Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Joice Daisyelle Bezerra Silva [†]

Espaços de Sobolev com Pesos e Problemas de Evolução Degenerados

Campina Grande - PB

2025

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Joice Daisyelle Bezerra Silva

Espaços de Sobolev com Pesos e Problemas de Evolução Degenerados

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa Análise e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo

Campina Grande - PB

2025

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

S586e Silva, Joice Daisyelle Bezerra.

Espaços de Sobolev com pesos e problemas de evolução degenerados / Joice Daisyelle Bezerra Silva. – 2025.

73 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo".

Referências.

1. Espaços de Sobolev com Peso. 2. Problemas Degenerados. 3. Teoria de Semigrupos. I. Araújo, Bruno Sérgio Vasconcelos de. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Espaços de Sobolev com pesos e problemas de evolução degenerados

por

Joice Daisyelle Bezerra Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 19/12/2025

Cládio Odair Pereira da Silva

Prof. Dr. Cládio Odair Pereira da Silva - UEPB

Examinador externo - UEPB

Pammella Queiroz de Souza

Prof. Dra. Pammella Queiroz de Souza - UFCG

Examinadora interna - UFCG

Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo.

Prof. Dr. Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Dezembro - 2025

Agradecimentos

À Deus, que me permitiu chegar até aqui. Aos meus pais, Jota e Dorinha, por todo incentivo, apoio e por tudo que fizeram para que isso fosse possível. Ao meu irmão, Diego que me acompanhou ao longo de todo esse processo e por toda a parceria.

Ao meu orientador, Dr. Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo, por todas as contribuições ao longo do mestrado e no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus professores da graduação que tanto contribuíram com a minha jornada acadêmica e que me incentivaram a chegar até aqui, em especial os professores Cládio e Natan.

Aos membros da banca, Dra. Pammella Queiroz de Souza e Dr. Cládio Odair Pereira da Silva por aceitarem fazer parte da banca e por todas as contribuições para com este trabalho.

À minha turma de mestrado, viver isso ao lado de vocês deixou cada dificuldade mais leve.

Aqueles que torceram e torcem por mim, aos colegas e amigos que fiz ao longo dessa jornada, muito obrigada!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Dedicatória

Aos meus pais, Jota e Dorinha.

Resumo

No presente trabalho, utilizamos a Teoria de Semigrupos para obter resultados de boa colocação para os seguintes problemas degenerados:

$$\begin{cases} u_t - (a(x)u_x)_x + c(x)u = f(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ \begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)u_x(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u_{tt} - (a(x)u_x)_x + c(x)u = f(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ \begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)u_x(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

Aqui a função $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável e degenera no ponto de fronteira $x = 0$, isto é, $a(0) = 0$ e $a(x) > 0$ para todo $x \in (0,1]$. Além disso, consideramos os dados u_0, u_1 e f em espaços de Sobolev adequados que determinam a regularidade da solução.

Palavras-chave: Espaços de Sobolev com peso, Problemas degenerados, Teoria de semigrupos.

Abstract

In this work we make use of the semigroup theory to get well-posedness results for the following degenerate problems:

$$\begin{cases} u_t - (a(x)u_x)_x + c(x)u = f(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ \begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)u_x(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} u_{tt} - (a(x)u_x)_x + c(x)u = f(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ \begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)u_x(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

Here, the function $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ is continuously differentiable and degenerates at the boundary pont $x = 0$, i. e. $a(0) = 0$ and $a(x) > 0$ for all $x \in (0,1]$. Furthermore, we consider the data u_0, u_1 and f in suitable Sobolev spaces that indicates the regularity property of the solutions.

Key Words: Wheighted Sobolev spaces, Degenerate problems, Semigroup theory

SUMÁRIO

LISTA DE SIMBOLOS

- $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções testes.
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ denota o espaço das distribuições.
- $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$.
- $\|\cdot\|$ denota a norma em $L^2(\Omega)$.
- $W^{m,p}(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev.
- $\|u\|_{m,p}$ denota a norma no espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$
- $H_a^1(0,1), H_a^2(0,1)$ denotam os espaços de Sobolev com peso.
- $\|\cdot\|_{1,a}$ denota a norma em $H_a^1(0,1)$.
- $\|\cdot\|_{2,a}$ denota a norma em $H_a^2(0,1)$.
- $\lfloor\cdot\rfloor$ denota a função piso.
- $\hookrightarrow$ denota uma imersão contínua.
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota imersão compacta.

INTRODUÇÃO

O estudo de problemas de evolução degenerados tem se intensificado nos últimos anos, devido aos desafios impostos pela maneira como o problema degenera. Nesses modelos, a perda de propriedades clássicas, como a elipticidade uniforme, impede a aplicação direta da teoria padrão, o que exige o estudo de novas propriedades para lidarmos com tais problemas.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado. Um *operador diferencial elíptico* é uma aplicação da forma

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{1}$$

em que os coeficientes a^{ij}, b^i, c estão em espaços adequados. Tais operadores são amplamente abordados na literatura de equações diferenciais parciais como pode ser visto em [11] e [6]. Dizemos que um operador diferencial elíptico é *uniformemente elíptico* quando existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \theta|\xi|^2$$

para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Considere agora o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} Au = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Se o operador A é uniformemente elíptico, então para qualquer $f \in L^2(\Omega)$ o problema (2) possui uma única solução fraca, a qual pode ser obtida usando o Teorema de Lax-Milgram conforme apresentado em [6].

No caso unidimensional, dizemos que o operador elíptico (1) *degenera no ponto* $x_0 \in \overline{\Omega}$, quando $a(x_0) = 0$. EDPs com este tipo de operadores são chamadas de *equações degeneradas*.

Como mencionam Kohn e Nirenberg em [12], o estudo de tais equações foi iniciado por Gaetano Fichera, que obteve estimativas em normas L^p e provou a existência de soluções generalizadas.

De acordo com Oleinik [15], os trabalhos de Francesco Tricomi despertaram o interesse no estudo de equações elípticas que degeneram em pontos da fronteira do domínio. Como menciona [15], em conexão com abordagens de análise funcional para o estudo de equações elípticas que degeneram na fronteira surgiu uma teoria de espaços de funções com normas ponderadas, para os quais foram obtidos resultados de imersões análogos ao dos espaços de Sobolev.

A mesma discussão também pode ser feita para equações de evolução, em que consideramos operadores *parabólicos* ou *hiperbólicos* que degeneram em pontos de $\overline{\Omega}$. Nessa linha podemos citar [7], que estuda um problema parabólico unidimensional que degenera em toda a fronteira do domínio $\Omega = (0,1)$. Neste trabalho, os autores definem espaços de Sobolev com peso e aplicam a teoria de semigrupo para obter soluções fraca para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t = (a(x)u_x)_x - b(x)u, \quad x \in (0,1), \ t > 0, \\ \lim\limits_{x\to 0} a(x)u_x(x,t) = \lim\limits_{x\to 1} a(x)u_x(x,t) = 0 \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in (0,1). \end{cases} \tag{3}$$

em que $a \in C^1([0,1])$ é uma função real estritamente positiva em $(0,1)$ tal que $a(0) = a(1) = 0$ e b é uma função real em $C([0,1])$.

Neste trabalho pretendemos estudar equações de evolução unidimensionais que degeneram em um ponto da fronteira. Mais especificamente, consideraremos $\Omega = (0,1)$ e uma função $a \in C([0,1])$ tal que $a(x) > 0$, para todo $x \in (0,1]$ e $a(0) = 0$. Dessa forma, nossa atenção estará voltada para o operador elíptico degenerado

$$Lu := (a(x)u_x)_x + c(x)u, \tag{4}$$

em que $c \in L^\infty((0,1))$ e $T > 0$.

Seguindo os passos de [7], vamos definir espaços de Sobolev com pesos adequados $H_a^1(0,1)$ e $H_a^2(0,1)$ para lidar com o operador (4).

Uma característica peculiar dos espaços $H_a^1(0,1$ e $H_a^2(0,1)$ que definiremos ao longo do trabalho é que a forma como a função a se comporta próximo do ponto de degeneração $x_0 = 0$, pode determinar a existência ou não de um operador traço para estes espaços. Isto certamente tem um impacto nas condições de contorno que podem ser consideradas em problemas associados ao operador (4).

Definição 0.1. Dizemos que a função $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ é **fracamente degenerada** em $x = 0$ se valem:

(i) $a \in C([0,1];\mathbb{R}) \cap C^1((0,1];\mathbb{R})$, $a(x) > 0$ em $(0,1]$ e $a(0) = 0$;

(ii) Existe $K \in [0,1)$ tal que $xa'(x) \leqslant Ka(x)$, para todo $x \in [0,1]$.

Ademais, dizemos que a função $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ é **fortemente degenerada** em $x = 0$ se valem:

(i) $a \in C^1([0,1])$, $a(x) > 0$ em $(0,1]$ e $a(0) = 0$;

(ii) Existe $K \in [1,2)$ tal que $xa'(x) \leqslant Ka(x)$, para todo $x \in [0,1]$;

$$\text{(iii)} \begin{cases} \text{Se } K \in (1,2), \text{ então existe } \theta \in (1,K] \text{ tal que } \Phi_\theta \text{ é não decrescente perto de } 0; \\ \text{Se } K = 1, \text{ então existe } \theta \in (0,1) \text{ tal que } \Phi_\theta \text{ é não decrescente perto de } 0, \end{cases}$$

em que

$$\Phi_\theta(x) := \frac{a(x)}{x^\theta}.$$

Conforme pode ser visto nos estudos de [2, 4, 8, 9], é possível definir um operador traço em $x = 0$ apenas no caso em que a é fracamente degenerada. Dessa forma, no caso em que a é fortemente degenerada, não podemos considerar condições de contorno do tipo Dirichlet em problemas associados ao operador (4). Estes mesmos trabalhos sugerem, portanto, que para o caso fortemente degenerado, seja adotada uma condição do tipo Newmann com peso em $x = 0$, a saber

$$\lim_{x\to 0} a(x)u_x(x) = 0.$$

Dada toda essa discussão, agora podemos estabelecer os problemas que serão alvo deste trabalho:

$$\begin{cases} u_t - (a(x)u_x)_x + c(x)u = f(t,x), & (t,x) \in Q_T, \\ \begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)u_x(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{5}$$

e

$$
\begin{cases}
u_{tt} - (a(x)u_x)_x + c(x)u = f(t,x), & (t,x) \in Q_T, \\
\begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)u_x(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\
u(0,x) = u_0(x), \; u_t(0,x) = u_1(x), & x \in (0,1),
\end{cases} \tag{6}
$$

em que $Q_T = (0,T) \times (0,1)$, $c \in L^\infty(0,1)$, e os dados u_0, u_1 e f serão considerados em espaços adequados que podem determinar a regularidade da solução.

A título de aplicações, podemos citar a equação de Black Scholes que modela o preço de compra e venda de opções (no caso parabólico) e a modelagem da propagação de ondas em meios não homogêneos (no caso hiperbólico).

Esta dissertação está dividida da seguinte forma:

No capítulo 1, enunciamos os principais resultados envolvendo os espaços tradicionais de Sobolev.

No capítulo 2, definiremos os espaços de Sobolev com peso $H^1_a(0,1)$ e $H^2_a(0,1)$ e estudaremos algumas propriedades destes espaços.

No capítulo 3, abordamos alguns resultados da Teoria de Semigrupos ver [5, 16], focando nos resultados que serão posteriormente utilizados para encontrar soluções dos problemas parabólico e hiperbólicos com coeficientes degenerados.

Por fim, no capítulo 4, estudaremos a existência e unicidade de solução tanto para o problema (5) quanto para (6).

CAPÍTULO 1

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Neste Capítulo apresentaremos um breve panorama das principais definições e resultados sobre espaços de Sobolev. Nenhum resultado deste capítulo será demonstrado, o leitor interessado poderá encontrar tais demonstrações em [6] e [13]. Nosso objetivo é estabelecer a base necessária para introduzirmos os espaços de Sobolev com peso que serão devidamente estudados no capítulo seguinte.

1.1 O Espaço de Funções Testes

Em todo este capítulo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será sempre um conjunto aberto.

Definição 1.1. Definimos o suporte de uma função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$ como sendo

$$\operatorname{supp} u = \Omega \backslash \mathcal{O},$$

em que

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

e $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ é a família de todos os subconjuntos abertos de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$.

Observação 1.1. Se u é contínua em Ω, temos

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Dadas $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis em Ω e $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, valem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(u+v) &\subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v;\\ \operatorname{supp}(uv) &\subset \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v;\\ \operatorname{supp}(\lambda u) &= \operatorname{supp} u.\end{aligned}$$

Ademais, se $\Omega = \mathbb{R}^n$ temos também que

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\tau_y u) &= y + \operatorname{supp} u;\\ \operatorname{supp}(u * v) &\subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v},\end{aligned}$$

em que $(\tau_y u)(x) = u(x-y)$ é a translação de u por y e $(u*v)$ denota o produto convolução

$$(u*v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)\,dy.$$

Notação: $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty : \operatorname{supp} u \text{ é compacto em } \Omega\}$.

Definição 1.2. Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $u \in C_0^\infty(\Omega)$ quando existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

(i) $\operatorname{supp} u_n,\ \operatorname{supp} u \subset K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

(ii) $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ uniformemente em K, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado de *espaço das funções testes* e é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Exemplo 1.1. Seja $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{se } |x| < 1\\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1.\end{cases}$$

Então $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\operatorname{supp}\rho = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant 1\}$.

No que segue, seja

$$M = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx,$$

em que ρ a função dada no Exemplo 1.1. Para cada $m \in \mathbb{N}$ considere a função $\rho_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho_m(x) = M^{-1} m^n \rho(mx)$$

Valem as seguintes propriedades:

(i) $0 \leqslant \rho_m(x) \leqslant M^{-1} m^n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\operatorname{supp} \rho_m = \overline{B_{\frac{1}{m}}(0)}$, em que $B_{\frac{1}{m}}(0)$ denota a bola aberta de centro zero e raio $\frac{1}{m}$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_m(x)\, dx = 1,\ \forall\, m \in \mathbb{N}$.

A sequência de funções testes (ρ_m) é chamada de *sequência regularizante* e desempenha um papel crucial na teoria dos espaços de Sobolev.

Proposição 1.1. $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Demonstração: Ver [13], Corolário 1.1. ∎

1.2 O Espaço das Distribuições

Definição 1.3. Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear contínuo $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Cabe enfatizar, que a continuidade mencionada na definição acima, é em relação à topologia do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$, a qual foi definida na seção anterior.

Notação: $\mathcal{D}'(\Omega) = \{f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R};\, f$ é uma distribuição sobre $\Omega\}$.

Definição 1.4. Diz-se que $(f_n) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ *converge* para $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ quando, para toda função teste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a sequência $f_n(\varphi)$ converge para $f(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

O espaço vetorial $\mathcal{D}'(\Omega)$, munido da noção de convergência acima, é chamado de *espaço das distribuições* sobre Ω.

Exemplo 1.2. Dada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, o funcional linear $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$T_u(\varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx,$$

é uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.1. [Du Bois-Reymond] Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver [13], Proposição 1.4. ∎

Do Lema de Du Bois-Reymond segue que T_u está univocamente determinada por u sobre Ω em $L^1_{loc}(\Omega)$. Dessa forma, identifica-se u com a distribuição T_u por ela definida. Neste caso, ao interpretarmos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ como uma distribuição, muitas vezes usamos a notação $\langle u, v\rangle$ em vez de $u(v)$, em que $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Proposição 1.2. Para $1 \leqslant p < \infty$, tem-se a seguinte cadeia de imersões

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

com cada inclusão densa na seguinte.

Demonstração: Ver [13], Observação 1.4. ■

Definição 1.5. Dada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definimos a *derivada de ordem* α de T como sendo o funcional linear $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Como T é contínua na topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$ é imediato que $D^\alpha T$ também é contínua na mesma topologia. Dessa forma $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donde fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T, \end{aligned}$$

a qual é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Vale ressaltar que a derivada de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, apesar de sempre existir no sentido das distribuições, a mesma não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 1.3. Seja x_0 um ponto de Ω e δ_{x_0} a forma bilinear definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ do seguinte modo

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A forma linear δ_{x_0} é uma distribuição sobre Ω, denominada distribuição de Dirac ou medida de Dirac concentrada em x_0. Quando $x_0 = 0$ escreve-se δ_0. É possível mostrar (ver [13]) que não existe $v \in L^1_{loc}(0,1)$ tal que $\delta_0 = T_v$.

Agora seja u uma função definida em $\mathbb{R}$ dada por:

$$u(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Esta função pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. De fato, tem-se

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

1.3 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção algumas propriedades geométricas dos Espaços de Sobolev e alguns resultados de imersão e dualidade.

Sejam $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Conforme vimos no Exemplo 1.3, dada qualquer $u \in L^p(\Omega)$, não há garantia de que as derivadas no sentido das distribuições pertencem ao espaço $L^1_{loc}(\Omega)$. Isto motiva a definição dos seguintes conjuntos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall\, |\alpha| \leqslant m\},$$

os quais são denominados de *espaços de Sobolev*.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma de u por

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} \, |D^\alpha u(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Proposição 1.3. Para quaisquer $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $m \in \mathbb{N}$, o espaço de Sobolev $(W^{m,p}(\Omega), \| \cdot \|_{m,p})$ é um espaço de Banach. Ademais, se $1 < p < \infty$, então $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.

Demonstração: Ver [13], Proposição 2.1 e Teorema 2.3. ■

No caso particular em que $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$. Ademais, o espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Proposição 1.4. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Demonstração: Ver [13], Teorema 2.1. ■

Proposição 1.5. $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Demonstração: Ver [13]. ■

As Proposições 1.4 e 1.5 levantam a questão sobre a densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, a qual não ocorre em geral. Isto nos leva à definição de mais um espaço

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\| \cdot \|_{m,p}},$$

isto é, $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Por fim, se $1 \leqslant p < \infty$ e $1 < q \leqslant \infty$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Denota-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Finalizamos este capítulo apresentando os principais resultados de imersões dos espaços de Sobolev.

Proposição 1.6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^m e $1 \leqslant p < \infty$. Então temos as seguintes imersões compactas:

(i) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, em que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$;

(ii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$;

(iii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, em que $k = \lfloor m - \frac{n}{p} \rfloor$.

Demonstração: Ver [13], Teorema 2.20. ∎

Teorema 1.1 (Teorema de Rellich Kondrachov)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e $1 \leqslant p < \infty$. Valem

(i) Se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*)$, em que $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;

(ii) Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$;

(iii) Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [13], Teorema 2.19. ∎

1.4 Semigrupos

Nesta seção, iremos enunciar alguns dos resultados da teoria de semigrupos, os quais serão utilizados no decorrer do trabalho.

Ao longo desta seção $(X, \|\cdot\|)$ será sempre um espaço de Banach.

1.4.1 Conceitos Iniciais

Definição 1.6. Dizemos que uma família $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados ou semigrupo fortemente contínuo se

(i) $S(0)u = u, \quad \forall\, u \in X$;

(ii) $S(t+s)u = S(t)S(s)u, \quad \forall\, t, s \geqslant 0,\ u \in X$;

(iii) A aplicação $t \mapsto S(t)u$ é contínua de $[0, \infty)$ em X.

Ademais, dizemos que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um C_0-semigrupo de contração se, além disso,

$$\|S(t)\| \leqslant 1.$$

Definição 1.7. Dado um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, considere o subespaço vetorial

$$D(A) := \left\{ u \in X;\ \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe em } X \right\}.$$

A aplicação linear $A : D(A) \to X$ dada por

$$Au := \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A).$$

é chamada de gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$.

Teorema 1.2. Seja $A : D(A) \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Valem:

(i) $D(A)$ é denso em X;

(ii) $A : D(A) \to X$ é um operador fechado;

(iii) $S(t)u \in D(A)$ para cada $t \geqslant 0$;

(iv) $AS(t)u = S(t)Au$ para cada $t \geqslant 0$;

(v) A aplicação $t \mapsto S(t)u$ é diferenciável para cada $t > 0$;

(vi) $\dfrac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u, \quad t > 0.$

Demonstração: Ver [16], Corolário 2.5, Teorema 2.4 e Corolário 1.4. ■

Teorema 1.3. Seja $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados. Valem:

(i) Existe um único operador linear limitado A tal que $S(t) = e^{tA}$;

(ii) O operador A no item (i) é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$.

Demonstração: Ver [16], Corolário 1.4. ■

Considere o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, temos que a solução do problema (1.1) é dada por $u(t) = e^{tA}u_0$. Por outro lado, sendo $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados, segue do Teorema 1.3 que existe um único operador linear limitado A tal que $S(t) = e^{tA}$. Dessa forma, $u(t) = S(t)u_0$ resolve o problema de Cauchy (1.1).

Ademais, se o operador A do problema de Cauchy (1.1) for o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$, temos que $S(t) = e^{tA}$. E, portanto, obtemos a solução para o problema através de um C_0-semigrupo.

Teorema 1.4 (Hille-Yosida)**.** Seja $A : D(A) \to X$ um operador linear fechado e densamente definido. A fim de que A seja o gerador de um C_0-semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ é necessário e suficiente que, para cada $\lambda > 0$, as seguintes condições sejam satisfeitas

(i) o operador $(\lambda I + A) : D(A) \to X$ é bijetivo;

(ii) $(\lambda I + A)^{-1} : X \to X$ é limitado e $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1}$.

Demonstração: Ver [19], Teorema 2.2.1. ■

1.4.2 Operadores m-acretivos

Definição 1.8. Um operador linear $A : D(A) \to X$ é chamado de acretivo se

$$\|u + \lambda Au\| \geqslant \|u\|$$

para todo $u \in D(A)$ e todo $\lambda > 0$.

Observe que se $A : D(A) \to X$ é acretivo, então para cada $\lambda > 0$, o operador $(I + \lambda A) : D(A) \to X$ é injetivo. Isto nos leva a seguinte definição:

Definição 1.9. Dizemos que um operador linear acretivo $A : D(A) \to X$ é m-acretivo se o operador $I + A : D(A) \to X$ é sobrejetivo.

Lema 1.2. Seja $A : D(A) \to X$ um operador m-acretivo. Valem:

(i) A é um operador fechado;

(ii) Para cada $\lambda > 0$, o operador $(I + \lambda A) : D(A) \to X$ é bijetivo, sua inversa $(I + \lambda A)^{-1}$ é limitada e $\|(I + \lambda A)^{-1}\| \leqslant 1$.

Demonstração: Ver [19], Lema 2.2.2. ■

No caso em que X é um espaço de Hilbert, o processo de verificar se um operador é acretivo se torna mais simplificado, conforme nos elucida o seguinte resultado:

Lema 1.3. Seja $(X, (\cdot, \cdot))$ um espaço de Hilbert. A fim de que um operador linear $A : D(A) \to X$ seja acretivo é necessário e suficiente que

$$(Au, u) \geqslant 0, \quad \forall\, u \in D(A).$$

Demonstração: Ver [19], Lema 2.2.3. ■

Lema 1.4. Seja $(X, (\cdot, \cdot))$ um espaço de Hilbert. Se o operador linear $A : D(A) \to X$ for m-acretivo, então $D(A)$ é denso em X.

Demonstração: Ver [10], Corolário 2.4.3. ■

Teorema 1.5 (Hille-Yosida-Phillips)**.** Um operador linear $A : D(A) \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração em X se, e somente se, $-A$ é m-acretivo com domínio $D(A)$ denso em X.

Demonstração: Ver [10], Teorema 3.4.4. ■

1.4.3 O Problema de Cauchy não Homogêneo

Sejam X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, $u_0 \in X$ e $f \in L^1(0,T;L^2(X))$. Consideremos o problema de Cauchy não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), \; t \in (0,T), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Definição 1.10. Dizemos que a função $u : [0,T] \to X$ dada pela Fórmula de Duhamel

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \tag{1.3}$$

é a solução generalizada de (1.2).

Lema 1.5. Para todo $u_0 \in X$ e $f \in L^1(0,T;X)$, a fórmula (1.3) define uma função $u \in C([0,T];X)$. Ademais, vale

$$\|u\|_{C([0,T];X)} \leqslant \|u_0\|_X + \|f\|_{L^1(0,T;X)}. \tag{1.4}$$

Demonstração: Ver [10], Lema 4.1.5. ■

Proposição 1.7. Sejam $u_0 \in D(A)$ e $f \in C([0,T];X)$. Considere u definido pela fórmula (1.3). Se $f \in C^1([0,T];X)$ ou $f \in C([0,T];D(A))$, então u é solução do problema

$$\begin{cases} u \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];X); \\ u_t - Au = f, \quad \forall\, t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Demonstração: Ver [19], Teorema 2.4.1 e Corolário 2.4.1. ■

Buscamos resolver problemas com a formulação apresentada em (1.2), em que $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Entretanto, por vezes, a formulação do operador dificulta o processo de verificar se este é, de fato, um gerador. Para simplificar este processo, vemos o operador em questão como a perturbação de um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo por um operador linear limitado. Desta forma, obtemos que esta perturbação também é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 1.6. Se X é um espaço de Banach, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um C_0-semigrupo em X com gerador infinitesimal $A : D(A) \subset X \to X$ e $B \in \mathcal{L}(X)$, então $A + B : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.

Demonstração: Ver [5], Teorema 5.1. ■

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS DE SOBOLEV COM PESO

Neste capítulo iremos apresentar os espaços de Sobolev com peso e algumas de suas propriedades, como resultados de densidade. No último capítulo desta dissertação utilizaremos estes espaços, junto com a teoria de semigrupos, para estudar a boa colocação de problemas parabólicos e hiperbólicos com operadores degenerados.

Ao longo deste capítulo denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma de $L^2(0,1)$, salvo em menção contrária.

2.1 A Desigualdade de Hardy-Poincaré

Definição 2.1. Sejam $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita absolutamente contínua em $[a,b]$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto finito de intervalos disjuntos $(a_i, b_i) \subset [a,b]$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| < \delta,$$

temos

$$\sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon.$$

Sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é localmente absolutamente contínua quando $f\big|_K$ é absolutamente continua, para cada intervalo compacto $K \subset I$.

Proposição 2.1. Sejam $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $f \in L^p(I)$, com $I \subset \mathbb{R}$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:

(i) $f \in W^{1,p}(I)$;

(ii) Existe $g \in L^p(I)$ tal que para quase todo $t_0,\ t \in I$, temos

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds;$$

(iii) Existem $g \in L^p(I)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$ tais que

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds,$$

para quase todo $t \in I$;

(iv) f é absolutamente contínua.

Demonstração: Ver [10] Teorema 1.4.35. Segue como o caso particular em que $X = \mathbb{R}$.

■

Denotamos por $AB_{loc}(I;\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $w : I \to \mathbb{R}$ localmente absolutamente contínuas em I.

No que segue consideremos uma função $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, satisfazendo

$$a(0) = 0 \ \text{ e } \ a(x) > 0 \ \ \forall\, x \in (0,1].$$

Para cada $\theta \in (0,2)$, definimos a função $\Phi_\theta : (0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi_\theta(x) = \frac{a(x)}{x^\theta}.$$

Consideremos também os seguintes espaços vetoriais:

$$V_1 := \left\{ w \in C([0,1];\mathbb{R}) \cap AB_{loc}((0,1];\mathbb{R}); w(0) = 0 \text{ e } \int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

e

$$V_2 := \left\{ w \in AB_{loc}((0,1];\mathbb{R}); w(1) = 0 \text{ e } \int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\, dx < \infty \right\}.$$

Proposição 2.2 (Desigualdade de Hardy-Poincaré)**.** Valem:

Caso 1: Suponha que existe $\theta \in (0,1)$ tal que a função Φ_θ é monótona não crescente em uma vizinhança de $x = 0$. Existe uma constante $c > 0$ tal que para qualquer função $w \in V_1$, temos

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\, dx \leqslant c \int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\, dx. \tag{2.1}$$

Ademais, se Φ_θ é monótona não crescente em $(0,1]$, então a desigualdade (2.1) vale com $c = \frac{4}{(1-\theta)^2}$.

Caso 2: Suponha que existe $\theta \in (1,2)$ tal que a função Φ_θ é monótona não decrescente em uma vizinhança de $x = 0$. Existe uma constante $c > 0$ tal que a desigualdade (2.1) vale para qualquer função $w \in V_2$. Ademais, se Φ_θ é monótona não decrescente em $(0,1]$, então a desigualdade (2.1) vale com $c = \frac{4}{(1-\theta)^2}$.

Demonstração: Caso 1: Fixemos um $\beta \in (\theta, 1)$ que será especificado posteriormente.

Desde que w é localmente absolutamente contínua em $(0,1]$ e $w(0) = 0$, podemos escrever

$$w(x) = \int_0^x w_x(y)\, dy = \int_0^x y^{\frac{\beta}{2}} y^{\frac{-\beta}{2}} w_x(y)\, dy.$$

Daí,

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} |w(x)|^2\, dx = \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} \left(\int_0^x y^{\frac{\beta}{2}} y^{\frac{-\beta}{2}} w_x(y)\, dy \right)^2 dx. \tag{2.2}$$

Afirmação 2.1. $y^{\frac{\beta}{2}} w_x(y) \in L^2(0,1)$.

Por hipótese, Φ_θ é monótona não crescente em uma vizinhança de $x = 0$, donde existe $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{1}{\Phi_\theta}$ é monótona não decrescente em $(0, \varepsilon]$. Sendo $k := \inf\limits_{[\varepsilon,1]} a$, temos que $a(y)^{-1} \leqslant k^{-1}\ \forall\ y \in [\varepsilon, 1]$. Desde que

$$\int_0^1 y^\beta |w_x(y)|^2\, dy = \int_0^\varepsilon \frac{y^\beta}{a(y)} |w_x(y)|^2 a(y)\, dy + \int_\varepsilon^1 \frac{y^\beta}{a(y)} |w_x(y)|^2 a(y)\, dy,$$

como $y^\beta \leqslant 1\ \forall\ y \in [0,1]$, obtemos

$$\int_0^1 y^\beta |w_x(y)|^2\, dy \leqslant \frac{\varepsilon^\beta}{a(\varepsilon)} \int_0^\varepsilon |w_x(y)|^2 a(y)\, dy + \frac{1}{k} \int_\varepsilon^1 |w_x(y)|^2 a(y)\, dy.$$

Tomando $c = \max\{\frac{\varepsilon^\beta}{a(\varepsilon)}, \frac{1}{k}\}$, segue que

$$\int_0^1 y^\beta |w_x(y)|^2\, dy \leqslant c \int_0^1 |w_x(y)|^2 a(y)\, dy < \infty.$$

Observe que $y^{\frac{-\beta}{2}} \in L^2(0,1)$, pois

$$\int_0^1 (y^{\frac{-\beta}{2}})^2\, dy = \int_0^1 y^{-\beta}\, dy = \frac{1^{1-\beta}}{1-\beta} = \frac{1}{1-\beta}.$$

Em particular,

$$\int_0^x y^{-\beta}\, dy = \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Assim, utilizando a Afirmação 2.1 e a desigualdade de Hölder em (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} |w(x)|^2\, dx &\leqslant \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} \left[\left(\int_0^x y^\beta |w_x(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x y^{-\beta}\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx \\ &= \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} \left[\int_0^x y^\beta |w_x(y)|^2\, dy \int_0^x y^{-\beta}\, dy \right] dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} |w(x)|^2\, dx \leqslant \frac{1}{1-\beta} \int_0^1 \int_0^x \frac{a(x)}{x^{1+\beta}} y^\beta |w_x(y)|^2\, dy dx.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, mudamos a ordem e, consequentemente os intervalos de integração, obtemos então,

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{1-\beta}\int_0^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_y^1 \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx\right)dy. \tag{2.3}$$

Agora, a fim de estimar o termo do lado direito desta última desigualdade, vamos reescrever

$$\int_0^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_y^1 \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx\right)dy = L_\varepsilon + M_\varepsilon + N_\varepsilon,$$

em que

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= \int_0^\varepsilon y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_y^\varepsilon \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx\right)dy,\\ M_\varepsilon &= \int_0^\varepsilon y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_\varepsilon^1 \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx\right)dy,\\ N_\varepsilon &= \int_\varepsilon^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_y^1 \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx\right)dy. \end{aligned}$$

No que segue, vamos estimar os três termos acima. Começando com L_ε, recorde que Φ_θ é monótona não crescente em $(0,\varepsilon]$ para obtermos

$$\int_y^\varepsilon \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx = \int_y^\varepsilon \frac{a(x)}{x^\theta}\frac{x^\theta}{x^{1+\beta}}\,dx \leqslant \frac{a(y)}{y^\theta}\int_y^\varepsilon x^{\theta-\beta-1}\,dx = \frac{a(y)}{y^\theta}\frac{y^{\theta-\beta}-\varepsilon^{\theta-\beta}}{\beta-\theta} < \frac{a(y)}{y^\theta}\frac{y^{\theta-\beta}}{\beta-\theta}.$$

Daí,

$$\int_y^\varepsilon \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx \leqslant \frac{a(y)}{\beta-\theta}y^{-\beta}. \tag{2.4}$$

Usando essa última desigualdade em L_ε obtemos

$$L_\varepsilon \leqslant \int_0^\varepsilon y^\beta |w_x(y)|^2 \frac{a(y)}{\beta-\theta}y^{-\beta}\,dy = \frac{1}{\beta-\theta}\int_0^\varepsilon a(y)|w_x(y)|^2\,dy. \tag{2.5}$$

Agora focando nossa atenção ao termo M_ε, seja $K_1 = \sup\limits_{[\varepsilon,1]} a$ e note que

$$\int_\varepsilon^1 \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx \leqslant K_1\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^{1+\beta}}\,dx = K_1\frac{\varepsilon^{-\beta}-1}{\beta} < K_1\frac{\varepsilon^{-\beta}}{\beta}. \tag{2.6}$$

Daí,

$$M_\varepsilon \leqslant \int_0^\varepsilon \frac{1}{\beta}y^\beta |w_x(y)|^2 \frac{a(y)}{a(y)}K_1\varepsilon^{-\beta}\,dy = \frac{K_1\varepsilon^{-\beta}}{\beta}\int_0^\varepsilon a(y)|w_x(y)|^2\frac{y^\beta}{a(y)}\,dy.$$

Usando o fato de que Φ_θ^{-1} é monótona não decrescente em $(0,\varepsilon]$, temos

$$M_\varepsilon \leqslant \frac{K_1}{\beta a(\varepsilon)}\int_0^\varepsilon a(y)|w_x(y)|^2\,dy. \tag{2.7}$$

Analisemos agora o termo N_ε. Note que

$$\int_y^1 \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx = \int_y^\varepsilon \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx + \int_\varepsilon^1 \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx.$$

Das estimativas (2.4) e (2.6) vistas anteriormente, temos que

$$\int_y^1 \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx \leqslant \frac{1}{\beta-\theta}a(y)y^{-\beta} + K_1\frac{\varepsilon^{-\beta}}{\beta}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} N_\varepsilon &\leqslant \int_\varepsilon^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\frac{1}{\beta-\theta}a(y)y^{-\beta} + K_1\frac{\varepsilon^{-\beta}}{\beta}\right) dy \\ &= \int_\varepsilon^1 \left[a(y)|w_x(y)|^2\frac{1}{\beta-\theta} + K_1\frac{\varepsilon^{-\beta}}{\beta}|w_x(y)|^2 y^\beta \frac{a(y)}{a(y)}\right] dy. \end{aligned}$$

Desde que $y^\beta < 1$ e $\frac{1}{a(y)} \leqslant \frac{1}{k}$, temos que

$$N_\varepsilon \leqslant \left(\frac{1}{\beta-\theta} + \frac{\varepsilon^{-\beta}K_1}{\beta k}\right)\int_\varepsilon^1 a(y)|w_x(y)|^2\,dy. \tag{2.8}$$

Substituindo (2.5), (2.7) e (2.8) em (2.3), obtemos

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant \frac{C}{1-\beta}\int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx,$$

em que

$$C = \max\left\{\frac{1}{\beta-\theta} + \frac{K_1}{\beta a(\varepsilon)}, \frac{1}{\beta-\theta} + \frac{\varepsilon^{-\beta}K_1}{\beta k}\right\}.$$

Isto conclui a demonstração da primeira parte do Caso 1.

Suponha agora que Φ_θ é monótona não crescente em $(0,1]$. Dessa forma podemos tomar $\varepsilon = 1$ nos cálculos acima, fazendo com que $M_\varepsilon = N_\varepsilon = 0$. Daí, usando (2.5) em (2.3) com $\varepsilon = 1$, obtemos

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{(1-\beta)(\beta-\theta)}\int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx.$$

Recorde que a estimativa acima foi obtida tomando arbitrariamente $\beta \in (\theta, 1)$. Tomando $\beta = \frac{\theta+1}{2}$ deduzimos a estimativa desejada.

Caso 2: Neste caso $\theta \in [1,2)$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que Φ_θ é monótona não decrescente em $(0,\varepsilon]$. Novamente fixemos $\beta \in (1,\theta)$ arbitrário por enquanto. Desde que w é localmente absolutamente contínua em $(0,1]$ e $w(1) = 0$, podemos escrever

$$w(x) = \int_x^1 w_x(y)\,dy = \int_x^1 y^{\frac{\beta}{2}}y^{\frac{-\beta}{2}}w_x(y)\,dy.$$

Daí,

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx = \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}\left(\int_x^1 y^{\frac{\beta}{2}}y^{\frac{-\beta}{2}}w_x(y)\,dy\right)^2 dx. \tag{2.9}$$

Afirmação 2.2. Para $x \in (0,1)$ fixo, vale $y^{\frac{\beta}{2}} w_x(y) \in L^2(x,1)$.

Como a é contínua e $a(y) > 0$ para todo $y \in [x,1]$, segue que existe uma constante $c_x > 0$ tal que $a(y) \geqslant c_x$ para todo $y \in [x,1]$. Daí,

$$\int_x^1 |y^{\frac{\beta}{2}} w_x(y)|^2 \, dy = \int_x^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \, dy = \int_x^1 \frac{y^\beta}{a(y)} |w_x(y)|^2 a(y) \, dy$$
$$\leqslant \int_x^1 \frac{1}{c_x} a(y) |w_x(y)|^2 \, dy < \infty.$$

Logo $y^{\frac{\beta}{2}} w_x(y) \in L^2(0,1)$ como queríamos.

Utilizando a Afirmação 2.2 e a desigualdade de Hölder em (2.9), temos

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} |w(x)|^2 \, dx \leqslant \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} \left(\int_x^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \int_x^1 y^{-\beta} \, dy \right) dx.$$

Como

$$\int_x^1 y^{-\beta} \, dx = \frac{x^{1-\beta} - 1}{\beta - 1} < \frac{x^{1-\beta}}{\beta - 1},$$

temos

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} |w(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{1}{\beta - 1} \int_0^1 \frac{a(x)}{x^{1+\beta}} \left(\int_x^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \, dy \right) dx.$$

Aplicando o Teorema de Fubini no lado direito da desigualdade anterior, mudamos a ordem e, consequentemente, os intervalos de integração. Assim, obtemos

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2} |w(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{1}{\beta - 1} \int_0^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_0^y \frac{a(x)}{x^{1+\beta}} \, dx \right) dy. \tag{2.10}$$

A fim estimar a integral em (2.10), vamos reescrever

$$\int_0^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_0^y \frac{a(x)}{x^{1+\beta}} \, dx \right) dy = I_\varepsilon + J_\varepsilon + P_\varepsilon,$$

em que

$$I_\varepsilon = \int_0^\varepsilon y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_0^y \frac{a(x)}{x^{1+\beta}} \, dx \right) dy,$$
$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_0^\varepsilon \frac{a(x)}{x^{1+\beta}} \, dx \right) dy,$$
$$P_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 y^\beta |w_x(y)|^2 \left(\int_\varepsilon^y \frac{a(x)}{x^{1+\beta}} \, dx \right) dy.$$

Faremos estimativas para cada um dos termos anteriores. Para I_ε, usaremos o fato de que a função Φ_θ é monótona não decrescente em $(0,\varepsilon]$. O que nos dá

$$\int_0^y \frac{a(x)}{x^{1+\beta}} \, dx = \int_0^y \frac{a(x)}{x^\theta} \frac{x^\theta}{x^{1+\beta}} \, dx \leqslant \frac{a(y)}{y^\theta} \int_0^y x^{\theta-\beta-1} \, dx = \frac{a(y)}{\theta - \beta} y^{-\beta}.$$

Usando a última desigualdade para estimar I_ε, deduzimos que

$$I_\varepsilon \leqslant \frac{1}{\theta-\beta}\int_0^\varepsilon a(y)|w_x(y)|^2\,dy. \tag{2.11}$$

Para J_ε, procedemos de forma similar, observando que

$$\int_0^\varepsilon \frac{a(x)}{x^{1+\beta}}\,dx = \int_0^\varepsilon \frac{a(x)}{x^\theta}\frac{x^\theta}{x^{1+\beta}}\,dx \leqslant \frac{a(\varepsilon)}{\varepsilon^\theta}\int_0^\varepsilon x^{\theta-\beta-1}\,dx = \frac{a(\varepsilon)}{\theta-\beta}\varepsilon^{-\beta}.$$

Assim, temos que

$$J_\varepsilon \leqslant \int_\varepsilon^1 y^\beta|w_x(y)|^2\frac{a(\varepsilon)}{\theta-\beta}\varepsilon^{-\beta}\frac{a(y)}{a(y)}\,dy.$$

Usando o fato de que $y \leqslant 1$, deduzimos a seguinte estimativa $\frac{y^\beta}{a(y)} \leqslant \frac{1}{a(y)} \leqslant \frac{1}{k}$ donde obtemos

$$J_\varepsilon \leqslant \frac{1}{\theta-\beta}\frac{a(\varepsilon)}{\varepsilon^\beta k}\int_\varepsilon^1 a(y)|w_x(y)|^2\,dy. \tag{2.12}$$

Para P_ε, temos $\varepsilon^{1+\beta} \leqslant x^{1+\beta}$, donde $\frac{1}{x^{1+\beta}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{1+\beta}}$. Daí,

$$P_\varepsilon \leqslant \int_\varepsilon^1 \frac{a(y)}{a(y)}y^\beta|w_x(y)|^2\left(\int_\varepsilon^y \frac{a(x)}{\varepsilon^{1+\beta}}\,dx\right)dy.$$

Note que

$$\int_\varepsilon^y \frac{a(x)}{\varepsilon^{1+\beta}}\,dx \leqslant \int_\varepsilon^1 \frac{a(x)}{\varepsilon^{1+\beta}}\,dx \leqslant \frac{K_1}{\varepsilon^{1+\beta}}(1-\varepsilon) \leqslant \frac{K_1}{\varepsilon^{1+\beta}}.$$

Dessa forma, usando a desigualdade anterior e $\frac{y^\beta}{a(y)} \leqslant \frac{1}{k}$, segue que

$$P_\varepsilon \leqslant \varepsilon^{-1-\beta}\frac{K_1}{k}\int_\varepsilon^1 a(y)|w_x(y)|^2\,dy. \tag{2.13}$$

Substituindo (2.11), (2.12) e (2.13) em (2.10), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant{}& \frac{1}{(\theta-\beta)(\beta-1)}\int_0^\varepsilon a(x)|w_x(x)|^2\,dx\\ &+\frac{a(\varepsilon)}{(\theta-\beta)(\beta-1)\varepsilon^\beta k}\int_\varepsilon^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx\\ &+\frac{\varepsilon^{-1-\beta}K_1}{(\beta-1)k}\int_\varepsilon^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx\\ ={}&\frac{1}{(\theta-\beta)(\beta-1)}\int_0^\varepsilon a(x)|w_x(x)|^2\,dx + C_1\int_\varepsilon^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx,\end{aligned}$$

em que

$$C_1 = \frac{a(\varepsilon)}{(\theta-\beta)(\beta-1)\varepsilon^\beta k} + \frac{\varepsilon^{-1-\beta}K_1}{(\beta-1)k}.$$

Tomando $C = \max\left\{\frac{1}{(\theta-\beta)(\beta-1)}, C_1\right\}$, temos que

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant C\int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx.$$

Isto conclui a demonstração da primeira parte do Caso 2.

Agora, suponha que Φ_θ é monótona não decrescente em $(0,1]$, donde podemos tomar $\varepsilon = 1$ nos cálculos anteriores, resultando em $J_\varepsilon = P_\varepsilon = 0$. Assim, usando (2.11) em (2.10), com $\varepsilon = 1$, obtemos

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{(\theta-\beta)(\beta-1)}\int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx.$$

Assim como no Caso 1, tomando $\beta = \frac{\theta+1}{2}$ deduzimos a estimativa desejada.

$\blacksquare$

Proposição 2.3. Sejam a, $b \in C([0,1];\mathbb{R})$ funções positivas em $(0,1]$ e tais que $a(0) = b(0) = 0$. Além disso, suponha que existam duas constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1 a(x) \leqslant b(x) \leqslant c_2 a(x), \ \forall\, x \in [0,1]. \tag{2.14}$$

Então as seguintes propriedades são válidas:

(i) Se a é tal que a desigualdade de Hardy-Poincaré se verifica, então a desigualdade de Hardy-Poincaré também se verifica para b.

(ii) Se a é tal que a desigualdade de Hardy-Poincaré não se verifica, então a desigualdade de Hardy-Poincaré também não se verifica para b.

Demonstração: Analisemos o primeiro caso. Suponha que a satisfaz a desigualdade de Hardy-Poincaré com constante C. Então, para qualquer função w, localmente absolutamente contínua em $(0,1]$, satisfazendo $w(0) = 0$ ou $w(1) = 0$ e

$$\int_0^1 a(x)|w_x(x)|\,dx < \infty,$$

vale

$$\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant C\int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx. \tag{2.15}$$

Multiplicando a ultima desigualdade em (2.14) por $\frac{|w(x)|^2}{x^2}$, integrando em $[0,1]$ e usando o fato de que vale a desigualdade de Hardy-Poincaré para a, segue que

$$\int_0^1 \frac{b(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant \int_0^1 c_2\frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant c_2 C\int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx.$$

Da primeira desigualdade em (2.14), obtemos

$$\int_0^1 \frac{b(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant \frac{c_2 C}{c_1}\int_0^1 b(x)|w_x(x)|^2\,dx.$$

Logo, vale a desigualdade de Hardy-Poincaré para b.

Consideremos agora o segundo caso. Então a é tal que para todo $c > 0$, existe w satisfazendo $w(0) = 0$ ou $w(1) = 0$ com

$$\int_0^1 a(x)|w_x(x)|\,dx < \infty$$

e, tal que

$$c\int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx < \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx.$$

Observe que usando (2.14), temos

$$\frac{c}{c_2}\int_0^1 b(x)|w_x(x)|^2\,dx \leqslant c\int_0^1 a(x)|w_x(x)|^2\,dx < \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx.$$

Novamente, usando a desigualdade (2.14), estimemos o lado direito da última desigualdade

$$\frac{c}{c_2}\int_0^1 b(x)|w_x(x)|^2\,dx < \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{c_1}\int_0^1 \frac{b(x)}{x^2}|w(x)|^2\,dx.$$

Portanto a desigualdade de Hardy-Poincaré não é válida para b.

■

Corolário 2.1. Sejam $a,\ b \in C([0,1];\mathbb{R})$ funções positivas em $(0,1]$ e tais que $a(0) = b(0) = 0$. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$c_1 a(x) \leqslant b(x) \leqslant c_2 a(x),\ \forall\, x \in [0,\varepsilon], \tag{2.16}$$

então existem constantes $\tilde{c}_1,\ \tilde{c}_2 > 0$ tais que

$$\tilde{c}_1 a(x) \leqslant b(x) \leqslant \tilde{c}_2 a(x),\ \forall\, x \in [0,1].$$

Demonstração: De fato, sejam $k_1 = \inf\limits_{[\varepsilon,1]} a,\ k_2 = \inf\limits_{[\varepsilon,1]} b,\ K_1 = \sup\limits_{[\varepsilon,1]} a$ e $K_2 = \sup\limits_{[\varepsilon,1]} b$. E, sendo a e b funções positivas em $(0,1]$, temos que $k_1,\ k_2,\ K_1,\ K_2 > 0$. Assim, para todo $x \in [\varepsilon,1]$, vale:

$$a(x) \leqslant K_1 = \left(\frac{K_1}{k_2}\right)k_2 \leqslant \left(\frac{K_1}{k_2}\right)b(x).$$

Donde segue que

$$\frac{k_2}{K_1}a(x) \leqslant b(x).$$

Tomando $\tilde{c}_1 = \min\{c_1, \frac{k_2}{K_1}\} > 0$, temos que, para $x \in [0,1]$, vale: se $x \in [0,\varepsilon]$,

$$b(x) \geqslant c_1 a(x) \geqslant \tilde{c}_1 a(x).$$

Se $x \in [\varepsilon, 1]$,

$$b(x) \geqslant \frac{k_2}{K_1} a(x) \geqslant \tilde{c}_1 a(x).$$

Logo, $b(x) \geqslant \tilde{c}_1 a(x)$ para todo $x \in [0,1]$.

Analogamente, temos que para todo $x \in [\varepsilon, 1]$, vale:

$$b(x) \leqslant K_2 = \left(\frac{K_2}{k_1}\right) k_1 \leqslant \left(\frac{K_2}{k_1}\right) a(x).$$

Tomando $\tilde{c}_2 = \max\{c_2, \frac{K_2}{k_1}\} > 0$, temos que, para $x \in [0,1]$, vale: se $x \in [0,\varepsilon]$,

$$b(x) \leqslant c_2 a(x) \leqslant \tilde{c}_2 a(x).$$

Se $x \in [\varepsilon, 1]$,

$$b(x) \leqslant \frac{K_2}{k_1} a(x) \leqslant \tilde{c}_2 a(x).$$

Logo, $b(x) \leqslant \tilde{c}_2 a(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Como queríamos mostrar.

■

2.2 O Espaço $H^1_a(0,1)$

Nesta seção iremos definir os espaços de Sobolev relacionados à uma função peso $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ que degenera $x = 0$, isto é, que satisfaz $a(0) = 0$. Na última seção exigimos apenas a continuidade de a, mas para os propósitos desta seção precisamos de propriedades mais regulares. Estas propriedades estão associadas à intensidade em que a função degenera no ponto $x = 0$. Para entendermos o significado desta intensidade de degeneração, tomamos como exemplo a função protótipo $a(x) = x^K$. Neste caso, entendemos que, quanto maior o valor da potência K, maior é a intensidade em que a função degenera no ponto $x = 0$. Seguindo a nomenclatura introduzida em [8], quando $K \in (0,1)$ dizemos que a função a é *fracamente degenerada* (weakly degenerate) e quando $K \in [1,2)$ dizemos que a função a é *fortemente degenerada* (strongly degenerate). A seguir apresentamos a definição formal como mostra [2].

Definição 2.2. Dizemos que a função $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ é **fracamente degenerada** em $x = 0$ se valem:

(i) $a \in C([0,1];\mathbb{R}) \cap C^1((0,1];\mathbb{R})$, $a(x) > 0$ em $(0,1]$ e $a(0) = 0$;

(ii) Existe $K \in [0,1)$ tal que $xa_x(x) \leqslant Ka(x)$, para todo $x \in [0,1]$.

Definição 2.3. Dizemos que a função $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ é **fortemente degenerada** em $x = 0$ se valem:

(i) $a \in C^1([0,1])$, $a(x) > 0$ em $(0,1]$ e $a(0) = 0$;

(ii) Existe $K \in [1,2)$ tal que $xa_x(x) \leqslant Ka(x)$, para todo $x \in [0,1]$;

(iii) $\begin{cases} \text{Se } K \in (1,2), \text{ então existe } \theta \in (1,K] \text{ tal que } \Phi_\theta \text{ é não decrescente perto de } 0; \\ \text{Se } K = 1, \text{ então existe } \theta \in (0,1) \text{ tal que } \Phi_\theta \text{ é não decrescente perto de } 0. \end{cases}$.

No que segue, a menos de menção contrária, sempre admitiremos que a função $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ é degenerada em um dos sentidos estabelecidos nas definições anteriores.

Observação 2.1. No caso fortemente degenerado, dizer que existe $\theta \in (1,K]$ tal que Φ_θ é monótona não decrescente perto de 0, é equivalente à afirmar que existe $\delta > 0$ tal que $\theta a(x) \leqslant xa_x(x), \ \forall\, x \in [0,\delta]$.

De fato, usando a definição da função Φ_θ note que

$$\frac{d}{dx}\Phi_\theta(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^\theta a_x(x) - \theta a(x) x^{\theta-1}}{x^{2\theta}} \geqslant 0,$$

ou seja,

$$x^\theta a_x(x) \geqslant \theta a(x) x^{\theta-1},$$

e, portanto,

$$\theta a(x) \leqslant xa_x(x).$$

Observação 2.2. Nos dois casos, fracamente e fortemente degenerado, a função Φ_θ^{-1} é monótona não decrescente em $(0,1]$, para todo $\theta \geqslant K$.

Com efeito, independentemente de como a função a degenera, vale $xa_x(x) \leqslant Ka(x)$ para todo $x \in (0,1)$. Daí

$$x^\theta a_x(x) \leqslant Kx^{\theta-1}a(x) \leqslant \theta x^{\theta-1}a(x),$$

isto é, $\theta x^{\theta-1}a(x) - x^\theta a_x(x) \geq 0$. Logo

$$\frac{d}{dx}\Phi_\theta^{-1}(x) = \frac{\theta x^{\theta-1}a(x) - x^\theta a_x(x)}{a(x)^2} \geqslant 0, \ \forall\, x \in (0,1).$$

Observação 2.3. A hipótese $xa_x(x) \leqslant Ka(x)$ implica que $\frac{1}{\sqrt{a(x)}} \in L^1(0,1)$ para $K \in [0,2)$. Em particular se $K < 1$, então $\frac{1}{a(x)} \in L^1(0,1)$.

De fato, usando a Observação 2.2, para $x \in (0,1]$ temos que

$$\frac{1}{a(x)} = \frac{x^K}{a(x)x^K} \leqslant \frac{1}{a(1)x^K}. \tag{2.17}$$

Assim,

$$\frac{1}{\sqrt{a(x)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a(1)x^K}}.$$

Integrando a última desigualdade em $[0,1]$, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\,dx &\leqslant \frac{1}{\sqrt{a(1)}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x^K}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a(1)}} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{\frac{-K}{2}+1} - \frac{\varepsilon^{\frac{-K}{2}+1}}{\frac{-K}{2}+1} \right).\end{aligned}$$

Desde que $K < 2$, temos $\frac{-K}{2} + 1 > 0$. Daí,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\,dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{a(1)}} \frac{2}{2-K} < \infty.$$

Portanto, $\frac{1}{\sqrt{a(x)}} \in L^1(0,1)$.

Analogamente, integrando (2.17) com $K < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{a(x)}\,dx &\leqslant \frac{1}{a(1)} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^K}\,dx \\ &= \frac{1}{a(1)} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{1-K} - \frac{\varepsilon^{1-K}}{1-K} \right).\end{aligned}$$

Como $1 - K > 0$, segue que

$$\int_0^1 \frac{1}{a(x)}\,dx \leqslant \frac{1}{a(1)} \frac{1}{1-K} < \infty.$$

Logo, $\frac{1}{a(x)} \in L^1(0,1)$.

Observação 2.4. Se $K \neq 1$, então a função a satisfaz as hipóteses da desigualdade de Hardy-Poincaré.

De fato, se $K \in (0,1)$, então $xa_x(x) \leqslant Ka(x)\ \forall\, x \in [0,1]$ implica que Φ_K é monótona não crescente em $(0,1)$, pois

$$\frac{d}{dx}\Phi_K(x) = \frac{a_x(x)}{x^K} - K\frac{a(x)}{x^{K+1}} \leqslant 0,\ \ \forall\, x \in (0,1).$$

Por outro lado, se $K \in (1,2)$, então a afirmação da Observação segue do item (iii) na Definição 2.3 .

No caso $K = 1$, apesar da Desigualdade de Hardy-Poincaré não valer, temos o seguinte resultado que pode ser útil.

Proposição 2.4. Assuma $K = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $u \in V_2$, vale

$$\int_0^1 |u|^2\,dx \leqslant C_\varepsilon \int_0^1 a(x)|u_x|^2\,dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{x^2}{a(x)}|u|^2\,dx.$$

Demonstração: Note que

$$\int_0^1 |u|^2\,dx = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{2}} \frac{a(x)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}}{a(x)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_0^1 \left(u^2 \frac{a(x)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} \left(u^2 \frac{x^2}{a(x)}\right)^{\frac{1}{4}} dx. \tag{2.18}$$

Considere a função $p(x) = a(x)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{4}{3}}$. Observe que

$$p(x) = a(x)\left(\frac{x^2}{a(x)}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Pela Observação 2.2, a função Φ_2^{-1} é monótona não decrescente em $(0,1]$. Daí

$$p(x) \leqslant \frac{1}{a(1)^{\frac{2}{3}}} a(x). \tag{2.19}$$

Como $K = 1$, segue do item (iii) da Definição 2.3 que para algum $\theta \in (0,1)$, Φ_θ é monótona não decrescente perto de 0. Sendo $q = \frac{4+\theta}{3}$, temos, multiplicando a função $p(x)$ por $\frac{1}{x^q}$, que

$$\frac{p(x)}{x^q} = a(x)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{4}{3} - \frac{4+\theta}{3}} = \left(\frac{a(x)}{x^\theta}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dessa forma, a função $\frac{p(x)}{x^q}$ é monótona não decrescente perto de 0 e, portanto, podemos aplicar a desigualdade de Hardy-Poincaré. Daí, usando a desigualdade de Hardy-Poincaré e (2.19) obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u|^2 \left(\frac{a(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} dx &= \int_0^1 \frac{p(x)}{x^2}|u|^2\,dx \\ &\leqslant C_1 \int_0^1 p(x)|u_x|^2\,dx \\ &\leqslant C \int_0^1 a(x)|u_x|^2\,dx < \infty. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por outro lado, pela Observação 2.2, Φ_2^{-1} é monótona não decrescente. Logo

$$\int_0^1 |u|^2 \frac{x^2}{a(x)}\,dx \leqslant \frac{1}{a(1)} \int_0^1 |u|^2\,dx < \infty. \tag{2.21}$$

Usando (2.20) e (2.21), podemos usar a desigualdade de Hölder em (2.18) para deduzir que

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u|^2\,dx &\leqslant \left(\int_0^1 |u|^2\left(\frac{a(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}dx\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_0^1 |u|^2\frac{x^2}{a(x)}\,dx\right)^{\frac{1}{4}}\\ &\leqslant \left(C\int_0^1 a(x)|u_x|^2\,dx\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_0^1 |u|^2\frac{x^2}{a(x)}\,dx\right)^{\frac{1}{4}}\\ &= \left(\frac{C}{(4\varepsilon)^{1/3}}\int_0^1 a(x)|u_x|^2\,dx\right)^{\frac{3}{4}}\left(4\varepsilon\int_0^1 |u|^2\frac{x^2}{a(x)}\,dx\right)^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young concluímos que

$$\int_0^1 |u|^2\,dx \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{C}{(4\varepsilon)^{1/3}}\right)\int_0^1 a(x)|u_x|^2\,dx + \varepsilon\int_0^1 |u|^2\frac{x^2}{a(x)}\,dx.$$

■

Definição 2.4. Se a função $a:[0,1]\to\mathbb{R}$ é fracamente degenerada em $x=0$, definimos o espaço de Sobolev com peso

$$\begin{aligned}H_a^1(0,1) := \{&u\in L^2(0,1); u \text{ é absolutamente contínua em } [0,1],\\ &\sqrt{a}u_x\in L^2(0,1) \text{ e } u(0)=u(1)=0\}.\end{aligned}$$

Caso a seja fortemente degenerada em $x=0$, definimos

$$\begin{aligned}H_a^1(0,1) := \{&u\in L^2(0,1); u \text{ é localmente absolutamente contínua em } (0,1],\\ &\sqrt{a}u_x\in L^2(0,1) \text{ e } u(1)=0\}.\end{aligned}$$

Observemos que, tanto para o caso fracamente degenerado, quanto para o fortemente degenerado, a expressão

$$\|u\|_{1,a} := \left(\int_0^1 |u|^2 + a|u_x|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma em $H_a^1(0,1)$ que provém do produto interno dado por

$$(u,v)_{H_a^1(0,1)} := \int_0^1 (uv + au_xv_x)\,dx.$$

Proposição 2.5. Para $u\in H_a^1(0,1)$, a expressão

$$|u|_{1,a} := \left(\int_0^1 a|u_x|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma em $H_a^1(0,1)$ que é equivalente à $\|\cdot\|_{1,a}$.

Demonstração: Queremos mostrar que existem contantes $c_1,c_2>0$ tais que

$$c_1|u|_{1,a}\leqslant \|u\|_{1,a}\leqslant c_2|u|_{1,a}\ \forall\, u\in H_a^1(0,1).$$

Desde que $\|u\|^2_{1,a} = \|u\|^2 + |u|^2_{1,a}$, obtemos $|u|^2_{1,a} \leqslant \|u\|^2_{1,a}$ e assim $|u|_{1,a} \leqslant \|u\|_{1,a}$ para todo $u \in H^1_a(0,1)$.

Para provar a outra desigualdade inicialmente consideremos o caso $K \neq 1$, em que podemos usar a desigualdade de Hardy-Poincaré. Pela Observação 2.2, Φ_2^{-1} é monótona não decrescente em $(0,1]$. Daí, para $u \in H^1_a(0,1)$, temos que

$$\int_0^1 |u(x)|^2\,dx = \int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}\frac{x^2}{a(x)}|u(x)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{a(1)}\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|u(x)|^2\,dx.$$

Pela desigualdade de Hardy-Poincaré, segue que

$$\|u\|^2_{1,a} \leqslant \frac{1}{a(1)}\int_0^1 \frac{a(x)}{x^2}|u(x)|^2\,dx + \int_0^1 a(x)|u_x(x)|^2\,dx \leqslant C\int_0^1 a(x)|u_x(x)|^2\,dx = C|u|^2_{1,a}.$$

Consideremos agora o caso $K = 1$. Usando a Proposição 2.4 com $\varepsilon = a(1)/2$, obtemos uma constante $C > 0$ tal que, para todo $u \in H^1_a(0,1)$, vale

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u|^2\,dx &\leqslant C\int_0^1 a(x)|u_x(x)|^2\,dx + \frac{a(1)}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{a(x)}|u(x)|^2\,dx\\ &\leqslant C\int_0^1 a(x)|u_x(x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |u(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_0^1 |u|^2 \leqslant 2C\int_0^1 a|u_x|^2\,dx.$$

Agora basta proceder de forma análoga ao caso $K \neq 1$ para deduzir a desigualdade desejada. ■

Observação 2.5. Denotaremos por $H^{-1}_a(0,1)$ o dual topológico de $H^1_a(0,1)$.

Proposição 2.6. O par $(H^1_a(0,1), (\cdot,\cdot)_{H^1_a(0,1)})$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H^1_a(0,1)$ uma sequência de Cauchy, isto é, $\|u_n - u_m\|^2_{1,a} \to 0$ quando n e m são suficientemente grandes. Assim,

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 + \|\sqrt{a(x)}u_{nx} - \sqrt{a(x)}u_{mx}\|^2 &= \int_0^1 |u_n - u_m|^2 + |\sqrt{a(x)}u_{nx} - \sqrt{a(x)}u_{mx}|^2\,dx\\ &= \|u_n - u_m\|^2_{1,a} \to 0\end{aligned}$$

quando n e m são suficientemente grandes. Segue daí que (u_n) e $(\sqrt{a(x)}u_{nx})$ são sequências de Cauchy em $L^2(0,1)$. Logo, existem $u, v \in L^2(0,1)$ tais que

$$u_n \to u \text{ em } L^2(0,1) \tag{2.22}$$

e

$$\sqrt{a(x)}u_{nx} \to v \text{ em } L^2(0,1). \tag{2.23}$$

Da imersão $L^2(0,1) \hookrightarrow D'(0,1)$, temos de (2.22) que

$$u_{nx} \to u_x \text{ em } D'(0,1). \tag{2.24}$$

Afirmação 2.3. $u_{nx} \to \frac{1}{\sqrt{a(x)}}v$ em $L^1_{loc}(0,1)$.

De fato, considere o intervalo $I \subset\subset (0,1)$. Como $a > 0$ em $(0,1)$, segue que existe $c > 0$ tal que $a(x) > c \; \forall x \in I$. Daí $a^{-1/2} \in L^2(I)$. Desde que $\sqrt{a(x)}u_{nx} \to v$ em $L^2(0,1)$, temos

$$\begin{aligned}\int_I \left| u_{nx} - \frac{1}{\sqrt{a(x)}}v \right| dx &= \int_I \frac{1}{\sqrt{a(x)}} |\sqrt{a(x)}u_{nx} - v|\, dx \\ &\leqslant \left\| \frac{1}{\sqrt{a(x)}} \right\|_{L^2(I)} \|\sqrt{a(x)}u_{nx} - v\|_{L^2(I)} \to 0.\end{aligned}$$

Donde segue a Afirmação.

Da Afirmação 2.3 e da imersão $L^1_{loc}(0,1) \hookrightarrow D'(0,1)$, temos que

$$u_{nx} \to \frac{1}{\sqrt{a(x)}}v \text{ em } D'(0,1). \tag{2.25}$$

De (2.24) e (2.25) e da unicidade do limite, obtemos $u_x = \frac{1}{\sqrt{a(x)}}v$, isto é, $\sqrt{a(x)}u_x = v \in L^2(0,1)$.

Portanto, (u_n) é tal que

$$u_n \to u \text{ e } \sqrt{a(x)}u_{nx} \to \sqrt{a(x)}u_x \text{ em } L^2(0,1).$$

Resta provarmos que $u \in H_a^1(0,1)$.

Supondo que a é fracamente degenerada, temos que $a^{-1/2} \in L^2(0,1)$. Como $a^{1/2}u_x \in L^2(0,1)$, usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_0^1 |u_x|\, dx = \int_0^1 |\sqrt{a}u_x| \frac{1}{\sqrt{a}}\, dx \leqslant \|\sqrt{a}u_x\| \|a^{-1/2}\| < \infty. \tag{2.26}$$

Logo $u_x \in L^1(0,1)$. Como $u \in L^2(0,1) \hookrightarrow L^1(0,1)$, concluímos que $u \in W^{1,1}(0,1)$.

Repetindo os cálculos de (2.26) com $u_{nx} - u_x$, deduzimos que

$$\|u_{nx} - u_x\|_{L^1(0,1)} \leqslant c\|\sqrt{a(x)}u_{nx} - \sqrt{a(x)}u_x\| \to 0.$$

Logo $u_n \to u$ em $W^{1,1}(0,1)$. Desde que $W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$, obtemos $u_n \to u$ em $C([0,1])$ e assim $u(0) = \lim u_n(0) = 0$ e $u(1) = \lim u_n(1) = 0$. Concluímos que

$u \in H_a^1(0,1)$ no caso fracamente degenerado. Para o caso fortemente degenerado, não temos a informação $a^{-1/2} \in L^2(0,1)$, mas também não precisamos mostrar que $u(0) = 0$. Dessa forma, basta repetir os argumentos com um intervalo da forma $[d, 1]$, em que $d > 0$.

■

Proposição 2.7. Se $u \in H_a^1(0,1)$, então

$$\lim_{x\to 0} x|u(x)|^2 = 0.$$

Demonstração: Se a é fracamente degenerada, o resultado é trivial pois neste caso u é contínua em $x = 0$. Considere então que a é fortemente degenerada, donde existe $K \in [1, 2)$ tal que Φ_K^{-1} é monótona não decrescente em $(0, 1]$.

Afirmação 2.4. $\frac{x}{\sqrt{a(x)}} u \in L^2(0,1)$.

De fato, como $u \in L^2(0,1)$ temos que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{a(x)} |u(x)|^2\, dx = \int_0^1 \Phi_K^{-1}(x) x^{2-K} |u(x)|^2\, dx \leqslant \Phi_K^{-1}(1) \int_0^1 |u(x)|^2\, dx < \infty$$

Como $u \in H_a^1(0,1)$, então $\sqrt{a} u_x \in L^2(0,1)$. Pela Afirmação 2.4, deduzimos que

$$xuu_x = \frac{x}{\sqrt{a(x)}} u \sqrt{a(x)} u_x \in L^1(0,1).$$

Daí $(x|u|^2)_x = |u|^2 + 2xuu_x \in L^1(0,1)$ e, portanto, $x|u|^2 \in W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$. Segue que existe $L \geq 0$ tal que

$$\lim_{x\to 0} x|u(x)|^2 = L.$$

Para concluirmos o resultado, resta verificarmos que $L = 0$. Para tanto, suponha por contradição que $L > 0$. Desde que $x|u(x)|^2 \in C([0,1])$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| x|u(x)|^2 - L \right| < \varepsilon, \text{ sempre que } |x| < \delta,$$

donde obtemos

$$\frac{L-\varepsilon}{x} < |u(x)|^2, \quad 0 < |x| < \delta.$$

Integrando a desigualdade anterior no intervalo (η, δ) com $0 < \eta < \delta$, segue que

$$\int_\eta^\delta |u(x)|^2\, dx > \int_\eta^\delta \frac{L-\varepsilon}{x}\, dx = (L-\varepsilon)[\ln\delta - \ln\eta].$$

Fazendo $\eta \to 0$, obtemos

$$\int_0^\delta |u(x)|^2\, dx > \infty.$$

O que é uma contradição, pois $u \in L^2(0,1)$. Logo $L = 0$ e o resultado está provado.

■

2.3 O Espaço $H_a^2(0,1)$

No que segue a função $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuará sendo uma função que degenera em $x = 0$ no sentido das Definições 2.2 e 2.3. Quando necessário, especificaremos qual caso de degenerescência utilizaremos.

Definição 2.5. Definimos o espaço $H_a^2(0,1)$ por

$$H_a^2(0,1) := \{u \in H_a^1(0,1);\ au_x \in H^1(0,1)\}.$$

No espaço $H_a^2(0,1)$ consideramos a norma

$$\|u\|_{2,a} := \left(\|u\|_{1,a}^2 + \|(a(x)u_x)_x\|^2\right)^{1/2},$$

a qual provém do produto interno

$$(u,v)_{H_a^2(0,1)} := (u,v)_{H_a^1(0,1)} + ((au_x)_x, (av_x)_x)_{L^2(0,1)}.$$

Proposição 2.8. O par $(H_a^2(0,1), (\cdot,\cdot)_{H_a^2(0,1)})$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H_a^2(0,1)$ uma sequencia de Cauchy. Daí (u_n) é de Cauchy em $H_a^1(0,1)$ e $((au_{nx})_x)$ é de Cauchy em $L^2(0,1)$. Segue que existem $u \in H_a^1(0,1)$ e $v \in L^2(0,1)$ tais que $u_n \to u$ em $H_a^1(0,1)$ e $(au_{nx})_x \to v$ em $L^2(0,1)$. De forma semelhante ao que foi feito no espaço $H_a^1(0,1)$, podemos deduzir que $(au_{nx})_x \to (au_x)_x$ em $L_{loc}^1(0,1)$ e portanto $(au_x)_x = v \in L^2(0,1)$, mostrando que $u \in H_a^2(0,1)$ e que $u_n \to u$ em $H_a^2(0,1)$. ■

Proposição 2.9. Se $u \in H_a^2(0,1)$, então

$$\lim_{x\to 0^+} xa(x)|u_x(x)|^2 = 0.$$

Demonstração: De $\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$, segue que $a|u_x|^2 \in L^1(0,1)$. Além disso, sabemos que existe $K \in (0,2)$ tal que Φ_K^{-1} é monótona não decrescente em $(0,1]$. Daí

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2|u_x(x)|^2\,dx &= \int_0^1 \Phi_K^{-1}(x)x^{2-K}a(x)|u_x(x)|^2\,dx \\ &\leq \Phi_K^{-1}(1)\int_0^1 a(x)|u_x(x)|^2\,dx < \infty.\end{aligned}$$

Logo $xu_x \in L^2(0,1)$. Como $(au_x)_x \in L^2(0,1)$, então $xu_x(au_x)_x \in L^1(0,1)$. Por outro lado, de $xa_x(x) \leqslant Ka(x),\ \forall\, x \in [0,1]$, segue que

$$\int_0^1 xa_x(x)|u_x(x)|^2\,dx \leqslant K\int_0^1 a(x)|u_x(x)|^2\,dx < \infty.$$

Logo, $xa|u_x|^2$, $xu_x(au_x)_x$, $xa_x|u_x|^2 \in L^1(0,1)$ e, portanto,

$$(xa|u_x|^2)_x = a|u_x|^2 + 2xu_x(au_x)_x - xa_xu_x^2 \in L^1(0,1).$$

Concluímos que $xa|u_x|^2 \in W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ e consequentemente existe

$$L = \lim_{x\to 0^+} xa(x)|u_x(x)|^2.$$

Resta mostrar que $L = 0$. Claramente $L \geq 0$. Suponha por contradição que que $L > 0$. Como $xa|u_x|^2 \in C([0,1])$, temos que dado $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|xa(x)|u_x(x)|^2 - L| < \frac{L}{2} \text{ sempre que } 0 < x < \delta.$$

Donde segue que,

$$\frac{L}{2x} < a(x)|u_x(x)|^2, \quad 0 < x < \delta.$$

Integrando a desigualdade anterior o intervalo (η, δ) com $0 < \eta < \delta$, segue que

$$\int_\eta^\delta a(x)|u_x(x)|^2\,dx > \int_\eta^\delta \frac{L}{2x}\,dx = \frac{L}{2}[\ln\delta - \ln\eta].$$

Fazendo $\eta \to 0$ obtemos

$$\int_0^\delta a(x)|u_x(x)|^2\,dx \geqslant \infty.$$

contrariando o fato de que $\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$. Logo $L = 0$, o que concluí o resultado.

■

Proposição 2.10. Se $u \in H^2_a(0,1)$, então existe

$$L = \lim_{x\to 0^+} a(x)u_x(x).$$

Ademais, se a é fortemente degenerada em $x = 0$, então $L = 0$.

Demonstração: Como $au_x \in H^1(0,1) \hookrightarrow W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$, segue que existe

$$L = \lim_{x\to 0^+} a(x)u_x(x).$$

No que segue, iremos supor que a é fortemente degenerada, donde $\frac{1}{a} \notin L^1(0,1)$. Da igualdade acima, temos

$$L^2 = \lim_{x\to 0^+} |a(x)u_x(x)|^2.$$

De maneira análoga ao que foi feito para a proposição anterior, suponha que $L \neq 0$, donde $L^2 > 0$. Como a é limitada, então $au_x = \sqrt{a}.\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$, em particular

$|au_x|^2 \in L^1(0,1)$. Ademais, como $(au_x)_x \in L^2(0,1)$, então $(|au_x|^2)_x = 2au_x(au_x)_x \in L^1(0,1)$ e assim $|au_x|^2 \in W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$. Daí, dado $\varepsilon = \frac{L^2}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||a(x)u_x(x)|^2 - L^2| < \frac{L^2}{2} \text{ sempre que } 0 < x < \delta.$$

Assim,

$$\frac{L^2}{2a(x)} < a(x)|u_x(x)|^2, \quad 0 < x < \delta.$$

Integrando a desigualdade anterior no intervalo (η, δ) com $0 < \eta < \delta$ obtemos

$$\int_\eta^\delta a|u_x|^2\,dx > \frac{L^2}{2}\int_\eta^\delta \frac{1}{a(x)}\,dx.$$

Fazendo $\eta \to 0$ e usando o fato de que $\frac{1}{a} \notin L^1(0,1)$ deduzimos que

$$\int_0^\delta a|u_x|^2\,dx \geqslant \frac{L^2}{2}\int_0^\delta \frac{1}{a(x)}\,dx = \infty,$$

contrariando $au_x \in L^2(0,1)$. Logo $L = 0$.

■

Proposição 2.11. Se $u \in H^2_a(0,1)$ e $v \in H^1_a(0,1)$, então

$$\lim_{x\to 0^+} a(x)v(x)u_x(x) = 0.$$

Demonstração: Se a é fracamente degenerada em $x = 0$, o resultado é uma consequência imediata da Proposição 2.10. De fato, como v é contínua em $x = 0$ e $v(0) = 0$, segue que

$$\lim_{x\to 0^+} a(x)v(x)u_x(x) = v(0).L = 0.L = 0.$$

No que segue, suponha que a é fortemente degenerada em $x = 0$. Como $a(x)u_x$, $v \in L^2(0,1)$, então $a(x)u_xv \in L^1(0,1)$. Por outro lado, como $\sqrt{a(x)}v_x$, $\sqrt{a(x)}u_x$, $(a(x)u_x)_x \in L^2(0,1)$ segue que

$$(a(x)u_xv)_x = a(x)u_xv_x + v(a(x)u_x)_x = \sqrt{a(x)}v_x\sqrt{a(x)}u_x + v(a(x)u_x)_x \in L^1(0,1).$$

Logo $avu_x \in W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ e assim existe

$$L = \lim_{x\to 0^+} a(x)v(x)u_x(x).$$

Em particular

$$|L| = \lim_{x\to 0^+} a(x)|v(x)u_x(x)|. \tag{2.27}$$

Como nas proposições anteriores, vamos supor por contradição que $L \neq 0$. Como $au_x \in W^{1,1}(0,1)$, usando a Proposição 2.10 obtemos

$$\begin{aligned} a(x)|u_x| = \left| \int_0^x (a(x)u_x)_x \, dx \right| &\leqslant \int_0^x |(a(x)u_x)_x| \, dx \\ &\leqslant \left(\int_0^x dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x (a(x)u_x)_x \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sqrt{x} \|(a(x)u_x)_x\|, \ \forall \, x \in (0,1]. \end{aligned}$$

Agora, usando (2.27), deduzimos que existe $\delta > 0$ tal que $\frac{|L|}{2} \leqslant a(x)|v(x)u_x(x)|, \ \forall \, x \in (0,\delta)$. Daí e da desigualdade anterior obtemos

$$\frac{|L|}{2} \leqslant \sqrt{x} \|(a(x)u_x)_x\| |v|, \ \forall \, x \in (0,\delta).$$

Consequentemente

$$\frac{|L|^2}{4x} \leqslant \|(a(x)u_x)_x\|^2 |v|^2, \ \forall \, x \in (0,\delta).$$

Integrando a desigualdade anterior em $(0,\delta)$, chegamos à

$$\int_0^\delta |v|^2 \|(a(x)u_x)_x\|^2 \, dx \geqslant \frac{L^2}{4} \int_0^\delta \frac{dx}{x} = \infty$$

contrariando $v \in L^2(0,1)$. Logo $L = 0$, o que conclui a demonstração.

■

Observação 2.6. Se $u \in H_a^2(0,1)$ e $v \in H_a^1(0,1)$, então vale a *fórmula de integração por partes*:

$$-\int_0^1 (au_x)_x v \, dx = \int_0^1 au_x v_x \, dx.$$

De fato, como $(au_x)_x \in L^2(0,1)$, então

$$-\int_0^1 (au_x)_x v \, dx = \langle -(au_x)_x, v \rangle_{H_a^{-1}(0,1), H_a^1(0,1)} = \int_0^1 au_x v_x \, dx.$$

2.4 Subespaços Densos

O objetivo desta seção é provarmos que o espaço das funções testes é denso em $H_a^1(0,1)$. Comecemos com o seguinte Lema:

Lema 2.1. O espaço $C^1([0,1]) \cap H_a^1(0,1)$ é denso em $H_a^1(0,1)$.

Demonstração: Faremos a demonstração apenas no caso fortemente degenerado. Neste caso existem $\theta \in (0,2)$ e $\delta_0 \in (0,1)$ tais que a função Φ_θ é monótona não decrescente em $(0,\delta_0)$.

Consideremos $u \in H^1_a(0,1)$ e $\varepsilon > 0$, daí

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^{2\delta} (|u|^2 + a|u_x|^2)\, dx = 0. \tag{2.28}$$

Dessa forma, podemos tomar $\delta \in (0,1/4)$ tal que

$$\int_0^{2\delta} (|u|^2 + a|u_x|^2)\, dx < \varepsilon. \tag{2.29}$$

No que segue, qualquer constante positiva que não dependa de δ e nem de ε será denotada por C.

Etapa 1 - Estimativa em $[\delta,1]$**:**

Seja $A = \max\{a(x); x \in [0,1]\}$. Como $a > 0$ em $(0,1]$, segue que existe $c_1 > 0$ tal que $c_1 \leqslant a(x) \leqslant A$, $\forall\, x \in [\delta,1]$. Por outro lado, de

$$u \in L^2(\delta,1) \quad \text{e} \quad \sqrt{a(x)}u_x \in L^2(\delta,1),$$

deduzimos que

$$u_x = \frac{\sqrt{a(x)}u_x}{\sqrt{a(x)}} \leqslant \frac{\sqrt{a(x)}u_x}{\sqrt{c_1}} \in L^2(\delta,1).$$

Logo $u \in H^1(\delta,1)$. Da densidade de

$$B = \{f \in C^1([\delta,1]); f(1) = 0\}$$

em

$$H = \{v \in H^1(\delta,1); v(1) = 0\},$$

segue que existe $f \in B$ tal que

$$\int_\delta^1 |u-f|^2 + |u_x - f_x|^2\, dx < \varepsilon.$$

Daí

$$\int_\delta^1 \left[|u-f|^2 + a|u_x - f_x|^2\right]\, dx \leqslant \max\{1,A\} \int_\delta^1 |u-f|^2 + |u_x - f_x|^2\, dx \leqslant C\varepsilon. \tag{2.30}$$

Etapa 2 - Estimativa em $[0,\delta]$**:**

No que segue escolheremos algumas constantes apropriadas cujas propriedades irão se mostrar adequadas no decorrer da demonstração. Inicialmente tomemos $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$ e

$$\lambda_1 = \frac{\mu_2 + 1}{\mu_2 - \mu_1} > 0 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{-1 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} < 0.$$

Note que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = -1 \end{cases}.$$

Para $x \in [0, \delta]$, defina

$$h(x) = \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) + \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x)).$$

Considerando as desigualdades

$$\delta \leqslant \delta + \mu_i(\delta - x) \leqslant \delta + \mu_i\delta = \delta(1 + \mu_i) < 2\delta < 1 - \delta, \quad i = 1, 2,$$

concluímos que $h : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ está bem definida, $h \in C^1([0, \delta])$ e, além disso,

$$\begin{cases} h(\delta) &= \lambda_1 f(\delta) + \lambda_2 f(\delta) = f(\delta); \\ h_x(x) &= -\lambda_1\mu_1 f_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta + \mu_2(\delta - x)); \\ h_x(\delta) &= -\lambda_1\mu_1 f_x(\delta) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta) = f_x(\delta). \end{cases} \tag{2.31}$$

As identidades (2.31) garantem que a extensão $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se} \;\; x \in [0, \delta) \\ f(x) & \text{se} \;\; x \in [\delta, 1] \end{cases}$$

é de classe $C^1([0, 1])$ e, como $f \in B$, temos $F \in C^1([0, 1]) \cap H^1_a(0, 1)$. Dessa forma, o resultado será provado ao obtermos estimativa $\|u - F\|_{1,a} < C\varepsilon$. Por (2.30) já obtemos tal estimativa em $[\delta, 1]$, assim o restante da demonstração será dedicado à prova de que

$$\int_0^\delta |u(x) - h(x)|^2 + a|u_x(x) - h_x(x)|^2 \, dx < C\varepsilon. \tag{2.32}$$

Para $x \in [0, \delta]$, temos que

$$\begin{aligned} |u(x) - h(x)| &= |u(x) - \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\ &= |(\lambda_1 + \lambda_2)u(x) - \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\ &\leqslant |\lambda_1 u(x) - \lambda_1 u(\delta + \mu_1(\delta - x))| \\ &+ |\lambda_1 u(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x))| \\ &+ |\lambda_2 u(x) - \lambda_2 u(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\ &+ |\lambda_2 u(\delta + \mu_2(\delta - x)) - \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))|. \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, usando a desigualdade de Young e integrando em $[0,\delta]$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\delta |u(x)-h(x)|^2\,dx \leqslant 4\Big[\lambda_1^2 &\int_0^\delta |u(x)-u(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx \\ &+ \lambda_1^2\int_0^\delta |u(\delta+\mu_1(\delta-x))-f(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx \\ &+ \lambda_2^2\int_0^\delta |u(x)-u(\delta+\mu_2(\delta-x))|^2\,dx \\ &+ \lambda_2^2\int_0^\delta |u(\delta+\mu_2(\delta-x))-f(\delta+\mu_2(\delta-x))|^2\,dx\Big].\end{aligned} \tag{2.33}$$

Denotemos por I_1, I_2, I_3 e I_4 as quatro integrais do lado direito de (2.33). No que segue estimaremos cada uma dessas integrais.

Desde que $\delta \leqslant \delta+\mu_i(\delta-x) < \delta+\mu_i\delta < 2\delta < 1-\delta$, podemos fazer a mudança de variável $\xi = \delta+\mu_1(\delta-x)$ para obter

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^\delta |u(x)-u(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx \leqslant 2\left[\int_0^\delta |u(x)|^2\,dx + \int_0^\delta |u(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx\right] \\ &= 2\int_0^\delta |u(x)|^2\,dx + \frac{2}{\mu_1}\int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} |u(\xi)|^2\,d\xi \leqslant C\int_0^{2\delta}|u(x)|^2\,dx \leqslant C\varepsilon.\end{aligned}$$

Para estimar o termo I_2, realizamos a mesma mudança de variáveis de anteriormente:

$$I_2 = \int_\delta^{\delta+\mu_1\delta}\frac{1}{\mu_1}|u(\xi)-f(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \frac{1}{\mu_1}\int_\delta^1 |u(x)-f(x)|^2\,d\xi < C\varepsilon.$$

Para estimar I_3 e I_4, basta repetir os mesmos passos de I_1 e I_2 trocando μ_1 por μ_2. Isto resulta em $I_3 \leqslant C\varepsilon$ e $I_4 \leqslant C\varepsilon$. Juntando as quatro estimativas e levando à (2.33) concluímos que

$$\int_0^\delta |u(x)-h(x)|^2\,dx \leqslant C\varepsilon. \tag{2.34}$$

Fazendo um cálculo similar com h_x no lugar de h, podemos deduzir que

$$\begin{aligned}\int_0^\delta a|u_x-h_x|^2\,dx \leqslant 4\Big[\lambda_1^2\mu_1^2 &\int_0^\delta a(x)|u_x(x)-u_x(\delta+\mu_1(\delta-x))||^2\,dx \\ &+ \lambda_1^2\mu_1^2\int_0^\delta a(x)|u_x(\delta+\mu_1(\delta-x))-f_x(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx \\ &+ \lambda_2^2\mu_2^2\int_0^\delta a(x)|u_x(x)-u_x(\delta+\mu_2(\delta-x))|^2\,dx \\ &+ \lambda_2^2\mu_2^2\int_0^\delta a(x)|u_x(\delta+\mu_2(\delta-x))-f_x(\delta+\mu_2(\delta-x))|^2\,dx\Big].\end{aligned} \tag{2.35}$$

Denotemos por K_1, K_2, K_3 e K_4 as quatro integrais do lado direto de (2.35).

Para estimar K_1, comecemos notando que para $0 \leqslant x \leqslant \delta$, temos que $(1+\mu_1)x \leq (1+\mu_1)\delta$ e, assim, $x \leqslant \delta + \mu_1(\delta - x)$. Usando o fato de Φ_θ ser monótona não decrescente em $(0,\delta)$, segue que

$$\begin{aligned}
K_1 &\leqslant 2\Big[\int_0^\delta a(x)|u_x(x)|^2\,dx + \int_0^\delta a(x)|u_x(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx\Big]\\
&= 2\int_0^\delta a(x)|u_x(x)|^2\,dx + 2\int_0^\delta \frac{a(x)}{x^\theta}x^\theta|u_x(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx\\
&\leqslant 2\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2\,dx\\
&+ 2\int_0^\delta a(\delta+\mu_1(\delta-x))\left(\frac{x}{(\delta+\mu_1(\delta-x))}\right)^\theta |u_x(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx\\
&\leqslant 2\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2\,dx + 2\int_0^\delta a(\delta+\mu_1(\delta-x))|u_x(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx\\
&= 2\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2\,dx + \frac{2}{\mu_1}\int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} a(\xi)|u_x(\xi)|^2\,d\xi\\
&\leqslant C\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2\,dx \leqslant C\varepsilon.
\end{aligned}$$

De forma análoga estimamos K_2:

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_0^\delta \frac{a(x)}{x^\theta}x^\theta|u_x(\delta+\mu_1(\delta-x)) - f_x(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx\\
&\leqslant \int_0^\delta a(\delta+\mu_1(\delta-x))|u_x(\delta+\mu_1(\delta-x)) - f_x(\delta+\mu_1(\delta-x))|^2\,dx\\
&= \frac{1}{\mu_1}\int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} a(\xi)|u_x(\xi)-f_x(\xi)|^2\,dx \leqslant C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Para estimar K_3 e K_4, basta repetir as estimativas de K_1 e K_2 trocando μ_1 por μ_2. Juntando as quatro estimativas, obtemos $K_1+K_2+K_3+K_4 \leqslant C\varepsilon$, que, levando à (2.35) resulta em

$$\int_0^\delta a|u_x - h_x|^2\,dx \leqslant C\varepsilon. \tag{2.36}$$

As estimativas (2.34) e (2.36) levam à (2.32), o que conclui a demonstração.

■

Proposição 2.12. O espaço $C_0^\infty(0,1)$ é denso em $H_a^1(0,1)$.

Demonstração: Da análise funcional, sabemos que podemos deduzir a densidade de $C_0^\infty(0,1)$ em $H_a^1(0,1)$ provando que $C_0^\infty(0,1)^\perp = \{0\}$. Assim, seja $u \in C_0^\infty(0,1)^\perp$, isto é, $u \in H_a^{-1}(0,1)$ e $\langle u,\varphi\rangle = 0,\ \forall\,\varphi \in C_0^\infty(0,1)$. Finalizaremos a demonstração ao concluir que $u=0$.

Pelo Teorema da representação de Riesz existe uma única $f \in H_a^1(0,1)$ com $\|f\|_{H_a^1(0,1)} = \|u\|_{H_a^{-1}(0,1)}$ satisfazendo

$$\langle u, \varphi \rangle = (f, \varphi)_{H_a^1(0,1)} \quad \forall\, \varphi \in H_a^1(0,1).$$

Em particular

$$\int_0^1 (f\varphi + a f_x \varphi_x)\, dx = (f, \varphi)_{H_a^1(0,1)} = \langle u, \varphi \rangle = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,1).$$

Daí, no sentido das distribuições vale $\langle f - (af_x)_x, \varphi \rangle = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,1)$, isto é, $f - (af_x)_x = 0$ em $\mathcal{D}'(0,1)$. Daí $(af_x)_x = f \in L^2(0,1)$, donde $f \in H_a^2(0,1)$.

Afirmação 2.5. $(f, g)_{H_a^1(0,1)} = 0, \ \forall\, g \in C^1([0,1]) \cap H_a^1(0,1)$.

De fato, dado $g \in C^1([0,1]) \cap H_a^1(0,1)$, temos que $g(1) = 0$. Ademais, como $f \in H_a^2(0,1)$, pela Proposição 2.11 temos

$$\lim_{x \to 0^+} a(x) f_x(x) g(x) = 0.$$

Daí, usando a Observação 2.6, obtemos

$$\begin{aligned}
(f,g)_{H_a^1(0,1)} &= \int_0^1 a f_x g_x\, dx + \int_0^1 fg\, dx \\
&= -\int_0^1 (af_x)_x g\, dx + \lim_{x \to 1^-} a(x) f_x(x) g(x) - \lim_{x \to 0^+} a(x) f_x(x) g(x) + \int_0^1 fg\, dx \\
&= -\int_0^1 fg\, dx + 0 - 0 + \int_0^1 fg\, dx = 0.
\end{aligned}$$

Usando a Afirmação 2.5 e o Lema 2.1, deduzimos que $f \in [C([0,1]) \cap H_a^1(0,1)]^\perp = \{0\}$. Logo $f = 0$, o que conclui a demonstração.

■

CAPÍTULO 3

EDPS DE EVOLUÇÃO DEGENERADAS

Neste capítulo usaremos os espaços de Sobolev com peso apresentados no Capítulo 2 para estudar problemas de evolução com operadores degenerados.

No que segue, $a : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ é uma função fracamente ou fortemente degenerada no sentido da Definição 2.2.

3.1 Problema Parabólico

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - (a(x)u_x)_x + c(x)u = f(t,x), & (t,x) \in Q_T, \\ \begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)u_x(t,0) = u(t,1) = 0, \text{ se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $T > 0$, $Q_T = (0,T) \times (0,1)$, $c \in L^\infty(0,1)$, $f \in L^2(Q_T)$ e $u_0 \in H_a^{-1}(0,1)$.

A seguir introduzimos as noções de solução para o problema (3.1), as quais dependem da regularidade do dado inicial.

Definição 3.1. Seja $u_0 \in H_a^1(0,1)$. Dizemos que

$$u \in C([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap L^2(0,T; H_a^2(0,1)) \cap H^1(0,T; L^2(0,1))$$

é uma *solução forte* de (3.1), se $u(0) = u_0$ e

$$u_t(t,x) - (a(x)u_x(t,x))_x + c(x)u(t,x) = f(t,x) \quad \text{quase sempre em } Q_T. \tag{3.2}$$

Definição 3.2. Seja $u_0 \in L^2(0,1)$. Dizemos que

$$u \in C([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1_a(0,1))$$

é uma *solução fraca* de (3.1), se $u(0) = u_0$ e para qualquer função

$$\varphi \in C([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1_a(0,1))$$

com $\varphi_t \in L^2(Q_T)$ e $\varphi(T,\cdot) = 0$, vale que

$$\iint_{Q_T} (-u\varphi_t + a(x)u_x\varphi_x + c(x)u\varphi)\, dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi\, dxdt + \int_0^1 u_0(x)\varphi(0,x)\, dx. \tag{3.3}$$

Observação 3.1. Note que toda solução forte é, em particular, uma solução fraca. De fato, sendo $u \in C([0,T]; H^1_a(0,1)) \cap L^2(0,T; H^2_a(0,1)) \cap H^1(0,T; L^2(0,1))$ solução forte de (3.1), segue das imersões usuais que $u \in C([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1_a(0,1))$.

Agora, considere $\varphi \in C([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1_a(0,1))$ com $\varphi_t \in L^2(Q_T)$ e $\varphi(T,\cdot) = 0$. Multiplicando (3.2) por φ e integrando em Q_T, segue que

$$\iint_{Q_T} (u_t(t,x)\varphi - (a(x)u_x(t,x))_x\varphi + c(x)u(t,x)\varphi)\, dxdt = \iint_{Q_T} f(t,x)\varphi\, dxdt. \tag{3.4}$$

Analisemos os dois primeiros termos separadamente. Utilizando integração por partes, segue que

$$\iint_{Q_T} u_t(t,x)\varphi\, dxdt = -\int_0^1 u_0(x)\varphi(0,x)\, dx - \iint_{Q_T} u(t,x)\varphi_t\, dxdt. \tag{3.5}$$

E também,

$$\iint_{Q_T} (a(x)u_x(t,x))_x\varphi\, dxdt = -\iint_{Q_T} a(x)u_x(t,x)\varphi_x\, dxdt. \tag{3.6}$$

Substituindo as equações (3.5) e (3.6) em (3.4) obtemos (3.3), como queríamos.

No que segue, aplicaremos a teoria de semigrupo estudada no Capítulo 3 para provarmos a existência e unicidade de soluções forte e fraca. Para tanto, consideremos $D(A) = H^2_a(0,1)$ e o operador $A : D(A) \to L^2(0,1)$ dado por

$$Au := (a(x)u_x)_x.$$

Lema 3.1. O operador $-A : D(A) \to L^2(0,1)$ é densamente definido e $m-$acretivo.

Demonstração: Note que,

$$(-Au, u) = \int_0^1 -(a(x)u_x)_x u\, dx = \int_0^1 a(x)u_x^2\, dx \geqslant 0, \quad \forall\, u \in D(A).$$

Logo, do Lema 1.3, $-A$ é acretivo.

Resta mostrar que $I - A$ é sobrejetivo. De fato, consideremos $f \in L^2(0,1)$. Defina o funcional linear $T_f : H_a^1(0,1) \to \mathbb{R}$ por

$$T_f(\varphi) = \int_0^1 f\varphi\, dx.$$

Note que

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_0^1 f\varphi\, dx \right| \leqslant \int_0^1 |f||\varphi|\, dx \leqslant \|f\|\|\varphi\| \leqslant c\|f\|\|\varphi\|_{1,a}\ \forall\ \varphi \in H_a^1(0,1)$$

e portanto T_f é limitado. Pelo Teorema da Representação de Riez, existe único $u \in H_a^1(0,1)$ tal que

$$(u,\varphi)_{H_a^1(0,1)} = \int_0^1 f\varphi\, dx,\ \forall\ \varphi \in H_a^1(0,1).$$

Dessa forma, para toda função teste $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$, vale

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\varphi\, dx &= \int_0^1 (u\varphi + a(x)u_x\varphi_x)\, dx = \int_0^1 u\varphi\, dx + \int_0^1 a(x)u_x\varphi_x\, dx\\ &= \int_0^1 u\varphi\, dx - \int_0^1 (a(x)u_x)_x\varphi\, dx,\end{aligned}$$

em que, na última igualdade, a integração por partes foi realizada no sentido das distribuições. Como a igualdade acima vale para toda função teste, o Lema de Du-Bois Reymond garante que $(a(x)u_x)_x = u - f \in L^2(0,1)$. Isto implica que $au_x \in H^1(0,1)$ e portanto $u \in H_a^2(0,1) = D(A)$. Concluímos que $I - A$ é sobrejetivo, donde concluímos que o operador é $m-$acretivo. Por outro lado, a densidade de $D(A)$ segue do Lema 1.4 o que finaliza a demonstração.

■

Teorema 3.1. *Seja $f \in L^2(0,1)$. Se $u_0 \in L^2(0,1)$, então o problema (3.1) possui uma única solução fraca $u \in C([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H_a^1(0,1))$. Neste caso existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2 + \int_0^T |u(t)|_{1,a}^2\, dt \leqslant C(\|u_0\|^2 + \|f\|_{L^2(Q_T)}^2).$$

Se, ademais, $u_0 \in H_a^1(0,1)$, então o problema (3.1) possui uma única solução forte $u \in C([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap L^2(0,T; H_a^2(0,1)) \cap H^1(0,T; L^2(0,1))$. Neste caso existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{1,a}^2 + \int_0^T (\|u_t(t)\|^2 + \|(au_x)_x(t)\|^2)\, dt \leqslant C(\|u_0\|_{1,a}^2 + \|f\|_{L^2(Q_T)}^2).$$

Demonstração: Nesta demonstração, designaremos uma constante genérica positiva por C. Pelo Lema 3.1, o Teorema de Hille-Yosida-Phillips garante que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contração.

Considere agora o operador linear $B : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ dado por

$$Bu = -c(x)u.$$

Note que

$$\|Bu\|^2 = \int_0^1 |c(x)u|^2 \, dx \leqslant \|c\|_\infty^2 \int_0^1 |u|^2 \, dx = \|c\|_\infty^2 \|u\|^2.$$

Pelo Teorema 1.6, temos que $A + B$ também é gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$. Dessa forma, a fórmula de Duhamel

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s) \, ds$$

define uma solução generalizada para a equação

$$\begin{cases} u'(t) + (-A - B)u(t) = f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Etapa 1 - Solução Fraca: Considere $u_0 \in L^2(0,1)$. Tomemos sequências $(u_{0n}) \subset C_0^\infty(0,1)$ e $(f_n) \subset C(0,T; H_a^2(0,1))$ tais que $u_{0n} \to u_0$ em $L^2(0,1)$ e $f_n \to f$ em $L^2(Q_T)$. Pela Proposição 1.7 temos que

$$u_n(t) := S(t)u_{0n} + \int_0^t S(t-s)f_n(s) \, ds$$

define uma solução clássica para o problema

$$\begin{cases} u_n \in C^1([0,T]; L^2(0,1)) \cap C([0,T]; H_a^2(0,1)), \\ (u_n)_t(t) + (-A - B)u_n(t) = f_n(t), \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Além disso, $w_n := u_n - u$ é a solução generalizada do problema

$$\begin{cases} (w_n)_t(t) + (-A - B)w_n(t) = f_n(t) - f(t), \\ w_n(0) = u_{0n} - u_0. \end{cases}$$

Pelo Lema 1.5, obtemos

$$\sup_{t \in [0,T]} \|w_n(t)\|^2 \leqslant \|u_{0n} - u_0\|^2 + \|f_n - f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))} \leqslant C(\|u_{0n} - u_0\|^2 + \|f_n - f\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))}).$$

Como $\|u_{0n} - u_0\| \to 0$ e $\|f_n - f\| \to 0$, concluímos que o $w_n \to 0$ em $C([0,T]; L^2(0,1))$, isto é, $u_n \to u$ em $C([0,T]; L^2(0,1))$. Além disso, esta convergência nos dá $u(0) = u_0$.

De forma análoga, $v_{nm} := u_n - u_m$ é a solução clássica do problema

$$\begin{cases} v_{nm} \in C^1([0,T]; L^2(0,1)) \cap C([0,1]; H_a^2(0,1)), \\ (v_{nm})_t(t) + (-A - B)v_{nm}(t) = f_n(t) - f_m(t), \\ v_{nm}(0) = u_{0n} - u_{0m}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Multiplicando (3.9) por $v_{nm}(t)$, integrando em $(0,1)$ e usando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{nm}(t)\|^2 + \|\sqrt{a}(v_{nm})_x(t)\|^2 + \int_0^1 c(x)|v_{nm}(t)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\|f_n(t) - f_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|v_{nm}(t)\|^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{nm}(t)\|^2 + \|\sqrt{a}(v_{nm})_x(t)\|^2 &\leqslant \frac{1}{2}\|f_n(t) - f_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|v_{nm}(t)\|^2 - \int_0^1 c(x)|v_{nm}(t)|^2\,dx \\ &\leqslant C(\|f_n - f_m\|^2 + \|v_{nm}(t)\|^2). \end{aligned}$$

Integrando a ultima desigualdade em $(0,t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|v_{nm}(t)\|^2 + \int_0^t \|(\sqrt{a}v_{nm})_x(t)\|^2\,dt \leqslant C\int_0^t \|f_n - f_m\|^2\,dt + C\int_0^t \|v_{nm}(s)\|^2\,ds \\ + \frac{1}{2}\|u_{0n} - u_{0m}\|^2. \end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 1.5 deduzimos

$$\frac{1}{2}\|v_{nm}(t)\|^2 + \int_0^t \|\sqrt{a}(v_{nm})_x(t)\|^2\,dt \leqslant C(\|u_{0n} - u_{0m}\|^2 + \|f_n - f_m\|^2_{L^2(Q_T)}),\ \forall\, t \in [0,T].$$

Desde que $u_{0n} \to u_0$ em $L^2(0,1)$ e $f_n \to f$ em $L^2(Q_T)$, a última estimativa nos leva a concluir que (u_n) é de Cauchy em $L^2(0,T; H_a^1(0,1))$. Como $u_n \to u$ em $C([0,T]; L^2(0,1))$, deduzimos que $u_n \to u$ em $L^2(0,T; H_a^1(0,1))$. Portanto $u \in C([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H_a^1(0,1))$. Por outro lado, repetindo os mesmos argumentos com u_n no lugar de v_{nm}, concluímos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|^2 + \int_0^T \|\sqrt{a}(u_n)_x(t)\|^2\,dt \leqslant C(\|u_{0n}\|^2 + \|f_n\|^2_{L^2(Q_T)}).$$

Passando ao limite obtemos a estimativa de energia para u:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2 + \int_0^T \|\sqrt{a}u_x(t)\|^2\,dt \leqslant C(\|u_0\|^2 + \|f\|^2_{L^2(Q_T)}).$$

Resta concluirmos que u satisfaz a formulação fraca (3.3). Com efeito, seja $\varphi \in C^1([0,T], \mathcal{D}(0,1))$ tal que $\varphi(T,x) = 0$. Multiplicando (3.8) por φ e integrando em Q_T obtemos

$$\iint_{Q_T} ((u_n)_t\varphi - (a(u_n)_x)_x\varphi + cu_n\varphi)\, dxdt = \iint_{Q_T} f_n\varphi\, dxdt. \tag{3.10}$$

Analisemos os dois primeiros termos separadamente. Utilizando integração por partes segue que

$$\iint_{Q_T} (u_n)_t\varphi\, dxdt = -\int_0^1 u_{n0}\varphi(0,x)\, dx - \iint_{Q_T} u_n\varphi_t\, dxdt.$$

Por outro lado, como $\varphi(t) \in \mathcal{D}(0,1)$, podemos aplicar integração por partes no sentido das distribuições ao segundo termo:

$$\iint_{Q_T} (a(u_n)_x)_x\varphi\, dxdt = -\iint_{Q_T} a(u_n)_x\varphi_x\, dxdt.$$

Assim,

$$\iint_{Q_T} (-u_n\varphi_t + a(u_n)_x\varphi_x + cu_n\varphi)\, dxdt = \iint_{Q_T} f_n\varphi\, dxdt + \int_0^1 u_{0n}\varphi(0,x)\, dx.$$

A identidade (3.3) agora pode ser obtida passando o limite na igualdade acima.

Agora, suponha que $u,\ v \in C([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1_a(0,1))$ são soluções fracas de (3.1) e considere $w = u - v$. Assim, $w \in C([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1_a(0,1))$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} w_t - (a(x)w_x)_x + c(x)w = 0, & (t,x) \in Q_T, \\ \begin{cases} w(t,0) = w(t,1) = 0, \text{ se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)w_x(t,0) = w(t,1) = 0, \text{ se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\ w(0,x) = 0, & x \in (0,1). \end{cases}$$

desse modo, w satisfaz a estimativa de energia com $w_0 = 0$ e $f \equiv 0$, isto é,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|^2 + \int_0^T |w(t)|^2_{1,a}\, dt \leqslant 0.$$

Donde concluímos que $w = 0$. Logo $u = v$ e, portanto, a solução fraca é única.

Etapa 2 - Solução Forte: Considere $u_0 \in H^1_a(0,1)$. Neste caso podemos tomar sequências $(u_{0n}) \in C_0^\infty(0,1)$ e $(f_n) \subset C([0,T]; H^2_a(0,1))$ tais que $u_{0n} \to u_0$ em $H^1_a(0,1)$ e $f_n \to f$ em $L^2(Q_T)$. Analogamente ao feito na etapa anterior, obtemos uma sequência de soluções clássicas $(u_n) \subset C^1([0,T]; L^2(0,1)) \cap C([0,1]; H^2_a(0,1))$ tal que $u_n \to u$ em $C([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1_a(0,1))$. Além disso, u é uma solução fraca de (3.1).

Sendo $v_{nm} := u_n - u_m$, temos que para todo $t \in [0,T]$, vale

$$(v_{nm})_t(t) - [a(v_{nm})_x]_x(t) + cv_{nm}(t) = f_n(t) - f_m(t).$$

Multiplicando por $(v_{nm})_t$ e integrando em $(0,1)$, obtemos

$$\begin{aligned}\|(v_{nm})_t(t)\|^2 + \int_0^1 a(v_{nm})_x(t)(v_{nm})_{xt}(t)\,dx = & -\int_0^1 cv_{nm}(t)(v_{nm})_t(t)\,dx \\ & + \int_0^1 (f_n(t) - f_m(t))(v_{nm})_t(t)\,dx.\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\|(v_{nm})_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{nm}(t)\|_{1,a}^2 & \leqslant \|c\|_\infty \int_0^1 \left(\sqrt{4\|c\|_\infty} v_{nm}(t)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4\|c\|_\infty}}(v_{nm})_t(t)\right)dx \\ & + \int_0^1 (2(f_n(t) - f_m(t)))\left(\frac{1}{2}(v_{nm})_t(t)\right)dx \\ & \leqslant C\|v_{nm}(t)\|^2 + \frac{1}{4}\|(v_{nm})_t(t)\|^2 \\ & + 4\|f_n(t) - f_m(t)\|^2 + \frac{1}{4}\|(v_{nm})_t(t)\|^2.\end{aligned}$$

Usando a estimativa de energia para v_{nm} deduzimos que

$$\frac{1}{2}\|(v_{nm})_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{nm}(t)\|_{1,a}^2 \leqslant C(\|u_{0n} - u_{0m}\|_{1,a}^2 + \|f_n(t) - f_m(t)\|^2).$$

Dado $t \in (0,T)$, integrando em $(0,t)$ segue que

$$\int_0^t \|(v_{nm})_t(t)\|^2\,dt + \|v_{nm}(t)\|_{1,a}^2 \leqslant C(\|u_{0n} - u_{0m}\|_{1,a}^2 + \|f_n - f_m\|_{L^2(Q_T)}^2). \tag{3.11}$$

Como $u_{0n} \to u_0$ em $H_a^1(0,1)$ e $f_n \to f$ em $L^2(Q_T)$, a estimativa (3.11) garante que (u_n) é de Cauchy em $H^1(0,T;L^2(0,1)) \cap C([0,T];H_a^1(0,1))$. Como $u_n \to u$ em $C([0,T];L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H_a^1(0,1))$, segue que $u \in H^1(0,T;L^2(0,1)) \cap C([0,T];H_a^1(0,1))$ e $u_n \to u$ em $H^1(0,T;L^2(0,1)) \cap C([0,T];H_a^1(0,1))$.

Usando (3.3) com $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$, obtemos

$$\iint_{Q_T} (u_t - (a(x)u_x)_x + c(x)u)\varphi\,dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi\,dxdt, \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(Q_T).$$

Portanto (3.2) é consequência do Lema de Du-Bois-Reymond. Por outro lado, como $(au_x)_x(t,x) = u_t(t,x) + c(x)u(t,x) - f(t,x)$ quase sempre em Q_T e $u_t + cu - f \in L^2(Q_T)$, deduzimos que $u \in L^2(0,T;H_a^2(0,1))$. Logo, u é solução forte de (3.1).

Resta obtermos a estimativa de energia para u. Repetindo os mesmos argumentos com u_n no lugar de v_{nm}, concluímos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|_{1,a}^2 + \int_0^T \|(u_n)_t(t)\|^2\,dt \leqslant C(\|u_{0n}\|_{1,a}^2 + \|f_n\|_{L^2(Q_T)}^2).$$

Passando ao limite segue que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{1,a}^2 + \int_0^T \|u_t(t)\|^2\, dt \leqslant C(\|u_0\|_{1,a}^2 + \|f\|_{L^2(Q_T)}^2). \tag{3.12}$$

Por fim, como $(au_x)_x(t,x) = u_t(t,x) + c(x)u(t,x) - f(t,x)$ quase sempre em Q_T, a última estimativa nos dá

$$\begin{aligned} \int_0^T \|(au_x)_x(t)\|^2\, dt &\leqslant C\int_0^T \|u_t(t)\|^2\, dt + C\int_0^T \|u(t)\|^2\, dt + C\int_0^T \|f(t)\|^2\, dt \\ &\leqslant C(\|u_0\|_{1,a}^2 + \|f\|_{L^2(Q_T)}^2). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Logo, a estimativa de energia é obtida somando (3.12) com (3.13).

■

A seguir, apresentamos uma outra noção de solução que podemos obter usando os espaços de Sobolev com peso. Tal noção é particularmente útil no estudo de problemas de controle.

Definição 3.3. Seja $u_0 \in H_a^{-1}(0,1)$. Dizemos que

$$u \in C([0,T]; H_a^{-1}(0,1)) \cap L^2(0,T; L^2(0,1))$$

é *solução muito fraca* (ou *solução por transposição*) de (3.1), se para todo $g \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, vale

$$\iint_{Q_T} ug\, dxdt = \langle u_0, v(0,x)\rangle_{H_a^{-1}(0,1),H_a^1(0,1)} + \iint_{Q_T} fv\, dxdt, \tag{3.14}$$

em que $v \in C([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap L^2(0,T; H_a^2(0,1))$ é a solução forte do problema retrogrado

$$\begin{cases} -v_t - (a(x)v_x)_x + c(x)v = g, \ (t,x) \in Q_T \\ \begin{cases} v(t,0) = v(t,1) = 0 \\ a(x)v_x(t,x) = v(t,1) = 0 \end{cases} \\ v(T,x) = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Proposição 3.1. Sejam $u_0 \in L^2(0,1)$, $f \in L^2(Q_T)$ e

$$u \in L^2(0,T; H_a^1(0,1)) \cap C([0,T]; L^2(0,1))$$

a solução fraca de (3.1). Então u é uma solução muito fraca de (3.1).

Demonstração: Sendo $u \in L^2(0,T;H_a^1(0,1)) \cap C([0,T];L^2(0,1))$ uma solução fraca de (3.1), pelas imersões usuais temos a regularidade $u \in L^2(0,T;L^2(0,1)) \cap C([0,T];H_a^{-1}(0,1))$.

Consideremos agora $\varphi \in L^2(0,T;H_a^2(0,1)) \cap C([0,T];H_a^1(0,1)) \cap H^1(0,T;L^2(0,1))$ solução forte do problema retrogrado (3.15). Como u é solução fraca de (3.1) vale

$$\iint_{Q_T} (-u\varphi_t + a(x)u_x\varphi_x + c(x)\varphi)\,dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi\,dxdt + \int_0^1 u_0\varphi(0,x)\,dx. \tag{3.16}$$

Como φ é solução forte do problema retrogrado, temos que

$$-\varphi_t = g + (a(x)\varphi_x)_x - c(x)\varphi \;\text{ quase sempre em } Q_T,$$

donde

$$-u\varphi_t = ug + u(a(x)\varphi_x)_x - uc(x)\varphi \quad \text{quase sempre em } Q_T.$$

Substituindo a última igualdade em (3.16), temos

$$\iint_{Q_T} (ug+u(a(x)\varphi_x)_x - uc(x)\varphi + a(x)u_x\varphi_x + uc(x)\varphi)\,dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi\,dxdt + \int_0^1 u_0\varphi(0,x)\,dx.$$

Usando integração por partes e lembrando que $u(1)=0$ e $(a\varphi_x)(0)=0$, obtemos

$$\iint_{Q_T} gu\,dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi\,dxdt + \int_0^1 u_0\varphi(0,x)\,dx.$$

Logo, u é uma solução muito fraca de (3.1).

■

A observação a seguir, apesar de um tanto trivial por ser uma consequência imediata do Teorema da Representação de Riez, tem um papel importante na demonstração do próximo resultado.

Observação 3.2. Dado $u \in H_a^1(0,1)$, podemos considerar $u \in H_a^{-1}(0,1)$ pondo

$$\langle u, v\rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)} = (u,v)_{H_a^1(0,1)} \;\forall\, v \in H_a^1(0,1).$$

Neste caso, $|u|_{1,a} = \|u\|_{H_a^{-1}(0,1)}$.

Proposição 3.2. Dados $f \in L^2(Q_T)$ e $u_0 \in H_a^{-1}(0,1)$, o problema (3.1) possui uma única solução muito fraca $u \in C([0,T];H_a^{-1}(0,1)) \cap L^2(0,T;L^2(0,1))$. Além disso, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2_{H_a^{-1}(0,1)} + \int_0^T \|u(t)\|^2\,dt \leqslant C(\|u_0\|^2_{H_a^{-1}(0,1)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))}). \tag{3.17}$$

Demonstração: Para garantir a existência da solução muito fraca, vejamos inicialmente a seguinte Afirmação.

Afirmação 3.1. O problema (3.1) possui no máximo uma solução muito fraca. Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que, se $u \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ satisfaz (3.14), então

$$\|u\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leqslant C(\|u_0\|^2_{H_a^{-1}(0,1)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))}).$$

Considere o funcional $\Gamma : L^2(0,T;L^2(0,1)) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Gamma(g) = \langle u_0, v(0,x)\rangle_{H_a^{-1}(0,1),H_a^1(0,1)} + \iint_{Q_T} fv\,dxdt.$$

em que v é a solução forte do problema retrógrado (3.15). Mostremos que Γ é linear. Dados $g_1, g_2 \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, sejam v_1 e v_2 as respectivas soluções fortes de (3.15) com estes dados. Claramente temos que $bv_1 + v_2$ é a solução forte de (3.15) com $g = bg_1 + g_2$. Daí,

$$\begin{aligned}\Gamma(bg_1 + g_2) &= \langle u_0, (bv_1 + v_2)(0,x)\rangle_{H_a^{-1}(0,1),H_a^1(0,1)} + \iint_{Q_T} f(bv_1 + v_2)\,dxdt\\ &= \langle u_0, bv_1(0,x)\rangle_{H_a^{-1}(0,1),H_a^1(0,1)} + b\iint_{Q_T} fv_1\,dxdt\\ &+ \langle u_0, v_2(0,x)\rangle_{H_a^{-1}(0,1),H_a^1(0,1)} + \iint_{Q_T} fv_2\,dxdt\\ &= b\Gamma(g_1) + \Gamma(g_2).\end{aligned}$$

Logo, Γ é um funcional linear. Agora, usando a estimativa de energia para v segue que

$$\begin{aligned}|\Gamma(g)| &\leqslant \|u_0\|_{H_a^{-1}(0,1)}\|v(0)\|_{1,a} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\|v\|_{L^2(Q_T)}\\ &\leqslant \|u_0\|_{H_a^{-1}(0,1)} \sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{1,a} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\|v\|_{L^2(Q_T)}\\ &\leqslant C\left(\|u_0\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\right)\cdot\left(\sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{1,a} + \|v\|_{L^2(Q_T)}\right)\\ &\leqslant C\left(\|u_0\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\right)\|g\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}.\end{aligned}$$

Concluímos que Γ é um funcional linear limitado e

$$\|\Gamma\| \leqslant C\left(\|u_0\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\right).$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único $u \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ com

$$\|u\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} = \|\Gamma\| \leqslant C\left(\|u_0\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\right)$$

tal que, para todo $g \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ temos

$$\langle u_0, v(0,x)\rangle_{H_a^{-1}(0,1),H_a^1(0,1)} + \iint_{Q_T} fv\,dxdt = \Gamma(g) = \iint_{Q_T} ug\,dxdt.$$

Isto conclui a demonstração da Afirmação.

Resta-nos provar que $u \in C([0,T]; H_a^{-1}(0,1))$. Consideremos uma sequência $(u_{0n}) \subset H_a^1(0,1)$ tal que $u_{0n} \to u_0$ em $H_a^{-1}(0,1)$ e seja u_n a solução forte de (3.1) associada ao dado inicial u_{0n}. Pela Proposição 3.1, u_n é uma solução muito fraca de (3.1) e pela Afirmação 3.1 podemos deduzir que $u_n \to u$ em $L^2(0,T; L^2(0,1))$.

Para $n, m \in \mathbb{N}$, seja $v_{nm} = u_n - u_m$. Usando a estimativa de energia para soluções fortes, temos que existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} |v_{nm}(t)|_{1,a} \leqslant C\left(|u_{0n} - u_{0m}|_{1,a}\right).$$

Pela Observação 3.2, segue que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v_{nm}(t)\|_{H_a^{-1}(0,1)} \leqslant C\left(\|u_{0n} - u_{0m}\|_{H_a^{-1}(0,1)}\right).$$

Como $u_{0n} \to u_0$ em $H_a^{-1}(0,1)$, deduzimos que (u_n) é de Cauchy em $C([0,T]; H_a^{-1}(0,T))$. Daí existe $w \in C([0,T]; H_a^{-1}(0,1))$ tal que $u_n \to w$ em $C([0,T]; H_a^{-1}(0,1))$. Em particular $u_n \to w$ em $L^2(0,T; H_a^{-1}(0,1))$. Por outro lado, de $u_n \to u$ em $L^2(0,T; L^2(0,1))$, segue que $u_n \to u$ em $L^2(0,T; H_a^{-1}(0,1))$. Logo $u = w$ e portanto $u \in C([0,T]; H_a^{-1}(0,1))$.

Repetindo o argumento anterior com u_n no lugar de v_{nm}, chegamos à

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|_{H_a^{-1}(0,1)} \leqslant C\left(\|u_{0n}\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}\right).$$

Passando ao limite deduzimos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H_a^{-1}(0,1)} \leqslant C\left(\|u_0\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}\right).$$

Combinando esta estimativa com a da Afirmação 3.1 concluímos a demonstração.

■

3.2 Problema Hiperbólico

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - (a(x)u_x)_x + c(x)u = f(t,x), & (t,x) \in Q_T, \\ \begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0, \ \text{se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)u_x(t,0) = u(t,1) = 0, \ \text{se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{3.18}$$

em que $T > 0$, $Q_T = (0,T) \times (0,1)$, $c \in L^\infty(0,1)$, $f \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in L^2(0,1)$ e $u_1 \in H_a^{-1}(0,1)$.

A seguir introduzimos as noções de solução para o problema (3.18), as quais dependem da regularidade do dados iniciais.

Definição 3.4. Sejam $(u_0, u_1) \in H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)$ e $f \in H^1(0,T; L^2(0,1))$. Dizemos que $u \in C([0,T]; H_a^2(0,1)) \cap C^1([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap C^2([0,T]; L^2(0,1))$ é uma *solução forte* do problema (3.18) se $u(0,\cdot) = u_0$, $u_t(0,\cdot) = u_1$ e

$$u_{tt}(t,x) - (a(x)u_x)_x(t,x) + c(x)u(t,x) = f(t,x) \quad \text{quase sempre em } Q_T. \tag{3.19}$$

Definição 3.5. Sejam $(u_0, u_1) \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$ e $f \in L^1(0,T; L^2(0,1))$. Dizemos que $u \in C([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,1))$ é uma *solução fraca* do problema (3.18) se $u(0,\cdot) = u_0$ e, para toda $\varphi \in L^2(0,T; H_a^1(0,1)) \cap C([0,T]; L^2(0,1))$ satisfazendo $\varphi_t \in L^2(Q_T)$ e $\varphi(T,\cdot) = 0$, tenhamos

$$\iint_{Q_T} (-u_t\varphi_t + a(x)u_x\varphi_x + c(x)u\varphi)\, dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi\, dxdt + \int_0^1 u_1(x)\varphi(0,x)\, dx. \tag{3.20}$$

Proposição 3.3. Sejam $(u_0, u_1) \in H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)$ e $f \in H^1(0,T; L^2(0,1))$. Se $u \in C([0,T]; H_a^2(0,1)) \cap C^1([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap C^2([0,T]; L^2(0,1))$ é uma solução forte do problema (3.18), então u é uma solução fraca de (3.18).

Demonstração: Sendo $u \in C([0,T]; H_a^2(0,1)) \cap C^1([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap C^2(0,T; L^2(0,1))$ solução forte do problema (3.18), pelas imersões usuais já temos a regularidade $u \in C([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,1))$. Desde que u é solução forte do problema (3.18), segue diretamente que $u(0,\cdot) = u_0$ e que

$$u_{tt}(t,x) - (a(x)u_x)_x(t,x) + c(x)u(t,x) = f(t,x) \quad \text{quase sempre em } Q_T.$$

Resta mostrarmos que u satisfaz a formulação fraca. Com efeito, seja $\varphi \in L^2(0,T; H_a^1(0,1)) \cap C([0,T]; L^2(0,1))$ tal que $\varphi_t \in L^2(Q_T)$ e $\varphi(t,\cdot) = 0$. Multiplicando a equação anterior por φ e integrando em Q_T, segue que

$$\iint_{Q_T} u_{tt}\varphi - (a(x)u_x)_x\varphi + c(x)u\varphi\, dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi\, dxdt. \tag{3.21}$$

Vamos analisar os dois primeiros termos separadamente. Utilizando integração por partes, segue que

$$\iint_{Q_T} u_{tt}[\varphi\, dxdt = -\int_0^1 u_1(x)\varphi(0,x)\, dx - \iint_{Q_T} u_t\varphi_t]\, dxdt$$

e

$$\iint_{Q_T} (a(x)u_x)_x\varphi\, dxdt = -\iint_{Q_T} a(x)u_x\varphi_x\, dxdt.$$

Substituindo as equações anteriores em (3.21), obtemos (3.20), o que conclui a demonstração. ■

Assim como no caso parabólico, aplicaremos a teoria de semigrupo para provarmos a existência e unicidade de soluções forte e fraca. Para tanto, consideremos $D(A) = H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)$ e o operador $A : D(A) \to H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$ dado por

$$A(u,v) := (v, (a(x)u_x)_x).$$

Lema 3.2. O operador $-A : D(A) \to H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$ é densamente definido e $m-$acretivo.

Demonstração: Já sabemos que $D(A)$ é denso em $H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$, pois $D(A)$ contém $C_0^\infty(0,1) \times C_0^\infty(0,1)$. No que segue vamos denotar por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de $H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Note que

$$\begin{aligned} \langle -A(u,v), (u,v) \rangle &= \langle (-v, -(a(x)u_x)_x), (u,v) \rangle \\ &= \int_0^1 -v(a(x)u_x)_x - a(x)v_x u_x \, dx \\ &= \int_0^1 a(x)v_x u_x - a(x)u_x v_x \, dx = 0. \end{aligned}$$

Logo, $-A$ é acretivo.

A fim de mostrar que $-A$ é $m-$acretivo, tomemos $(f,g) \in H_a^1 \times L^2(0,1)$. De modo análogo ao feito no Lema 3.1, concluímos que existe um único $u \in H_a^2(0,1)$ tal que $u - (a(x)u_x)_x = f + g$. Sendo $v = u - f \in H_a^1(0,1)$, temos que $(u,v) \in D(A)$ e, ademais

$$(u,v) - A(u,v) = (u, u-f) - (v, (au_x)_x) = (f,g).$$

Logo $-A$ é $m-$acretivo.

■

Teorema 3.2. Se $f \in L^1(0,T;L^2(0,1))$ e $U_0 = (u_0,u_1) \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$, então o problema (3.18) possui uma única solução fraca $u \in C([0,T];H_a^1(0,1)) \cap C^1([0,T];L^2(0,1))$. Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [0,T]} (\|u_t(t)\|^2 + |u(t)|_{1,a}^2) \leqslant C(\|u_0\|_{1,a}^2 + \|u_1\|^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2). \tag{3.22}$$

Ademais, se $f \in H^1(0,T;L^2(0,1))$ e $U_0 = (u_0,u_1) \in H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)$, então o problema (3.18) possui uma única solução forte

$$u \in C([0,T];H_a^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H_a^1(0,1)) \cap C^2([0,T];L^2(0,1))$$

e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|u_{tt}(t)\|^2 + \|u_t(t)\|_{1,a}^2 + |u(t)|_{1,a}^2\right) \leqslant C(\|u_0\|_{2,a}^2 + \|u_1\|_{1,a}^2 + \|f\|_{H^1(0,T;L^2(0,1))}^2) \quad (3.23)$$

Demonstração: Como sempre, designaremos uma constante positiva genérica por C. O Lema 3.2 e a Teorema de Hille–Yosida–Phillips garantem que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações.

Considere agora o operador linear $B : H_a^1(0,1) \times L^2(0,1) \to H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$ dado por

$$B(u,v) = (0, -c(x)u).$$

Note que B é limitado, pois

$$\begin{aligned} \|B(u,v)\|^2 = \|(0,-c(x)u)\|^2 &= \int_0^1 |-c(x)u|^2\,dx \\ &\leqslant C\int_0^1 |u|^2\,dx \leqslant C|u|_{1,a}^2 + \|v\|^2 \leqslant C\|(u,v)\|_{H_a^1(0,1)\times L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Dai, do Teorema 1.6, $-A-B$ também é gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Dessa forma, a fórmula de Duhamel

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(s)\,ds,$$

em que $F = (0,f)$ define uma solução generalizada para o problema

$$\begin{cases} U'(t) + (-A-B)U(t) = F(t) \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Etapa 1 - Solução Fraca: Considere $U_0 \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Tomemos sequências $(U_{0n}) \in C_0^\infty(0,1) \times C_0^\infty(0,1)$ e $(F_n) \subset C(0,T; H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1))$ tais que $U_{0n} \to U_0$ em $H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$ e $F_n \to F$ em $L^1(0,T; H_a^1(0,1) \times L^2(0,1))$. Pela Proposição 1.7 temos que

$$U_n(t) := S(t)U_{0n} + \int_0^t S(t-s)F_n(s)\,ds$$

define uma solução clássica para o problema

$$\begin{cases} U_n \in C^1([0,T]; H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)) \cap C([0,T]; H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)), \\ (U_n)_t(t) + (-A-B)U_n(t) = F_n(t), \\ U_n(0) = U_{0n}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Além disso, pelo Lema 1.5, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U_n\|^2_{C([0,T];H^1_a(0,1)\times L^2(0,1))} \leqslant C\left(\|U_{0n}\|^2_{H^1_a(0,1)\times L^2(0,1))} + \|F_n\|^2_{L^1(0,T;H^1_a(0,1)\times L^2(0,1))}\right).$$

Desacoplando o sistema (3.25), deduzimos que u_n é uma solução clássica para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_n \in C^2([0,T];L^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H^1_a(0,1)) \cap C([0,T];H^2_a(0,1)), \\ (u_n)_{tt}(t) - (a(x)(u_n)_x)_x(t) + c(x)u_n(t) = f_n(t), \\ u_n(0) = u_{0n}, \quad (u_n)_t(0) = u_{1n}. \end{cases} \tag{3.26}$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|(u_n)_t(t)\|^2 + |u_n(t)|^2_{1,a}\right) \leqslant C(|u_{0n}|^2_{1,a} + \|u_{1n}\|^2 + \|f_n\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))}). \tag{3.27}$$

Pela linearidade do sistema (3.26), temos que $v_{nm} := u_n - u_m$ satisfaz

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|(v_{nm})_t(t)\|^2 + |v_{nm}(t)|^2_{1,a}) \leqslant C(|u_{0n} - u_{0m}|^2_{1,a} + \|u_{1n} - u_{1m}\|^2 + \|f_n - f_m\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))}).$$

Como $u_{0n} \to u_0$ em $H^1_a(0,1)$, $u_{1n} \to u_1$ em $L^2(0,1)$ e $f_n \to f$ em $L^1(0,T;L^2(0,1))$, segue da ultima estimativa que as sequências (u_n), $((u_n)_t)$ são de Cauchy em $C([0,T];H^1_a(0,1))$ e $C([0,T];L^2(0,1))$, respectivamente. Dessa forma, existem $u \in C([0,T];H^1_a(0,1))$ e $v \in C([0,T];L^2(0,1))$ tal que $u_n \to u$ em $C([0,T];H^1_a(0,1))$ e $(u_n)_t \to v$ em $C([0,T];L^2(0,1))$.

Agora vamos mostrar que $v = u_t$. De fato, de $u_n \to u$ em $C([0,T];H^1_a(0,1))$ deduzimos que, passando a uma subsequência se necessário, vale $u_n(t,x) \to u(t,x)$ quase sempre em Q_T. Daí, no sentido das distribuições, temos $(u_n)_t(t,x) \to u_t(t,x)$ quase sempre em Q_T. Por outro lado, de $(u_n)_t \to v$ em $C([0,T];L^2(0,1))$, também deduzimos que, passando a uma subsequência se necessário, vale $(u_n)_t(t,x) \to v(t,x)$ quase sempre em Q_T. Pela unicidade do limite obtemos $v = u_t$.

Concluímos que $u \in C^1([0,T];L^2(0,1)) \cap C([0,T];H^1_a(0,1))$. Ademais, passando o limite em (3.27) deduzimos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|u_t(t)\|^2 + |u(t)|^2_{1,a}\right) \leqslant C(|u_0|^2_{1,a} + \|u_1\|^2 + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))}). \tag{3.28}$$

Resta verificarmos que $u(0) = u_0$ e que u satisfaz a formulação fraca (3.20). A primeira afirmação é uma consequência de $u_n \to u$ em $C([0,T];H^1_a(0,1))$, pois $u_n(0) = u_{0n} \to u_0$.

Para a segunda afirmação considere $\varphi \in L^2(0,T;H_a^1(0,1)) \cap C([0,T];L^2(0,1))$ satisfazendo $\varphi_t \in L^2(Q_T)$ e $\varphi(T,\cdot)=0$. Multiplicando (3.26) por φ, integrando em Q_T e usando integração por partes obtemos

$$\iint_{Q_T} (-(u_n)_t\varphi_t + a(u_n)_x\varphi_x + cu_n\varphi)\,dx\,dt - \int_0^1 (u_n)_t(0)\varphi(0)\,dx = \iint_{Q_T} f_n\varphi\,dx\,dt. \quad (3.29)$$

Como $u_n \to u$ em $C([0,T];H_a^1(0,1))$ e $(u_n)_t \to u_t$ em $C([0,T];L^2(0,1))$, podemos deduzir (3.20) simplesmente passando o limite em (3.29).

A fim de verificar a unicidade de solução fraca, suponha que u, $v \in C([0,T];H_a^1(0,1)) \cap C^1([0,T];L^2(0,1))$ são soluções fracas de (3.18) e considere $w = u - v$. Dessa forma $w \in C([0,T];H_a^1(0,1)) \cap C^1([0,T];L^2(0,1))$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} w_{tt} - (a(x)w_x)_x + c(x)w = 0, & (t,x) \in Q_T, \\ \begin{cases} w(t,0) = w(t,1) = 0, \text{ se } 0 \leqslant K < 1, \\ a(x)w_x(t,0) = w(t,1) = 0, \text{ se } 1 \leqslant K < 2, \end{cases} & t \in (0,T), \\ w(0,x) = 0, \quad w_t(0,x) = 0, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Assim, w satisfaz a estimativa de energia com $w_0 = w_1 = 0$ e $f \equiv 0$, ou seja,

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|w_t(t)\|^2 + |w(t)|_{1,a}^2) \leqslant 0.$$

Donde segue que $w = 0$, o que implica que $u = v$ e conclui a unicidade de solução fraca.

Etapa 2 - Solução Forte: Considere agora $U_0 = (u_0, u_1) \in H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)$ e tomemos sequências $(U_{0n}) = (u_{0n}, u_{1n}) \in C_0^\infty(0,1) \times C_0^\infty(0,1)$ e $(F_n) = (0, f_n) \subset C^1(0,T;H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1))$ tais que $U_{0n} \to U_0$ em $H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)$ e $F_n \to F$ em $H^1(0,T;H_a^1(0,1) \times L^2(0,1))$. Pela Proposição 1.7 temos que

$$U_n(t) := S(t)U_{0n} + \int_0^t S(t-s)F_n(s)\,ds$$

define uma solução clássica para o problema

$$\begin{cases} U_n \in C^1([0,T];H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)) \cap C([0,T];H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)), \\ (U_n)_t(t) + (-A-B)U_n(t) = F_n(t), \\ U_n(0) = U_{0n}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Desacoplando o sistema, deduzimos que u_n é uma solução clássica para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_n \in C^2([0,T];L^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H^1_a(0,1)) \cap C([0,T];H^2_a(0,1)), \\ (u_n)_{tt}(t) - (a(x)(u_n)_x)_x(t) + c(x)u_n(t) = f_n(t), \\ u_n(0) = u_{0n}, \quad (u_n)_t(0) = u_{1n}. \end{cases} \tag{3.31}$$

Agora definindo $w_{nm} = u_n - u_m$, segue que $w_{nm}(0) = u_{0n} - u_{0m}$, $(w_{nm})_t(0) = u_{1n} - u_{1m}$ e

$$(w_{nm})_{tt}(t) - (aw_{nmx})_x(t) + cw_{nm}(t) = f_n(t) - f_m(t) \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{3.32}$$

Pelo que vimos na Etapa 1, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left[\|(w_{nm})_t(t)\|^2 + |w_{nm}(t)|^2_{1,a}\right] \leqslant C\left(|u_{0n} - u_{0m}|^2_{1,a} + \|u_{1n} - u_{1m}\|^2 + \|f_n - f_m\|^2_{L^2(Q_T)}\right).$$

Usando as imersões dos espaços de Sobolev com peso, chegamos à

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \left[\|(w_{nm})_t(t)\|^2 + |w_{nm}(t)|^2_{1,a}\right] \leqslant C \Big(&\|u_{0n} - u_{0m}\|^2_{2,a} + |u_{1n} - u_{1m}|^2_{1,a} \\ &+\|f_n - f_m\|^2_{H^1(0,T;L^2(0,1))}\Big).\end{aligned} \tag{3.33}$$

De forma análoga à Etapa 1 deduzimos a existência de $u \in C([0,T];H^1_a(0,1)) \cap C^1([0,T];L^2(0,1))$ tal que $u_n \to u$ em $C([0,T];H^1_a(0,1))$ e $(u_n)_t \to u_t$ em $C([0,T];L^2(0,1))$.

Derivando (3.32) em relação à t, em seguida multiplicando por $(w_{nm})_{tt}$ e por fim integrando em $(0,1)$, deduzimos que, para todo $t \in [0,T]$, vale

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(w_{nm})_{tt}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|(w_{nm})_t(t)|^2_{1,a} + &\int_0^1 c(w_{nm})_{tt}(t)(w_{nm})_t(t)\,dx \\ &= \int_0^1 (f'_n(t) - f'_m(t))(w_{nm})_{tt}(t)\,dx.\end{aligned}$$

Daí, usando (3.33),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\|(w_{nm})_{tt}(t)\|^2 + |(w_{nm})_t(t)|^2_{1,a}\right] &\leqslant \|c\|_\infty \int_0^1 (w_{nm})_t(t)(w_{nm})_{tt}(t)\,dx \\ &+ \int_0^1 (f'_n(t) - f'_m(t))(w_{nm})_{tt}(t)\,dx \\ &\leqslant C(\|(w_{nm})_t(t)\|^2 + \|(w_{nm})_{tt}(t)\|^2 + \|f'_n(t) - f'_m(t)\|^2) \\ &\leqslant C(\|(w_{nm})_{tt}(t)\|^2 + |(w_{nm})_t(t)|^2_{1,a}) + C\Big(\|u_{0n} - u_{0m}\|^2_{2,a} \\ &\quad +|u_{1n} - u_{1m}|^2_{1,a} + \|f_n - f_m\|^2_{H^1(0,T;L^2(0,1))} \\ &\quad + \int_0^1 (f'_n(t) - f'_m(t))\,dx\Big).\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall, chegamos à

$$\begin{aligned}
\|(w_{nm})_{tt}(t)\|^2 + |(w_{nm})_t(t)|^2_{1,a} &\leqslant C\left(\|(w_{nm})_{tt}(0)\|^2 + |(w_{nm})_t(0)|^2_{1,a}\right) \qquad (3.34)\\
&\quad + C\int_0^t \|u_{0n} - u_{0m}\|^2_{2,a}\,dt\\
&\quad + \int_0^t \left(|u_{1n} - u_{1m}|^2_{1,a} + \|f_n - f_m\|^2_{H^1(0,T;L^2(0,1))}\right) dt\\
&\quad + \int_0^T \int_0^1 (f_n'(t) - f_m'(t))\,dx\,dt\\
&\leqslant C\|(w_{nm})_{tt}(0)\|^2 + C\left(\|u_{0n} - u_{0m}\|^2_{2,a}\right.\\
&\quad \left. + |u_{1n} - u_{1m}|^2_{1,a} + \|f_n - f_m\|^2_{H^1(0,T;L^2(0,1))}\right). \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (3.33), temos que

$$\begin{aligned}
\|(w_{nm})_{tt}(0)\|^2 &= \|(aw_{nmx})_x(0) - cw_{nm}(0) + f_n(0) - f_m(0)\|^2\\
&\leqslant C\left(\|u_{0n} - u_{0m}\|^2_{2,a} + \|w_{nm}(0)\|^2 + \|f_n(0) - f_m(0)\|^2\right)\\
&\leqslant C\left(\|u_{0n} - u_{0m}\|^2_{2,a} + |u_{1n} - u_{1m}|^2_{1,a} + \|f_n - f_m\|^2_{H^1(0,T;L^2(0,1))}\right)\\
&\quad + C(f_n(0) - f_m(0)).
\end{aligned}$$

Usando agora a imersão $H^1(0,T;L^2(0,1)) \hookrightarrow C([0,1];L^2(0,1))$, deduzimos que

$$\|(w_{nm})_{tt}(0)\|^2 = C\left(\|u_{0n} - u_{0m}\|^2_{2,a} + |u_{1n} - u_{1m}|^2_{1,a} + \|f_n - f_m\|^2_{H^1(0,T;L^2(0,1))}\right).$$

Voltando para (3.34) concluímos que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}\left(\|(w_{nm})_{tt}(t)\|^2 + |(w_{nm})_t(t)|^2_{1,a}\right) &\leqslant C\left(\|u_{0n} - u_{0m}\|^2_{2,a} + |u_{1n} - u_{1m}|^2_{1,a}\right.\\
&\quad \left. + \|f_n - f_m\|^2_{H^1(0,T;L^2(0,1))}\right). \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Desde que o lado direito de (3.36) tende à zero quando $n,m \to \infty$, segue que $((u_n)_{tt})$ e $((u_n)_t)$ são de Cauchy em $C([0,T];L^2(0,1))$ e em $C([0,T];H^1_a(0,1))$ respectivamente. Consequentemente, existem $v_1 \in C([0,T];L^2(0,1))$ e $v_2 \in C([0,T];H^1_a(0,1))$ tais que $(u_n)_{tt} \to v_1$ em $C([0,T];L^2(0,1))$ e $(u_n)_t \to v_2$ em $C([0,T];H^1_a(0,1))$.

Mostremos agora que $v_1 = u_{tt}$ e que $v_2 = u_t$. Desde que $u_n \to u$ em $C([0,T];H^1_a(0,1))$, temos que, passando a uma subsequência se necessário, vale $u_n(t,x) \to u(t,x)$ quase sempre em Q_T. Assim, no sentido das distribuições, $(u_n)_t(t,x) \to u_t(t,x)$ quase sempre em Q_T. Por outro lado, como $(u_n)_t \to v_2$ em $C([0,T];H^1_a(0,1))$, passando a uma subsequência se necessário, vale $(u_n)_t(t,x) \to v_2(t,x)$ quase sempre em Q_T. Segue da unicidade do limite que $v_2 = u_t$. Fazendo um processo análogo utilizando que $(u_n)_t \to u_t$ em $C([0,T];L^2(0,1))$ deduzimos que $v_1 = u_{tt}$.

Dessa forma, obtemos $u \in C^1([0,T];H^1_a(0,1)) \cap C^2([0,T];L^2(0,1))$. Por outro lado, de (3.32) deduzimos que $(a(x)(u_n)_x)_x$ é de Cauchy em $C([0,T];L^2(0,1))$. Assim, existe $v_3 \in C([0,T];L^2(0,1))$ tal que $(a(x)(u_n)_x)_x \to v_3$ em $C([0,T];L^2(0,1))$.

Agora observe que $v_3 = (a(x)u_x)_x$. De fato, desde de que $u_n \to u$ em $C([0,T];H^1_a(0,1))$ temos $\sqrt{a}(u_n)_x \to \sqrt{a}u_x$ em $C([0,T];L^2(0,1))$. Fazendo $g_n = \sqrt{a}(u_n)_x$ e $g = \sqrt{a}u_x$, para $I \subset\subset (0,1)$ temos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\int_I |\sqrt{a}g_n - \sqrt{a}g|\, dx \right) \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \left(\left(\int_I a(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|g_n - g\|^2 \right) \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \left(C\|g_n - g\|^2 \right).$$

Desde que o lado direito tende à zero, deduzimos que $a(x)(u_n)_x \to a(x)u_x$ em $C([0,T];L^1_{loc}(0,1))$, donde, passando a uma subsequência se necessário, vale $a(u_n)_x(t,x) \to au_x(t,x)$ quase sempre em Q_T. Daí, no sentido das distribuições, $(a(u_n)_x)_x(t,x) \to (au_x)_x(t,x)$ quase sempre em Q_T. Por outro lado, $(a(x)(u_n)_x)_x \to v_3$ em $C([0,T];L^2(0,1))$, donde também deduzimos que, a menos de subsequência, $(a(x)(u_n)_x)_x(t,x) \to v_3(t,x)$ quase sempre em Q_T. Pela unicidade do limite, concluímos que $v_3 = (a(x)u_x)_x$. Portanto $u \in C([0,T];H^2_a(0,1))$.

Pelo que vimos na Etapa 1, u é uma solução fraca de (3.18). Daí, usando (3.20) com $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$, obtemos

$$\iint_{Q_T} (u_{tt} - (a(x)u_x)_x + c(x)u)\varphi\, dxdt = \iint_{Q_T} f\varphi\, dxdt, \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(Q_T).$$

Logo, (3.19) é consequência do Lema de Du-Bois-Reymond. Portanto u é solução forte de (3.18).

Agora, repetindo os mesmos cálculos com u_n no lugar de w_{nm}, obtemos

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|(u_n)_{tt}(t)\|^2 + \|(u_n)_t(t)\|^2_{1,a} + |u_n(t)|^2_{1,a} \right) \leqslant C \left(\|u_{0n}\|^2_{2,a} + |u_{1n}|^2_{1,a} + \|f_n\|^2_{H^1(0,T;L^2(0,1))} \right).$$

Passando ao limite na estimativa anterior, vem

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|u_{tt}(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2_{1,a} + |u(t)|^2_{1,a} \right) \leqslant C \left(\|u_0\|^2_{2,a} + |u_1|^2_{1,a} + \|f\|^2_{H^1(0,T;L^2(0,1))} \right).$$

■

A seguir apresentamos a noção de solução muito fraca para a equação da onda degenerada.

Definição 3.6. Sejam $f \in L^1(0,T;L^2(0,1))$ e $(u_0,u_1) \in L^2(0,1) \times H_a^{-1}(0,1)$. Dizemos que $u \in C([0,T];L^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H_a^{-1}(0,1))$ é uma *solução muito fraca* (ou *solução por transposição*) de (3.18) se, para cada $h \in L^1(0,T;L^2(0,1))$ tenhamos

$$\iint_{Q_T} uh\,dxdt = -(u_0,\varphi_t(0))_{L^2(0,1)} + \langle u_1,\varphi(0)\rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)} + \iint_{Q_T} f\varphi\,dxdt \qquad (3.37)$$

em que φ é a solução fraca do problema retrogrado:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (a(x)\varphi_x)_x + c(x)\varphi = h & (t,x) \in Q_T \\ \varphi(t,1) = 0 & (0,T) \\ \begin{cases} \varphi(t,0) = 0 \text{ se } K \in (0,1) \\ (a(x)\varphi_x)(t,0) \text{ se } K \in [1,2) \end{cases} & t \in (0,T) \\ \varphi(T,x) = \varphi_t(T,x) = 0. & x \in (0,1) \end{cases} \qquad (3.38)$$

Proposição 3.4. Seja $(u_0,u_1) \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Se

$$u \in C([0,T];H_a^1(0,1)) \cap C^1([0,T];L^2(0,1))$$

é uma solução fraca do problema (3.18), então u é uma solução muito fraca de (3.18).

Demonstração: Sendo $u \in C([0,T];H_a^1(0,1)) \cap C^1([0,T];L^2(0,1))$, pelas imersões usuais já temos a regularidade $u \in C(0,T;L^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H_a^{-1}(0,1))$. Dado $h \in L^1(0,T;L^2(0,1))$, consideremos $\theta \in C([0,T];H_a^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H_a^1(0,1))$ solução fraca do problema retrogrado (3.38).

Como u é solução fraca de (3.18), vale

$$\iint_{Q_T} (-u_t\theta_t + au_x\theta_x + c(x)\theta u)\,dxdt - \int_0^1 u_1(x)\theta(0,x)\,dx = \iint_{Q_T} f\theta\,dxdt. \qquad (3.39)$$

Por outro lado, sendo θ solução fraca do problema retrógrado, vale

$$\iint_{Q_T} u_t\theta_t\,dxdt \;=\; -\int_0^1 u_0(x)\theta_t(0,x)\,dx - \iint_{Q_T} (uh - au_x\theta_x - cu\theta)\,dxdt.$$

Desse modo, voltando para (3.39) temos

$$\iint_{Q_T} uh\,dxdt = \iint_{Q_T} f\theta\,dxdt - \int_0^1 u_0(x)\theta_t(0,x)\,dx + \int_0^1 u_1(x)\theta(0,x)\,dx.$$

Das imersões dos espaços, podemos ver os dois últimos termos da equação anterior como as dualidades desejadas o que conclui a demonstração.

■

Proposição 3.5. Se $f \in L^1(0,T;L^2(0,1))$ e $U_0 = (u_0, u_1) \in L^2(0,1) \times H_a^{-1}(0,1)$, então o problema (3.18) possui uma única solução muito fraca $u \in C([0,T];L^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H_a^{-1}(0,1))$. Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2_{H_a^{-1}(0,1)} \right) \leqslant C \left(\|u_1\|^2_{H_a^{-1}(0,1)} + \|u_0\|^2 + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))} \right).$$

Demonstração: Considere $\Gamma : L^1(0,T;L^2(0,1)) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma(h) = \langle u_1, \varphi(0) \rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)} - (u_0, \varphi_t(0))_{L^2(0,1)} + \iint_{Q_T} f\varphi \, dxdt,$$

em que φ é solução fraca do problema retrogrado (3.38).

Mostremos que Γ é um funcional linear e limitado. Sejam h_1, $h_2 \in L^1(0,T;L^2(0,1))$, $b \in \mathbb{R}$ e φ_1 e φ_2 as respectivas soluções fraca de (3.38) com estes dados. Claramente $b\varphi_1 + \varphi_2$ é a solução fraca de (3.38) com $h = bh_1 + h_2$. Daí,

$$\begin{aligned}
\Gamma(bh_1 + h_2) &= \langle u_1, (b\varphi_1 + \varphi_2)(0) \rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)} - (u_0, (b\varphi_1 + \varphi_2)_t(0))_{L^2(0,1)} \\
&+ \iint_{Q_T} f(b\varphi_1 + \varphi_2)_{L^2(0,1)} \, dxdt \\
&= b\langle u_1, \varphi_1(0) \rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)} - b(u_0, \varphi_{1t}(0))_{L^2(0,1)} + \iint_{Q_T} bf\varphi_1 + f\varphi_2 \, dxdt \\
&+ \langle u_1, \varphi_2(0) \rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)} - (u_0, \varphi_{2t}(0))_{L^2(0,1)} \\
&= b\Gamma(h_1) + \Gamma(h_2).
\end{aligned}$$

Logo, Γ é linear. Agora, note que

$$\begin{aligned}
|\Gamma(h)| &= \left| \langle u_1, \varphi(0) \rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)} - (u_0, \varphi_t(0))_{L^2(0,1)} + \iint_{Q_T} f\varphi \, dxdt \right| \\
&\leqslant |\langle u_1, \varphi(0) \rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)}| + |(u_0, \varphi_t(0))_{L^2(0,1)}| + \iint_{Q_T} |f||\varphi| \, dxdt \\
&\leqslant \|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} |\varphi(0)|_{1,a} + \|u_0\| \|\varphi_t(0)\| + \int_0^T \|f(t)\|.\|\varphi(t)\| \, dt \\
&\leqslant \|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} |\varphi(0)|_{1,a} + \|u_0\| \|\varphi_t(0)\| + \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\| \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Como φ é solução fraca do problema (3.38), temos

$$\|\varphi_t(0)\| + |\varphi(0)|_{1,a} + \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\| \leqslant C\|h\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}.$$

Usando esta estimativa em (3.40) segue que

$$|\Gamma(h)| \leqslant C \left(\|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|u_0\| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))} \right) \|h\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}.$$

Logo Γ é um funcional linear limitado e

$$\|\Gamma\| \leqslant C\left(\|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|u_0\| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}\right).$$

Lembrando que $L^1(0,T;L^2(0,1))' = L^\infty(0,T;L^2(0,1))$, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe único $u \in L^\infty(0,T;L^2(0,1))$ com

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} = \|\Gamma\| \leqslant C\left(\|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|u_0\| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}\right) \tag{3.41}$$

tal que, para todo $h \in L^1(0,T;L^2(0,1)$ vale

$$\iint_{Q_T} uh\,dx\,dt = \Gamma(h) = \langle u_1, \varphi(0)\rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)} - (u_0, \varphi_t(0))_{L^2(0,1)} + \iint_{Q_T} f\varphi\,dxdt.$$

Resta-nos obter as propriedades de regularidade e a estimativa de energia.

A seguir nos dedicaremos à mostrar que $u_t \in L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))$. Para isto, defina

$$W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1)) := \{u \in L^1(0,T;H_a^1(0,1)); u_t \in L^1(0,T;H_a^1(0,1)), u(0,\cdot) = u(T,\cdot) = 0\}$$

e denote por $W^{-1,\infty}(0,T;H_a^{-1}(0,1))$ seu dual. Note que, para qualquer $v \in W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))$, temos

$$\begin{aligned}|\langle u_t, v\rangle| = \left|-\int_0^T (u, v_t)\,dt\right| &\leqslant \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|v_t\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}\\ &\leqslant \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\|v\|_{W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))}.\end{aligned}$$

De em que segue que $u_t \in W^{-1,\infty}(0,T;H_a^{-1}(0,1))$ e, além disso,

$$\|u_t\|_{W^{-1,\infty}(0,T;H_a^{-1}(0,1))} \leqslant \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leqslant C(\|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|u_0\| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}).$$

Afirmação 3.2. Existe $w \in L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))$ tal que $u_t = w\big|_{W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))}$.

Fixemos $v \in L^1(0,T;H_a^1(0,1))$ e consideremos $(v_n) \subset W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))$ tal que $v_n \to v$ em $L^1(0,T;H_a^1(0,1))$. Seja θ_n a solução fraca do problema retrogrado (3.38) com $h = v_{nt}$. Segundo [14] (Lema 4.3), podemos provar a seguinte desigualdade:

$$\|(\theta_n)_t(0)\| + \|\theta_n\|_{C([0,T];H_a^1(0,1))} \leqslant \|v_n\|_{L^1(0,T;H_a^1(0,1))}. \tag{3.42}$$

Dessa forma, a aplicação linear $L : L^1(0,T;H_a^1(0,1)) \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(v) = \lim_{n\to\infty} \langle u_t, v_n\rangle_{W^{-1,\infty}(0,T;H_a^{-1}(0,1)),W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))}$$

está bem definida. De fato, dados (v_n), $(\tilde{v}_n) \subset W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))$ tais que v_n, $\tilde{v}_n \to v$ em $L^1(0,T;H_a^1(0,1))$ temos que $v_n - \tilde{v}_n \to 0$ em $L^1(0,T;H_a^1(0,1))$. Daí, usando (3.42),

$$
\begin{aligned}
|\langle u_t, v_n - \tilde{v}_n\rangle_{W^{-1,\infty}(0,T;H_a^{-1}(0,1)),W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))}| &= \left|\iint_{Q_T} u(v_{nt} - \tilde{v}_{nt})\,dx\,dt\right| = |\Gamma(v_{nt} - \tilde{v}_{nt})| \\
&= \Big|\langle u_1, \theta_n(0) - \tilde{\theta}_n(0)\rangle_{H_a^{-1}(0,1)\times H_a^1(0,1)} - (u_0, \theta_{nt}(0) - \tilde{\theta}_{nt}(0))_{L^2(0,1)} \\
&\quad + \iint_{Q_T} f(\theta_n - \tilde{\theta}_n)\,dxdt\Big| \\
&\leqslant \|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)}|\theta_n(0) - \tilde{\theta}_n(0)|_{1,a}^2 + \|u_0\|.\|\theta_{nt}(0) - \tilde{\theta}_{nt}(0)\| \\
&\quad + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}.\|\theta_n - \tilde{\theta}_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \\
&\leqslant C(\|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|u_0\| \\
&\qquad + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))})\|v_n - \tilde{v}_n\|_{L^1(0,T;H_a^1(0,1))} \to 0,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\lim_{n\to\infty}\langle u_t, v_n\rangle_{W^{-1,\infty}(0,T;H_a^{-1}(0,1)),W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))} = \lim_{n\to\infty}\langle u_t, \tilde{v}_n\rangle_{W^{-1,\infty}(0,T;H_a^{-1}(0,1)),W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))}.
$$

Repetindo os mesmos cálculos acima com v_n no lugar de $v_n - \tilde{v_n}$ e passando o limite chegamos à

$$
|L(v)| \leqslant C(\|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|u_0\| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))})\|v\|_{L^1(0,T;H_a^1(0,1))}.
$$

Logo $L \in (L^1(0,T;H_a^1(0,1)))'$ e

$$
\|L\|_{L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))} \leqslant C(\|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|u_0\| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}).
$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único $w \in L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))$ tal que, para qualquer $v \in L^1(0,T;H_a^1(0,1))$ vale

$$
L(v) = \langle w, v\rangle_{L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1)),L^1(0,T;H_a^1(0,1))}.
$$

Em particular, para todo $v \in W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))$ vale

$$
\langle u_t, v\rangle_{W^{-1,\infty}(0,T;H_a^{-1}(0,1)),W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))} = \langle w, v\rangle_{L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1)),L^1(0,T;H_a^1(0,1))}
$$

e assim, $u_t = w\big|_{W_0^{1,1}(0,T;H_a^1(0,1))}$, o que mostra a Afirmação 3.2.

Denotado w por u_t, obtemos

$$
\|u_t\|_{L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))} = \|L\|_{L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))} \leqslant C(\|u_1\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|u_0\| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}). \tag{3.43}
$$

Combinando (3.43) e (3.41) obtemos a estimativa de energia para a solução muito fraca. Resta-nos provar as propriedades de regularidade, isto é,

$$u \in C([0,T];L^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H_a^{-1}(0,1)).$$

Consideremos $(u_{0n}, u_{1n}) \subset H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$ tais que $u_{0n} \to u_0$ em $L^2(0,1)$ e $u_{1n} \to u_1$ em $H_a^{-1}(0,1)$. Seja $u_n \in C([0,T];H_a^1(0,1)) \cap C^1([0,T];L^2(0,1))$ uma solução fraca do problema (3.18) com dados iniciais (u_{0n}, u_{1n}). Em particular u_n também é uma solução por transposição. Daí, $u - u_n$ é uma solução por transposição com $f = 0$ e dados iniciais $(u_0 - u_{0n}, u_1 - u_{1n})$. Como já provamos a estimativa de energia para soluções por por tranposição, temos

$$\|u - u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|u_t - (u_n)_t\|_{L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))} \leqslant C(\|u_0 - u_{0n}\| + \|u_1 - u_{1n}\|_{H_a^{-1}(0,1)}).$$

Como $u_{0n} \to u_0$ em $L^2(0,1)$ e $u_{1n} \to u_1$ em $H_a^{-1}(0,1)$, temos que $u_n \to u$ em $L^\infty(0,T;L^2(0,1))$ e $(u_n)_t \to u_t$ em $L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))$.

Fixado $t \in [0,T]$, tomemos $(t_n) \subset [0,T]$ tal que $t_n \to t$. Assim

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u(t)\| &\leqslant \|u(t_n) - u_n(t_n)\| + \|u_n(t_n) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leqslant 2\|u - u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|u_n(t_n) - u_n(t)\| \to 0, \end{aligned}$$

pois $u_n \in C([0,T];L^2(0,1))$ e $u_n \to u$ em $L^\infty(0,T;L^2(0,1))$. Logo, $u \in C([0,T];L^2(0,1))$. Ademais, da imersão $L^2(0,1) \hookrightarrow H_a^{-1}(0,1)$, segue que $u \in C([0,T];H_a^{-1}(0,1))$.

De modo análogo ao que foi feito,

$$\begin{aligned} \|u_t(t_n) - u_t(t)\|_{H_a^{-1}(0,1)} &\leqslant \|u_t(t_n) - (u_n)_t(t_n)\|_{H_a^{-1}(0,1)} + \|(u_n)_t(t_n) - (u_n)_t(t)\|_{H_a^{-1}(0,1)} \\ &\quad + \|(u_n)_t(t) - u_t(t)\|_{H_a^{-1}(0,1)} \\ &\leqslant 2\|u_t - (u_n)_t\|_{L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))} + \|(u_n)_t(t_n) - (u_n)_t(t)\|_{H_a^{-1}(0,1)} \to 0, \end{aligned}$$

pois $(u_n)_t \in C([0,T]);L^2(0,1)) \hookrightarrow C([0,T]);H_a^{-1}(0,1))$ e $(u_n)_t \to u_t$ em $L^\infty(0,T;H_a^{-1}(0,1))$. Logo, $u_t \in C([0,T]);H_a^{-1}(0,1))$. Portanto, $u \in C([0,T];L^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H_a^{-1}(0,1))$.

$\blacksquare$

REFERÊNCIAS

[1] Adams, R. A. e Fournier, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2003.

[2] Alabau-Boussouira, F., Cannarsa, P. e Fragnelli, G. "Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications to null controllability". Em: *Journal of Evolution Equations* (2006).

[3] Alabau-Boussouira, F., Cannarsa, P. e Leugering, G. "Control and stabilization of degenerate wave equations". Em: *SIAM Journal on Control and Optimization 55* (2017).

[4] Araújo, Bruno S. V., Demarque, Reginaldo e Viana, Luiz. "Regularity results for degenerate wave equations in a neighborhood of the boundary". Em: *Evolution Equations and Control Theory* (2023).

[5] Bortolan, Matheus Cheque. *Teoria de Semigrupos e Aplcações à EDP's*. 2021.

[6] Brezis, Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[7] Campiti, M., Metafune, G. e Pallara, D. "Degenerate Self-adjoint Evolution Equations on the Unit Interval". Em: *Semigroup Forum* (1998).

[8] Cannarsa, P., Martinez, P. e Vancostenoble, J. "Carleman estimates for a class of degenerate parabolic operators". Em: *SIAM J. Control Optim* (2008).

[9] Cannarsa, P., Martinez, P. e Vancostenoble, J. "Null Controllability of degenerate heat equations". Em: *Advances in Differential Equations* (2004).

[10] Cazenave, T., Haraux, A. e Martel, Y. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford University Press, 1998.

[11] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. 2nd. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010.

[12] Kohn, J. J. e Nirenberg, L. "Degenerate elliptic-parabolic equations of second order". Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 20 (1967), pp. 797–872.

[13] Medeiros, L. A. e Miranda, M. M. *Espaços de Sobolev - Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos*. IM-UFRJ, 2019.

[14] Medeiros, L. A., Miranda, M. M. e Lourêdo, A. T. *Introduction Exact Control Theory: Method Hum*. Campina Grande, PB: EDUEPB, 2013.

[15] Oleinik, O. A. e Radkevic, E.V. *Second Order Equations With Nonnegative Characteristic Form*. Springer, 1973.

[16] Pazy, Amnon. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Vol. 44. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1983.

[17] Santos, J., Pontes, P. e Soares, S. "A global result for a degenerate quasilinear eigenvalue problem with discontinuous nonlinearities". Em: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 62.3 (2023), Paper No. 91, 33.

[18] Xu, Fengdan, Zhou, Qian e Nie, Yuanyuan. "Null controllability of a semilinear degenerate parabolic equation with a gradient term". Em: *Boundary Value Problems* (2020).

[19] Zheng, Songmu. *Nonlinear Evolution Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.