde{\gamma}(c) + \frac{1}{n}]$;
- (b) $\min_{t \in [0,1]} \|(u_n, s_n) - g_n(t)\|_{\mathbf{E}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$;
- (c) $\|\tilde{F}'_{|_{S(c) \times \mathbb{R}}}(u_n, s_n)\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$, isto é, $|\langle \tilde{F}'(u_n, s_n), z \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}}| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \|z\|_{\mathbf{E}}$,

para todo

$$z \in \tilde{T}_{(u_n, s_n)} \equiv \{(z_1, z_2) \in \mathbf{E} : \langle u_n, z_1 \rangle_H = 0\}.$$

Demonstração. Segue diretamente do Lema 2.5, basta tomar $\varepsilon = \frac{1}{n}$. ■

Usaremos a Proposição 2.2 para mostrar que existe $(v_n) \subset S(c)$ tal que, quando $n \rightarrow +\infty$,

$$F(v_n) \rightarrow \gamma(c) \quad \text{e} \quad \|F'_{|_{S(c)}}(v_n)\| \rightarrow 0.$$

Com esse objetivo, observe que, como $\tilde{\gamma}(c) = \gamma(c)$, existe $(g_n) \subset \tilde{\Gamma}(c)$ da forma $g_n(t) = ((g_n)_1(t), 0) \in \mathbf{E}$, para todo $t \in [0, 1]$, tal que

$$\Phi(g_n) \in \left[\gamma(c) - \frac{1}{n}, \gamma(c) + \frac{1}{n} \right].$$

Com efeito, como

$$\gamma(c) = \inf_{h \in \Gamma(c)} \max_{t \in [0,1]} F(h(t)),$$

então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $(g_n)_1 \in \Gamma(c)$ tal que

$$\gamma(c) \leq \max_{t \in [0,1]} F((g_n)_1(t)) < \gamma(c) + \frac{1}{n}.$$

Defina

$$g_n(t) = ((g_n)_1(t), 0).$$

Note que $g_n \in \tilde{\Gamma}(c)$ e $\tilde{F}(g_n) = F((g_n)_1)$, mais ainda,

$$\begin{aligned} \gamma(c) &\leq \max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(g_n) < \gamma(c) + \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \gamma(c) - \frac{1}{n} &< \Phi(g_n) < \gamma(c) + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

justificando a afirmação feita.

Agora, aplicaremos a Proposição 2.2 com essa escolha particular.

Lema 2.4 *Suponha que valem (H1) e (H2). Então, existe uma sequência $(v_n) \subset S(c)$ tal que*

- (a) $F(v_n) \rightarrow \gamma(c)$;
- (b) $(\|v_n\|_E)$ e $\left(\int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx\right)$ são limitadas em \mathbb{R} ;
- (c) $|\langle F'(v_n), z \rangle_{E^*}| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} \|z\|_E$, para todo $z \in T_{v_n}$.

Demonstração. A demonstração do item (a) segue diretamente da Proposição 2.2, pois já sabemos que, sendo $v_n = H(u_n, s_n)$,

$$F(v_n) = F(H(u_n, s_n)) = \tilde{F}(u_n, s_n).$$

Além disso, $\tilde{\gamma}(c) = \gamma(c)$. Assim, pelo item (a) da Proposição 2.2, o resultado segue.

Seja $\partial_s \tilde{F}(u_n, s_n) \equiv \langle \tilde{F}'(u_n, s_n), (0, 1) \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}}$. Pela Proposição 2.2, especificamente o ponto (c), vemos que

$$\partial_s \tilde{F}(u_n, s_n) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty, \quad (2.28)$$

com

$$\begin{aligned}
\partial_s \tilde{F}(u_n, s_n) &= \frac{2e^{2s_n}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + Ne^{-s_n N} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n) dx \\
&\quad - \frac{N}{2} e^{-s_n N} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n) e^{\frac{s_n N}{2}} u_n dx \\
&= e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{N}{e^{s_n N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n) dx \\
&\quad - \frac{1}{e^{\frac{s_n N}{2}}} \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n) u_n dx.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Usando o Lema 2.1 e fazendo $v_n = H(u_n, s_n)$, obtemos

$$\begin{aligned}
e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx &= e^{2s_n} \|\nabla u_n\|_H^2 = (e^{s_n} \|\nabla u_n\|_H)^2 \\
&= \|\nabla H(u_n, s_n)\|_H^2 = \|\nabla v_n\|_H^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx = \|\nabla v_n\|_H^2. \tag{2.30}$$

Por conseguinte, fazendo uma mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
\frac{N}{e^{s_n N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(x)) dx &= N \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(e^{s_n} x)) dx \\
&= N \int_{\mathbb{R}^N} G(H(u_n, s_n)) dx \\
&= N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{N}{e^{s_n N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(x)) dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx. \tag{2.31}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{N}{2} e^{-\frac{s_n N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(x)) u_n(x) dx &= \frac{N}{2} \frac{e^{-\frac{s_n N}{2}}}{e^{\frac{s_n N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(x)) e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(x) dx \\
&= \frac{N}{2} \frac{1}{e^{s_n N}} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(x)) e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(x) dx \\
&= \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(e^{s_n} x)) e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(e^{s_n} x) dx \\
&= \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(H(u_n, s_n)) H(u_n, s_n) dx \\
&= \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{N}{2} e^{-\frac{s_n N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(x)) u_n(x) dx = \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) dx. \tag{2.32}$$

Substituindo (2.30), (2.31) e (2.32) em (2.29), conseguimos

$$\partial_s \tilde{F}(u_n, s_n) = \|\nabla v_n\|_H^2 + N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x). \quad (2.33)$$

Assim, usando o fato de que

$$\tilde{F}(u_n, s_n) = \frac{e^{2s_n}}{2} \|\nabla u_n\|_H^2 - \frac{1}{e^{s_n N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(x)) dx,$$

e fazendo novamente a mudança de variáveis $y = e^{s_n N} x$, obtemos

$$\tilde{F}(u_n, s_n) = \frac{1}{2} \|\nabla v_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx.$$

Como $\tilde{F}(u_n, s_n)$ é limitado e $\partial_s \tilde{F}(u_n, s_n)$ também (pois é convergente), vemos que existe uma constante $C > 0$ independente de n tal que

$$|N \tilde{F}(u_n, s_n) + \partial_s \tilde{F}(u_n, s_n)| \leq C. \quad (2.34)$$

De (H2),

$$\begin{aligned} N \tilde{F}(u_n, s_n) + \partial_s \tilde{F}(u_n, s_n) &= \frac{N}{2} \|\nabla v_n\|_H^2 + \|\nabla v_n\|_H^2 - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) dx \\ &= \left(\frac{N+2}{2}\right) \|\nabla v_n\|_H^2 - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) dx \\ &\leq \left(\frac{N+2}{2}\right) \|\nabla v_n\|_H^2 - \frac{N\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx. \end{aligned}$$

Assim, em particular, como

$$\begin{aligned} -C &\leq N \tilde{F}(u_n, s_n) + \partial_s \tilde{F}(u_n, s_n) \leq \left(\frac{N+2}{2}\right) \|\nabla v_n\|_H^2 - \frac{N\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx \\ \Rightarrow -C &\leq \frac{N+2}{2} \|\nabla v_n\|_H^2 - \frac{N\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Por outro lado, usando a limitação de $(\tilde{F}(u_n, s_n))$, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u_n, s_n) \leq C_0 &\Rightarrow \frac{1}{2} \|\nabla v_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx \leq C_0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \|\nabla v_n\|_H^2 \leq C_0 + \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx \\ &\Rightarrow \|\nabla v_n\|_H^2 \leq 2C_0 + 2 \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Combinando (2.35) e (2.36), conseguimos

$$\begin{aligned} -C &\leq \frac{N+2}{2} \left(2C_0 + 2 \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx\right) - \frac{N\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx \\ \Rightarrow -C &\leq (N+2) \left\{C_0 + \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx\right\} - \frac{N\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx \\ \Rightarrow -C_1 &\leq \left(N+2 - \frac{N\alpha}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Agora, o limite inferior em α prova que $\int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx$ é limitado e, conseqüentemente, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx$ também. De fato, pois em (H2),

$$\alpha > 2 \frac{N+2}{N} \Rightarrow \frac{N\alpha}{2} > N+2 \Rightarrow N+2 - \frac{N\alpha}{2} < 0,$$

ou seja, os dois lados em (2.37) são negativos, logo

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \leq \frac{C_1}{\frac{N\alpha}{2} - (N+2)} := K < +\infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|\nabla v_n\|_H^2 &\leq 2C_0 + 2 \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \\ &\leq 2C_0 + 2K := M, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \leq M,$$

mostrando a limitação. Por conseguinte, vejamos que (v_n) é uma seqüência de Palais-Smale do tipo que estamos procurando.

Afirmção 2.4 $(v_n) \subset S(c)$ e é limitada em E .

Com efeito, pelo Lema 2.1 $\|v_n\|_H = \|H(u_n, s_n)\|_H = c$, mais ainda

$$\|v_n\|_E^2 = \|v_n\|_H^2 + \|\nabla v_n\|_H^2 = c + \|\nabla v_n\|_H^2 \leq c + M \leq C_0.$$

Concluindo a afirmação e a demonstração da alternativa (b).

Assim, resta provar que para n suficientemente grande,

- $\left\| F'_{|S(c)}(v_n) \right\| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$, isto é,

$$|\langle F'(v_n), z \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}}| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} \|z\|_{\mathbf{E}}$$

para todo $z \in T_{v_n} \equiv \{z \in \mathbf{E} ; \langle v_n, z \rangle_H = 0\}$.

Sabemos que

$$F(v_n) = F(H(u_n, s_n)) = \tilde{F}(u_n, s_n),$$

assim, considerando $h_n \in T_{v_n}$ e lembrando que

$$F(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx,$$

chegamos que

$$F'(v_n)(h_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n(x) \nabla h_n(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) h_n(x) dx.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} F'(v_n)(h_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n(x) \nabla h_n(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) h_n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(e^{s_n x}) \right) \nabla h_n(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(e^{s_n x})) h_n(x) dx \\ &= e^{\frac{s_n N}{2} + s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(e^{s_n x}) \nabla h_n(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(e^{s_n x})) h_n(x) dx \\ &= e^{s_n \left(\frac{N+2}{2} \right)} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(e^{s_n x}) \nabla h_n(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(e^{s_n x})) h_n(x) dx. \end{aligned}$$

Fazendo $y = e^{s_n x}$, então $x = e^{-s_n y}$ e $dx = e^{-N s_n} dy$. Desse modo,

$$\begin{aligned} F'(v_n)(h_n) &= e^{s_n \left(\frac{N+2}{2} \right)} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(y) \nabla h_n(e^{-s_n y}) e^{-N s_n} dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(y)) h_n(e^{-s_n y}) e^{-N s_n} dy \\ &= e^{s_n \left(\frac{N+2}{2} \right) - N s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(y) \nabla h_n(e^{-s_n y}) dy \\ &\quad - e^{-\frac{s_n N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(y)) e^{-\frac{s_n N}{2}} h_n(e^{-s_n y}) dy \\ &= e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(y) e^{-s_n \left(\frac{N+2}{2} \right)} \nabla h_n(e^{-s_n y}) dy \\ &\quad - e^{-\frac{s_n N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(y)) e^{-\frac{s_n N}{2}} h_n(e^{-s_n y}) dy. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Agora, sendo

$$\tilde{h}_n(y) \equiv e^{-\frac{s_n N}{2}} h_n(e^{-s_n y}),$$

verifica-se que

$$F'(v_n)(h_n) = e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(y) \nabla \tilde{h}_n(y) e^{-s_n} dy - e^{-\frac{s_n N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(y)) \tilde{h}_n(y) dy. \quad (2.39)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{F}'(u_n, s_n)(\tilde{h}_n, 0) &= \partial_u \tilde{F}(u_n, s_n) \tilde{h}_n + \partial_s \tilde{F}(u_n, s_n) \cdot 0 \\ &= \partial_u \tilde{F}(u_n, s_n) \tilde{h}_n \\ &= e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \tilde{h}_n dy - \frac{1}{e^{s_n N}} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n) e^{\frac{s_n N}{2}} \tilde{h}_n dy \\ &= e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (h_n(e^{-s_n y})) e^{-\frac{s_n N}{2}} dy - \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n) e^{\frac{s_n N}{2}} e^{-\frac{s_n N}{2}} h_n(e^{-s_n y}) dy \\ &= e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-s_n} \nabla u_n(y) \nabla h_n(e^{-s_n y}) e^{-\frac{s_n N}{2}} dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n) e^{\frac{s_n N}{2}} e^{-\frac{s_n N}{2}} h_n(e^{-s_n y}) dy, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\tilde{F}'(u_n, s_n)(\tilde{h}_n, 0) &= e^{2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(y) e^{-s_n(\frac{N+2}{2})} \nabla h_n(e^{-s_n} y) dy \\ &\quad - e^{-\frac{s_n N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} g(e^{\frac{s_n N}{2}} u_n) e^{-\frac{s_n N}{2}} h_n(e^{-s_n} y) dy.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Assim, de (2.38) e (2.40), temos

$$F'(v_n)(h_n) = \tilde{F}'(u_n, s_n)(\tilde{h}_n, 0).$$

Prosseguiremos mostrando que $(\tilde{h}_n, 0) \in \tilde{T}(u_n, s_n)$, lembrando que

$$\tilde{T}(u_n, s_n) \equiv \{(z_1, z_2) \in \mathbf{E}, \langle u_n, z_1 \rangle_H = 0\}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}(\tilde{h}_n, 0) \in \tilde{T}(u_n, s_n) &\Leftrightarrow \langle \tilde{h}_n, u_n \rangle_H = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u_n(x) e^{-\frac{s_n N}{2}} h_n(e^{-s_n} x) dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{s_n N}{2}} u_n(e^{s_n} x) h_n(x) dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle h_n, v_n \rangle_H = 0 \\ &\Leftrightarrow h_n \in T_{v_n}.\end{aligned}$$

Usando o que foi apresentado acima e o item (c) da Proposição 2.2,

$$|\langle F'(v_n), h_n \rangle_{E^* \times E}| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \|(\tilde{h}_n, 0)\|_{\mathbf{E}}.$$

Para finalizar a demonstração do item (b), convém demonstrar que, para n suficientemente grande,

$$\|(\tilde{h}_n, 0)\|_{\mathbf{E}} \leq 2\|h_n\|_E.$$

Entretanto, se $e^{-2s_n} \leq 2$ e fazendo uma mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}\|(\tilde{h}_n, 0)\|_{\mathbf{E}}^2 &= \|\tilde{h}_n\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{h}_n(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{h}_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |h_n(x)|^2 dx + e^{-2s_n} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h_n(x)|^2 dx \\ &\leq 2\|h_n\|_E^2.\end{aligned}$$

Esse é o caso para n suficientemente grande, desde que

$$\begin{aligned}\|(u_n, s_n) - g_n(t)\|_{\mathbf{E}} &= \|u_n - g_n^1(t)\|_E + |s_n - 0| \geq |s_n - 0| = |s_n| \\ &\Rightarrow \min_{t \in [0,1]} \|(u_n, s_n) - g_n(t)\| \geq |s_n|\end{aligned}$$

pelo item (b) da Proposição 2.2. ■

2.4 Outras propriedades da sequência de Palais-Smale

Como justificado na seção anterior, (v_n) é limitada em E e pelos resultados de Análise Funcional, concluímos que existe $v_c \in E$ tal que $v_n \rightharpoonup v_c$ em E . Se (v_n) converge forte para v_c , pelo Lema 2.4, alternativa (c), v_c é um ponto crítico de F restrita a $S(c)$.

Um primeiro passo para ser provada a convergência forte é o seguinte lema.

Lema 2.5 *Assuma que valem (H1), (H2) e tome $(v_n) \subset S(c)$ a sequência de Palais-Smale obtida no Lema 2.4. Então, existe $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que, passando a uma subsequência,*

(a) $F(v_n) \rightarrow \gamma(c)$;

(b) $v_n \rightharpoonup v_c$ em E ;

(c) $\int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \rightarrow C_1$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(v_n(x))dx \rightarrow C_2$, com $C_1, C_2 > 0$;

(d) $\lambda_n \rightarrow \lambda_c < 0$ em \mathbb{R} ;

(e) $-\Delta v_n - \lambda_n v_n - g(v_n) \rightarrow 0$ em E^* .

Demonstração.

(a) Já foi provada no Lema 2.4;

(b) No Lema 2.4 verificamos que (v_n) é limitada em E . Como E é um espaço de Banach reflexivo, então existe uma subsequência que converge fraco. Concluindo assim, que existe $v_c \in E$ tal que $v_n \rightharpoonup v_c$ em E .

Passemos à demonstração dos demais itens.

(c) Primeiramente, note que, por (2.28),

$$\partial_s \tilde{F}(u_n, s_n) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

daí, existe $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ tal que

$$\begin{aligned} |\partial_s \tilde{F}(u_n, s_n)| \leq \varepsilon_n &\Rightarrow -\varepsilon_n \leq \partial_s \tilde{F}(u_n, s_n) \leq \varepsilon_n \\ &\Rightarrow \|\nabla v_n\|_H^2 + N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x))v_n(x)dx \leq \varepsilon_n \\ &\Rightarrow \|\nabla v_n\|_H^2 \leq \varepsilon_n - N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x))v_n(x)dx \\ &\Rightarrow \|\nabla v_n\|_H^2 \leq \varepsilon_n - N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx + \beta \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \\ &\Rightarrow \|\nabla v_n\|_H^2 \leq \varepsilon_n + N \left(\frac{\beta}{2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx, \end{aligned}$$

em que usamos (H2). Como $F(v_n) \rightarrow \gamma(c) > 0$, isso prova que $\left(\int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx\right)$ está afastado de zero, pois

$$F(v_n) = \frac{1}{2}\|\nabla v_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \rightarrow \gamma(c) > 0.$$

Pela item (b) do Lema 2.4, existe $C_1 > 0$ tal que, passando a subsequência

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \rightarrow C_1.$$

Analogamente, vemos que, por (2.6)

$$\frac{1}{\beta - 2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(v_n(x))dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \rightarrow C_1$$

e, também,

$$C_1 \leftarrow \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \leq \frac{1}{\alpha - 2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(v_n(x))dx.$$

Então, segue que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(v_n(x))dx \rightarrow C_2.$$

Ficando mostrado assim, o item (c).

(e) Observando que, pelo Lema 2.4, $\|F'_{|_{S(c)}}(v_n)\| \rightarrow 0$, segue que, como

$$S(c) = \Psi^{-1}\left(\left\{\frac{c^2}{2}\right\}\right),$$

em que $\Psi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx$ definida em E , temos pelo Lema A.2 que existe $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com

$$\|F'(v_n) - \lambda_n \Psi'(v_n)\|_{E^*} = \|F'_{|_{S(c)}}(v_n)\|_{E^*} \rightarrow 0,$$

implicando que

$$F'(v_n)v_n = \lambda_n \Psi'(v_n)v_n + o_n(1) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n)v_n dx = \lambda_n \|v_n\|_H^2 + o_n(1)$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n)v_n dx}{\|v_n\|_H^2} + o_n(1),$$

em que $o_n(1)$ é uma ordem pequena.

Por outro lado,

$$F'(v_n)z - \lambda_n \Psi'(v_n)z \rightarrow 0,$$

então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla z \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n) v_n \, dx - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n z \, dx &\rightarrow 0, \quad \forall z \in E \\ \Rightarrow \Delta v_n - \lambda_n v_n - g(v_n) &\rightarrow 0 \quad \text{em } E^*. \end{aligned}$$

(d) Verificaremos que $\lambda_n \rightarrow \lambda_c$ em \mathbb{R} , sendo $\lambda_c < 0$. Temos,

$$\begin{aligned} \lambda_n \|v_n\|_H^2 &= \|\nabla v_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) \, dx \\ &= \left\{ \|\nabla v_n\|_H^2 + N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) \, dx - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) \, dx \right\} - \\ &\quad - N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) \, dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) \, dx. \end{aligned}$$

Por (2.28) e (2.33), $\{\|\nabla v_n\|_H^2 + N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) \, dx - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) \, dx\}$ tende à zero quando $n \rightarrow \infty$, e recorrendo novamente a (H2), também temos

$$-N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) \, dx + \left(\frac{N-2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) \, dx \leq \left(\frac{\beta(N-2)}{2} - N\right) \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) \, dx.$$

Agora, pela letra (b), levando em consideração o que fora visto em (H2),

$$\beta < \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow \beta(N-2) < 2N \Leftrightarrow \frac{\beta(N-2)}{2} < N \Leftrightarrow \frac{\beta(N-2)}{2} - N < 0,$$

inferimos que (λ_n) é negativo e está afastado de zero para n grande.

Por outro lado,

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x)) v_n(x) \, dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) \, dx \geq \left(\frac{\alpha(N-2)}{2} - N\right) \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x)) \, dx,$$

o que, por sua vez, mostra que (λ_n) é limitado por baixo.

Conseqüentemente, $\lambda_n \rightarrow \lambda_c < 0$ a menos de subsequência.

Concluindo, assim, o resultado.

2.5 Convergência da sequência Palais-Smale para $N \geq 2$

Deve ficar claro que o método variacional desenvolvido até agora permanece inalterado se trabalharmos no subespaço

$$H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) = \{u \in E; u(x) = u(|x|)\}.$$

Considerando tal situação, vamos obter a convergência forte de (v_n) . Com tal objetivo em mente, vejamos o próximo resultado. A partir de agora, consideraremos $E = H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.6 Assuma $N \geq 2$ e que valem (H1), (H2). Então

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow E^* \\ u &\mapsto g(u) \end{aligned}$$

é um operador compacto.

Demonstração. Inicialmente, provaremos que o funcional $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx$ é fracamente sequencialmente contínuo. Então, a compacidade de g seguirá (Veja Teorema A.3).

Precisamos mostrar que, dada uma sequência $(u_n) \subset E$ com

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n(x))dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \text{ em } \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e por (H2), (2.5), temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} G(u_n(x))dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n(x)) - G(u(x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \frac{d}{dt} [G(tu_n(x) + (1-t)u(x))] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 g(tu_n(x) + (1-t)u(x))(u_n(x) - u(x))dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \max_{t \in [0,1]} |g(tu_n(x) + (1-t)u(x))| |u_n(x) - u(x)|dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \max_{t \in [0,1]} \{ |tu_n(x) + (1-t)u(x)|^{\alpha-1} + |tu_n(x) + (1-t)u(x)|^{\beta-1} \} |u_n(x) - u(x)|dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \{ (|u_n(x)| + |u(x)|)^{\alpha-1} + (|u_n(x)| + |u(x)|)^{\beta-1} \} |u_n(x) - u(x)|dx \\ &\leq C \left\{ \|(|u_n| + |u|)^\alpha\|_{L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \|u_n - u\|_{L^\alpha} + \|(|u_n| + |u|)^\beta\|_{L^{\frac{\beta}{\beta-1}}} \|u_n - u\|_{L^\beta} \right\} \\ &\leq C \left\{ \| |u_n|^\alpha + |u|^\alpha \|_{L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \|u_n - u\|_{L^\alpha} + \| |u_n|^\beta + |u|^\beta \|_{L^{\frac{\beta}{\beta-1}}} \|u_n - u\|_{L^\beta} \right\}. \end{aligned}$$

Agora, pela inclusão compacta de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$ ou $p > 2$ se $N = 2$, vemos que $\|u_n - u\|_{L^\alpha} \rightarrow 0$ e $\|u_n - u\|_{L^\beta} \rightarrow 0$. Portanto, temos o resultado. ■

Lema 2.7 O operador $L : E \rightarrow E^*$ definido por

$$(Lu)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx$$

é invertível, contínuo e tem inverso contínuo. Além disso, $\lambda = -\lambda_c > 0$.

Demonstração. Primeiramente, note que $(u, v)_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx$ é um produto interno em E , cuja norma associada é equivalente a norma usual de E .

Precisamos mostrar que L é um operador bijetivo e contínuo.

- L é injetor:

Sejam $u, v \in E$,

$$\begin{aligned} L(u) = L(v) &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi + \lambda u \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi + \lambda v \varphi \\ &\Rightarrow \langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle \\ &\Rightarrow \langle u - v, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in E \\ &\Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

- L é sobrejetor:

Seja $F \in E^*$. Segue do Teorema da Representação de Riesz que existe único $u_f \in E$ com

$$\begin{aligned} F(v) = \langle u_f, v \rangle_\lambda &\Rightarrow F(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_f \nabla v + \lambda u_f v dx \\ &= L_{u_f}(v), \end{aligned}$$

dessa forma, fica claro que

$$F = L_{u_f}(v).$$

- L é contínua:

Sejam $u, v \in E$, por Cauchy-Schwarz e pelo fato de que a norma usual do E é equivalente a norma de λ , temos

$$|L_u(v)| \leq \|u\|_\lambda \|v\|_\lambda \leq C_0 \|u\|_E \|v\|_E.$$

Dessa forma,

$$\|L_u\| \leq C_0 \|u\|_E.$$

- L^{-1} é contínua:

Para todo $v \in E^*$, existe um único $u \in E$ tal que $Lu = v$ se, e somente se, $u = L^{-1}v$.

Note que, para todo $\varphi \in E$,

$$-\Delta u + \lambda u = v \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} v \varphi dx.$$

Sendo $\varphi = u$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} v u dx \\
\Rightarrow \|u\|_\lambda^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} v u dx \leq \|v\|_H \|u\|_H \\
\Rightarrow \|u\|_\lambda^2 &\leq \|v\|_E \|u\|_E \\
\Rightarrow C_0 \|u\|_E^2 &\leq \|v\|_E \|u\|_E \\
\Rightarrow \|u\|_E &\leq C_0 \|v\|_E,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|L^{-1}v\|_E \leq C_0 \|v\|_E.$$

■

Observação 2.4 É importante salientar que, $L_u = -\Delta u + \lambda u$ no sentido fraco.

Teorema 2.1 Para $N \geq 2$, sob as hipóteses (H1) e (H2), a equação (2.1)

$$-\Delta u = \lambda u + g(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$, admite um par $(u_c, \lambda_c) \in \mathbf{E}$ de soluções fracas tais que $\|u_c\|_H = c$ e $\lambda_c < 0$.

Demonstração. Do Lema 2.5, vemos que

$$-\Delta v_n - \lambda_n v_n - g(v_n) \rightarrow 0 \text{ em } E^*.$$

Por $\lambda_n \rightarrow \lambda_c$ e pelo fato de v_n ser limitada, temos

$$(\lambda_n - \lambda_c) \langle v_n, \varphi \rangle_H \rightarrow 0, \quad \forall \varphi \in E.$$

Conseqüentemente,

$$-\Delta v_n - \lambda_c v_n - g(v_n) \rightarrow 0 \text{ em } E^*.$$

Desde que, no sentido fraco, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\Delta v_n - \lambda_c v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(v_n), \quad (2.41)$$

e pelo Lema 2.6, $g(v_n) \rightarrow g(v_c)$ em E^* , sendo assim, obtemos que

$$-\Delta v_n - \lambda_c v_n \rightarrow g(v_c) \text{ em } E^*. \quad (2.42)$$

Agora, seja $L : E \rightarrow E^*$ definido por

$$(Lu)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v - \lambda_c uv) dx.$$

Temos por (2.42) que,

$$L(v_n) := -\Delta v_n - \lambda_c v_n \rightarrow g(v_c),$$

dessa forma, usando o Lema 2.7, obtemos

$$L^{-1}(L(v_n)) \rightarrow L^{-1}(g(v_c)),$$

ou seja

$$v_n \rightarrow L^{-1}(g(v_c)) = v_c \text{ em } E.$$

Pela unicidade do limite, $v_n \rightarrow v_c$ em E e $v_c \in S(c)$ (pois $(v_n) \subset S(c)$).

Resumindo o resultado, vemos que (v_c, λ_c) satisfaz (2.1) com $v_c \in S(c)$ e $\lambda_c < 0$.

■

Capítulo 3

Soluções com norma prescrita para $N \geq 1$

3.1 Caracterização adicional de $\gamma(c)$

A inclusão $H_{rad}^1(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ para $p > 2$ não é compacta, e quando $N = 1$, não podemos então prosseguir como na demonstração do Teorema 2.1. Para obter o resultado de existência, devemos traçar uma caracterização variacional adicional de $\gamma(c)$. Nesse passo, acrescentaremos a hipótese

(H3) Seja $\tilde{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{G}(s) = g(s)s - 2G(s)$. Então, existe $\tilde{G}'(s)$ tal que

$$\tilde{G}'(s)s > \frac{2N+4}{N}\tilde{G}(s). \quad (3.1)$$

A caracterização será válida para qualquer $N \geq 1$. Provaremos que

$$\gamma(c) = \inf_{u \in \kappa(c)} F(u)$$

com

$$\kappa(c) = \left\{ u \in S(c); F'_{|_{S(c)}}(u) = 0 \right\}.$$

Com esse objetivo, obteremos alguns resultados preliminares.

O lema a seguir é uma forma especial da identidade de Pohozaev, veja [25].

Lema 3.1 *Assuma (H1) e (H2). Então, todas as soluções fracas $(u, \lambda) \in S(c) \times \mathbb{R}$ de (2.1) pertencem ao conjunto*

$$V(c) = \left\{ u \in S(c), \|\nabla u\|_H^2 = \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u(x)) dx \right\}.$$

Demonstração. Aplicaremos a Proposição A.2 com $f(u) = \lambda u + g(u)$. Seja $(u, \lambda) \in S(c) \times \mathbb{R}$ uma solução fraca de (2.1). Temos que, como $u \in S(c)$, segue que $u \in E$ ou seja, $u \in H$ e $\nabla u \in H$. Além disso,

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds = \int_0^u \lambda s + g(s)ds = \lambda \frac{u^2}{2} + G(u), \quad (3.2)$$

em que $G(u) = \int_0^u g(s)ds$.

Com isso, por $u \in H$, temos $u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pelas hipóteses estabelecidas inicialmente em (2.17), temos

$$G(s) \leq C(s^\alpha + s^\beta) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G(u)du \leq C \int_{\mathbb{R}^N} u^\alpha du + \int_{\mathbb{R}^N} u^\beta du < \infty,$$

pois $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\alpha(\mathbb{R}^N), L^\beta(\mathbb{R}^N)$. Assim, $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ademais, fazendo $a(x) = |g(x)| + \lambda$ temos $|f(u)| \leq (|g(u)| + \lambda)(|u| + 1)$.

Ainda mais, $a \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}$, pois sendo $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto,

$$|g(u)| \leq C_0(|u|^{\alpha-1} + |u|^{\beta-1}) \Rightarrow \int_K |g(u)|^{\frac{N}{2}} dx \leq C_0 \left[\int_K |u|^{(\alpha-1)\frac{N}{2}} dx + \int_K |u|^{(\beta-1)\frac{N}{2}} dx \right],$$

pela desigualdade de Hölder,

$$\int_K |g(u)|^{\frac{N}{2}} dx \leq C(\|u\|_H) < \infty.$$

Daí, pelo Lema A.1, fica claro que $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $q < \infty$.

Agora, um argumento padrão de bootstrap (em bolas B_R) mostra que u é localmente limitado. Veja Alves e Ledesma (2017) [4].

Assim, temos

$$\begin{aligned} (N-2)\|\nabla u\|_H^2 &= 2N \int_{\mathbb{R}^N} F(u(x))dx \\ &= 2N \left\{ \frac{\lambda}{2}\|u\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \right\} \\ &= N \left\{ \lambda\|u\|_H^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx \right\} \\ &= N \left\{ \lambda\|u\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))u(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u(x))dx \right\} \\ &= N \left\{ \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u(x))dx \right\}, \end{aligned}$$

usando o fato de que

$$\lambda = \frac{1}{\|u\|_H^2} \left\{ \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))u(x)dx \right\},$$

como verificado no item (e) do Lema 2.5.

Portanto,

$$\begin{aligned} (N-2)\|\nabla u\|_H^2 &= N \left\{ \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u(x)) dx \right\} \\ \Rightarrow N\|\nabla u\|_H^2 - 2\|\nabla u\|_H^2 &= N\|\nabla u\|_H^2 - N \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u(x)) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2\|\nabla u\|_H^2 = N \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u(x)) dx,$$

que é precisamente a definição de $V(c)$. ■

Lema 3.2 *Assuma (H1), (H2) e seja $K(c)$, dado pelo Lema 2.2. Então,*

$$A = \{u \in S(c); \|\nabla u\|_H^2 \leq K(c)\}$$

e

$$C = \{u \in S(c); \|\nabla u\|_H^2 \geq 2K(c) \text{ e } F(u) \leq 0\}$$

estão conectados por arcos. Em particular, para todo $v_1 \in A$ e todo $v_2 \in C$, temos

$$\gamma(c) = \inf_{g \in \Gamma(v_1, v_2)} \max_{s \in [0,1]} F(g(s))$$

e

$$\Gamma_{(v_1, v_2)} = \{g \in C([0, 1], S(c)), g(0) = v_1, g(1) = v_2\}.$$

($\gamma(c)$ é originalmente definido na Proposição 2.1).

Demonstração. Inicialmente, definamos

$$h : E \times E \times \mathbb{R} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow E$$

com

$$h(u, v, s, t)(x) = \cos t(H(u, s)(x)) + \sin t(H(v, s)(x)).$$

Sejam $u_1, u_2 \in S(c)$ dois pontos distintos satisfazendo $\langle u_1, u_2 \rangle_H \neq -c^2$ e $\|\nabla u_1\|_H = \|\nabla u_2\|_H = d$. Fica claro que, como consequência, $\langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \neq -d^2$, pois do contrário, ∇u_1 e ∇u_2 seriam múltiplos. De fato, por Cauchy-Schwarz

$$|\langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H| \leq \|\nabla u_1\|_H \|\nabla u_2\|_H = d^2,$$

e, a igualdade só seria válida se, e somente se, ∇u_1 e ∇u_2 fossem linearmente dependentes.

Agora, note que

$$\|H(u_1, s)\|_H^2 = \left\| e^{\frac{sN}{2}} u_1(e^s x) \right\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |e^{\frac{sN}{2}} u_1(e^s x)|^2 dx.$$

Fazendo novamente a mudança de variáveis $y = e^s x$, obtemos

$$\|H(u_1, s)\|_H = c.$$

E, de forma análoga,

$$\|H(u_2, s)\|_H = c.$$

Daí,

$$\|H(u_1, s)\|_H = \|H(u_2, s)\|_H^2 = c, \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Além disso,

$$\|\nabla H(u_1, s)\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |e^{\frac{s(N+2)}{2}} \nabla u_1(e^s x)|^2 dx = e^{sN+2s} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1(e^s x)|^2 dx.$$

Novamente, fazendo uma mudança de variáveis $y = e^s x$, obtemos

$$\|\nabla H(u_1, s)\|_H^2 = e^{sN+2s} e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy = e^{2s} \|\nabla u_1\|_H^2 = e^{2s} d^2,$$

isto é, $\|\nabla H(u_1, s)\|_H = e^s d$.

De forma análoga, podemos concluir que

$$\|\nabla H(u_1, s)\|_H = \|\nabla H(u_2, s)\|_H = e^s d, \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Agora, vejamos que

$$\begin{aligned} \langle H(u_1, s), H(u_2, s) \rangle_H &= \int_{\mathbb{R}^N} H(u_1, s) H(u_2, s) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{sN}{2}} u_1(e^s x) e^{\frac{sN}{2}} u_2(e^s x) dx \\ &= e^{sN} \int_{\mathbb{R}^N} u_1(e^s x) u_2(e^s x) dx. \end{aligned}$$

Realizando novamente a mudança de variáveis $y = e^s x$, constatamos que

$$\begin{aligned} \langle H(u_1, s), H(u_2, s) \rangle_H &= e^{sN} e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} u_1(y) u_2(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u_1(y) u_2(y) dy \\ &= \langle u_1, u_2 \rangle_H. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\langle H(u_1, s), H(u_2, s) \rangle_H = \langle u_1, u_2 \rangle_H, \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\langle \nabla H(u_1, s), \nabla H(u_2, s) \rangle_H &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{(\frac{N+2}{2})s} \nabla u_1(e^s x) e^{(\frac{N+2}{2})s} \nabla u_2(e^s x) dx \\ &= e^{(N+2)s} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1(e^s x) \nabla u_2(e^s x) dx.\end{aligned}$$

Pela mesma mudança de variáveis, resulta que

$$\begin{aligned}\langle \nabla H(u_1, s), \nabla H(u_2, s) \rangle_H &= e^{(N+2)s} e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1(y) \nabla u_2(y) dy \\ &= e^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1(y) \nabla u_2(y) dy,\end{aligned}$$

tendo como resultado

$$\langle \nabla H(u_1, s), \nabla H(u_2, s) \rangle_H = e^{2s} \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H, \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Então, por (3.3) e (3.5)

$$\begin{aligned}\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 &= \|\cos t(H(u_1, s)(x)) + \sin t(H(u_2, s)(x))\|_H^2 \\ &= \cos^2 t \|H(u_1, s)(x)\|_H^2 + \sin^2 t \|H(u_2, s)(x)\|_H^2 \\ &\quad + 2 \cos t \sin t \langle H(u_1, s), H(u_2, s) \rangle_H \\ &= c^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + 2 \cos t \sin t \langle u_1, u_2 \rangle_H,\end{aligned}$$

logo,

$$\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 = c^2 + \sin 2t \langle u_1, u_2 \rangle_H. \quad (3.7)$$

E, também, lembrando que

$$h(u_1, u_2, s, t)(x) = \cos t(H(u_1, s)(x)) + \sin t(H(u_2, s)(x)),$$

temos

$$\nabla h(u_1, u_2, s, t)(x) = \cos t \nabla H(u_1, s)(x) + \sin t \nabla H(u_2, s)(x).$$

Por (3.4) e (3.6),

$$\begin{aligned}\|\nabla h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 &= \|\cos t \nabla H(u_1, s)(x) + \sin t \nabla H(u_2, s)(x)\|_H^2 \\ &= \cos^2 t \|\nabla H(u_1, s)\|_H^2 + \sin^2 t \|\nabla H(u_2, s)\|_H^2 \\ &\quad + 2 \cos t \sin t \langle \nabla H(u_1, s), \nabla H(u_2, s) \rangle_H \\ &= \cos^2 t e^{2s} d^2 + \sin^2 t e^{2s} d^2 + \sin 2t e^{2s} \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \\ &= e^{2s} d^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + \sin 2t e^{2s} \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \\ &= e^{2s} \{d^2 + \sin 2t \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H\}.\end{aligned}$$

Como consequência, chegamos que

$$\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 = c^2 + \sin 2t \langle u_1, u_2 \rangle_H \quad (3.8)$$

$$\|\nabla h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 = e^{2s} \{d^2 + \sin 2t \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H\}, \quad (3.9)$$

e deduzimos que existe $a = a(u_1, u_2), b = b(u_1, u_2) > 0$ tais que, para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, usando Cauchy-Schwarz e o fato de que $u_1, u_2 \in S(c)$, obtemos

$$\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 \leq c^2 + \sin 2t |\langle u_1, u_2 \rangle_H| \leq c^2 + \|u_1\|_H \|u_2\|_H = c^2 + c^2,$$

resultando que

$$\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 \leq 2c^2. \quad (3.10)$$

Por outro lado, sabemos que $\langle u_1, u_2 \rangle_H \neq -c^2$. Suponhamos, em um primeiro momento, que $\langle u_1, u_2 \rangle_H > 0$. Assim,

$$0 \leq \sin 2t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin 2t \langle u_1, u_2 \rangle_H \leq \langle u_1, u_2 \rangle_H,$$

em decorrência disso,

$$\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 = c^2 + \sin 2t \langle u_1, u_2 \rangle_H \geq c^2 > a.$$

Caso $\langle u_1, u_2 \rangle_H < 0$,

$$0 \leq \sin 2t \leq 1 \Rightarrow 0 \geq \sin 2t \langle u_1, u_2 \rangle_H \geq \langle u_1, u_2 \rangle_H,$$

dessa maneira,

$$\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 = c^2 + \sin 2t \langle u_1, u_2 \rangle_H \geq c^2 + \langle u_1, u_2 \rangle_H > 0,$$

pois $\langle u_1, u_2 \rangle_H < c^2$. Caso $\langle u_1, u_2 \rangle_H = 0$, o resultado é imediato.

De toda forma,

$$a \leq \|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2. \quad (3.11)$$

Por (3.10) e (3.11),

$$a \leq \|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 \leq 2c^2. \quad (3.12)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|\nabla h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 &= e^{2s} \{d^2 + \sin 2t \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H\} \\ &= e^{2s} d^2 + e^{2s} \sin 2t \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \\ &\leq e^{2s} d^2 + e^{2s} \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \\ &\leq e^{2s} d^2 + e^{2s} \|\nabla u_1\|_H \|\nabla u_2\|_H \\ &= e^{2s} d^2 + e^{2s} d^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|\nabla h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 \leq e^{2s} 2d^2. \quad (3.13)$$

Por outro lado, suponhamos $\langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin 2t \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \sin 2t \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \leq \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \\ &\Rightarrow 0 \leq e^{2s} \sin 2t \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \leq e^{2s} \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \|\nabla h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 &= e^{2s} d^2 + e^{2s} \sin 2t \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \\ &\geq e^{2s} d^2, \end{aligned}$$

façamos $d^2 := b > 0$.

Caso $\langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H < 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin 2t \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq e^{2s} \sin 2t \leq e^{2s} \\ &\Rightarrow 0 \geq e^{2s} \sin 2t \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \geq e^{2s} \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H, \end{aligned}$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} \|\nabla h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 &= e^{2s} d^2 + e^{2s} \sin 2t \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \\ &\geq e^{2s} d^2 + e^{2s} \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H \\ &= e^{2s} [d^2 + \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H], \end{aligned}$$

façamos $b := [d^2 + \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_H] > 0$. Em resumo, existe $b > 0$ tal que

$$\|\nabla h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 \geq e^{2s} b.$$

Consequentemente,

$$e^{2s} b \leq \|\nabla h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 \leq e^{2s} 2d^2. \quad (3.14)$$

Dessa forma, faz sentido definir $\hat{h} : E \times E \times \mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow S(c)$ com

$$\hat{h}(u, v, s, t)(x) = \frac{h(u, v, s, t)(x)}{\|h(u, v, s, t)\|_H} c.$$

Obtemos, para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, por (3.12) e (3.14),

$$\begin{aligned}\hat{h}(u_1, u_2, s, t)(x) &= \frac{h(u_1, u_2, s, t)(x)}{\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H} c \\ \Rightarrow \nabla \hat{h}(u_1, u_2, s, t)(x) &= \frac{\nabla h(u_1, u_2, s, t)(x)}{\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H} c \\ \Rightarrow \|\nabla \hat{h}(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 &= \frac{\|\nabla h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2}{\|h(u_1, u_2, s, t)\|_H^2} c^2 \\ \Rightarrow \|\nabla \hat{h}(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 &\leq \frac{e^{2s} 2d^2 c^2}{a},\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\nabla \hat{h}(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 \leq \frac{2d^2}{a} e^{2s} c^2. \quad (3.15)$$

Por outro lado, usando novamente (3.12) e (3.14),

$$\|\nabla \hat{h}(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 \geq \frac{e^{2s} b c^2}{2c^2} = \frac{b}{2} e^{2s}. \quad (3.16)$$

Juntando (3.15) e (3.16),

$$\frac{b}{2} e^{2s} \leq \|\nabla \hat{h}(u_1, u_2, s, t)\|_H^2 \leq \frac{2d^2}{a} e^{2s} c^2. \quad (3.17)$$

Afirmção 3.1 Para $s > 0$ suficientemente grande e todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\hat{h}(u_1, u_2, s, t)(x)) dx \geq C e^{\frac{sN}{2}(\alpha-2)}. \quad (3.18)$$

De fato, suponhamos primeiro que $\hat{h} \geq 1$. Pela observação feita em (2.17),

$$\begin{aligned}G(\hat{h}) &\geq C |\hat{h}|^\alpha \\ &= C \left| \frac{h(u, v, s, t)(x)}{\|h(u, v, s, t)\|_H} c \right|^\alpha \\ &= C \left| \frac{h(u, v, s, t)(x)}{\|h(u, v, s, t)\|_H} \right|^\alpha \\ &= C \left| \frac{\cos t(H(u, s)) + \sin t H(v, s)}{\|h(u, v, s, t)\|_H} \right|^\alpha \\ &= C \left| \frac{\cos t(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x)) + \sin t(e^{\frac{sN}{2}} v(e^s x))}{\|h(u, v, s, t)\|_H} \right|^\alpha,\end{aligned}$$

ou seja,

$$G(\hat{h}) \geq C \frac{e^{\frac{sN}{2}\alpha}}{\|h(u, v, s, t)\|_H} |\cos t u(e^s x) + \sin t v(e^s x)|^\alpha.$$

Integrando,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\hat{h}(x))dx \geq C \frac{e^{\frac{sN}{2}\alpha}}{\|h(u, v, s, t)\|_H^\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |\cos t u(e^s x) + \sin t v(e^s x)|^\alpha dx,$$

daí, fazendo a mudança de variáveis $y = e^s x$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(\hat{h})dx &\geq C \frac{e^{\frac{sN}{2}\alpha}}{\|h(u, v, s, t)\|_H^\alpha} e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} |\cos t u(y) + \sin t v(y)|^\alpha dy \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G(\hat{h}(u_1, u_2, s, t)(x))dx \geq C e^{\frac{sN}{2}(\alpha-2)}. \end{aligned}$$

Caso $\hat{h} \leq 1$, analogamente

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\hat{h}(u_1, u_2, s, t)(x))dx \geq C e^{\frac{sN}{2}(\beta-2)} \geq C e^{\frac{sN}{2}(\alpha-2)}.$$

Agora, com tais informações, estamos em condições de provar a tese.

Dados dois pontos arbitrários $v_1, v_2 \in A$, devemos construir um caminho entre v_1 e v_2 que esteja inteiramente em A . Assuma, primeiramente, que $\|\nabla v_1\|_H = \|\nabla v_2\|_H \equiv d$ e que $\langle v_1, v_2 \rangle_H \neq -c^2$. Por (3.17), vemos que existe $s_0 = s_0(v_1, v_2) < 0$ tal que, para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\|\nabla \hat{h}(v_1, v_2, s, t)\|_H^2 \leq \frac{2d^2}{a} c^2 e^{2s_0}. \quad (3.19)$$

Seja $\Gamma_1 : [0, 2|s_0| + 1] \rightarrow S(c)$ o caminho definido por

$$\Gamma_1(r) = \begin{cases} h(v_1, 0, -r, 0), & \text{se } 0 \leq r \leq |s_0|, \\ \hat{h}(v_1, v_2, -|s_0|, r - |s_0|), & \text{se } |s_0| \leq r \leq |s_0| + 1, \\ h(v_2, 0, r - (2|s_0| + 1), 0), & \text{se } |s_0| + 1 \leq r \leq 2|s_0| + 1. \end{cases}$$

Note que $\Gamma_1(r) \in A$, para todo $r \in [0, 2|s_0| + 1]$, pois

Caso $0 \leq r \leq |s_0|$:

- $\|h(v_1, 0, -r, 0)\|_H^2 = c^2 + \sin^2 0 \langle v_1, 0 \rangle_H = c^2$;
- $\|\nabla h(v_1, 0, -r, 0)\|_H^2 \leq e^{2r} 2d^2 \leq e^{2r} 2K(c) \leq K(c)$, recordando que $s_0 < 0$.

Caso $|s_0| \leq r \leq |s_0| + 1$:

- $\|\hat{h}(v_1, v_2, -|s_0|, r - |s_0|)\|_H^2 = \frac{\|h(v_1, v_2, -|s_0|, r - |s_0|)\|_H^2}{\|h(v_1, v_2, -|s_0|, r - |s_0|)\|_H^2} c^2 = c^2$;
- $\|\nabla \hat{h}(v_1, v_2, -|s_0|, r - |s_0|)\|_H^2 \leq K(c)$, veja (3.19).

Caso $|s_0| + 1 \leq r \leq 2|s_0| + 1$:

- $\|h(v_2, 0, r - (2|s_0| + 1), 0)\|_H^2 = c^2 + \sin 0 \langle v_2, 0 \rangle_H = c^2$;
- $\|\nabla h(v_2, 0, r - (2|s_0| + 1), 0)\|_H^2 \leq 2d^2 e^{2(r - (2|s_0| + 1))} \leq K(c)$, lembrando novamente que $s_0 < 0$.

Também,

$$\Gamma_1(0) = h(v_1, 0, 0, 0) = \cos 0(H(v_1, 0)) + \sin 0(H(0, 0)) = H(v_1, 0) = v_1,$$

e,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(2|s_0| + 1) &= h(v_2, 0, (2|s_0| + 1) - (2|s_0| + 1), 0) = h(v_2, 0, 0, 0) \\ &= \cos 0(H(v_2, 0)(x)) + \sin 0(H(0, 0)) = v_2. \end{aligned}$$

É importante recordar que, Γ_1 teria que ser $C([0, 1], S(c))$, daí como $[0, 1] \longleftrightarrow [0, 2|s_0| + 1]$ são homeomorfos. Assim, a menos de homeomorfismo, $\Gamma_1 \in \Gamma_{(v_1, v_2)}$.

Agora, devemos observar que, se $\|\nabla u_1\|_H \neq \|\nabla u_2\|_H$, sem perda de generalidade, suponhamos $\|\nabla u_1\|_H > \|\nabla u_2\|_H$. Então, pela transformação contínua $H(u_1, s)$, podemos unir u_1 a um ponto \hat{u}_1 tal que

$$\|\nabla \hat{u}_1\|_H = \|\nabla u_2\|_H$$

e voltamos ao caso anterior. Finalmente, se $\langle u_1, u_2 \rangle = -c^2$, podemos introduzir um ponto auxiliar $u_3 \in A$ e construir um caminho que una u_1 a u_2 como reunião dos caminhos que unem u_1 a u_3 e u_3 a u_2 .

Agora, vamos mostrar que C é conectado por arcos.

Sejam $v_1, v_2 \in C$ arbitrários. Como anteriormente, é possível supor que

$$\|\nabla v_1\|_H = \|\nabla v_2\|_H \quad \text{e} \quad \langle v_1, v_2 \rangle_H \neq -c^2.$$

Pelo Lema 2.1 e por (3.16), existe $s_0 = s_0(u_1, u_2) > 0$ tal que

$$\|\nabla \hat{h}(v_1, v_2, s_0, t)\|_H^2 \geq 2K(c) \quad \text{e} \quad F(\hat{h}(v_1, v_2, s_0, t)) \leq 0.$$

Seja $\Gamma_2 : [0, 2s_0 + 1] \rightarrow S(c)$ um caminho definido por

$$\Gamma_2(r) = \begin{cases} h(v_1, 0, r, 0), & \text{se } 0 \leq r \leq s_0 \\ \hat{h}(v_1, v_2, s_0, r - s_0), & \text{se } s_0 \leq r \leq s_0 + 1 \\ h(v_2, 0, r - (s_0 + 1), 0), & \text{se } s_0 + 1 \leq r \leq 2s_0 + 1. \end{cases}$$

Observemos que $\Gamma_2(r) \in C$ para todo $r \in [0, 2s_0 + 1]$ e $\Gamma_2(0) = v_1, \Gamma_2(s_0 + 1) = v_2$.

Caso $0 \leq r \leq s_0$:

- $\|h(v_1, 0, r, 0)\|_H^2 = c^2 + \sin^2 0 \langle v_1, 0 \rangle_H = c^2 \Rightarrow \|h(v_1, 0, r, 0)\|_H = c$;
- $\|\nabla h(v_1, 0, r, 0)\|_H^2 \geq 2K(c)$, em que isso é válido pois d pode ser tomado grande em (3.14);
- $F(h(v_1, 0, r, 0)) \leq 0$, pelo Lema 2.1.

Caso $s_0 \leq r \leq s_0 + 1$:

- $\|\hat{h}(v_1, v_2, s_0, r - s_0)\|_H^2 = \frac{\|h(v_1, v_2, s_0, r - s_0)\|_H^2}{\|h(v_1, v_2, s_0, r - s_0)\|_H^2} c^2 \Rightarrow \|\hat{h}(v_1, v_2, s_0, r - s_0)\|_H = c$;
- $\|\nabla \hat{h}(v_1, v_2, s_0, r - s_0)\|_H^2 \geq 2K(c)$, por (3.17);
- $F(\hat{h}(v_1, v_2, s_0, r - s_0)) \leq 0$, pelo Lema 2.1.

Caso $s_0 + 1 \leq r \leq 2s_0 + 1$:

- $\|h(v_2, 0, r - (2s_0 + 1), 0)\|_H = c$;
- $\|\nabla h(v_2, 0, r - (s_0 + 1), 0)\|_H^2 \geq 2K(c)$, também é válido pois podemos tomar d grande em (3.14);
- $F(h(v_2, 0, r - (2s_0 + 1), 0)) \leq 0$, pois segue do Lema 2.1.

Também,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(0) &= h(v_1, 0, 0, 0) = \cos 0(H(v_1, 0)) + \sin 0(H(0, 0)) \\ &= H(v_1, 0) \\ &= v_1 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(2s_0 + 1) &= h(v_2, 0, (2s_0 + 1 - (2s_0 + 1)), 0) \\ &= h(v_2, 0, 0, 0) \\ &= \cos 0(H(v_2, 0)(x)) + \sin 0(H(v_2, s_0)) \\ &= v_2. \end{aligned}$$

Concluindo que C é conectado por arcos. Portanto, o lema está provado. ■

Lema 3.3 *Assuma (H1), (H2), (H3) e seja $u \in S(c)$ arbitrário, mas fixado. Então, a função $f_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f_u(s) = F(H(u, s))$$

atinge um único máximo em um ponto $s := s_u \in \mathbb{R}$ tal que $H(u, s) \in V(c)$. Lembrando que

$$V(c) = \left\{ u \in S(c); \|\nabla u\|_H^2 = \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u(x)) dx \right\}.$$

Demonstração. Lembrando que, pela observação feita em (2.11),

$$F(H(u, s)) = \tilde{F}(u, s).$$

Daí, como visto no Lema 2.4,

$$\begin{aligned} f'_u(s) &= \|\nabla H(u, s)\|_H^2 + N \int_{\mathbb{R}^N} G(H(u, s)(x)) dx - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(H(u, s)(x)) H(u, s)(x) dx \\ &= \|\nabla H(u, s)\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}^N} NG(H(u, s)(x)) - \frac{N}{2} g(H(u, s)(x)) H(u, s)(x) dx \\ &= \|\nabla H(u, s)\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2NG(H(u, s)(x)) - Ng(H(u, s)(x))H(u, s)(x)}{2} dx \\ &= \|\nabla H(u, s)\|_H^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{N[2G(H(u, s)(x)) - g(H(u, s)(x))H(u, s)(x)]}{2} dx \\ &= \|\nabla H(u, s)\|_H^2 - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} -2G(H(u, s)(x)) + g(H(u, s)(x))H(u, s)(x) dx \\ &= \|\nabla H(u, s)\|_H^2 - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s)(x)) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f'_u(s) = \|\nabla H(u, s)\|_H^2 - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s)(x)) dx. \quad (3.20)$$

Pelos Lemas 2.1 e 2.2, sabemos que existe (pelo menos) um $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'_u(s)|_{s=s_0} = 0$.

Por (3.20), vemos que $H(u, s_0) \in V(c)$, pois temos $H(u, s_0) \in S(c)$ e

$$f'_u(s_0) = 0 \Rightarrow \|\nabla H(u, s)\|_H^2 = \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s)(x)) dx. \quad (3.21)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} f'_u(s) &= \|\nabla(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x))\|_H^2 - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x)) dx \\ &= e^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy - \frac{N}{2} e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(e^{\frac{sN}{2}} u(y)) dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f_u''(s) &= 2\|\nabla H(u, s)\|_H^2 - \frac{N}{2} \left[(-N)e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G} \left(e^{\frac{sN}{2}} u(y) \right) dy \right. \\
&\quad \left. + e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}' \left(e^{\frac{sN}{2}} u(y) \right) \frac{N}{2} e^{\frac{sN}{2}} u(y) dy \right] \\
&= 2\|\nabla H(u, s)\|_H^2 - \frac{N}{2} \left[-Ne^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G} \left(e^{\frac{sN}{2}} u(y) \right) dy \right. \\
&\quad \left. + e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}' \left(e^{\frac{sN}{2}} u(y) \right) \frac{N}{2} e^{\frac{sN}{2}} u(y) dy \right] \\
&= 2\|\nabla H(u, s)\|_H^2 + \frac{N^2}{2} e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G} \left(e^{\frac{sN}{2}} u(y) \right) dy \\
&\quad - \frac{N^2}{4} e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}' \left(e^{\frac{sN}{2}} u(y) \right) e^{\frac{sN}{2}} u(y) dy
\end{aligned}$$

Usando (3.21) e voltando à variável x , temos

$$\begin{aligned}
f_u''(s) &= N \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s_0)(x)) dx + \frac{N^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(e^{\frac{sN}{2}} u(e^s x)) dx \\
&\quad - \frac{N^2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}'(H(u, s_0)) H(u, s_0) dx \\
&= N \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s_0)(x)) dx + \frac{N^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s_0)) dx \\
&\quad - \frac{N^2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}'(H(u, s_0)) H(u, s_0) dx \\
&= \frac{N}{2} \left[2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s_0)(x)) dx + N \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s_0)(x)) dx \right. \\
&\quad \left. - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}'(H(u, s_0)(x)) H(u, s_0)(x) dx \right] \\
&= \frac{N}{2} \left[(N+2) \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s_0)(x)) dx - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}'(H(u, s_0)(x)) H(u, s_0)(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Dessa forma, de (H3), deduzimos que

$$\begin{aligned}
f_u''(s) &< \frac{N}{2} \left[(N+2) \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s_0)(x)) dx - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2N+4}{N} \tilde{G}(H(u, s_0)(x)) dx \right] \\
&< \frac{N}{2} \left[(N+2) \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s_0)(x)) dx - (N+2) \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s_0)(x)) dx \right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f_u''(s) < 0.$$

Como $f_u'(s_0) = 0$ e $f_u''(s_0) < 0$, então s_0 é o único ponto de máximo local. ■

Observação 3.1 $u \in V(c)$ se, e somente se, $s = 0$ maximiza a função f_u .

Devemos observar que, se $H(u, s) \in V(c)$, então,

$$\begin{aligned}\|\nabla H(u, s)\|_H^2 &= \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s)) \\ \Rightarrow \|\nabla H(u, s)\|_H^2 - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(u, s)) &= 0 \\ \Rightarrow f'_u(s) &= 0.\end{aligned}$$

Isso nos diz que s maximiza a função f_u . Por outro lado, sendo $u \in V(c)$, temos $H(u, 0) = u \in V(c)$, daí

$$\begin{aligned}f_u(0) &\geq f_u(s), \forall s \\ \Rightarrow F(H(u, 0)) &\geq F(H(u, s)) \\ \Rightarrow F(u) &\geq F(H(u, s)).\end{aligned}$$

Portanto, fica claro que $u \in V(c)$ se, e só se, $s = 0$ maximiza a função f_u .

Lema 3.4 *Assuma que valem (H1), (H2) e (H3). Então,*

$$\gamma(c) = \inf_{u \in V(c)} F(u).$$

Demonstração. Usaremos um argumento de contradição. Suponhamos que existe $v \in V(c)$ tal que $F(v) < \gamma(c)$ e definamos a aplicação $T_v : \mathbb{R} \rightarrow S(c)$ dada por

$$T_v(s) = H(v, s).$$

Pelo Lema 2.1, sabemos que existe $s_0 > 0$ tal que $T_v(-s_0) \in A$ e $T_v(s_0) \in C$. De fato,

$$T_v(-s_0) = H(v, -s_0),$$

daí,

$$\|H(v, -s_0)\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-\frac{s_0 N}{2}} v(e^{-s_0} x)|^2 dx = e^{-s_0 N} \int_{\mathbb{R}^N} |v(e^{-s_0} x)|^2 dx.$$

Considerando $y = e^{-s_0} x$, encontramos

$$\|H(v, -s_0)\|_H^2 = e^{-s_0 N} e^{s_0 N} \int_{\mathbb{R}^N} |v(y)|^2 dy = \|v\|_H^2 = c^2.$$

Assim,

$$\|H(v, -s_0)\|_H = c.$$

Além disso, pela Proposição 2.1

$$\|\nabla H(v, -s_0)\|_H^2 = e^{-2s_0} \|\nabla v\|_H^2 \leq K(c).$$

Dessa forma, $T_v(-s_0) \in A$. Agora, vejamos que, analogamente

$$\|T_v(s_0)\|_H^2 = \|H(v, s_0)\|_H^2 = c^2 \Rightarrow \|T_v(s_0)\|_H = c.$$

Ademais,

$$\|\nabla H(v, s_0)\|_H^2 = e^{2s_0} \|\nabla v\|_H^2 > 2e^{2s_0} K(c) \geq 2K(c)$$

e, pelo Lema 2.1,

$$F(H(v, s_0)) = \tilde{F}(v, s_0) = \frac{e^{2s_0}}{2} \|\nabla v\|_H^2 - \frac{1}{e^{s_0 N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{s_0}{2}} v(x)) dx \leq 0,$$

lembrando que $s_0 \approx +\infty$. Assim, $T_v(s_0) \in C$.

Agora, seja $\tilde{T}_v : [0, 1] \rightarrow S(c)$ o caminho definido por

$$\tilde{T}_v(s) = H(v, (2s - 1)s_0).$$

Temos,

$$\tilde{T}_v(0) = H(v, -s_0) = T_v(-s_0)$$

e

$$\tilde{T}_v(1) = H(v, (2 - 1)s_0) = H(v, s_0) = T_v(s_0).$$

Além disso, pela Proposição 2.1 e pelo Lema 3.3,

$$\gamma(c) \leq \max_{s \in [0, 1]} F(\tilde{T}_v(s)) = \max_{s \in [0, 1]} F(H(v, (2s - 1)s_0)) = F(v),$$

o que é uma contradição. Portanto, temos o resultado. ■

Combinando os Lemas 3.1 e 3.4, deduzimos que

$$\gamma(c) = \inf_{u \in V(c)} F(u) = \inf_{u \in \kappa(c)} F(u).$$

Isso mostra em particular que $\gamma(c)$ é uma quantidade bem definida que depende apenas do valor de $c > 0$.

Lema 3.5 *Assuma que valem (H1), (H2) e (H3). Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}^+$ tais que*

$$c^2 = c_1^2 + \dots + c_k^2.$$

Então, obtemos que

$$\gamma(c) < \gamma(c_1) + \dots + \gamma(c_k).$$

Demonstração. Primeiramente, devemos provar a seguinte afirmação:

Afirmção 3.2 *Para todo $c > 0$ e para todo $\theta > 1$, temos $\gamma(\theta c) < \theta^2 \gamma(c)$.*

Esse resultado é uma consequência da Proposição 2.1 e dos Lemas 3.1, 3.3 e 3.4.

De fato, seja $(u_n) \subset V(c)$ satisfazendo $F(u_n) \rightarrow \gamma(c)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, definamos $s(n, \theta) \in \mathbb{R}$ como o valor tal que

$$H(\theta u_n, s(n, \theta)) \in V(\theta c).$$

A existência e a unicidade de $s(n, \theta)$ é garantida pelo Lema 3.3, basta tomar $u = \theta u_n$.

Como $H(\theta u_n, s(n, \theta)) \in V(\theta c)$, mediante (H2) e do Lema 3.3,

$$\begin{aligned} \gamma(\theta c) &= \inf_{u \in V(\theta c)} F(u) \leq F(H(\theta u_n, s(n, \theta))) \\ &\Rightarrow \gamma(\theta c) \leq F(H(\theta u_n, s(n, \theta))), \end{aligned}$$

porém, sabemos que

$$\gamma(\theta c) \leq F(H(\theta u_n, s(n, \theta))) = \frac{1}{2} \|\nabla H(\theta u_n, s(n, \theta))\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(H(\theta u_n, s(n, \theta)))(x) dx.$$

Contudo, observe que

$$H(\theta u_n, s(n, \theta)) = e^{\frac{sN}{2}} \theta u_n(e^s x) = \theta e^{\frac{sN}{2}} u_n(e^s x) = \theta H(u_n, s(n, \theta)).$$

Assim, por (2.5) e pela Observação 3.1,

$$\begin{aligned} \gamma(\theta c) &\leq \frac{1}{2} \|\nabla(\theta H(u_n, s(n, \theta)))\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(\theta H(u_n, s(n, \theta)))(x) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \theta^2 \|\nabla H(u_n, s(n, \theta))\|_H^2 - \theta^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} G(H(u_n, s(n, \theta)))(x) dx \\ &< \frac{1}{2} \theta^2 \|\nabla H(u_n, s(n, \theta))\|_H^2 - \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G(H(u_n, s(n, \theta)))(x) dx \\ &< \theta^2 \left\{ \frac{1}{2} \|\nabla H(u_n, s(n, \theta))\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(H(u_n, s(n, \theta)))(x) dx \right\} \\ &= \theta^2 F(H(u_n, s(n, \theta))) \\ &\leq \theta^2 F(H(u_n, 0)) \\ &= \theta^2 \left(\|\nabla u_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n(x)) dx \right) \\ &= \theta^2 F(u_n). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\gamma(\theta c) \leq \theta^2 F(u_n).$$

Então, passando ao limite quando $n \rightarrow +\infty$, em virtude do Lema 2.5, obtemos que

$$\gamma(\theta c) \leq \theta^2 \gamma(c),$$

e a igualdade pode ocorrer apenas se, quando $n \rightarrow +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(H(u_n, s(n, \theta)))(x) dx \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Assumamos, por contradição, que (3.22) vale. Fazendo uso de (2.5) e (2.6), quando $n \rightarrow +\infty$, decorre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(\theta u_n, s(n, \theta)))(x) dx \leq (\beta - 2) \int_{\mathbb{R}^N} G(H(\theta u_n, s(n, \theta)))(x) dx \rightarrow 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(\theta u_n, s(n, \theta)))(x) dx \geq (\alpha - 2) \int_{\mathbb{R}^N} G(H(\theta u_n, s(n, \theta)))(x) dx \rightarrow 0.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(\theta u_n, s(n, \theta)))(x) dx \rightarrow 0. \quad (3.23)$$

Assim, desde que $H(\theta u_n, s(n, \theta)) \in V(\theta c)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, deduzimos que, pelo Lema 3.1, quando $n \rightarrow +\infty$,

$$\|\nabla(H(\theta u_n, s(n, \theta)))\|_H^2 = \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(\theta u_n, s(n, \theta)))(x) dx \rightarrow 0,$$

isto é,

$$\|\nabla(H(\theta u_n, s(n, \theta)))\|_H^2 \rightarrow 0. \quad (3.24)$$

Pela definição de F , levando em consideração (3.22) e (3.24),

$$F(H(\theta u_n, s(n, \theta))) = \frac{1}{2} \|\nabla(H(\theta u_n, s(n, \theta)))\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(H(u_n, s(n, \theta)))(x) dx \rightarrow 0.$$

Isso contradiz o fato obtido na Proposição 2.1, que $\gamma(c) > 0$ para todo $c > 0$. Portanto, a desigualdade estrita é válida. Estabelecendo a afirmação.

Dando seguimento à demonstração, suponhamos primeiro que $k = 2$ e $c_1 \geq c_2$. Como $\gamma(\theta c) < \theta^2 \gamma(c)$, temos, com $\theta = \frac{c}{c_1} > 1$, que

$$\begin{aligned} \gamma(\theta c_1) < \frac{c^2}{c_1^2} \gamma(c_1) &\Rightarrow \gamma\left(\frac{c}{c_1} c_1\right) < \frac{c^2}{c_1^2} \gamma(c_1) \\ &\Rightarrow \gamma(c) < \frac{c^2}{c_1^2} \gamma(c_1) \\ &\Rightarrow \gamma(c) < \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_1^2} \gamma(c_1) \\ &\Rightarrow \gamma(c) < \gamma(c_1) + \frac{c_2^2}{c_1^2} \gamma(c_1). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Agora, sendo $\theta = \frac{c_1}{c_2} > 1$,

$$\begin{aligned}\gamma(\theta c_2) < \theta^2 \gamma(c_2) &\Rightarrow \gamma\left(\frac{c_1}{c_2} c_2\right) < \frac{c_1^2}{c_2^2} \gamma(c_2) \\ &\Rightarrow \gamma(c_1) < \frac{c_1^2}{c_2^2} \gamma(c_2).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Usando (3.26) em (3.25),

$$\gamma(c) < \gamma(c_1) + \frac{c_2^2}{c_1^2} \gamma(c_1) \Rightarrow \gamma(c) < \gamma(c_1) + \gamma(c_2).$$

Suponha agora que $k \geq 2$, $c_1 \geq \dots \geq c_k$ e que a afirmação vale para $k - 1$. Seja $\tilde{c} = \sqrt{c_1^2 + \dots + c_{k-1}^2}$. Então, para $\theta = \frac{c}{\tilde{c}} > 1$

$$\begin{aligned}\gamma(\theta \tilde{c}) < \theta^2 \gamma(\tilde{c}) &\Rightarrow \gamma\left(\frac{c}{\tilde{c}} \tilde{c}\right) < \frac{c^2}{\tilde{c}^2} \gamma(\tilde{c}) \\ &\Rightarrow \gamma(c) < \frac{c^2}{\tilde{c}^2} \gamma(\tilde{c}) \\ &\Rightarrow \gamma(c) < \frac{c_1^2 + \dots + c_k^2}{c_1^2 + \dots + c_{k-1}^2} \gamma(\tilde{c}) \\ &\Rightarrow \gamma(c) < \left(\frac{c_1^2 + \dots + c_{k-1}^2}{\tilde{c}^2} + \frac{c_k^2}{\tilde{c}^2}\right) \gamma(\tilde{c}),\end{aligned}$$

isto é,

$$\gamma(c) < \gamma(\tilde{c}) + \frac{c_k^2}{\tilde{c}^2} \gamma(\tilde{c}).\tag{3.27}$$

Sendo $\theta = \frac{\tilde{c}}{c_k}$, temos

$$\gamma(\theta c_k) < \theta^2 \gamma(c_k) \Rightarrow \gamma(\tilde{c}) < \frac{\tilde{c}^2}{c_k^2} \gamma(c_k).\tag{3.28}$$

Usando (3.28) em (3.27),

$$\begin{aligned}\gamma(c) < \gamma(\tilde{c}) + \frac{c_k^2}{\tilde{c}^2} \gamma(\tilde{c}) &\Rightarrow \gamma(c) < \gamma(\tilde{c}) + \gamma(c_k) \\ &\Rightarrow \gamma(c) < \gamma(c_1) + \dots + \gamma(c_k).\end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração. ■

3.2 Convergência da sequência (PS) para $N \geq 1$

Aqui, seja $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{\lambda_c}{2} \|u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx.$$

Partindo do fato de que

$$\lambda_n = \frac{1}{\|v_n\|_H^2} \left\{ \|\nabla v_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n(x))v_n(x)dx \right\} \rightarrow \lambda_c,$$

e pela limitação de (v_n) , obtemos que

$$\begin{aligned} I(v_n) &= \frac{1}{2} \|\nabla v_n\|_H^2 - \frac{\lambda_c}{2} \|v_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \\ &= \frac{1}{2} (\|\nabla v_n\|_H^2 - \lambda_c \|v_n\|_H^2) - \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \\ &= \frac{1}{2} (\|\nabla v_n\|_H^2 - \lambda_c \|v_n\|_H^2 - \lambda_n \|v_n\|_H^2 + \lambda_n \|v_n\|_H^2) - \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n(x))dx \\ &= \frac{1}{2} (\|\nabla v_n\|_H^2 - \lambda_n \|v_n\|_H^2 - (\lambda_c - \lambda_n) \|v_n\|_H^2) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} (g(v_n)v_n - \tilde{G}(v_n))dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\|\nabla v_n\|_H^2 - \left(\|\nabla v_n\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n)v_n dx \right) - (\lambda_c - \lambda_n) \|v_n\|_H^2 \right] \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} (g(v_n)v_n - \tilde{G}(v_n))dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(v_n)v_n dx - (\lambda_c - \lambda_n) \|v_n\|_H^2 \right) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n)v_n dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(v_n)dx \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_c - \lambda_n) \|v_n\|_H^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(v_n)dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, fica claro que

$$I(v_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(v_n(x))dx + o_n(1),$$

em que $o_n(1) := \frac{1}{2} (\lambda_c - \lambda_n) \|v_n\|_H^2$ é uma ordem pequena.

Assim, pelo Lema 2.5, item (c), vemos que, passando a subsequência,

$$I(v_n) \rightarrow d > 0.$$

Já que também temos

$$-\Delta v_n - \lambda_n v_n - g(v_n) \rightarrow 0 \text{ em } E^*, \quad (3.29)$$

daí, sendo $\varphi \in E$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \varphi dx - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n) \varphi dx = o_n(1),$$

como $\lambda_n \rightarrow \lambda_c$ e

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n \varphi dx = \lambda_c \int_{\mathbb{R}^N} v_n \varphi dx + o_n(1),$$

chegamos que

$$I'(v_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \varphi dx - \lambda_c \int_{\mathbb{R}^N} v_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(v_n) \varphi dx = o_n(1).$$

Dessa forma, concluímos que

$$I'(v_n) = -\Delta v_n - \lambda_c v_n - g(v_n) \rightarrow 0 \text{ em } E^*.$$

Portanto, (v_n) é uma sequência de Palais-Smale para I em um nível $d > 0$, pois

- $I(v_n) \rightarrow d > 0$, e
- $I'(v_n) \rightarrow 0$ em E^* .

Provaremos a convergência da sequência (v_n) através de um estudo das sequências Palais-Smale de I em níveis positivos.

Proposição 3.1 *Suponha que (H1) e (H2) valham. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência limitada tal que*

- (i) $I(u_n) \rightarrow c > 0$;
- (ii) $I'(u_n) \rightarrow 0$ em E^* .

Então, existem $k \in \mathbb{N}$, k funções $u^1, \dots, u^k \in E$ e uma subsequência (ainda denotada por (u_n)) tais que:

- (1) $I'(u^i) = 0$, para $i = 1, \dots, k$;
- (2) $\|\nabla u_n\|_H^2 \rightarrow \|\nabla u^1\|_H^2 + \dots + \|\nabla u^k\|_H^2$ quando $n \rightarrow +\infty$;
- (3) $\|u_n\|_H^2 \rightarrow \|u^1\|_H^2 + \dots + \|u^k\|_H^2$ quando $n \rightarrow +\infty$;
- (4) $I(u_n) \rightarrow I(u^1) + \dots + I(u^k)$;
- (5) Se $k = 1$, então existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $u_n(x) - u^1(x - y_n) \rightarrow 0$ em E .

Demonstração. Veja Benci e Cerami (1987) [9] e Buffoni (1992) [13]. ■

Teorema 3.1 *Para $N \geq 1$, sob as hipóteses (H1), (H2) e (H3), a equação*

$$-\Delta u = \lambda u + g(u), \text{ em } \mathbb{R}^N$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$, admite um par $(u_c, \lambda_c) \in E \times \mathbb{R}$ de soluções fracas tais que

$$\|u_c\|_H = c \text{ e } \lambda_c < 0.$$

Demonstração. Voltemos a sequência $(v_n) \subset S(c)$ de Palais-Smale. Pela Proposição 3.1, existem v^1, v^2, \dots, v^k tais que, passando a subsequência, temos

$$\|v_n\|_H^2 \rightarrow \sum_{i=1}^k \|v^i\|_H^2, \quad \|\nabla v_n\|_H^2 \rightarrow \sum_{i=1}^k \|\nabla v^i\|_H^2, \quad I(v_n) \rightarrow \sum_{i=1}^k I(v^i).$$

Desde que,

$$I(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{\lambda_c}{2} \|u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx$$

temos,

$$I(u) = F(u) - \frac{\lambda_c}{2} \|u\|_H^2.$$

Sendo assim,

$$F(v_n) = I(v_n) - \frac{\lambda_c}{2} \|v_n\|_H^2 \rightarrow \sum_{i=1}^k I(v^i) - \frac{\lambda_c}{2} \sum_{i=1}^k \|v^i\|_H^2 = \sum_{i=1}^k F(v^i),$$

ou seja,

$$F(v_n) \rightarrow \sum_{i=1}^k F(v^i).$$

Além disso, como $(v_n) \subset S(c)$, temos $\|v_n\|_H = c$, desse modo

$$\sum_{i=1}^k \|v^i\|_H^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_H^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} c^2 \Rightarrow c^2 = \sum_{i=1}^k \|v^i\|_H^2.$$

Pelo Lema 2.5 e da unicidade do limite, segue

$$\gamma(c) = \sum_{i=1}^k F(v^i).$$

Provaremos que $k = 1$. Definindo $c^i = \|v^i\|_H$, temos que v^i é um ponto crítico de F restrito a $S(c^i)$. De fato, por $v^i \in S(c^i)$, temos

$$I_{|_{S(c^i)}}(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{\lambda_c}{2} (c^i)^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx.$$

Dessa maneira, sendo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$I'_{|_{S(c^i)}}(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(u)\varphi dx.$$

Pela Proposição 3.1, $I'_{|_{S(c^i)}}(u) = 0$, então segue que $F'_{|_{S(c^i)}} = 0$.

Por contradição, assumamos $k \geq 2$. Então, a partir da caracterização variacional

$$\gamma(c) = \inf_{u \in \kappa(c)} F(u)$$

(o que é válido para todo $c > 0$), temos necessariamente

$$\begin{aligned}\gamma(c^i) &= \inf_{v \in \kappa(c^i)} F(v) \leq F(v^i) \\ \Rightarrow \gamma(c) &= \sum_{i=1}^k F(v^i) \geq \sum_{i=1}^k \gamma(c_i).\end{aligned}$$

Mas isso não é possível por causa do Lema 3.5. Consequentemente, $k = 1$.

Agora, a função v^1 satisfaz

$$F(v^1) = \gamma(c), \quad \|v^1\|_H = c, \quad -\Delta v^1 - \lambda_c v^1 - g(v^1) = 0.$$

Com efeito, pelo Lema 2.5,

$$F(v_n) \rightarrow \gamma(c)$$

e acabamos de mostrar que

$$F(v_n) \rightarrow F(v^1).$$

Pela unicidade do limite,

$$F(v^1) = \gamma(c),$$

ou seja, v^1 é uma solução de $(P)_c$ com $\lambda_c < 0$. Isso termina a prova do Teorema. ■

Capítulo 4

Resultados de Bifurcação para problemas com norma prescrita

Neste capítulo, analisaremos, para as soluções de $(P)_c$ obtidas nos Capítulos 2 e 3, o comportamento das quantidades $\|\nabla u_c\|_H^2$ e λ_c em relação ao valor de $c > 0$.

Teorema 4.1 *Assuma que valem (H1) e (H2). Então, existem duas constantes $c_0 > 0$ e $K > 0$ tais que, para qualquer solução (u, λ) de $(P)_c$, com $0 < c < c_0$, temos*

$$(1) \quad \|\nabla u\|_H \geq Kc^{-\frac{\alpha+2}{\beta-6}}, \text{ se } N = 1;$$

$$(2) \quad \|\nabla u\|_H \geq Kc^{-\frac{2}{\beta-4}}, \text{ se } N = 2;$$

$$(3) \quad \|\nabla u\|_H \geq Kc^{-\frac{\beta(2-N)+2N}{N(\beta-2)-4}}, \text{ se } N \geq 3.$$

Além disso, em cada caso, $\lambda \leq -\frac{K}{c^2}\|\nabla u\|_H^2$.

Demonstração. Do Lema 3.1, sabemos que todas as soluções de $(P)_c$ pertencem a $V(c)$, então

$$\|\nabla u\|_H^2 = \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u(x)) dx.$$

Por (2.5) e (2.6), deduzimos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_H^2 &= \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u(x)) dx \leq \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\beta - 2)G(u(x)) dx \\ &\Rightarrow \|\nabla u\|_H^2 \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Introduzindo a observação (2.17) em (4.1),

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_H^2 &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx \\ &\leq C_1 M \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\alpha + |u|^\beta dx \\ &= C_0 \left(\|u\|_{L^\alpha}^\alpha + \|u\|_{L^\beta}^\beta \right),\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\nabla u\|_H^2 \leq C_0 \left(\|u\|_{L^\alpha}^\alpha + \|u\|_{L^\beta}^\beta \right). \quad (4.2)$$

Neste ponto, aplicaremos a desigualdade de Gagliardo-Sobolev (A.1) no caso $N = 1$ e $p = \alpha$ e $p = \beta$, a fim de obter para $0 < c < 1$

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_H^2 &\leq C_0 \left\{ \|u\|_{L^\alpha}^\alpha + \|u\|_{L^\beta}^\beta \right\} \\ &\leq C_0 \left\{ k^\alpha \|\nabla u\|_H^{\gamma\alpha} \|u\|_H^{(1-\gamma)\alpha} + \|u\|_{L^\beta}^\beta \right\} \\ &= C_0 \left\{ k^\alpha \|\nabla u\|_H^{\frac{\alpha-2}{2}} c^{\frac{\alpha+2}{2}} + \|u\|_{L^\beta}^\beta \right\} \\ &\leq C_0 \left\{ k^\alpha \|\nabla u\|_H^{\frac{\alpha-2}{2}} c^{\frac{\alpha+2}{2}} + k^\beta \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-2}{2}} c^{\frac{\beta+2}{2}} \right\} \\ &\leq C_0 \left\{ k^\beta \|\nabla u\|_H^{\frac{\alpha-2}{2}} c^{\frac{\alpha+2}{2}} + k^\beta \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-2}{2}} c^{\frac{\beta-2}{2}} \right\} \\ &= C \left\{ \|\nabla u\|_H^{\frac{\alpha-2}{2}} c^{\frac{\alpha+2}{2}} + \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-2}{2}} c^{\frac{\beta+2}{2}} \right\} \\ &\leq C \left\{ \|\nabla u\|_H^{\frac{\alpha-2}{2}} c^{\frac{\alpha+2}{2}} + \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-2}{2}} c^{\frac{\alpha+2}{2}} \right\} \\ &\leq C c^{\frac{\alpha+2}{2}} \left\{ \|\nabla u\|_H^{\frac{\alpha-2}{2}} + \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-2}{2}} \right\},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\nabla u\|_H^2 \leq C c^{\frac{\alpha+2}{2}} \left\{ \|\nabla u\|_H^{\frac{\alpha-2}{2}} + \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-2}{2}} \right\}, \text{ se } N = 1. \quad (4.3)$$

Por conseguinte, para $N = 2$, faremos também $p = \alpha$ e $p = \beta$, obtendo

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_H^2 &\leq C_0 \left\{ \|u\|_{L^\alpha}^\alpha + \|u\|_{L^\beta}^\beta \right\} \\ &\leq C_0 \left\{ k^\alpha \|\nabla u\|_H^{\gamma\alpha} \|u\|_H^{(1-\gamma)\alpha} + k^\beta \|\nabla u\|_H^{\gamma\beta} \|u\|_H^{(1-\gamma)\beta} \right\} \\ &= C_0 \left\{ k^\alpha \|\nabla u\|_H^{\alpha-2} c^2 + k^\beta \|\nabla u\|_H^{\beta-2} c^2 \right\} \\ &\leq C_0 \left\{ k^\beta \|\nabla u\|_H^{\alpha-2} c^2 + k^\beta \|\nabla u\|_H^{\beta-2} c^2 \right\} \\ &\leq C c^2 \left\{ \|\nabla u\|_H^{\alpha-2} + \|\nabla u\|_H^{\beta-2} \right\}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\|\nabla u\|_H^2 \leq Cc^2 \left\{ \|\nabla u\|_H^{\alpha-2} + \|\nabla u\|_H^{\beta-2} \right\}, \text{ se } N = 2. \quad (4.4)$$

Ademais, para $N \geq 3$, fazemos, novamente, $p = \alpha$ e $p = \beta$ na desigualdade de Gagliardo-Sobolev,

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_H^2 &\leq C_0 \left\{ \|u\|_{L^\alpha}^\alpha + \|u\|_{L^\beta}^\beta \right\} \\ &\leq C_0 \left\{ k^\alpha \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\alpha-2)} \|u\|_H^{\alpha - \frac{N}{2}(\alpha-2)} + k^\beta \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\beta-2)} \|u\|_H^{\beta - \frac{N}{2}(\beta-2)} \right\} \\ &\leq C_0 \left\{ k^\beta \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\alpha-2)} c^{\alpha - \frac{N}{2}(\alpha-2)} + k^\beta \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\beta-2)} c^{\beta - \frac{N}{2}(\beta-2)} \right\} \\ &\leq C_0 \left\{ k^\beta \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\alpha-2)} c^{\beta - \frac{N}{2}(\beta-2)} + k^\beta \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\beta-2)} c^{\beta - \frac{N}{2}(\beta-2)} \right\} \\ &= Cc^{\beta - \frac{N}{2}(\beta-2)} \left\{ \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\alpha-2)} + \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\beta-2)} \right\}. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\|\nabla u\|_H^2 \leq Cc^{\beta - \frac{N}{2}(\beta-2)} \left\{ \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\alpha-2)} + \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\beta-2)} \right\}, \text{ se } N \geq 3. \quad (4.5)$$

Como $\frac{N}{2}(\beta - 2) \geq \frac{N}{2}(\alpha - 2) > 2$ para cada $N \geq 1$, essas desigualdades só podem ser verdadeiras se $\|\nabla u\|_H \geq 1$. Então, temos

$$\|\nabla u\|_H^2 \leq Cc^{\frac{\alpha+2}{2}} \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-2}{2}}, \quad \text{se } N = 1, \quad (4.6)$$

$$\|\nabla u\|_H^2 \leq Cc^2 \|\nabla u\|_H^{\beta-2}, \quad \text{se } N = 2, \quad (4.7)$$

$$\|\nabla u\|_H^2 \leq Cc^{\beta - \frac{N}{2}(\beta-2)} \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\beta-2)}, \quad \text{se } N \geq 3. \quad (4.8)$$

De (4.6), conseguimos

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_H^2 \leq Cc^{\frac{\alpha+2}{2}} \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-2}{2}} &\Rightarrow C^{-1} c^{-\frac{\alpha-2}{2}} \leq \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-2}{2}-2} \\ &\Rightarrow C^{-1} c^{-\frac{\alpha-2}{2}} \leq \|\nabla u\|_H^{\frac{\beta-6}{2}} \\ &\Rightarrow \left(C^{-1} c^{-\frac{\alpha+2}{2}} \right)^{\frac{2}{\beta-6}} \leq \|\nabla u\|_H, \end{aligned}$$

implicando que,

$$\|\nabla u\|_H \geq K c^{-\frac{\alpha+2}{\beta-6}}, \text{ se } N = 1. \quad (4.9)$$

De (4.7),

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_H^2 \leq Cc^2 \|\nabla u\|_H^{\beta-2} &\Rightarrow C^{-1} c^{-2} \leq \|\nabla u\|_H^{\beta-4} \\ &\Rightarrow (C^{-1} c^{-2})^{\frac{1}{\beta-4}} \leq \|\nabla u\|_H \\ &\Rightarrow K c^{-\frac{2}{\beta-4}} \leq \|\nabla u\|_H, \end{aligned}$$

donde conseguimos

$$\|\nabla u\|_H \geq K c^{-\frac{2}{\beta-4}} \text{ se } N = 2. \quad (4.10)$$

Finalmente, de (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_H^2 \leq C c^{\beta - \frac{N}{2}(\beta-2)} \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\beta-2)} &\Rightarrow C^{-1} c^{-(\beta - \frac{N}{2}(\beta-2))} \leq \|\nabla u\|_H^{\frac{N}{2}(\beta-2) - 2} \\ &\Rightarrow \left(C^{-1} c^{-(\frac{2\beta - N(\beta-2)}{2})} \right)^{\frac{2}{N(\beta-2) - 4}} \leq \|\nabla u\|_H \\ &\Rightarrow K c^{-\left(\frac{\beta(2-N)+2N}{N(\beta-2)-4}\right)} \leq \|\nabla u\|_H, \end{aligned}$$

Como consequência,

$$\|\nabla u\|_H \geq K c^{-\frac{\beta(2-N)+2N}{N(\beta-2)-4}}, \text{ se } N \geq 3. \quad (4.11)$$

Provando a primeira parte.

A seguir, investigaremos o comportamento de λ . Como (u, λ) satisfaz (2.1), temos

$$\|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))u(x)dx = \lambda \|u\|_H^2 \Rightarrow \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))u(x)dx = \lambda c^2,$$

ou seja,

$$\lambda = \frac{1}{c^2} \left\{ \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))u(x)dx \right\}. \quad (4.12)$$

Levando em consideração que $u \in V(c)$ e por (2.6),

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta-2} \tilde{G}(u) \leq g(u)u &\Rightarrow - \int_{\mathbb{R}^N} g(u)u dx \leq - \frac{\beta}{\beta-2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u) dx \\ &\Rightarrow - \int_{\mathbb{R}^N} g(u)u dx \leq - \frac{\beta}{\beta-2} \frac{2}{N} \|\nabla u\|_H^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Inserindo (4.13) em (4.12),

$$\lambda \leq \frac{1}{c^2} \left\{ \|\nabla u\|_H^2 - \frac{2\beta}{N(\beta-2)} \|\nabla u\|_H^2 \right\} \Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{c^2} \left\{ 1 - \frac{2\beta}{N(\beta-2)} \right\} \|\nabla u\|_H^2.$$

Como $M := \left\{ 1 - \frac{2\beta}{N(\beta-2)} \right\} < 0$, então $L := -M > 0$, daí podemos concluir que

$$\lambda \leq -\frac{L}{c^2} \|\nabla u\|_H^2. \quad \blacksquare$$

Corolário 4.1 Para $c > 0$, seja (u_c, λ_c) a solução de $(P)_c$ obtida no Teorema 2.1, se $N \geq 2$, ou no Teorema 3.1, se $N = 1$. Então, quando $c \rightarrow 0^+$, temos

$$\begin{cases} \|\nabla u_c\|_H \rightarrow +\infty \\ \lambda_c \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Demonstração. Basta mostrarmos que cada expoente de c no Teorema 4.1 é negativo.

No primeiro caso do Teorema 4.1, observe que de (H2), temos $6 < \alpha \leq \beta$. Assim,

$$\alpha > 6 \Rightarrow \alpha + 2 > 8 > 0$$

e também

$$\beta \geq \alpha > 6 \Rightarrow \beta - 6 > 0$$

implicando que

$$\frac{\alpha + 2}{\beta - 6} > 0.$$

Dessa maneira, $-\frac{\alpha+2}{\beta-6} < 0$, então quando $c \rightarrow 0^+$ temos $\|\nabla u\|_H \rightarrow +\infty$.

De modo análogo, para $N = 2$, perceba que

$$\begin{aligned} 4 < \alpha \leq \beta &\Rightarrow 0 < \alpha - 4 \leq \beta - 4 \\ &\Rightarrow \frac{2}{\beta - 4} > 0. \end{aligned}$$

Assim, $-\frac{2}{\beta-4} < 0$, conseqüentemente, quando $c \rightarrow 0^+$ temos $\|\nabla u\|_H \rightarrow +\infty$.

Por conseguinte, para $N \geq 3$

$$\begin{aligned} 0 < 2 < \frac{2N + 4}{N} < \alpha \leq \beta &\Rightarrow 0 > 2(2 - N) > \frac{2N + 4}{N}(2 - N) > \alpha(2 - N) \geq \beta(2 - N) \\ &\Rightarrow 0 > \beta(2 - N) \\ &\Rightarrow 2N > \beta(2 - N) + 2N, \end{aligned}$$

isto é,

$$\beta(2 - N) + 2N > 0.$$

Além disso,

$$0 < \frac{2N + 4}{N} \leq \beta < \frac{2N}{N - 2}.$$

Note que

$$N(\beta - 2) - 4 = N\beta - 2N - 4,$$

daí

$$\begin{aligned} \beta \geq \frac{2N + 4}{N} > 0 &\Rightarrow N\beta > 2N + 4 > 0 \\ &\Rightarrow N\beta > 2N + 4 \\ &\Rightarrow N\beta - 2N - 4 > 0. \end{aligned}$$

Donde, $-\frac{\beta(2-N)+2N}{N(\beta-2)-4} < 0$. Concluindo que, quando $c \rightarrow 0^+$, $\|\nabla u\|_H \rightarrow +\infty$.

Finalmente, lembre-se que

$$\lambda_c \leq -\frac{K}{c^2} \|\nabla u\|_H^2.$$

Como $\|\nabla u\|_H^2 \rightarrow +\infty$ quando $c \rightarrow 0$, segue que $\lambda_c \rightarrow -\infty$. ■

Agora, estudaremos o comportamento de soluções de $(P)_c$ quando $c \rightarrow +\infty$. Para isso, necessitaremos de (H3). Primeiramente, estabeleceremos um resultado preliminar.

Lema 4.1 *Assuma que (H1) e (H2) são verdadeiros e tome $v \in V(1)$ arbitrário, porém fixo. Para todo $c > 0$, seja $s_c := s(c) \in \mathbb{R}$ tal que $H(cv, s_c) \in V(c)$. Então, existe uma função $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $\mu(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ de tal forma que*

$$\|\nabla H(cv, s_c)\|_H \leq e^{-\mu(c)}.$$

Demonstração. Para facilitar a notação, usaremos apenas s para referirmos a s_c . A partir dos Lemas 2.1 e 2.2, sabemos que s existe. Primeiramente, note que, pelo que vimos no Lema 2.1,

$$\|\nabla H(cv, s)\|_H^2 = e^{2s} \|\nabla(cv)\|_H^2 = c^2 e^{2s} \|\nabla v\|_H^2.$$

Desde que $H(cv, s) \in V(c)$ e por (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} c^2 e^{2s} \|\nabla v\|_H^2 &= \|\nabla H(cv, s)\|_H^2 \\ &= \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(H(cv, s)) dx \\ &\geq \frac{N}{2} (\alpha - 2) \int_{\mathbb{R}^N} G(H(cv, s)) dx. \end{aligned}$$

Entretanto, desde que $H(cv, s) = e^{\frac{sN}{2}} cv(e^s x)$, concluí-se que

$$\begin{aligned} c^2 e^{2s} \|\nabla v\|_H^2 &\geq \frac{N}{2} (\alpha - 2) \int_{\mathbb{R}^N} G(H(cv, s)) dx \\ &= \frac{N}{2} (\alpha - 2) \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{sN}{2}} cv(e^s x)) dx. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = e^s x$ na integral do lado direito de (4.14), obtemos

$$c^2 e^{2s} \|\nabla v\|_H^2 \geq \frac{N}{2} (\alpha - 2) e^{-sN} \int_{\mathbb{R}^N} G(e^{\frac{sN}{2}} cv(y)) dy,$$

agora, por (2.5),

$$\begin{aligned} c^2 e^{2s} \|\nabla v\|_H^2 &\geq \frac{N(\alpha-2)}{2} e^{-Ns} \min\{(ce^{\frac{N}{2}s})^\alpha, (ce^{\frac{N}{2}s})^\beta\} \int_{\mathbb{R}^N} G(v(y)) dy \\ &\geq e^{-Ns} \min\{(ce^{\frac{N}{2}s})^\alpha, (ce^{\frac{N}{2}s})^\beta\} \int_{\mathbb{R}^N} G(v(y)) dy. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} c^2 e^{2s} \|\nabla v\|_H^2 &\geq e^{-Ns} \min\{(ce^{\frac{N}{2}s(c)})^\alpha, (ce^{\frac{N}{2}s(c)})^\beta\} \int_{\mathbb{R}^N} G(v(y)) dy \\ &\Rightarrow c^2 e^{(2+N)s} \geq C \min\{(ce^{\frac{N}{2}s(c)})^\alpha, (ce^{\frac{N}{2}s(c)})^\beta\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que $C = C \left(\|\nabla v\|_H^2, \int_{\mathbb{R}^N} G(v(y)) dy \right)$.

Mostraremos que, para $c > 0$ suficientemente grande, $ce^{\frac{Ns}{2}} < 1$. Assuma, por contradição, que $ce^{\frac{Ns}{2}} \geq 1$ com $c > 0$ grande. Então, de (4.15) deduzimos que

$$\begin{aligned} c^2 e^{2s} e^{Ns} &\geq C c^\alpha e^{\frac{Ns}{2}\alpha} \Rightarrow c^2 c^{-\alpha} e^{2s} e^{Ns} \geq C e^{\frac{Ns}{2}\alpha} \\ &\Rightarrow c^{(2-\alpha)} \geq C e^{\frac{Ns}{2}\alpha} e^{-2s} e^{-Ns} \\ &\Rightarrow c^{2-\alpha} \geq C e^{(\frac{N\alpha}{2}-2-N)s}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Por (H2),

$$\begin{aligned} 0 < \frac{2(N+2)}{N} < \alpha &\Rightarrow 0 < N+2 < \frac{N\alpha}{2} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{N\alpha}{2} - N - 2. \end{aligned}$$

Dessa forma, isso mostra que $s \rightarrow -\infty$ quando $c \rightarrow +\infty$ e, em particular, para $c > 0$ grande, podemos assumir $s < 0$. Agora, (4.16) é equivalente a

$$\begin{aligned} c^{2-\alpha} &\geq C e^{(\frac{N\alpha}{2}-2-N)s} \Rightarrow c^{2-\alpha} \leq C e^{(-\frac{N\alpha}{2}+2+N)s} \\ &\Rightarrow c \leq C e^{(2+N-\frac{N\alpha}{2})\frac{s}{\alpha-2}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Recorrendo a (4.17) e o fato de que $ce^{\frac{Ns(c)}{2}} \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} c &\leq C e^{(2+N-\frac{N\alpha}{2})\frac{s}{\alpha-2}} \Rightarrow ce^{\frac{Ns}{2}} \leq C e^{[(2+N-\frac{N\alpha}{2})\frac{s}{\alpha-2}] e^{\frac{Ns}{2}}} \\ &\Rightarrow 1 \leq C e^{[(2+N-\frac{N\alpha}{2})\frac{1}{\alpha-2} + \frac{N}{2}]s}. \end{aligned}$$

Mas isso não é possível para $c > 0$ grande, pois $s(c) < 0$ e o coeficiente é positivo. Com isso, concluimos que $ce^{s\frac{N}{2}} < 1$.

Por conseguinte, levando isso em consideração em (4.15), vemos que $s \rightarrow -\infty$ quando $c \rightarrow +\infty$. E analogamente,

$$c \leq Ce^{(2+N-\frac{N\beta}{2})\frac{s(c)}{\beta-2}}. \quad (4.18)$$

Assim, pela desigualdade acima,

$$\begin{aligned} \|\nabla H(cv, s)\|_H &= Ce^s \|\nabla v\|_H \\ &\leq Ce^{(2+N-\frac{N\beta}{2})\frac{s}{\beta-2}} e^s \|\nabla v\|_H \\ &= Ce^{(N-\frac{N\beta}{2}+\beta)\frac{s}{\beta-2}} \|\nabla v\|_H. \end{aligned}$$

Fazendo $\mu(t) = (N - \frac{N\beta}{2} + \beta) \frac{s}{\beta-1}$, temos o resultado desejado. \blacksquare

Teorema 4.2 *Assuma que valem (H1), (H2) e (H3). Para $c > 0$, seja (u_c, λ_c) a solução de $(P)_c$ obtida no Teorema 3.1. Então, quando $c \rightarrow +\infty$, temos*

$$\begin{cases} \|\nabla u_c\|_H \rightarrow 0 \\ \lambda_c \rightarrow 0. \end{cases}$$

Demonstração. Primeiramente, vejamos a seguinte afirmação, que será utilizada na demonstração.

Afirmção 4.1 *Existem duas constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que, para todas as soluções fracas $(u, \lambda) \in \mathbf{E}$ de (2.1), temos*

$$F(u) \leq K_2 \|\nabla u\|_H^2 \quad (4.19)$$

e

$$F(u) \geq K_1 \|\nabla u\|_H^2. \quad (4.20)$$

Observa-se que,

$$F(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx \leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2,$$

em particular,

$$F(u) \leq K_2 \|\nabla u\|_H^2.$$

Além disso, como $(u, \lambda) \in \mathbf{E}$ é solução fraca, temos de (H2),

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(u) u dx &= \lambda \|u\|_H^2 \\ \Rightarrow \|\nabla u\|_H^2 - \lambda \|u\|_H^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} g(u) u dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \alpha G(u(x)) dx \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx &\leq \frac{1}{\alpha} (\|\nabla u\|_H^2 - \lambda \|u\|_H^2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dessa forma,

$$F(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{1}{\alpha} (\|\nabla u\|_H^2 - \lambda \|u\|_H^2),$$

como consequência,

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|\nabla u\|_H^2 + \frac{\lambda}{\alpha} \|u\|_H^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|\nabla u\|_H^2, \end{aligned}$$

Novamente por (H2),

$$\alpha > \frac{2N+4}{N} > 2 \Rightarrow \alpha > 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha},$$

daí, tomando

$$K_1 := \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} > 0,$$

obtem-se,

$$F(u) \geq K_1 \|\nabla u\|_H^2.$$

Conclui-se, portanto, que a afirmação é verdadeira.

Agora, seja $v \in V(1)$ arbitrário, porém fixado. Combinando o Lema 4.1 e (4.19),

$$0 \leq F(H(cv, s)) \leq K_2 \|\nabla H(cv, s)\|_H^2 \leq K_2 e^{-\mu(c)},$$

então

$$F(H(cv, s)) \rightarrow 0, \text{ quando } c \rightarrow +\infty. \quad (4.22)$$

Agora, seja (u_c, λ_c) a solução de $(P)_c$ obtida no Teorema 3.1, tem-se

$$F(u_c) = \inf_{u \in V(c)} F(u),$$

assim,

$$F(u_c) = \inf_{u \in V(c)} F(u) \leq F(H(cv, s)),$$

e, usando (4.20) e (4.22), inferimos que

$$K_1 \|\nabla u_c\|_H^2 \leq F(u_c) \leq F(H(cv, s)),$$

quando $c \rightarrow +\infty$, teremos por (4.22)

$$\|\nabla u_c\|_H^2 \leq \frac{1}{K_1} F(H(cv, s)) \rightarrow 0,$$

consequentemente,

$$\|\nabla u_c\|_H \rightarrow 0, \text{ quando } c \rightarrow +\infty.$$

Agora, recordando que

$$\lambda_c = \frac{1}{c^2} \left\{ \|\nabla u_c\|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(u_c(x))u_c(x)dx \right\},$$

e, por (2.6) e o Lema 3.1, temos

$$\lambda_c \geq \frac{1}{c^2} \left\{ \|\nabla u_c\|_H^2 - \frac{\alpha}{\alpha-2} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{G}(u_c(x))dx \right\} \Rightarrow \lambda_c \geq \frac{1}{c^2} \left\{ \|\nabla u_c\|_H^2 - \frac{\alpha}{\alpha-2} \frac{2}{N} \|\nabla u_c\|_H^2 \right\},$$

dessa forma,

$$\lambda_c \geq \frac{1}{c^2} \left\{ 1 - \frac{2\alpha}{N(\alpha-2)} \right\} \|\nabla u_c\|_H^2.$$

Assim, levando em consideração que $\lambda_c < 0$ para todo $c > 0$ (Lema 2.5, item (d)), temos

$$\frac{1}{c^2} \left\{ 1 - \frac{2\alpha}{N(\alpha-2)} \right\} \|\nabla u_c\|_H^2 \leq \lambda_c < 0,$$

quando $c \rightarrow +\infty$,

$$\lambda_c \rightarrow 0^-.$$

■

Apêndice A

Resultados utilizados

Proposição A.1 (Teorema de Baire) *Sejam M um espaço métrico completo. Todo conjunto magro em M tem interior vazio. Equivalentemente: se $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, em que cada F_n é fechado em M e tem interior vazio, então $\text{int } F = \emptyset$. Ou então: toda interseção enumerável de abertos densos é um subconjunto denso em M .*

Demonstração. Veja Proposição 19 em [21], página 198. ■

Proposição A.2 *Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(0) = 0$ e seja $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. Seja u satisfazendo*

$$-\Delta u = f(u), \text{ em } D'(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, assuma que

$$u \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^N), \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ e } F(u) \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Então, u satisfaz

$$(N-2)\|\nabla u\|_{L^2}^2 = 2N \int_{\mathbb{R}^N} F(u(x))dx.$$

Demonstração. Veja a Proposição 1 em [11], página 320. ■

Lema A.1 *Seja Ω um domínio em \mathbb{R}^N e seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que, para quase todo $x \in \Omega$, vale*

$$|g(x, u)| \leq a(x)(1 + |u|)$$

com uma função $a \in L_{loc}^{N/2}(\Omega)$. Seja também $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ uma solução fraca da equação

$$-\Delta u = g(\cdot, u) \text{ em } \Omega.$$

Então, $u \in L_{loc}^q(\Omega)$ para qualquer $q < \infty$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $a \in L^{N/2}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$ para qualquer $q < \infty$.

Demonstração. Ver [34], Lema B3. ■

Lema A.2 Se $f, g \in X'$, então

$$\sup_{\substack{\langle g, y \rangle = 0 \\ \|y\|=1}} \langle f, y \rangle = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f - \lambda g\|.$$

Demonstração. Veja o Lema 5.11 em [35], página 87. ■

Desigualdade A.1 (Desigualdade de Gagliardo-Sobolev) Seja $p \in [2, \frac{2}{N-2}]$ se $N \geq 3$ e $p \geq 2$ se $N = 1, 2$. Então

$$\|u\|_{L^p} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_{L^2}^\gamma \|u\|_{L^2}^{1-\gamma} \quad (\text{A.1})$$

com $\gamma = N \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)$. Para $N \geq 3$, este é um resultado padrão.

Demonstração. Ver [12], página 233. ■

Teorema A.1 (Desigualdade de Hölder). Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, então

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Em particular, $fg \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja [12], página 96. ■

Teorema A.2 Seja $N \geq 2$. Então, a seguinte imersão é compacta:

$$H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),$$

onde $2 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $2 < p < +\infty$ se $N = 2$.

Demonstração. Veja [29]. ■

Teorema A.3 Dado um espaço de Hilbert E , se $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional (não necessariamente linear) fracamente contínuo que é de classe C^1 , então F' , ou seja, a função derivada de F transforma sequência fracamente convergente em sequência fortemente convergente, isto é,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E \Rightarrow F'(u_n) \rightarrow F'(u) \text{ em } E^*. \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. Esse teorema é uma releitura do Teorema 5.2 em [20], página 74. Sendo assim, a demonstração segue como em [20]. ■

A seguir, exibiremos algumas definições sobre a condição de Palais-Smale. Seja X um espaço de Banach e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$.

Definição A.1 Diremos que $(x_n) \subset X$ é uma sequência (PS) no nível $c \in \mathbb{R}$, denotada por $(PS)_c$, quando

$$f(x_n) \rightarrow c \quad e \quad f'(x_n) \rightarrow 0.$$

Definição A.2 Dado $c \in \mathbb{R}$, diz-se que f satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c , abreviadamente, a condição $(PS)_c$, se para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que $f(x_n) \rightarrow c$ e $f'(x_n) \rightarrow 0$ admite uma subsequência convergente.

Apêndice B

Solução normalizada para o caso potência com massa subcrítica

O conteúdo desta seção foi obtido com base em notas de aula, veja [1].

Aqui, vamos encontrar uma solução para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u, & \mathbb{R}^N \quad (N \geq 3), \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde $a > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro desconhecido que vai aparecer como um multiplicador de Lagrange, com $p \in (2, 2 + \frac{4}{N})$, em que

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3, \\ +\infty, & \text{se } N = 1, 2. \end{cases}$$

Considerando o problema (B.1), temos que a solução de tal problema está relacionado ao seguinte problema de minimização:

Problema 1. Fixado o funcional $J : E \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx$$

encontrar um ponto crítico restrito ao vínculo

$$S(a) = \{u \in E; \|u\|_H = a\},$$

no caso L^2 -subcrítico o funcional é *limitado inferiormente*, enquanto no caso L^2 -super-crítico o mesmo é *ilimitado inferiormente*.

Vejam os,

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx. \quad (\text{B.2})$$

Note que, pela desigualdade de Gagliardo-Sobolev (veja Desigualdade A.1), temos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{1}{p} \|u\|_{L^p}^p \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{C}{p} \|u\|_H^{(1-\gamma)p} \|\nabla u\|_H^{\gamma p} \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - \frac{C}{p} a^{(1-\gamma)p} \|\nabla u\|_H^{\gamma p}, \end{aligned}$$

implicando em

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 - C_1 (\|\nabla u\|_H^2)^{\frac{\gamma p}{2}}.$$

Recordando que $\gamma = N \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)$, tem-se que

$$0 < \frac{\gamma p}{2} < 1 \quad \iff \quad 2 < p < 2 + \frac{4}{N}.$$

Definindo a função $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \frac{1}{2}t - C_1 t^{\frac{\gamma p}{2}},$$

tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty.$$

Logo, existe $M > 0$ tal que

$$h(t) \geq -M, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto,

$$J(u) \geq h(\|\nabla u\|_H^2) \geq -M, \quad \forall u \in S(a),$$

mostrando que J é limitado inferiormente. Na verdade, o raciocínio acima mostra o seguinte lema:

Lema B.1 *O funcional J é coercivo em $S(a)$.*

Corolário B.1 *Toda sequência minimizante de J em $S(a)$ é limitada.*

Observação B.1 *Aqui temos a análise do caso supercrítico que fizemos nos capítulos.*

Para entender a geometria do funcional J sobre $S(a)$ precisamos usar a seguinte função:

$$H : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$$

$$(u, t) \mapsto H(u, t) = t^{\frac{N}{2}} u(tx).$$

Para $t \neq 0$, mostra-se que

$$\|H(u, t)\|_H = \|u\|_H, \quad \forall t \neq 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla H(u, t)|^2 dx = t^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad t \neq 0.$$

Assim, fixado $u \in S(a)$, temos para $t > 0$

$$J(H(u, t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla H(u, t)|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |H(u, t)|^p dx$$

$$= \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{t^{\frac{(p-2)N}{2}}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Veja que

$$\frac{(p-2)N}{2} > 2 \Leftrightarrow p > 2 + \frac{4}{N}$$

e nesse caso tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} J(H(u, t)) = -\infty,$$

mostrando que J não é limitado sobre $S(a)$.

Vamos agora mostrar como resolver problema subcrítico por minimização com

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx$$

sobre

$$S(a) = \left\{ u \in E; \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2 \right\}.$$

Lembrando que, a imersão $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ é compacta, onde $2 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $2 < p < +\infty$ se $N = 2$. Desde que J é limitado inferiormente em $S(a)$, pelo Postulado de Dedekind fica bem definido o número real

$$J_\infty = \inf_{u \in S(a)} J(u).$$

Pela definição de ínfimo existe $(u_n) \subset S(a)$ tal que

$$J(u_n) \rightarrow J_\infty.$$

Sem perda de generalidade podemos supor que

$$u_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pois

$$|u_n| \in S(a) \quad \text{e} \quad J(|u_n|) = J(u_n).$$

Além disso, pela simetrização de Schwarz temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(|u|^*)^2| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla|u||^2 dx, \quad \| |u_n|^* \|_H = \| u_n \|_H$$

e

$$\| |u_n|^* \|_{L^p} = \| u_n \|_{L^p}, \quad |u_n|^* \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$$

implicando que

$$J_\infty \leq J(|u_n|^*) \leq J(|u_n|) = J_\infty + o_n(1),$$

ou seja, $(|u_n|^*)$ é uma sequência minimizante também para J sobre $S(a)$. Tendo isso em mente, no que segue vamos supor que (u_n) é uma sequência radialmente simétrica. Sendo J coercivo, segue que (u_n) é limitada em E , pois $\|\nabla u_n\|_H$ é limitado e $\|u_n\|_H = a$. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } E$$

e

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in (2, 2^*).$$

Em particular

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N),$$

implicando que

$$J_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) \geq J(u).$$

Se $u \in S(a)$, podemos concluir que

$$J(u) = J_\infty$$

e neste caso, pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u) = \lambda \Psi'(u),$$

onde

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx, \quad S(a) = \Psi^{-1} \left(\left\{ \frac{a^2}{2} \right\} \right).$$

Daí, u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u, & \mathbb{R}^N \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = a^2. \end{cases}$$

Observação B.2 *Pela identidade de Pohozaev, temos $\lambda < 0$.*

Observação B.3 *Podemos concluir que $J_\infty < 0$.*

Considerando a função

$$H(w, t) = t^{\frac{N}{2}} w(tx), \quad w \in S(a),$$

temos

$$J(H(w, t)) = \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx - \frac{t^{\frac{(p-2)N}{2}}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^p dx$$

para $t \approx 0^+$ e $0 < p < 2 + \frac{4}{N}$ temos $J(H(w, t)) < 0$, em que $H(w, t) \in S(a)$.

Lema B.2 *Note que $u \neq 0$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $u = 0$ e recorde que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N),$$

isto é,

$$u_n \rightarrow 0 \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Desde que

$$\begin{aligned} J_\infty &= \lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

chegando a um absurdo, pois $J_\infty < 0$. ■

Agora, mostraremos que $u \in S(a)$.

Demonstração. Usando o Princípio Variacional de Ekeland, podemos supor que

$$\|J'(u_n)\|_* \rightarrow 0$$

isto é,

$$\|J'(u_n) - \lambda_n \Psi'(u_n)\|_{E^*} \rightarrow 0$$

para alguma $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$. Assim,

$$J'(u_n)u_n = \lambda_n \Psi'(u_n)u_n + o(1)$$

que é equivalente a

$$J'(u_n)u_n = \lambda_n a^2 + o_n(1),$$

ou seja,

$$\lambda_n = \frac{1}{a^2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \right) + o_n(1)$$

mostrando que (λ_n) é limitada. Vamos supor então que

$$\lambda_n \rightarrow \lambda_*.$$

Desde que

$$J'(u_n)v = \lambda_* \Psi'(u_n)v + o_n(1), \quad \forall v \in E,$$

obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx = \lambda_* \int_{\mathbb{R}^N} uv dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv dx, \quad (u > 0)$$

ou seja, u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_* u + u^{p-1}, & \mathbb{R}^N \\ u > 0 & \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Aplicando a Identidade de Pohozaev temos que $\lambda_* < 0$. Da igualdade

$$J'(u_n)u_n = \lambda_n a^2 + o_n(1),$$

temos

$$J'(u_n)u_n = \lambda_* a^2 + o_n(1),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda_* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx + o_n(1).$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda_* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx + o_n(1)$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda_* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \lambda_* \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + o_n(1).$$

Observando que

$$\|u\|_* = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \lambda_* \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{1/2}$$

é uma norma em E equivalente a norma usual, vemos que

$$\|u_n\|_* \rightarrow \|u\|_* \Rightarrow u_n \rightarrow u \quad \text{em } E,$$

ou seja, $u \in S(a)$.

■

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, C.O. Existência de soluções normalizadas. Trujillo: Universidad Nacional de Trujillo, setembro de 2023. Notas de aula. [86](#)
- [2] ALVES, C.O.; JI, C.; MIYAGAKI, O. H. Multiplicity of normalized solutions for a Schrödinger equation with critical growth in \mathbb{R}^N . *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 61, n. 18, 2021. [3](#)
- [3] ALVES, C.O.; JI, C.; MIYAGAKI, O. H. Normalized solutions for a Schrödinger equation with critical growth in \mathbb{R}^N . *Calc. Var. Partial Differential Equations*, v.61, p.24, 2021. [3](#)
- [4] ALVES, C.O.; LEDESMA, C.E.T. Una introducción a las ecuaciones elípticas. Trujillo, Peru: Universidad Nacional de Trujillo, 2017. [52](#)
- [5] AMBROSETTI, A.; BERTOTTI, M.L. Homoclinics for second order conservative systems. *Partial Differential Equations and Related Subjects* (ed. M. MIRANDA), Pitman Research Note in Math. Ser, Itália, p.21-37,1992. [5](#)
- [6] AMBROSETTI, A.; STRUWE, M. Existence of steady vortex rings in an ideal fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol.108, p.97-109, 1989. [5](#)
- [7] BARTSCH, T.; MOLLE, R.; RIZZI, M.; VERZINI, G. Normalized solutions of mass supercritical Schrödinger equations with potential, *Communications in Partial Differential Equations*, vol.46, n.9, p.1729-1756, 2021. [3](#)
- [8] BARTSCH, T.; VALERIOLA, S. Normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations, *Arch. Math.* 100 (1), p.75-83, 2012. [3](#)

- [9] BENCI, V.; CERAMI, G. Positive Solutions of Some Nonlinear Elliptic Problems in Exterior Domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 99, n. 4, p. 283-300, 1987. [70](#)
- [10] BERESTYCKI, H.; LIONS, P.L. Nonlinear scalar field equations I. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Alemanha, v.82, n.4, p. 313-346, 1983. [3](#), [31](#)
- [11] BERESTYCKI, H.; LIONS, P.L. Nonlinear scalar field equations II. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Alemanha, v.82, n.4, p. 347-376, 1983. [3](#), [83](#)
- [12] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Nova York: Springer, 2010. [84](#)
- [13] BUFFONI, B. Un problème variationnel fortement indéfini sans compacité. *Orientalor: Stuart, C.A.* 1992. Doutorado em Matemática - Ecole Polytechnique Federal de Lausanne, Lausanne, 1992. [6](#), [70](#)
- [14] CAZENAVE, T.; LIONS, P.L. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys.*, v.85, p.549,561, 1982. [3](#)
- [15] CHENG, X.; MIAO, C.; ZHAO, L. Global well-posedness and scattering for nonlinear Schrödinger equations with combined nonlinearities in the radial case. *Journal of Differential Equations*, v.261, n.6, p.2881-2934, 2014. [3](#)
- [16] FIGUEIREDO, D. G. de. *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*. Berlin: Springer, 1989. [9](#), [10](#), [16](#)
- [17] JEANJEAN, L. Existence Of Solutions With Prescribed Norm For Semilinear Elliptic Equations. *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, v.28, n.10, p. 1633-1659, 1997. [3](#), [4](#), [6](#)
- [18] JEANJEAN, L.; LU, S-S. A mass supercritical problem revisited. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, vol.59, 2021. [3](#)
- [19] KAVIAN, O. *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*. Heidelberg: Springer, 1993.
- [20] KRASNOSELSKII, M. A. *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Operators*. London: Pergamon Press, 1964. [84](#)

- [21] LIMA, E.L. Espaços métricos.1.ed.Rio de Janeiro: IMPA, 2014. [83](#)
- [22] LIONS, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, Part I. Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-h, vol.1, n^o 2, p. 109-145, 1984. [3](#), [6](#)
- [23] LIONS, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, Part II. Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-h, vol.1, n^o 2, p. 223-283, 1984. [3](#), [6](#)
- [24] MAWHIN, J.; WILLEM, M. Critical points theory and Hamiltonian systems. Nova York: Springer-Verlag, 1989. [31](#)
- [25] POHOZAEV, S. Eigenfunctions of the equations $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Soviet Math. Dokl., vol.6, p.1408,1411, 1965. [51](#)
- [26] RABINOWITZ, P.H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence: American Mathematical Society, 1986. [31](#)
- [27] SHIBATA, M. Stable standing waves of nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinear term. Manuscripta Math, v.143, n.1-2, p.221–237, 2014. [3](#)
- [28] SOAVE, N. Normalized ground states for the NLS equation with combined nonlinearities. J. Funct. Anal. v.279, 2020. [3](#)
- [29] STRAUSS, W.A. Existence of solitary waves in higher dimensions. Commun. math. Phys., v.55, 149-162, 1977. [5](#), [84](#)
- [30] STUART, C.A. Bifurcation for Dirichlet Problems Without Eigenvalues. Proceedings of the London Mathematical Society, v.s3-45, p.169-192, 1982. [3](#)
- [31] STUART, C.A. Bifurcation for variational problems when the linearization has no eigenvalues. J. Funct. Anal., v.38, n.2, p.169-167, 1980.
- [32] STUART, C.A. Bifurcation from the continuous spectrum in L^2 -theory of elliptic equations on \mathbb{R}^N . In Recent Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Liguori, Napoli, 1981. [4](#)
- [33] STUART, C.A. Bifurcation from the essential spectrum for some non-compact nonlinearities. Math. Appl. Sci., v.11, n.4, p.525-542, 1989. [4](#)

- [34] STRUWE, M. Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. 4 ed., Berlin: Springer-Verlag, 2008. [84](#)
- [35] WILLEM, M. Minimax Theorems. Boston: Birkhäuser, 1996. [84](#)