Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Josias Vera Baca †

Equação de Schrödinger Semilinear com Peso

Campina Grande - PB
2025

†O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Josias Vera Baca

Equação de Schrödinger Semilinear com Peso

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa Análise e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Campina Grande - PB
2025

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

B116e Baca, Josias Vera.

Equação de Schrödinger Semilinear com peso / Josias Vera Baca. – 2025.

160 f. : il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves".

Referências.

1. Equação de Schrödinger. 2. Grupo de Operadores Unitários. 3. Conservação de Massa. 4. Conservação de Energia. I. Alves, Claudianor Oliveira. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Equação de Schrödinger Semilinear com Peso

por

Josias Vera Baca

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 17 de novembro de 2025

Bruno Sérgio V. de Araújo

Prof. Dr. Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo - UFCG

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra - UFPB

Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Novembro - 2025

Agradecimentos

Agradeço a Deus, fonte da vida, da inteligência e da sabedoria, que nos guiam na busca do conhecimento e da verdade.

Aos meus pais, Juan e Alejandria, que confiaram em meu potencial mesmo nos momentos em que eu próprio vacilei. Sou imensamente grato pelo amor, pela compreensão e pelo apoio incondicional, que me deram a estrutura necessária para tornar este sonho possível.

À minha namorada, Karina, pela compreensão e pelo apoio ao permitir que eu partisse para longe em busca deste sonho. Sou profundamente grato pelo amor, pela paciência e pela força que me deu para seguir adiante, mesmo com a distância.

Ao professor Claudianor, meu orientador, que sempre manteve uma visão voltada para o meu futuro, oferecendo desafios com o suporte necessário. Agradeço por todas as lições de matemática, pelo compartilhamento de sua vasta experiência, pelas conversas produtivas, pelas orientações precisas, pela paciência e dedicação, e pelo exemplo de trabalho que representa. Muito obrigado!

Deixo também minha gratidão ao meu amigo peruano César Torres, que me motivou a buscar oportunidades acadêmicas no exterior, impulsionando-me a continuar meus estudos e a fortalecer minha formação acadêmica.

Sou igualmente grato a Cícero José da Silva, que me acolheu ao chegar ao Brasil, auxiliando com hospedagem, trâmites e apartamento, tornando minha adaptação mais tranquila.

A *mis causas* da sala da pós-graduação, pela amizade, pelas conversas que ajudaram a superar os momentos difíceis e pelas risadas que deixaram a jornada mais leve e divertida.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais Juan e Alejandrina,
aos meus irmãos Elda, Jonatan e Abigail,
à minha namorada Karina,
e à minha sobrinha, Atiana.

Resumo

Neste trabalho, utilizamos a teoria de semigrupos e o método da energia, juntamente com argumentos de compacidade, para estabelecer a existência local de uma solução e a boa colocação da equação de Schrödinger semilinear com peso

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{V}\Delta u + g(x,u) = 0, & \text{em } \Omega \times I, \\ u(x,t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times I, \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{para } x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$; $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo contendo a origem; e $V : \Omega \to (0,\infty)$, $g : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ são funções dadas que satisfazem algumas condições técnicas.

Palavras-chave: Grupo de operadores unitários; conservação de massa; conservação de energia.

Abstract

In this work, we use semigroup theory and the energy method, together with compactness arguments, to establish the local existence of a solution and the well-posedness of the weighted semilinear Schrödinger equation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{V}\Delta u + g(x,u) = 0, & \text{em } \Omega \times I, \\ u(x,t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times I, \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{para } x \in \Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ is a bounded domain with smooth boundary or $\Omega = \mathbb{R}^N$; $I \subset \mathbb{R}$ is an interval containing the origin; and $V : \Omega \to (0,\infty)$, $g : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ are given functions that satisfy some technical conditions.

Key Words: Group of unitary operators; conservation of mass; conservation of energy.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^N$	espaço euclidiano N dimensional
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
i	unidade imaginária
$\lvert \cdot \rvert$	módulo dos números reais ou complexos
$\operatorname{Re} z$	parte real do número complexo z
$\operatorname{Im} z$	parte imaginária do número complexo z
$\bar{z}$	conjugado do número complexo z
$\lvert U \rvert$	medida de Lebesgue do conjunto $U \subset \mathbb{R}^N$
$(a; b)$	segmento aberto na reta real que conecta a e b, i.e. (a, b) ou (b, a)
$\partial_k \psi(x)$	derivada parcial de primeira ordem de ψ em relação a variável x_k
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções suaves com suporte compacto em Ω
$L^p(\Omega)$	espaço de Lebesgue
$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	espaço das funções localmente integráveis
$H^1(\Omega)$	espaço de Sobolev
$H^1_0(\Omega)$	espaço de Sobolev
$\mathcal{L}(X, Y)$	espaço dos operadores lineares limitados de X em Y
$\mathcal{L}(X)$	espaço dos operadores lineares limitados em X
$\rightharpoonup$	indica convergência fraca
$\to$	indica convergência forte
$X \hookrightarrow Y$	o espaço X esta imerso continuamente no espaço Y
$X \underset{\mathrm{comp}}{\hookrightarrow} Y$	o espaço X esta imerso compactamente no espaço Y
X'	dual topológico de X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$	produto de dualidade no par X', X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{p'}, L^p, V}$	produto de dualidade no par $L^{p'}(\Omega, V)$, $L^p(\Omega, V)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}, H^1_0, V}$	produto de dualidade no par $H^{-1}(\Omega, V)$, $H^1_0(\Omega, V)$
$C_b(I, X)$	espaço das funções contínuas e limitadas de I em X
$u_t, u', \partial_t u$	derivada da função vetorial $u : I \subset \mathbb{R} \to X$
p'	expoente conjugado de p, i.e. $p' = p/(p-1)$
2^*	expoente crítico de Sobolev, i.e $2^* = 2N/(N-2)$ quando $N \geq 3$, $2^* = \infty$ para $N = 1, 2$

Introdução

A equação de Schrödinger é fundamental na mecânica quântica, pois descreve a evolução temporal do estado quântico de partículas microscópicas, sendo essencial para a compreensão de fenômenos atômicos e moleculares, além de ter profundas implicações em áreas como óptica, química quântica e física de partículas [17, 21, 26]. Do ponto de vista matemático, a equação de Schrödinger

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \qquad u(0) = \varphi,$$

é um problema interessante, pois possui uma mistura de propriedades típicas de equações parabólicas e hiperbólicas.

Nas equações parabólicas, como a equação do calor, $\partial_t u = \Delta u$, uma das características mais notáveis é a propriedade de suavização: independentemente da regularidade da condição inicial, a solução torna-se mais regular à medida que o tempo passa [29]. Já a equação de Schrödinger não possui essa suavização instantânea. No entanto, apresenta uma versão mais fraca desse fenômeno: em determinados espaços funcionais, a solução pode tornar-se mais regular ao longo do tempo. Esse efeito de suavização é expresso matematicamente pelas estimativas de Strichartz, ver por exemplo [9, 20, 28]. Por outro lado, a equação de Schrodinger compartilha com as equações hiperbólicas, como a equação da onda, $\partial_t^2 u = \Delta u$, uma propriedade fundamental: a conservação de energia. Além disso, devido ao fator imaginário i, a solução da equação de Schrödinger conserva a norma em L^2, propriedade conhecida como conservação de massa

A equação de Schrödinger não linear é um exemplo de uma equação diferencial parcial dispersiva. O termo *dispersiva* se refere ao fato de que ondas com diferentes frequências se propagam com velocidades distintas, espalhando assim a solução ao longo do tempo [28]. Essa característica torna a equação um objeto de estudo rico em fenômenos, como a boa colocação, *blow-up* e efeitos de suavização. Ferramentas particularmente úteis para sua análise são a teoria de semigrupos, estimativas de Strichartz, estimativas de energia e a transformada de Fourier.

Nesta dissertação, estamos interessados em estudar a existência local de uma solução e a boa colação da equação de Schrödinger semilinear com peso

$$\begin{cases} i\,\partial_t u + \frac{1}{V}\Delta u + g(x,u) = 0, & \text{em } \Omega \times I, \\ u(x,t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times I, \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{para todo } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) é um domínio limitado com fronteira suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$; $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo contendo a origem; e $V : \Omega \to (0,\infty)$, $g : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ são funções dadas que satisfazem algumas condições técnicas.

Nosso objetivo é encontrar soluções para esse problema por meio de duas ferramentas da análise funcional: o argumento do ponto fixo e resultados de compacidade. Esta última é utilizada para estudar a existência de soluções por meio de métodos de energia. Tal abordagem é uma adaptação do método apresentado por Thierry Cazenave em *Semilinear Schrödinger Equations* [9], especificamente no Capítulo 3, onde se analisa o caso $V = 1$.

Considerando que a equação de Schrödinger (1) é uma equação de evolução, é conveniente reescrevê-la na forma abstrata

$$\begin{cases} \partial_t u = Au + ig(u) \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad Au := i\frac{1}{V}\Delta u = i_V\Delta u, \tag{2}$$

em que $g(u)$ representa o operador de Nemytskii associado à função $g : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, e ${}_V\Delta$ denota o operador laplaciano com peso $1/V$, definido em um espaço de funções adequado, sujeito às condições de contorno prescritas. Essa formulação abstrata permite, em um primeiro momento, aplicar a teoria de semigrupos para investigar a existência, unicidade e demais propriedades das soluções, desde que g seja, ao menos, localmente lipschitziana.

No Capítulo 1, introduzimos os espaços de Lebesgue com peso $L^p(\Omega, V)$, o espaço de Sobolev com peso $H_0^1(\Omega, V)$ e seu dual topológico, que será denotado por $H^{-1}(\Omega, V)$. Esses espaços fornecem a estrutura necessária para formalizar a definição de ${}_V\Delta u$, tanto como função quanto como funcional, e permitem estabelecer que o operador ${}_V\Delta$ é auto-adjunto.

No Capítulo 2, aplicamos o argumento de ponto fixo para desenvolver uma teoria geral das equações de evolução associadas a operadores anti-adjuntos em espaços de Hilbert. Diferentemente da teoria clássica de semigrupos, nesta abordagem temos que o operador anti-adjunto gera um grupo de operadores unitários, que atua como um grupo de isometrias. Para ilustrar essa teoria, consideramos um caso específico em que o operador anti-adjunto é dado por $\mathbb{A} = i_V\Delta$.

Os resultados do Capítulo 2 garantem a existência e unicidade de solução para a equação Schrödinger semilinear (1) sob a suposição de que a função $g : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seja lipschitziana na segunda variável. Essa hipótese, porém, é bastante restritiva e não contempla diversos casos de interesse teórico e aplicado. Um exemplo relevante de não linearidade que não satisfaz a condição de Lipschitz, mas que aparece com frequência em aplicações, é $g(x,u) = \lambda |u|^{\alpha} u$, com $\alpha > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. A análise desse tipo de não linearidades exige o uso de ferramentas mais sofisticadas, como métodos variacionais ou argumentos de compacidade. O estudo desse cenário, mais delicado e tecnicamente exigente, será tratado no próximo capítulo.

No Capítulo 3, usamos o método da energia juntamente com alguns resultados de compacidade, para obter uma H_0^1-*solução* local do problema (1). Além disso, assumindo que o problema possua unicidade de solução, característica dependente do próprio problema, demonstramos que o problema é localmente bem posto.

O método de energia é uma ferramenta fundamental na análise de equações diferenciais parciais de evolução, consistindo na construção de um funcional $E(t)$, interpretado como a energia associada à solução. Tal abordagem fornece estimativas a priori que permitem estabelecer propriedades qualitativas da solução, tais como existência, unicidade, continuidade, regularidade e estabilidade. Em linhas gerais, a técnica consiste em tomar o produto interno da equação com a própria solução ou com uma função associada a ela. Dessa operação decorrem identidades ou desigualdades que refletem a estrutura matemática intrínseca da equação. A escolha apropriada do produto interno é naturalmente determinada pela natureza do problema.

Para motivar a abordagem e, de modo informal, proceder aos cálculos, suponha que Ω seja um domínio com fronteira suave e que φ é um dado inicial no espaço de Sobolev com peso $H_0^1(\Omega, V)$. Tomar o produto interno no espaço $L^2(\Omega, V)$ da equação (1) com a solução $u(t)(\cdot) = u(\cdot, t)$ significa multiplicar por $\bar{u}V$ e integrar sobre Ω, o que resulta em

$$i \int_\Omega u_t \bar{u}\, V dx + \int_\Omega \Delta u \bar{u}\, dx + \int_\Omega g(x,u)\bar{u}\, V dx = 0.$$

Aplicando integração por partes e usando a condição de contorno homogênea, tem-se

$$i \int_\Omega u_t \bar{u}\, V dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega g(x,u)\bar{u}\, V dx = 0.$$

Extraindo a parte imaginaria, obtemos

$$\int_\Omega \mathrm{Re}(u_t \bar{u})\, V dx + \int_\Omega \mathrm{Im}(g(x,u)\bar{u})\, V dx = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)|^2\, V dx + \int_\Omega \mathrm{Im}(g(x,u)\bar{u})\, V dx = 0.$$

Suponha que g satisfaça a condição:

$$\mathrm{Im}(g(x,z)\bar{z}) = 0, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \text{ e para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Então, a solução u satisfaz a **lei de conservação de masa:**

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)|^2\, V dx = 0.$$

De forma equivalente,

$$\int_\Omega |u(t)|^2\, V dx = \int_\Omega |\varphi|^2\, V dx, \quad \forall t \in I.$$

Por outro lado, tomando o produto interno no espaço $L^2(\Omega, V)$ da equação (1) com a função $\partial_t u$, obtemos

$$i\int_\Omega |\partial_t u|^2\, V dx + \int_\Omega \Delta u\, \overline{\partial_t u}\, dx + \int_\Omega g(x,u)\, \overline{\partial_t u}\, V dx = 0.$$

Agora, olhando só para a parte real dessa igualdade, ficamos com

$$\mathrm{Re}\int_\Omega \Delta u\, \overline{\partial_t u}\, dx + \mathrm{Re}\int_\Omega g(x,u)\, \overline{\partial_t u}\, V dx = 0,$$

ou ainda mais,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \mathrm{Re}\int_\Omega g(x,u)\, \overline{\partial_t u}\, V dx = 0.$$

Suponha que exista um funcional continuamente Fréchet diferenciável G, com derivada

$$G'(u)v = \mathrm{Re}\int_\Omega g(x,u)\bar{v} V dx, \tag{4}$$

e defina o funcional de energia

$$E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - G(v).$$

Então, a solução u satisfaz a **lei de conservação de energia:**

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = 0.$$

De forma equivalente,

$$E(u(t)) = E(\varphi), \quad \forall t \in I.$$

A análise acima mostra que, sob as hipóteses (3) e (4), qualquer solução da equação de schrödinger (1) satisfaz necessariamente a leis de conservação de massa e energia:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \qquad \text{e} \qquad E(u(t)) = E(\varphi), \quad \forall t \in I.$$

Consequentemente, a identidade

$$\|\nabla(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2E(\cdot) + 2G(\cdot),$$

combinada com as leis de conservação, permite reescrever a norma de $u(t)$ no espaço de Sobolev com peso $H^1(\Omega, V)$ como:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} &:= \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega,V)} + 2E(u(t)) + 2G(u(t)) \\
&= \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega,V)} + 2E(\varphi) + 2G(u(t)) \\
&= \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} - 2G(\varphi) + 2G(u(t)),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2G(u(t)), \quad \forall t \in I.$$

Tal expressão será a chave para garantir a existência local de uma H^1_0-solução forte do problema (1), pois permite obter estimativas uniformes para as soluções, desde que a não linearidade g satisfaça condições adequadas que garantam o controle de $G(u(\cdot))$.

A estratégia para obter a existência de uma solução do problema (1) consiste em aproximar a não linearidade g por uma sequência de funções g_n, localmente Lipschitz e com primitivas G_n, para as quais a teoria do Capítulo 2 é aplicável. Assim, garantimos a existência de soluções globais u_n para a equação de Schrödinger com peso

$$i\partial_t u_n + {}_V\Delta u_n + g_n(u_n) = 0, \qquad u_n(0) = \varphi;$$

que verificam as leis de conservação de massa e energia, satisfazendo em particular,

$$\|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G_n(\varphi) + 2G_n(u_n(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

O passo seguinte é assegurar a existência de um intervalo I no qual possamos obter estimativas uniformes para as sequências $(G_n(u_n))$, $(g_n(u_n))$ e (u_n). Com tais estimativas em mãos, é possível aplicar um resultado clássico de compacidade que garante a existência de uma função u tal que, a menos de subsequência,

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{em } H^1_0(\Omega, V), \quad \text{para todo } t \in I,$$

e de uma função f para a qual $g_n(u_n(t)) \rightharpoonup f(t)$ em algum espaço apropriado. Em seguida, ao passar para o limite na equação aproximada, temos

$$i\partial_t u + {}_V\Delta u + f = 0, \qquad u(0) = \varphi.$$

Além disso, esses limites fracos, junto à condição $\mathrm{Im}(g(v)\bar{v}) = 0$, garantem a conservação da massa da função u. Tal propriedade permite demonstrar que $f = g(u)$, concluindo-se, assim, que u é solução do problema (1).

No Capítulo 4, exploramos exemplos de não linearidades que verificam as hipóteses formuladas no Capítulo 3. Esses exemplos não apenas corroboram o arcabouço teórico desenvolvido, mas também revelam alguns cenários nos quais o problema se apresenta bem posto, permitindo a existência de soluções globais.

No Apêndice A, recordamos propriedades básicas da integração em espaços de Banach, bem como os espaços de Lebesgue e de Sobolev correspondentes.

Por fim, cabe advertir ao leitor atento que esta investigação não contempla, de forma sistemática, a teoria de regularidade no que diz respeito à variável espacial. Os resultados aqui apresentados concentram-se sobretudo na existência de soluções, sendo que a unicidade é demonstrada apenas em situações muito particulares, sob condições técnicas bastante restritivas. Além disso, não tratamos do caso em que $\mathrm{Im}(g(v)\overline{v}) \neq 0$ para alguma função v, como ocorre, por exemplo, quando $g(u) = \lambda|u|^\alpha u$ com λ complexo. Tais cenários envolvem a perda da conservação da massa e requerem ferramentas adicionais, o que ultrapassa o objetivo desta dissertação. Essas limitações, contudo, não enfraquecem o trabalho aqui desenvolvido, mas antes delineiam trilhas promissoras para futuras investigações.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos as definições e conceitos que serão frequentemente utilizados nos próximos capítulos. Iniciamos com uma revisão das propriedades fundamentais da teoria dos operadores adjuntos, que para um estudo mais detalhado o leitor é convidado a consultar as referências [7, 24, 27]. Em seguida, abordamos os espaços de Sobolev com peso, cujos aspectos técnicos são minuciosamente tratados em [19]. Finalmente, formalizamos a definição do laplaciano com peso.

1.1 Operador adjunto

Embora o conceito de operador adjunto possa ser desenvolvido de forma geral em espaços de Banach [6], nesta seção abordaremos sua formulação em espaços de Hilbert. Para isso, começamos com a definição de espaço de Hilbert.

Definição 1.1. Um *espaço com produto interno complexo* é um espaço vetorial complexo H, munido de uma aplicação $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$, chamada de *produto interno*, que, para quaisquer $u, v, w \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $(\lambda u + v, w) = \lambda(u, w) + (v, w)$,

(2) $(u, v) = \overline{(v, u)}$,

(3) $(u, u) \geq 0$ e $(u, u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Quando H for completo em relação à *norma induzida* pelo produto interno, dada por

$$\|u\| := (u, u)^{1/2}, \quad \forall u \in H,$$

dizemos que o par $(H, (\cdot,\cdot))$ é um *espaço de Hilbert complexo.*

Observação 1.1. Seja $(H, (\cdot,\cdot))$ um espaço de Hilbert complexo. Podemos considerar H como um *espaço de Hilbert real* ao tratá-lo como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, munido com o produto interno real (bilinear, simétrico e definido positivo) dado por

$$(u, v)_{\mathbb{R}} := \operatorname{Re}(u, v), \quad \forall u, v \in H.$$

A norma induzida por este produto interno coincide com a norma original do espaço complexo, ou seja,

$$\|u\|^2 = (u, u) = (u, u)_{\mathbb{R}}.$$

Consequentemente, propriedades que dependem da norma, como a completude, se preservam ao passar da estrutura complexa para a real.

No que segue, H denotará um espaço de Hilbert complexo com produto interno $(\cdot, \cdot)$.

Definição 1.2. Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Dizemos que A é:

(a) *Simétrico* se $(Au, v) = (u, Av)$ para todo $u, v \in D(A)$.

(b) *Dissipativo* se $\operatorname{Re}(Au, u) \leq 0$ para todo $u \in D(A)$.

(c) *Fechado* se seu gráfico,

$$\operatorname{Graf}(A) := \{(u, Au) \in H \times H;\ u \in D(A)\},$$

é um subespaço fechado de $H \times H$.

(d) *Densamente definido* se seu domínio $D(A)$ é denso em H.

(e) Se A é densamente definido, o *operador adjunto* de A, denotado por A^*, é definido por

$$\begin{cases} D(A^*) := \{w \in H;\ \exists v \in H,\ (Au, w) = (u, v),\ \text{para todo } u \in D(A)\} \\ A^* w := v, \quad \text{para todo } w \in D(A^*). \end{cases}$$

Dizemos que A é *auto-adjunto* quando $A^* = A$ e *anti-adjunto* se $A^* = -A$.

Observação 1.2. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador linear fechado, então $D(A)$ é um espaço de Hilbert complexo com o produto interno

$$(u, v)_{D(A)} := (u, v) + (Au, Av), \quad \forall u, v \in D(A), \tag{1.1}$$

cuja norma induzida é

$$\|u\|_{D(A)} := \left(\|u\|^2 + \|Au\|^2\right)^{1/2}, \quad \forall u \in D(A). \tag{1.2}$$

Doravante, $D(A)$ será sempre considerado com essa estrutura de espaço de Hilbert.

O operador adjunto possui diversas propriedades, entre as quais destacamos:

Lema 1.1. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear densamente definido. Então*

(a) A^* *é linear e fechado;*

(b) $R(A)^\perp = \ker(A^*)$*;*

(c) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ *e* $(A+B)^* = A^* + B^*$*, onde* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $B \in \mathcal{L}(H)$*;*

(d) Se A *é injetivo e* $R(A)$ *denso em* H*, então* A^* *é invertível e* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$*;*

(e) Se A *é fechado e dissipativo, com* A^* *também dissipativo, então* $R(I - A) = H$*;*

(f) Se A *é fechado, então* A^* *é densamente definido.*

Demonstração. As demonstrações das propriedades (a)-(d) podem ser encontradas em [27, Proposição 1.6 e Teorema 1.8]. Para provar (e), observe que $I - A$ é densamente definido e portanto, de acordo com (b), temos

$$R(I - A)^\perp = \ker((I - A)^*) = \{u \in D(A^*) \, : \, A^* u = u\}.$$

Como A^* é dissipativo, o conjunto acima contém apenas o vetor nulo, pois

$$\forall u \in \ker((I - A)^*) \quad \Rightarrow \quad \|u\|^2 = (u, u) = \mathrm{Re}(u, u) = \mathrm{Re}(A^* u, u) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Assim, pelo Teorema da Soma Direta em espaços de Hilbert [6, Teorema 5.2.5], obtemos

$$H = \overline{R(I - A)}.$$

Para concluir a prova, basta mostrar que $R(I - A)$ é fechado. Para isso, seja $(u_n) \subset D(A)$ uma sequência e $v \in H$ tal que $v_n = u_n - Au_n \to v$. Pela dissipatividade de A, obtém-se

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= \|(u_n - u_m) - A(u_n - u_m)\|^2 \\ &= \|u_n - u_m\|^2 - 2\mathrm{Re}(A(u_n - u_m), u_n - u_m) + \|A(u_n - u_m)\|^2 \\ &\geq \|u_n - u_m\|^2 + \|A(u_n - u_m)\|^2 \\ &\geq \|u_n - u_m\|^2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|u_n - u_m\| \leq \|v_n - v_m\| \to 0 \quad \text{quando } n, m \to \infty,$$

o que mostra que (u_n) é uma sequência de Cauchy em H e, portanto, converge para algum $u \in H$. Logo,

$$u_n \to u \quad \text{ e } \quad Au_n = u_n - v_n \to u - v.$$

Por fim, como A é fechado, isso implica que $u \in D(A)$ e $u - v = Au$, ou seja, $v \in R(I - A)$, concluindo a demonstração de (e).

Para justificar (f), suponhamos, por contradição, que $D(A^*)$ não seja denso em H. Nesse caso, pelo Teorema da Soma Direta, $D(A^*)^\perp$ é não trivial, ou seja, existe um vetor $a \in H$ não nulo tal que

$$(a, v) = 0, \quad \forall v \in D(A^*). \tag{1.3}$$

Como A é um operador linear e fechado, seu gráfico é um subespaço fechado de $H \times H$. Além disso, o ponto $(0, a)$ não pertence a $\text{Graf}(A)$, pois $a \neq 0$. Assim, pelo Teorema de Separação Geométrica de Hahn-Banach em espaços complexos [25, Teorema 3.5], existe um funcional $\varphi \in \mathcal{L}(H \times H, \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(0, a) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \varphi(u, Au) = 0, \quad \forall u \in D(A). \tag{1.4}$$

Por sua vez, pelo Teorema da Representação de Riesz [6, Teorema 5.5.2], tal funcional φ pode ser expresso por meio de dois vetores $v_1, v_2 \in H$ como

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, 0) + \varphi(0, y) = (x, v_1) - (y, v_2), \quad \forall x, y \in H.$$

Logo, (1.4) equivale a

$$(a, v_2) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad (Au, v_2) = (u, v_1), \quad \forall u \in D(A).$$

A segunda relação implica, pela definição do operador adjunto, que $v_2 \in D(A^*)$ e, assim, por (1.3), obtemos $(a, v_2) = 0$, o que é uma contradição. $\square$

Em virtude do item (c) da proposição anterior, é imediato concluir que, caso iA seja auto-adjunto, A é anti-adjunto, e vice-versa. O próximo resultado oferece condições suficientes para que um operador simétrico seja auto-adjunto.

Lema 1.2 [27, Proposição 3.11]**.** *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear simétrico, onde H é um espaço de Hilbert complexo. Se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R(A - \lambda I) = H$ e que $R(A - \bar{\lambda} I)$ seja denso em H, então A é auto-adjunto.*

Um caso particular relevante da teoria de operadores adjuntos ocorre quando se consideram operadores lineares limitados definidos em todo o espaço H. De acordo com [24, Teoremas 6.1 e 6.10], para todo operador $S \in \mathcal{L}(H)$ existe um único operador linear e limitado $S^* : H \to H$, denominado operador adjunto de S, tal que

$$(Su, v) = (u, S^* v), \quad \forall u, v \in H \qquad \text{e} \qquad \|S^*\| = \|S\|. \tag{1.5}$$

Como consequência imediata da igualdade de normas entre um operador e seu adjunto, obtemos o seguinte critério de convergência:

$$S_n \to S \;\text{ em }\; \mathcal{L}(H) \quad \text{se, e somente se,} \quad S_n^* \to S^* \;\text{ em }\; \mathcal{L}(H). \tag{1.6}$$

Dentre os operadores lineares limitados, destacam-se os que preservam a norma pontualmente e o produto interno, conhecidos como *isometrias*. Dentro dessa classe, os operadores unitários têm uma importância particular. Um operador $S \in \mathcal{L}(H)$ é chamado *unitário* se satisfaz a condição

$$S^*S = SS^* = I.$$

Em virtude dessa definição, todo operador unitário é, por conseguinte, invertível e seu inverso coincide com o adjunto. Além disso, são isometrias, como pode ser verificado pela relação

$$(Su, Sv) = (u, S^*Sv) = (u, v), \quad \forall u, v \in H.$$

Desta forma, a norma de um operador unitário é 1. Adicionalmente, toda isometria linear e sobrejetiva é um operador unitário, conforme demonstrado em [24, Teorema 6.30].

1.2 Espaços funcionais

Nesta seção, apresentamos os espaços de funções que serão utilizados durante este trabalho. Daqui em diante, assumiremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, e que $V : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função, chamada de *peso*, que satisfaz as seguintes condições:

V1 *V é contínua;*

V2 *V é limitada inferiormente, com* $\inf_\Omega V =: V_0 > 0$.

Nessas condições, podemos concluir a partir de [4, Corolários 4.9 e 4.11] que a aplicação

$$\mu(E) := \int_E V dx, \quad \text{para todo conjunto Lebesgue mensurável } E \subset \Omega, \tag{1.7}$$

define uma medida absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Além disso, a continuidade de V garante que essa medida atribui valor finito a todo conjunto compacto contido em Ω. Como é possível cobrir Ω por uma sequência crescente de conjuntos compactos, conclui-se que a medida μ é σ-finita.

A partir da medida μ, para cada $1 \leq p < \infty$, definimos o *espaço de Lebesgue com peso* $L^p(\Omega, V)$ como sendo o espaço de Lebesgue $L^p(\Omega, \mu)$ sobre o corpo dos números complexos. De forma precisa, temos que, a menos de uma identificação de classes de equivalência,

$$L^p(\Omega, V) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C};\ u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p V dx < \infty \right\}.$$

Segue de [6, Teorema 1.2.3] que $L^p(\Omega, V)$ é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega,V)} := \left(\int_\Omega |u|^p V dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = 2$, a norma é induzida pelo produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega,V)} := \int_\Omega u\bar{v}\, V\, dx,$$

o que torna $L^2(\Omega, V)$ um espaço de Hilbert complexo. Além disso, a hipótese **V2** implica que, para todo $p \geq 1$,

$$L^p(\Omega, V) \hookrightarrow L^p(\Omega). \tag{1.8}$$

A fim de caracterizar o dual topológico de $L^p(\Omega, V)$, é conveniente recordar um resultado clássico da análise funcional [6, Teorema 4.1.2], [3, Teorema 9.42], que fornece uma descrição explícita do dual dos espaços de Lebesgue.

Lema 1.3. *Sejam $1 < p < \infty$ e $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Então a correspondência $u \mapsto T_u$ estabelece um isomorfismo isométrico entre $L^{p'}(\Omega, \mu)$ e*

$$(L^p(\Omega, \mu))' := \Big\{ f : L^p(\Omega, \mu) \to \mathbb{C};\ f \text{ é } \mathbb{C}\text{-linear e contínuo} \Big\},$$

em que a relação de dualidade é dada por

$$T_u(v) := \int_\Omega uv\, d\mu, \quad \forall\, v \in L^p(\Omega, \mu),\ u \in L^{p'}(\Omega, \mu).$$

Neste caso, escrevemos

$$L^{p'}(\Omega, \mu) \cong (L^p(\Omega, \mu))'.$$

Observação 1.3. Para $u \in L^{p'}(\Omega, \mu)$, o funcional $T_u(\cdot)$ é contínuo e $\mathbb{C}$-linear, representando o elemento canônico do dual topológico $(L^p(\Omega, \mu))'$ associado a u. Convém notar, entretanto, que o funcional

$$v \in L^p(\Omega, \mu) \longmapsto \int_\Omega u\bar{v}\, d\mu,$$

é contínuo, mas não $\mathbb{C}$-linear, e, portanto, não é um elemento de $(L^p(\Omega, \mu))'$.

Aplicando o lema anterior à medida μ definida em (1.7), ou seja, $d\mu = V dx$, e denotando o produto de dualidade $T_u(v)$ por $\langle u, v\rangle_{L^{p'}, L^p, V}$, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 1.1. *O dual topológico de $L^p(\Omega, V)$, com $p \in (1, \infty)$, é isometricamente isomorfo a $L^{p'}(\Omega, V)$, ou seja,*

$$L^{p'}(\Omega, V) \cong (L^p(\Omega, V))',$$

onde o produto de dualidade é dado por

$$\langle u, v\rangle_{L^{p'}, L^p, V} := \int_\Omega uv\, V\, dx, \quad \forall\, u \in L^{p'}(\Omega, V),\ v \in L^p(\Omega, V). \tag{1.9}$$

A seguir, introduzimos alguns espaços de Sobolev com peso, os quais constituem um caso particular da teoria desenvolvida por Kufner e Opic [19]. Começamos introduzindo a noção de derivada parcial fraca.

Definição 1.3. Dizemos que $v_k \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é a *k-ésima derivada parcial fraca de primeira ordem* da função $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, se

$$\int_\Omega u\,\partial_k\varphi\,dx = -\int_\Omega v_k\varphi\,dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.10}$$

Neste caso, escrevemos $v_k = \partial_k u$. Caso u possua todas as derivadas parciais fracas de primeira ordem, definimos o gradiente de u por $\nabla u := (\partial_1 u, \ldots, \partial_N u)$.

A partir dessa noção de derivada, definimos o *espaço de Sobolev com peso*

$$H^1(\Omega, V) := \left\{u \in L^2(\Omega, V);\ \partial_1 u, \ldots, \partial_N u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Dado que o peso V satisfaz a condição **V2**, segue de [19, Teorema 1.11] que $H^1(\Omega, V)$ é um espaço de Hilbert complexo, munido do produto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega,V)} := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\bar{v} + u\bar{v}V)\,dx,$$

cuja norma induzida é dada por

$$\|u\|_{H^1(\Omega,V)} := \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega,V)}\right)^{1/2},$$

onde

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Além disso, como $H^1(\Omega, V)$ pode ser identificado isometricamente com um subespaço fechado de $(L^2(\Omega))^N \times L^2(\Omega, V)$, que é separável, segue que $H^1(\Omega, V)$ também é separável. Definimos também o espaço

$$H^1_0(\Omega, V) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega,V)}},$$

o qual é subespaço fechado e separável de $H^1(\Omega, V)$. Como consequência de (1.8), temos

$$H^1(\Omega, V) \hookrightarrow H^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad H^1_0(\Omega, V) \hookrightarrow H^1_0(\Omega). \tag{1.11}$$

Por último, consideramos o espaço

$$H^{-1}(\Omega, V) := \left\{f : H^1_0(\Omega, V) \to \mathbb{C};\ f \text{ é linear e contínua}\right\},$$

o qual é munido da norma

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega,V)} := \sup\left\{|\langle f, v\rangle_{H^{-1},H^1_0,V}|;\ v \in H^1_0(\Omega, V),\ \|v\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 1\right\}.$$

Com essa norma, $H^{-1}(\Omega, V)$ é um espaço de Banach complexo e, além disso, é Hilbert. De fato, pelo Teorema da Representação de Riesz, para cada funcional $f \in H^{-1}(\Omega, V)$, existe uma única função $\varphi_f \in H_0^1(\Omega, V)$ tal que

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|\varphi_f\|_{H^1(\Omega,V)}, \tag{1.12}$$

$$\langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = (v, \varphi_f)_{H^1(\Omega,V)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, V). \tag{1.13}$$

Com isso, a aplicação

$$(f, g)_{H^{-1}(\Omega,V)} := (\varphi_g, \varphi_f)_{H^1(\Omega,V)}, \quad \forall f, g \in H^{-1}(\Omega, V), \tag{1.14}$$

define um produto interno em $H^{-1}(\Omega, V)$, que induz a norma $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega,V)}$, uma vez que

$$\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|\varphi_f\|^2_{H^1(\Omega,V)} = (f, f)_{H^{-1}(\Omega,V)}.$$

Finalmente, usando a notação introduzida acima, podemos identificar $L^2(\Omega, V)$ como um subespaço de $H^{-1}(\Omega, V)$. De fato, por resultados clássicos da análise funcional, a imersão contínua $H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow L^2(\Omega, V)$ e o Corolário 1.1 implicam que

$$L^2(\Omega, V) \cong (L^2(\Omega, V))' \longrightarrow (H_0^1(\Omega, V))' = H^{-1}(\Omega, V),$$

onde o produto de dualidade é dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} := \int_\Omega uv\,V dx, \quad \forall u \in L^2(\Omega, V),\ v \in H_0^1(\Omega, V). \tag{1.15}$$

Assim,

$$H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow L^2(\Omega, V) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega, V), \tag{1.16}$$

e, a partir de (1.15) e da desigualdade de Hölder, segue-se que

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall u \in L^2(\Omega, V). \tag{1.17}$$

De forma mais geral, suponha que tenhamos a imersão contínua

$$H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow L^p(\Omega, V), \quad \text{para algum } p \in (1, \infty).$$

Então

$$L^{p'}(\Omega, V) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega, V), \tag{1.18}$$

onde o produto de dualidade é dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} := \langle u, v\rangle_{L^{p'},L^p,V} = \int_\Omega uv\,V dx, \quad \forall u \in L^{p'}(\Omega, V), v \in H_0^1(\Omega, V). \tag{1.19}$$

1.3 Operador laplaciano com peso

Nesta seção, o operador laplaciano com peso, denotado por ${}_V\Delta$, é apresentado sob duas perspectivas. A primeira o define como um operador linear que associa a cada elemento de um subespaço de $L^2(\Omega, V)$ uma função no mesmo espaço, isto é, ${}_V\Delta u \in L^2(\Omega, V)$. A segunda perspectiva considera ${}_V\Delta u$ como um elemento do espaço dual $H^{-1}(\Omega, V)$, ou seja, como um funcional linear e contínuo. Para tanto, iniciamos relembrando a seguinte noção de laplaciano.

Definição 1.4. Sejam $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dizemos que v é o *laplaciano* de u, e o denotamos por Δu, se

$$\int_\Omega v\varphi \, dx = \int_\Omega u\Delta\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.20}$$

Definição 1.5. O *operador laplaciano com peso* ${}_V\Delta$ em $L^2(\Omega, V)$ é o operador linear definido por

$$\begin{cases} {}_V\Delta : D({}_V\Delta) \subset L^2(\Omega, V) \to L^2(\Omega, V) \\ D({}_V\Delta) := \{u \in H_0^1(\Omega, V);\ \Delta u \in L^2(\Omega, 1/V)\} \\ {}_V\Delta u := \dfrac{\Delta u}{V}, \quad \text{para todo } u \in D({}_V\Delta). \end{cases} \tag{1.21}$$

Observação 1.4. O operador ${}_V\Delta$ de fato assume valores em $L^2(\Omega, V)$, pois

$$\|{}_V\Delta u\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega,1/V)} < \infty, \quad \forall u \in D({}_V\Delta).$$

A seguir apresentaremos duas propriedades que nos permitirão mostrar que o operador ${}_V\Delta$ é simétrico e auto-adjunto.

Lema 1.4. *Para cada $u \in D({}_V\Delta)$ tem-se*

$$\int_\Omega \Delta u v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, V). \tag{1.22}$$

Consequentemente, ${}_V\Delta$ é simétrico.

Demonstração. Suponha inicialmente que $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Então, pelas definições (1.20) e (1.10), obtemos

$$\int_\Omega \Delta u v \, dx = \int_\Omega u\Delta v \, dx = \sum_{k=1}^N \int_\Omega u \, \partial_k(\partial_k v) dx = -\sum_{k=1}^N \int_\Omega \partial_k u \, \partial_k v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Suponha agora que $v \in H_0^1(\Omega, V)$ e, por densidade, considere uma sequência $(v_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$v_n \to v \quad \text{em } L^2(\Omega, V) \qquad \text{e} \qquad \nabla v_n \to \nabla v \quad \text{em } L^2(\Omega)^N. \tag{1.23}$$

Aplicando o caso anterior a cada v_n, temos

$$\int_\Omega \Delta u v_n \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Por outra parte, a desigualdade de Hölder e os limites (1.23) garantem que

$$\left| \int_\Omega \Delta u v_n \, dx - \int_\Omega \Delta u v \, dx \right| \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega, 1/V)} \, \|v_n - v\|_{L^2(\Omega, V)} \to 0,$$
$$\left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \, \|\nabla v_n - \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Dessa forma, ao passar ao limite em (1.24) quando $n \to \infty$, obtemos que u e v satisfazem (1.22). Finalmente, a identidade (1.22) permite escrever

$$({}_V\Delta u, v)_{L^2(\Omega, V)} = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx = (u, {}_V\Delta v)_{L^2(\Omega, V)}, \quad \forall u, v \in D({}_V\Delta),$$

o que mostra que ${}_V\Delta$ é simétrico. □

Lema 1.5. *Para cada $\psi \in H^{-1}(\Omega, V)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$, existe $u \in H_0^1(\Omega, V)$ tal que*

$$\langle \psi, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \lambda u v V) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, V).$$

Demonstração. Considere a forma sesquilinear

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} + \lambda u \bar{v} V) \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega, V),$$

a qual é contínua e coerciva, pois

$$|a(u, v)| \leq (1 + |\lambda|) \|u\|_{H^1(\Omega, V)} \|v\|_{H^1(\Omega, V)} \qquad \text{e} \qquad |a(u, u)| \geq \|u\|^2_{H^1(\Omega, V)}.$$

Assim, pelo Lema de Lax–Milgram [5, Teorema 3.2], existe $w \in H_0^1(\Omega, V)$ tal que

$$\langle \psi, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} = a(v, w), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, V).$$

Portanto, basta tomar $u = \bar{w}$. □

Teorema 1.1. *O operador ${}_V\Delta$ é auto-adjunto.*

Demonstração. Seja λ um número complexo com $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$. Dado qualquer $f \in L^2(\Omega, V)$, o Lema 1.5 garante a existência de uma função $u \in H_0^1(\Omega, V)$ tal que

$$-\int_\Omega f v V \, dx =: \langle \psi, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \lambda u v V) \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim,

$$\int_\Omega (f+\lambda u)V\, v\, dx = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx = \int_\Omega u\Delta v\, dx, \quad \forall v\in C_0^\infty(\Omega).$$

Isso implica que o laplaciano da função u existe e que

$$\Delta u = (f+\lambda u)V \in L^2(\Omega, 1/V).$$

Consequentemente, $u\in D({}_V\Delta)$ e satisfaz $({}_V\Delta-\lambda I)u = f$, o que implica $f\in R({}_V\Delta-\lambda I)$. De modo análogo, ao substituir λ por seu conjugado, obtemos novamente $f\in R({}_V\Delta-\bar{\lambda} I)$. Como f foi arbitrário, concluímos que

$$R({}_V\Delta-\lambda I) = R({}_V\Delta-\bar{\lambda} I) = L^2(\Omega, V).$$

Por fim, como ${}_V\Delta$ é simétrico, segue do Lema 1.2 que ${}_V\Delta$ é auto-adjunto. $\square$

Definiremos a seguir o operador laplaciano com peso no espaço $H^{-1}(\Omega, V)$. Para isso, observe que o Lema 1.4 nos permite interpretar ${}_V\Delta u$ como um funcional linear e contínuo, isto é, como um elemento de $H^{-1}(\Omega, V)$. De fato, seja $u\in D({}_V\Delta)$ e, note que, por definição, ${}_V\Delta u\in L^2(\Omega, V)$. Então, pelas identidades (1.15) e (1.22),

$$\langle {}_V\Delta u, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} = \int_\Omega {}_V\Delta u\, v\, V dx = \int_\Omega \Delta u\, v dx = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx,$$

para todo $v\in H_0^1(\Omega, V)$. Observe-se que a expressão no lado direito da igualdade acima permanece bem definida mesmo quando u esteja em $H_0^1(\Omega, V)$. Tal fato motiva o a seguinte definição:

Definição 1.6. Seja $u\in H_0^1(\Omega, V)$. O *laplaciano com peso* da função u é o funcional ${}_V\Delta u : H_0^1(\Omega, V)\to \mathbb{C}$ definido por

$$\langle {}_V\Delta u, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} := -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega, V). \tag{1.25}$$

Claramente, ${}_V\Delta u$ define um funcional linear e contínuo, ou seja, ${}_V\Delta u\in H^{-1}(\Omega, V)$. Além disso, ao aplicar a desigualdade de Hölder em (1.25), obtemos

$$\|{}_V\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega, V)} \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u\in H_0^1(\Omega, V). \tag{1.26}$$

Consequentemente, fica bem definido o operador linear

$$\begin{cases} D({}_V\Delta) := H_0^1(\Omega, V)\subset H^{-1}(\Omega, V) \\ {}_V\Delta : D({}_V\Delta)\to H^{-1}(\Omega, V) \\ {}_V\Delta(u) := {}_V\Delta u, \quad \text{para todo } u\in D({}_V\Delta). \end{cases} \tag{1.27}$$

Lema 1.6. *Para quaisquer $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$, tem-se*

$$({}_V\Delta u, v)_{H^{-1}(\Omega,V)} = (u, {}_V\Delta v)_{H^{-1}(\Omega,V)} = (u, v)_{H^{-1}(\Omega,V)} - (u, v)_{L^2(\Omega,V)}, \tag{1.28}$$

$$\|{}_V\Delta u\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|u\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)}. \tag{1.29}$$

Em particular, ${}_V\Delta$ é simétrico.

Demonstração. Somando e subtraindo a função u na primeira componente, temos

$$({}_V\Delta u, v)_{H^{-1}(\Omega,V)} = ({}_V\Delta u - u, v)_{H^{-1}(\Omega,V)} + (u, v)_{H^{-1}(\Omega,V)}.$$

Logo, ao aplicar a definição do produto interno (1.14), obtemos

$$({}_V\Delta u, v)_{H^{-1}(\Omega,V)} = (\varphi_v, \varphi_{{}_V\Delta u - u})_{H^1(\Omega,V)} + (u, v)_{H^{-1}(\Omega,V)}. \tag{1.30}$$

Pelos mesmos argumentos, também se tem

$$(u, {}_V\Delta v)_{H^{-1}(\Omega,V)} = (\varphi_{{}_V\Delta v - v}, \varphi_u)_{H^1(\Omega,V)} + (u, v)_{H^{-1}(\Omega,V)}. \tag{1.31}$$

Observe agora que, de acordo com (1.13), para todo $w \in H_0^1(\Omega, V)$, tem-se

$$\begin{aligned}
(w, \varphi_{{}_V\Delta u - u})_{H^1(\Omega,V)} &= \langle {}_V\Delta u - u, w\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} \\
&= -\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w + uwV)\, dx \\
&= (w, -\bar{u})_{H^1(\Omega,V)}.
\end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que $\varphi_{{}_V\Delta u - u} = -\bar{u}$. De modo análogo, obtém-se $\varphi_{{}_V\Delta v - v} = -\bar{v}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
(\varphi_v, \varphi_{{}_V\Delta u - u})_{H^1(\Omega,V)} &= (\varphi_v, -\bar{u})_{H^1(\Omega,V)} \\
&= -\overline{(\bar{u}, \varphi_v)}_{H^1(\Omega,V)} \\
&= -\overline{\langle v, \bar{u}\rangle}_{H^{-1}, H_0^1, V} \\
&= -(u, v)_{L^2(\Omega,V)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\varphi_{{}_V\Delta v - v}, \varphi_u)_{H^1(\Omega,V)} &= -(\bar{v}, \varphi_u)_{H^1} \\
&= -\langle u, \bar{v}\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} \\
&= -(u, v)_{L^2(\Omega,V)}.
\end{aligned}$$

Por fim, combinando essas expressões com (1.30) e (1.31), obtemos (1.28).

Para demonstrar (1.29), note que, pelos cálculos acima, temos em particular

$$(\varphi_{{}_V\Delta u - u}, \varphi_u)_{H^1(\Omega,V)} = -\|u\|^2_{L^2(\Omega,V)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|{}_V\Delta u\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} &= \|u + ({}_V\Delta u - u)\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} \\
&= \|u\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} + 2\mathrm{Re}(u, {}_V\Delta u - u)_{H^{-1}(\Omega,V)} + \|{}_V\Delta u - u\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} \\
&= \|u\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} + 2\mathrm{Re}(\varphi_{{}_V\Delta u - u}, \varphi_u)_{H^1(\Omega,V)} + \|\varphi_{{}_V\Delta u - u}\|^2_{H^1(\Omega,V)} \\
&= \|u\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} - 2\|u\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|-\bar{u}\|^2_{H^1(\Omega,V)} \\
&= \|u\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} - 2\|u\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega,V)} \\
&= \|u\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} - \|u\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. □

Teorema 1.2. *O operador ${}_V\Delta$ é auto-adjunto.*

Demonstração. Pelo Lema 1.6 sabemos que ${}_V\Delta$ é simétrico. Por outro lado, fixado um número complexo λ com $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$. Para qualquer funcional $\psi \in H^{-1}(\Omega, V)$, o Lema 1.5 garante a existência de uma função $u \in H^1_0(\Omega, V)$ tal que, para todo $v \in H^1_0(\Omega, V)$,

$$\langle -\psi, v\rangle_{H^{-1},H^1_0,V} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \lambda u v V)dx = \langle -{}_V\Delta u + \lambda u, v\rangle_{H^{-1},H^1_0,V}.$$

Isso implica que $\psi = ({}_V\Delta - \lambda I)u$ e, portanto, $\psi \in R({}_V\Delta - \lambda I)$. De forma análoga, obtém-se o mesmo resultado ao substituir λ por seu conjugado. Como ψ é arbitrário, concluímos que

$$R({}_V\Delta - \lambda I) = R({}_V\Delta - \bar{\lambda} I) = H^{-1}(\Omega, V).$$

Com isso, o Lema 1.2 implica que ${}_V\Delta$ é auto-adjunto. □

Capítulo 2

Teoria de Semigrupo

A teoria de semigrupo constitui uma ferramenta poderosa e eficaz na resolução de equações de evolução, sendo aplicável a uma ampla classe de problemas de valor inicial e de valor de contorno, tanto lineares quando não lineares. Neste capítulo, abordamos essa teoria com ênfase em sua aplicação à equação de Schrödinger. Para leitura complementar, recomendamos as referências [9, 10, 14, 23, 29].

Ao longo deste capítulo, salvo indicação em contrário, assumiremos que H é um espaço de Hilbert complexo e A um operador linear definido em H com domínio $D(A)$.

2.1 Semigrupos e grupos de operadores limitados

Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados em H é dita ser um C_0-*semigrupo de operadores limitados* se satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $S(0) = I$;

(2) $S(t+s) = S(t)S(s)$, para todo $t, s \geq 0$;

(3) Para cada $u \in H$, $S(t)u \to u$ quando $t \to 0^+$.

Se, adicionalmente, $\|S(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$, o semigrupo é denominado de *contração*. O *gerador infinitesimal* do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o operador $A : D(A) \to H$ definido por

$$D(A) := \left\{ u \in H;\ \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Au := \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h}, \quad u \in D(A).$$

Claramente, o gerador infinitesimal é único e linear.

Lema 2.1 [23, Corolário 2.3 e Teorema 2.4]**.** *Se A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então, para todo $u \in H$,*

$$S(\cdot)u \in C([0,\infty), H).$$

Além disso, para todo $\varphi \in D(A)$, $u(t) = S(t)\varphi$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), H) \\ u'(t) = Au(t), \quad \text{para todo } t \geq 0 \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

O teorema a seguir fornece condições suficientes e necessárias para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração. Antes de enunciá-lo, recordemos que o conjunto *resolvente* $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais o operador $\lambda I - A$ é invertível, e cujo inverso, o *operador resolvente* $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, é linear e limitado em H.

Teorema 2.1 (Hille-Yosida, [23, Teorema 3.1])**.** *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

(1) A é fechado;

(2) A é densamente definido em H;

(3) O resolvente $\rho(A)$ contém a $(0,\infty)$ e para cada $\lambda > 0$, tem-se $\|R(\lambda, A)\| \leq 1/\lambda$.

Neste caso, o C_0-semigrupo de contração gerado por A é dado por

$$S(t)u := \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}u, \quad \forall u \in H,$$

onde A_λ é a aproximação de Yosida de A, ou seja,

$$A_\lambda := \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

Teorema 2.2 (Lumer-Phillips, [23, Teorema 4.3])**.** *Seja A um operador linear satisfazendo as seguintes condições:*

(1) A é densamente definido em H;

(2) A é dissipativo;

(3) Existe $\lambda > 0$ tal que $R(\lambda I - A) = H$.

Então, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração em H.

Uma família $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores lineares limitados em H é dita ser um C_0-*grupo de operadores limitados* se satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $T(0) = I$;

(2) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(3) Para cada $u \in H$, $T(t)u \to u$ quando $t \to 0$.

Se, adicionalmente, cada $T(t)$ for um operador unitário, então a família $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é chamada de *grupo de operadores unitários*. O *gerador infinitesimal* do grupo $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o operador $A : D(A) \to H$ definido por

$$D(A) := \left\{u \in H;\ \lim_{h\to 0} \frac{T(h)u - u}{h} \text{ existe}\right\}$$

e

$$Au := \lim_{h\to 0} \frac{T(h)u - u}{h}.$$

Evidentemente, o gerador infinitesimal é único e linear.

Observação 2.1. (i) Os axiomas (1) e (2) implicam que cada operador $T(t)$ é um isomorfismo topológico, com inverso dado por $T(t)^{-1} = T(-t)$.

(ii) De acordo com os resultados vistos na Seção 1.1, os elementos de um grupo de operadores unitários $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ são, em particular, isometrias e portanto

$$\|T(t)\| = 1, \quad (T(t)u, T(t)v) = (u, v) \quad \text{e} \quad \|T(t)u\| = \|u\|, \quad \forall u, v \in H,\ t \in \mathbb{R}.$$

(iii) Pelas definições, fica claro que, se A é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores unitários, então as famílias $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{T(-t)\}_{t\geq 0}$ são C_0-semigrupos de contração, com geradores infinitesimais A e $-A$, respectivamente. Em particular, A é densamente definido e fechado.

Apresentamos a seguir as propriedades fundamentais de um C_0-grupo de operadores unitários. Essas propriedades descrevem o comportamento contínuo e diferenciável das trajetórias geradas pelos operadores, além de garantir um resultado importante de convergência. Esses aspectos serão essenciais para o desenvolvimento teórico que se segue.

Lema 2.2. *Se A é o gerador de um C_0-grupo de operadores unitários $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, então*

(a) Para cada $u \in H$, tem-se $T(\cdot)u \in C(\mathbb{R}, H)$.

(b) $T(t_n)u_n \to T(t)u$ sempre que $u_n \to u$ e $t_n \to t$.

(c) Para cada $u \in D(A)$,

$$\begin{cases} T(\cdot)u \in C(\mathbb{R}, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}, H) \\ \dfrac{d}{dt}T(t)u = AT(t)u = T(t)Au, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$T(t)u - u = \int_0^t T(s)Au\, ds. \tag{2.2}$$

Demonstração. Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, temos

$$\|T(t+h)u - T(t)u\| = \|T(t)(T(h)u - u)\| = \|T(h)u - u\| \to 0 \quad \text{quando } h \to 0,$$

o que mostra que $T(\cdot)u$ é contínua em t, provando (a). Por outro lado, pela continuidade de $T(\cdot)u$ e da convergência $u_n \to u$, segue que

$$\begin{aligned}\|T(t_n)u_n - T(t)u\| &\leq \|T(t_n)(u_n - u)\| + \|T(t_n)u - T(t)u\| \\ &= \|u_n - u\| + \|T(t_n)u - T(t)u\| \to 0,\end{aligned}$$

o que prova o item (b). Para demonstrar (c), fixemos $t \in \mathbb{R}$. Como $u \in D(A)$, segue da definição de gerador infinitesimal

$$\frac{T(h)u - u}{h} \to Au \quad \text{quando } h \to 0.$$

Assim, pela continuidade de $T(t)$,

$$\frac{T(h)(T(t)u) - T(t)u}{h} = T(t)\left(\frac{T(h)u - u}{h}\right) \to T(t)Au \quad \text{quando } h \to 0,$$

o que mostra que $T(t)u \in D(A)$ com

$$AT(t)u = T(t)Au.$$

Como consequência, $T(\cdot)u \in C(\mathbb{R}, D(A))$, pois as funções $T(\cdot)u$ e $T(\cdot)Au$ são contínuas. De fato, para qualquer sequência $t_n \to t$, tem-se

$$\begin{aligned}\|T(t_n)u - T(t)u\|_{D(A)}^2 &= \|T(t_n)u - T(t)u\|^2 + \|AT(t_n)u - AT(t)u\|^2 \\ &= \|T(t_n)u - T(t)u\|^2 + \|T(t_n)Au - T(t)Au\|^2 \to 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, observando que

$$\frac{d}{dt}T(t)u = \lim_{h\to 0} \frac{T(t+h)u - T(t)u}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)(T(t)u) - T(t)u}{h} = T(t)Au,$$

concluímos que $T(\cdot)u \in C^1(\mathbb{R}, H)$, em virtude da continuidade de $T(\cdot)Au$. Finalmente, combinando o Teorema Fundamental do Cálculo A.3 com (2.1), obtemos (2.2). □

Analogamente ao Teorema de Hille-Yosida, o Teorema de Stone, enunciado abaixo, estabelece condições necessárias e suficientes para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um grupo de operadores unitários.

Teorema 2.3 (Stone, [23, Teorema 10.8])**.** *Assuma que H é um espaço de Hilbert complexo e A um operador linear. Então A é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores unitários em H se, e somente se, iA é auto-adjunto.*

Demonstração. Suponha que A seja o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores unitários $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ em H. Em particular, A é densamente definido, fechado e $-A$ é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo

$$\{T(-t)\}_{t\geq 0} = \{T^{-1}(t)\}_{t\geq 0} = \{T(t)^*\}_{t\geq 0}. \tag{2.3}$$

Afirmação 1. *A^* é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo* (2.3).

Para verificar essa afirmação, aplicaremos o Teorema de Hille-Yosida para mostrar que A^* gera um C_0-semigrupo e, em seguida, provaremos que tal semigrupo coincide com o descrito em (2.3). Inicialmente, pelo Lema 1.1-(a)-(f), sabe-se que A^* é um operador fechado e densamente definido. Por outro lado, uma vez que A é o gerador de um C_0-semigrupo de contração, o Teorema de Hille-Yosida implica que, para todo $\lambda > 0$, o resolvente $R(\lambda, A)$ é um operador linear e limitado, com

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \lambda^{-1}.$$

Como $R(\lambda, A)$ é densamente definido, injetivo e tem imagem, $D(A)$, densa em H, segue do Lema 1.1-(d) que $R(\lambda, A)^*$ é invertível e que

$$\left(R(\lambda, A)^*\right)^{-1} = \left(R(\lambda, A)^{-1}\right)^* = (\lambda I - A)^* = \lambda I - A^*.$$

Portanto, para todo $\lambda > 0$, o operador $\lambda I - A^*$ é invertível e

$$R(\lambda, A^*) = R(\lambda, A)^* \in \mathcal{L}(H).$$

Além disso, pela propriedade (1.5), temos

$$\|R(\lambda, A^*)\| = \|R(\lambda, A)^*\| = \|R(\lambda, A)\| \leq \lambda^{-1}.$$

Dessa forma, as hipóteses do Teorema de Hille–Yosida estão satisfeitas, o que implica que A^* é o gerador de um C_0-semigrupo contração, dado por

$$S(t)u = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(A^*)_\lambda}u, \quad \forall u \in H, \tag{2.4}$$

onde $(A^*)_\lambda$ é a aproximação de Yosida de A^*. Por outro lado, como A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de contração $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, podemos escrever

$$T(t)u = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}u, \quad \forall u \in H, \tag{2.5}$$

onde A_λ é a aproximação de Yosida de A. Se aplicamos a definição do operador exponencial juntamente com a propriedade (1.6), resulta

$$\left(e^{tA_\lambda}\right)^* = e^{t(A_\lambda)^*}.$$

Ademais, a definição da aproximação de Yosida revela que

$$(A_\lambda)^* = \left(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I\right)^* = \lambda^2 R(\lambda, A)^* - \lambda I = \lambda^2 R(\lambda, A^*) - \lambda I = (A^*)_\lambda.$$

Combinando essas duas expressões, obtemos

$$\left(e^{tA_\lambda}\right)^* = e^{t(A^*)_\lambda}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda > 0.$$

Logo, pela definição do operador adjunto (1.5), temos

$$\left(e^{tA_\lambda}u, v\right) = \left(u, e^{t(A^*)_\lambda}v\right), \quad \forall u, v \in H,\ \lambda > 0.$$

Passando ao limite quando $\lambda \to \infty$ e usando a continuidade do produto interno, junto com os limites (2.4) e (2.5), obtemos

$$(T(t)u, v) = (u, S(t)v), \quad \forall u, v \in H,\ t \in \mathbb{R}.$$

Assim, pela unicidade do operador adjunto, segue que $S(t) = T(t)^*$, mostrando que A^* é o gerador do semigrupo descrito em (2.3), provando a afirmação. ■

Para concluir a demonstração, observe que $-A$ e A^* são geradores infinitesimais do mesmo semigrupo. Portanto, pela unicidade do gerador, segue que $A^* = -A$, o que implica que iA é auto-adjunto (ver o item (c) do Lema 1.1).

Reciprocamente, suponhamos que iA seja auto-adjunto. Nesse caso, temos $A^* = -A$. Em particular, A é densamente definido, fechado, e, pela definição do adjunto,

$$-(A^*u, u) = (Au, u) = (u, A^*u) = -(u, Au), \quad \forall u \in D(A).$$

Consequentemente,

$$2\mathrm{Re}(Au, u) = (Au, u) + (u, Au) = 0 \qquad \text{e} \qquad 2\mathrm{Re}(A^*u, u) = (A^*u, u) + (u, A^*u) = 0,$$

ou seja,

$$\mathrm{Re}(Au, u) = \mathrm{Re}(A^*u, u) = 0, \quad \forall u \in D(A).$$

Dessa forma, os operadores A e $-A$, bem como seus adjuntos A^* e $(-A)^* = -A^*$, são dissipativos. Logo, o Lema 1.1-(e) garante que $R(I - (\pm A)) = H$. Portanto, tanto A quanto $-A$ satisfazem as hipóteses do Teorema de Lumer-Phillips, o que garante que são geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de contração, os quais denotamos por $\{S^+(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S^-(t)\}_{t\geq 0}$, respectivamente.

Afirmação 2. *Para todo $s \geq 0$, tem-se $S^-(s)S^+(s) = S^+(s)S^-(s) = I$.*

De fato, o caso $s = 0$ é trivial. Suponha então que $s > 0$ e seja $u \in D(A)$ arbitrário. Pelo Lema 2.1, a função $v(\cdot) = S^+(\cdot)u$ é continuamente diferenciável e satisfaz $v' = Av$. Definindo $w(t) = v(s-t)$ para todo $t \in [0, s]$, temos

$$w'(t) = -v'(s-t) = -Av(s-t) = -Aw(t), \quad \text{para todo } \; t \in [0, s].$$

Assim, w é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} w'(t) = -Aw(t), & \text{para todo } t \in [0, s] \\ w(0) = S^+(s)u. \end{cases}$$

Como esse problema admite solução única, dada pelo semigrupo gerado por $-A$, segue

$$w(t) = S^-(t)S^+(s)u, \quad \text{para todo } \; t \in [0, s].$$

Em particular, tomando $t = s$, obtemos

$$S^-(s)S^+(s)u = w(s) = v(0) = u, \quad \forall u \in D(A).$$

Por fim, como $D(A)$ é denso em H, a identidade acima implica que $S^-(s)S^+(s) = I$. Um raciocínio análogo mostra que $S^+(s)S^-(s) = I$, o que conclui a prova da afirmação. ∎

A seguir, nosso objetivo é mostrar que a família de operadores lineares limitados dados por

$$T(t) = \begin{cases} S^+(t), & \text{se } t \geq 0 \\ S^-(-t), & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

é um C_0-grupo de operadores unitários em H, tendo A como seu gerador infinitesimal. Para isso, começamos observando que $T(0) = I$. Para verificar a propriedade de grupo (2), note que os casos em que $t, s \geq 0$ e $t, s < 0$ são imediatos. Já no caso misto, quando $t \geq 0$, $s < 0$ e $t + s \geq 0$, aplicamos a Afirmação 2 para obter

$$T(t+s) = S^+(t+s) = S^+(t+s)S^+(-s)S^-(-s) = S^+(t)S^-(-s) = T(t)T(s).$$

Os demais casos mistos seguem por argumentos análogos. Quanto à continuidade do grupo no ponto zero, esta decorre diretamente da continuidade dos semigrupos S^+ e S^- em zero. De fato, para todo $u \in H$, temos

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)u - u\| = \lim_{t \to 0^+} \|S^+(t)u - u\| = 0,$$
$$\lim_{t \to 0^-} \|T(t)u - u\| = \lim_{t \to 0^+} \|S^-(t)u - u\| = 0.$$

Além disso, A é o gerador infinitesimal do C_0-grupo $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, como se pode verificar pelos limites unilaterais:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)u-u}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{S^+(h)u-u}{h}=Au,$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{T(h)u-u}{h}=-\lim_{h\to 0^+}\frac{S^-(h)u-u}{h}=-(-Au)=Au.$$

Por fim, para mostrar que cada operador $T(t)$ é unitário, basta provar que é uma isometria sobrejetiva (veja a Seção 1.1). A sobrejetividade decorre diretamente da Afirmação 2. Já para provar que $T(t)$ é uma isometria, consideremos um vetor arbitrário $u \in D(A)$. Pelo Lema 2.2-(c) e pelo fato de A ser anti-adjunto, temos

$$\frac{d}{dt}\|T(t)u\|^2 = 2\mathrm{Re}((T(t)u)', T(t)u) = 2\mathrm{Re}(AT(t)u, T(t)u) = 0.$$

Isto implica que a função $\|T(\cdot)u\|$ é constante em $\mathbb{R}$, e assim

$$\|T(t)u\| = \|u\|, \quad \forall u \in D(A).$$

Finalmente, a densidade de $D(A)$ em H e a continuidade de $T(t)$, permitem estender essa igualdade para todo $u \in H$. Portanto, $T(t)$ é uma isometria. □

Para concluir esta seção, consideremos o seguinte problema de valor inicial associado à equação de evolução abstrata linear homogênea de primeira ordem:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{LH}$$

Teorema 2.4 (Problema homogêneo)**.** *Suponha que A seja o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores unitários $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Então, para todo dado inicial $\varphi \in D(A)$, o problema* (LH) *possui uma única solução clássica*

$$u \in C(\mathbb{R}, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}, H),$$

que é dada pela expressão $u(t) = T(t)\varphi$. Além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|u(t)\| = \|\varphi\| \qquad e \qquad \|u'(t)\| = \|A\varphi\|. \tag{2.6}$$

Em particular, u é lipschitziana, com

$$\|u(t) - u(s)\| \le \|A\varphi\|\,|t-s|, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Demonstração. Sabemos pelo Lema 2.2-(c) que a função $u(t) = T(t)\varphi$ é uma solução do problema (LH). Para provar a unicidade, sejam u_1 e u_2 duas soluções do problema, e seja $w = u_1 - u_2$. Então

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t), & \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema de Stone (Teorema 2.3), o operador A é anti-adjunto, o que implica que

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = 2\text{Re}(w'(t), w(t)) = 2\text{Re}(Aw(t), w(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Isso mostra que a função $\|w(\cdot)\|$ é constante e, portanto, $\|w(t)\| = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e a unicidade segue. Por outro lado, (2.6) decorre do fato de que $T(t)$ é uma isometria e do Lema 2.2-(c), pois

$$\|u(t)\| = \|T(t)\varphi\| = \|\varphi\| \quad \text{e} \quad \|u'(t)\| = \|Au(t)\| = \|AT(t)\varphi\| = \|T(t)A\varphi\| = \|A\varphi\|.$$

Por fim, aplicando a Desigualdade do Valor Médio [13, Corolário 3.1], obtemos (2.7). $\square$

2.2 Equações lineares não homogêneas

Nesta seção, estudamos a equação de evolução linear não homogênea:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{LNH}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto ao qual o ponto 0 é aderente, $f : \bar{I} \to H$ uma função, $\varphi \in H$ um dado inicial, e A um operador anti-adjunto no espaço de Hilbert complexo H, o qual, pelo Teorema 2.3, gera um C_0-grupo de operadores unitários $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Começamos estabelecendo a noção de três diferentes tipos de soluções que serão explorados ao longo dessa dissertação.

Definição 2.1. Dado $\varphi \in H$, uma função $u : I \to H$ é dita ser:

(a) **Solução clássica** do problema (LNH) em I com dado inicial φ se

$$u \in C(\bar{I}, D(A)) \cap C^1(\bar{I}, H)$$

e satisfaz (LNH) para todo $t \in \bar{I}$.

(b) **Solução forte** do problema (LNH) em I com dado inicial φ se

$$u \in L^\infty(I, D(A)) \cap W^{1,\infty}(I, H)$$

e satisfaz (LNH) para quase todo $t \in I$.

(c) **Solução generalizada** do problema (LNH) em I com dado inicial φ se

$$u(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in \bar{I}.$$

Observação 2.2. (i) A condição $u(0) = \varphi$ na definição (b) está bem posta, pois, pelo Corolário A.4, temos $W^{1,\infty}(I,H) \hookrightarrow C_b(\bar{I},H)$, o que garante a continuidade de u.

(ii) Se I é limitado, então toda solução clássica é também solução forte.

(iii) Para $f \in L^1_{\text{loc}}(\bar{I},H)$, a solução generalizada existe e é contínua, por ser a soma de duas funções contínuas, conforme estabelecido nos Lemas 2.2 e 2.3. Além disso, é limitada em qualquer subintervalo compacto $J \subset \bar{I}$, com

$$\|u(t)\| \leq \|\varphi\| + \|f\|_{L^1(J,H)}, \quad \text{para todo } t \in J, \text{ quando } J \ni 0.$$

No que segue, para simplificar a notação, assumiremos I fechado. Assim como ocorre nas equações diferenciais ordinárias, a solução generalizada corresponde à fórmula da variação dos parâmetros, também chamada fórmula de Duhamel, associada à equação (LNH). O próximo resultado estabelece que toda solução clássica é uma solução generalizada.

Teorema 2.5. *Sejam $f \in C(I,H)$ e $\varphi \in D(A)$. Então, toda solução clássica do problema (LNH) é também uma solução generalizada. Em particular, o problema admite, no máximo, uma solução clássica.*

Demonstração. Seja u solução clássica do problema (LNH) em I. Fixado $t \in I$, definimos a função

$$v(s) = T(t-s)u(s), \quad \text{para todo } s \in I.$$

Para cada $s \in I$,

$$\frac{v(s+h)-v(s)}{h} = T(t-s-h)\left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{T(h)-I}{h}u(s)\right).$$

Aplicando o Lema 2.2-(b), que permite a passagem do limite tanto no parâmetro do grupo quando nos vetores aplicados, podemos tomar o limite quando $h \to 0$ nesta expressão, o que resulta em

$$v'(s) = T(t-s)(u'(s) - Au(s)) = T(t-s)f(s), \quad \forall s \in I.$$

Mas como $T(t-\cdot)f(\cdot) \in C(\bar{I},H)$, o Teorema Fundamental do Cálculo A.3 implica

$$v(t) = v(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

o que, por sua vez, leva à

$$u(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in I,$$

demonstrando que u é uma solução generalizada. Além disso, como o lado direito da expressão acima independe de u, a unicidade da solução clássica segue imediatamente. $\square$

Convém destacar que as soluções generalizadas não são, em geral, soluções clássicas, mesmo quando f é contínua. Para ilustrar esse caso temos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. Suponha que $D(A)$ seja um subespaço próprio denso de H. Fixado $t_0 \in \mathbb{R}$ não nulo, como $T(t_0)$ é bijetiva, existe um vetor $u \in H$ tal que $T(t_0)u \notin D(A)$. Definamos então $f(t) := T(t)u$, que é claramente contínua. Assim, a solução generalizada do problema (LNH), com dado inicial $\varphi = 0$, é por definição,

$$u(t) = T(t)0 + \int_0^t T(t-s)T(s)uds = \int_0^t T(t)uds = t\,T(t)u, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

a qual não é uma solução clássica, pois, por hipótese temos $u(t_0) \notin D(A)$.

O exemplo anterior evidencia que a mera continuidade de f não basta para garantir a existência de uma solução clássica. Dessa maneira, é preciso impor condições adicionais sobre f para que uma solução generalizada possa, de fato, ser uma solução clássica. O principal desafio para estabelecer essa equivalência está em assegurar a regularidade da função

$$F(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds, \quad \text{para todo } t \in I. \tag{2.8}$$

Iniciamos nosso estudo sobre as propriedades da função F mostrando a sua continuidade.

Lema 2.3. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer. Se $f \in L^1_{\text{loc}}(I, H)$, então F é contínua.*

Demonstração. Fixado $t \in I$, para todo h suficientemente pequeno e com sinal apropriado, tal que $t + h \in I$, temos

$$F(t+h) - F(t) = (T(h) - I)F(t) + \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds.$$

Assim,

$$\|F(t+h) - F(t)\| \leq \|(T(h) - I)F(t)\| + \left| \int_t^{t+h} \|f(s)\|ds \right| \to 0$$

quando $h \to 0$, o que garante a continuidade de F em t. $\square$

O lema a seguir caracteriza a continuidade de F' pela continuidade de AF. Antes disso, recordemos que o domínio $D(A)$ é considerado com a topologia induzida pela norma definida em (1.2). Deste modo, $F \in C(I, D(A))$ se, e somente se, $F, AF \in C(I, H)$.

Lema 2.4. *Assuma que $f \in C(I,H)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $F \in C^1(I,H)$;

(b) $F \in C(I,D(A))$.

Nesse caso, $F' = AF + f$.

Demonstração. Fixado $t \in I$, temos

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)F(t) = \frac{F(t+h)-F(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)f(t)ds \\ - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)[f(t+h-s)-f(t)]ds.$$

Pela continuidade de f e o Teorema A.6, a segunda parcela do lado direito converge para $f(t)$ quando $h \to 0$. Quanto à terceira parcela, pela estimativa

$$\left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(s)[f(t+h-s)-f(t)]ds\right\| \leq \sup_{\tau\in[t;t+h]} \|f(\tau)-f(t)\|,$$

segue que esta converge para zero quando $h \to 0$, devido à continuidade uniforme de f em subconjuntos compactos de I. Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}F(t) = \lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - f(t).$$

Assim, a existência da derivada $F'(t)$ equivale à existência de $AF(t)$, com

$$AF(t) = F'(t) - f(t).$$

Além disso, a continuidade de F' é equivalente à continuidade de AF, o que garante a equivalência entre os itens (a) e (b). □

Teorema 2.6. *Assuma que $f \in C(I,H)$. Então, o problema* (LNH) *admite uma solução clássica para cada dado inicial $\varphi \in D(A)$ se, e somente se, $F \in C^1(I,H)$. Nesse caso, a solução generalizada é a única solução clássica.*

Demonstração. Suponha que u seja uma solução clássica do problema. Então, $u \in C^1(I,H)$ e, conforme o Teorema 2.5, pode ser escrita como

$$u(t) = T(t)\varphi + F(t), \quad \text{para todo } t \in I, \tag{2.9}$$

de modo que $F \in C^1(I,H)$, por ser a diferença de funções da mesma classe de regularidade. Reciprocamente, suponha que F seja de classe $C^1(I,H)$. Pelo Lema 2.4, segue que

$$F \in C(I,D(A)) \qquad \text{e} \qquad F' = AF + f. \tag{2.10}$$

Definindo u como em (2.9), segue do Lema 2.2 e de (2.10), que $u \in C(I, D(A)) \cap C^1(I, H)$, com $u(0) = \varphi$ e derivada

$$u' = AT(\cdot)\varphi + F' = AT(\cdot)\varphi + AF + f = Au + f \quad \text{em } I.$$

Isto mostra que o problema (LNH) admite uma solução clássica. Finalmente, a unicidade decorre do Teorema 2.5. □

A primeira consequência do teorema anterior é o seguinte resultado: Caso se conheça a priori que a solução generalizada pertence a $C(I, D(A))$, então ela é necessariamente a única solução clássica do problema.

Corolário 2.1. *Assuma que $f \in C(I, H)$. Uma função $u \in C(I, D(A))$ é solução clássica do problema (LNH) com dado inicial $\varphi \in D(A)$ se, e somente se, é solução generalizada.*

Demonstração. Já sabemos que toda a solução clássica é, em particular, uma solução generalizada. Para demonstrar a recíproca, suponha que $u \in C(I, D(A))$ seja uma solução generalizada. Pelo Lema 2.2-(c), segue que

$$F = u - T(\cdot)\varphi \in C(I, D(A)).$$

Assim, pelo Lema 2.4, $F \in C^1(I, H)$. Dessa forma, o Teorema 2.6 garante que u coincide com a única solução clássica do problema (LNH). □

Corolário 2.2. *Assuma que $f \in C(I, H) \cap L^1_{\text{loc}}(I, D(A))$. Então, para todo $\varphi \in D(A)$, o problema (LNH) admite uma única solução clássica.*

Demonstração. Como $f(s) \in D(A)$ para quase todo $s \in I$, o Lema 2.2-(c) garante que

$$T(t-s)f(s) \in D(A) \qquad \text{e} \qquad T(t-s)Af(s) = AT(t-s)f(s),$$

para quase todo $s \in I$ e todo $t \in I$. A integrabilidade de Af em intervalos compactos, combinada com o fato de que A é fechado, nos permite usar o Teorema A.4 para deduzir que

$$AF(t) = \int_0^t AT(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds, \quad \forall t \in I,$$

o que mostra que $AF(t)$ está bem definida em I e define uma função contínua (cf. Lema 2.3, considerando f como Af). Como F é contínua, conclui-se que $F \in C(I, D(A))$, e o restante da argumentação decorre diretamente do Lema 2.4 e do Teorema 2.6. □

Corolário 2.3. *Seja I um intervalo aberto e suponha que $f \in W^{1,1}(I, H)$. Então, para todo $\varphi \in D(A)$, o problema (LNH) admite uma única solução clássica.*

Demonstração. Pelo Corolário A.4, temos $f \in C(\bar{I}, H)$, de modo que F é contínua em $\bar{I}$. Fixado $t \in \bar{I}$, temos

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}ds + T(h)\left(\frac{1}{h}\int_0^h T(t-s)f(s)ds\right).$$

Note que a segunda parcela do lado direito converge para $T(t)f(0)$ quando $h \to 0$, em virtude do Lema 2.2-(b) e da convergência

$$\frac{1}{h}\int_0^h T(t-s)f(s)ds \to T(t)f(0),$$

a qual decorre da continuidade de f e do Teorema A.6. Quanto à primeira parcela, o Corolário A.5 garante que

$$\frac{f(t+h-\cdot)-f(t-\cdot)}{h} \to f'(t-\cdot) \quad \text{em} \quad L^1((0;t), H) \quad \text{quando } h \to 0,$$

permitindo concluir que

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t T(s)\ \frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}ds - \int_0^t T(s)f'(t-s)ds \right\| \\ \leq \left\| \frac{f(t+h-\cdot)-f(t-\cdot)}{h} - f'(t-\cdot) \right\|_{L^1((0;t),H)} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

ou seja, a primeira parcela converge para

$$\int_0^t T(s)f'(t-s)ds = \int_0^t T(t-s)f'(s)ds.$$

Combinando os resultados anteriores, obtemos que F é derivável em t, com

$$F'(t) = \int_0^t T(t-s)f'(s)ds + T(t)f(0).$$

Como f' é integrável, a função F' é contínua em $\bar{I}$, e portanto $F \in C^1(\bar{I}, H)$. Assim, o resultado segue como consequência direta do Teorema 2.6. □

O corolário a seguir é crucial na regularização de soluções generalizadas.

Corolário 2.4. *Seja I un intervalo aberto limitado e $f : \bar{I} \to H$ uma função lipschitziana. Então, para todo dado inicial $\varphi \in D(A)$, o problema* (LNH) *admite uma única solução clássica.*

Demonstração. Como f é lipschitziana no compacto $\bar{I}$, f é contínua e limitada. Assim, pelo Corolário A.7, $f \in W^{1,\infty}(I, H)$, o que implica, em particular, que $f \in W^{1,1}(I, H)$. Com isso, o resultado decorre diretamente do Corolário 2.3. □

Passamos agora a examinar as condições sob as quais é possível obter soluções fortes. Embora os resultados que se seguem sejam análogos aos obtidos anteriormente, a principal diferença reside na demonstração de que a função F, definida em (2.8), é lipschitziana, garantindo assim que $F \in W^{1,\infty}(I, H)$. Considerando I como um intervalo aberto, iniciamos com um resultado que mostra que toda solução forte coincide com a solução generalizada.

Teorema 2.7. *Suponha que $f \in L^\infty(I, H)$ e $\varphi \in D(A)$. Então, toda solução forte do problema* (LNH) *é também uma solução generalizada. Em particular, o problema admite, no máximo, uma solução forte.*

Demonstração. Seja u solução forte do problema (LNH) em I. Em particular, u é contínua em $\bar{I}$. Consideremos $t \in \bar{I}$ e definamos

$$v(s) = T(t-s)u(s), \quad \text{para todo } s \in \bar{I},$$

de modo que $v \in L^\infty(I, H)$. Para todo $s, s+h \in I$, temos

$$v(s+h) - v(s) = T(t-s-h)\Big(u(s+h) - u(s) - (T(h) - I)u(s)\Big). \tag{2.11}$$

Tomando norma em ambos os lados e fazendo uso de que $u \in W^{1,\infty}(I, H)$ e $u(s) \in D(A)$ para quase todo s, juntamente com o Lema 2.2-(c), obtemos

$$\begin{aligned} \|v(s+h) - v(s)\| &\leq \|u(s+h) - u(s)\| + \|(T(h) - I)u(s)\| \\ &\leq \|u'\|_{L^\infty(I,H)}\,|h| + \left\| \int_0^h T(\sigma)Au(s)\,d\sigma \right\| \\ &\leq \Big(\|u'\|_{L^\infty(I,H)} + \|Au(s)\|\Big)\,|h|, \quad \text{q.t.p. } s, s+h \in I. \end{aligned}$$

Mas como $Au(s) = u'(s) - f(s)$ para quase todo s, segue que

$$\|v(s+h) - v(s)\| \leq \Big(2\|u'\|_{L^\infty(I,H)} + \|f\|_{L^\infty(I,H)}\Big)\,|h|, \quad \text{q.t.p. } s, s+h \in I.$$

Sendo v uma função limitada e lipschitziana em quase toda parte, o Corolário A.7 implica que $v \in W^{1,\infty}(I, H)$. Além disso, dividindo (2.11) por h e tomando o limite quando h tende a zero, obtemos

$$v'(s) = T(t-s)(u'(s) - Au(s)) = T(t-s)f(s), \quad \text{q.t.p. } s \in I.$$

Em consequência, pelo Teorema A.9, segue que

$$v(t) = v(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

ou ainda,

$$u(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

donde se conclui que u é uma solução generalizada, e que ela é única. $\square$

Lema 2.5. *Assuma que $f \in L^\infty(I, H)$ e seja F a função definida em (2.8). Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $F \in W^{1,\infty}(I, H)$*;*

(b) $F \in L^\infty(I, D(A))$*.*

Neste caso, $F'(t) = AF(t) + f(t)$ para quase todo $t \in I$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Para cada $t \in I$, podemos escrever

$$\frac{T(h)-I}{h}F(t) = \frac{F(t+h)-F(t)}{h} - T(h)\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t-s)f(s)\,ds\right). \tag{2.12}$$

Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue A.6, temos

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t-s)f(s)ds \to f(t) \quad \text{quando } h \to 0, \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

Em vista disso, e aplicando o Lema 2.2-(b), conclui-se que a segunda parcela do lado direito de (2.12) converge para $f(t)$ para quase todo t, quando $h \to 0$. Por outro lado, como F é derivável em quase todo ponto, ao se passar ao limite (2.12) quando $h \to 0$, resulta

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}F(t) = F'(t) - f(t), \quad \text{q.t.p. } t \in I,$$

de onde se obtém que $F(t) \in D(A)$ para quase todo $t \in I$ e que $AF = F' - f \in L^\infty(I, X)$. Desta forma, $F \in L^\infty(I, D(A))$, uma vez que

$$\|F(t)\|_{D(A)}^2 = \|F(t)\|^2 + \|AF(t)\|^2 \leq \|F\|_{L^\infty(I,H)}^2 + \|AF\|_{L^\infty(I,H)}^2, \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

(b) $\Rightarrow$ (a). Para quaisquer $t, t+h \in I$, temos

$$F(t+h) - F(t) = (T(h)-I)F(t) + \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds.$$

Tomando norma em ambos os lados e fazendo uso de que $F(t) \in D(A)$ para quase todo ponto $t \in I$, juntamente com o Lema 2.2-(c), obtemos, para quase todo $t, t+h \in I$,

$$\begin{aligned}\|F(t+h) - F(t)\| &\leq \|(T(h)-I)F(t)\| + \left|\int_t^{t+h}\|f(s)\|ds\right| \\ &\leq \left\|\int_0^h T(s)AF(t)\,ds\right\| + \|f\|_{L^\infty(I,H)}\,|h|,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\|F(t+h)-F(t)\| \leq \left(\|AF\|_{L^\infty(I,H)} + \|f\|_{L^\infty(I,H)}\right)|h|,$$

demonstrando que F é lipschitziana q.t.p. e, portanto, $F \in W^{1,\infty}(I,H)$. $\square$

Teorema 2.8. *Assuma que $f \in L^\infty(I,H)$. Então, o problema (LNH) admite uma solução forte para cada dado inicial $\varphi \in D(A)$ se, e somente se, a função F definida em (2.8) pertence a $W^{1,\infty}(I,H)$. Nesse caso, a solução generalizada é a única solução forte.*

Demonstração. Primeiramente, observe que $T(\cdot)\varphi \in L^\infty(I,D(A)) \cap W^{1,\infty}(I,H)$, pois, pelo Lema 2.2-(c), sabemos que esta é uma função de classe C^1 com derivada $T(\cdot)A\varphi$, ambas uniformemente limitadas, e que

$$\|T(t)\varphi\|^2_{D(A)} = \|T(t)\varphi\|^2 + \|AT(t)\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|T(t)A\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|A\varphi\|^2.$$

Suponha que u seja uma solução forte do problema (LNH). Nesse caso, $u \in W^{1,\infty}(I,H)$ e, conforme o Teorema 2.7, pode-se escrever

$$u(t) = T(t)\varphi + F(t), \quad \text{para todo } t \in I, \tag{2.13}$$

de modo que $F \in W^{1,\infty}(I,H)$. Reciprocamente, suponha que F pertence a $W^{1,\infty}(I,H)$. Pelo Lema 2.5, temos

$$F \in L^\infty(I,D(A)) \cap W^{1,\infty}(I,H) \qquad \text{e} \qquad F'(t) = AF(t) + f(t), \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

Definindo u como em (2.13), segue que $u \in L^\infty(I,D(A)) \cap W^{1,\infty}(I,H)$, com $u(0) = \varphi$ e

$$u'(t) = AT(t)\varphi + F'(t) = Au(t) + f(t), \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

Consequentemente, u é uma solução forte do problema (LNH). $\square$

Como consequência do teorema anterior, se a solução generalizada é, a priori, limitada na norma de $D(A)$, então ela coincide com a solução forte, que, por sua vez, é única. Mais precisamente:

Corolário 2.5. *Assuma que $f \in L^\infty(I,H)$. Uma função $u \in L^\infty(I,D(A))$ é solução forte do problema (LNH) com dado inicial $\varphi \in D(A)$ se, e somente se,*

$$u(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \textit{q.t.p. } t \in I. \tag{2.14}$$

Demonstração. Já se sabe que toda solução forte é, em particular, uma solução generalizada, de modo que (2.14) é automaticamente satisfeita. Para demonstrar a recíproca, suponha que $u \in L^\infty(I, D(A))$ satisfaz (2.14) e note que

$$F = u - T(\cdot)\varphi \in L^\infty(I, D(A)).$$

Aplicando o Lema 2.5, obtemos que $F \in W^{1,\infty}(I, H)$. Assim, pelo Teorema 2.8, o problema (LNH) admite uma única solução forte, que coincide com a solução generalizada. Como u satisfaz (2.14), conclui-se que u coincide com essa solução forte, a menos de representante.
$\square$

Corolário 2.6. *Suponha que $f \in W^{1,\infty}(I, H)$ e seja I um intervalo limitado. Então, para todo dado inicial $\varphi \in D(A)$, o problema* (LNH) *admite uma única solução forte.*

Demonstração. Para quaisquer $t, t+h \in I$, temos

$$F(t+h) - F(t) = \int_0^t T(s)[f(t+h-s) - f(t-s)]ds + \int_0^h T(t+h-s)f(s)ds.$$

Assim, para quase todo $t, t+h \in I$,

$$\begin{aligned}\|F(t+h) - F(t)\| &\leq \left|\int_0^t \|f(t+h-s) - f(t-s)\|\, ds\right| + \left|\int_0^h \|f(s)\|\, ds\right| \\ &\leq \left|\int_0^t \|f'\|_{L^\infty(I,H)}\, |h|\, ds\right| + \|f\|_{L^\infty(I,H)}\, |h| \\ &\leq \left(\|f'\|_{L^\infty(I,H)}\, |I| + \|f\|_{L^\infty(I,H)}\right) |h|,\end{aligned}$$

demonstrando que F é lipschitziana q.t.p. e, portanto, $F \in W^{1,\infty}(I, H)$. Assim, o resultado decorre diretamente do Teorema 2.8. $\square$

2.3 Problemas semilineares

Nesta seção, estudamos a equação de evolução semilinear:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g(u(t)) \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{PS}$$

onde A é um operador anti-adjunto no espaço de Hilbert complexo H, o qual, pelo Teorema 2.3, gera um C_0-grupo de operadores unitários $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Nosso objetivo inicial será analisar a existência da solução generalizada associada ao problema, dada por

$$u(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds, \tag{2.15}$$

e, em seguida, utilizando os resultados da seção anterior, procederemos à regularização da referida solução. Note que, mesmo sob a suposição de continuidade de g, o problema (PS) pode não admitir solução generalizada e, em certos casos, nem mesmo possuir solução global, isto é, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, iniciamos nosso estudo considerando um caso elementar no qual a existência global está assegurada. Em seguida, estabelecemos condições que garantem a existência de soluções locais e discutimos os cenários em que tais soluções podem ser prolongadas globalmente ou, ao contrário, apresentar explosão em tempo finito.

Começamos com uma desigualdade que serve para garantir a unicidade da solução.

Lema 2.6 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo contendo a origem e $\varphi \in C(I, \mathbb{R})$ uma função não negativa. Suponha que existam constantes não negativas a, b tais que*

$$\varphi(t) \leq a + b \left| \int_0^t \varphi(s)ds \right|, \quad \forall t \in I.$$

Então, para todo $t \in I$,

$$\varphi(t) \leq a\, e^{b|t|}. \tag{2.16}$$

Em particular, se $a = 0$, então $\varphi = 0$.

Demonstração. Considere a função

$$\psi(t) = a + b \left| \int_0^t \varphi(s)ds \right|, \quad \forall t \in I,$$

que, por hipótese, satisfaz $\varphi \leq \psi$. Como φ é não negativa,

$$\psi(t) = a + b \int_0^t \varphi(s)ds, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Derivando, temos $\psi'(t) = b\varphi(t) \leq b\psi(t)$ e então

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{-bt}\right) = \left(\psi'(t) - b\psi(t)\right) e^{-bt} \leq 0.$$

Isso implica que a função $\psi(\cdot)e^{-b(\cdot)}$ é decrescente no intervalo $[0, \infty) \cap I$. Logo,

$$\varphi(t)e^{-bt} \leq \psi(t)e^{-bt} \leq \psi(0) = a, \quad \text{para todo } t \in I \text{ com } t \geq 0,$$

de onde segue (2.16) para t não negativo.

De modo análogo, temos

$$\psi(t) = a + b \int_t^0 \varphi(s)ds, \quad \text{para } t \leq 0.$$

Derivando, obtemos $\psi'(t) = -b\varphi(t) \geq -b\,\psi(t)$ e portanto

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{bt}\right) = \left(\psi'(t) + b\psi(t)\right) e^{bt} \geq 0,$$

mostrando que a função $\psi(\cdot)e^{b(\cdot)}$ é crescente em $(-\infty, 0] \cap I$. Em particular,

$$\varphi(t)e^{bt} \leq \psi(t)e^{bt} \leq \psi(0) = a, \quad \text{para todo } t \in I \text{ com } t \leq 0,$$

do que segue que (2.16) também é válida para t negativo. $\square$

No que segue, analisamos o caso elementar em que g é uma aplicação lipschitziana.

Teorema 2.9 (Existência e unicidade global)**.** *Seja $g : H \to H$ uma função lipschitziana, isto é, existe uma constante positiva L tal que*

$$\|g(u) - g(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \textit{para todo } u, v \in H.$$

Então, para todo dado inicial $\varphi \in H$, o problema (PS) *admite uma única solução generalizada $u \in C(\mathbb{R}, H)$ que satisfaz* (2.15) *para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Para demonstrar a unicidade, suponha que u e v sejam duas soluções generalizadas do problema (PS). Então

$$\|u(t) - v(t)\| = \left\| \int_0^t T(t-s)(g(u(s)) - g(v(s)))ds \right\| \leq \left| \int_0^t \|g(u(s)) - g(v(s))\| ds \right|,$$

ou ainda,

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L \left| \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds \right|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pela desigualdade de Gronwall, concluímos que $u = v$.

Para provar a existência, escolha uma constante $k > L$ e considere o conjunto

$$E = \left\{ u \in C(\mathbb{R}, H); \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-k|t|} \|u(t)\| < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Banach quando munido com a norma

$$\|u\|_E = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-k|t|} \|u(t)\|.$$

Sobre este espaço, definimos o operador $\Phi : E \to C(\mathbb{R}, H)$ por

$$\Phi u(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Afirmação 1. $\Phi(E) \subset E$.

De fato, seja $u \in E$ arbitrária. Pela continuidade das funções $T(\cdot)\varphi$ e $g(u)$, e tendo em vista o Lema 2.3, temos que $\Phi u \in C(\mathbb{R}, H)$. Por outro lado, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\|\Phi u(t)\| &\leq \|T(t)\varphi\| + \left\| \int_0^t T(t-s)g(u(s))\, ds \right\| \\
&\leq \|\varphi\| + \left\| \int_0^t T(t-s)(g(u(s)) - g(0))\, ds \right\| + \left\| \int_0^t T(t-s)g(0)\, ds \right\| \\
&\leq \|\varphi\| + \left| \int_0^t \|g(u(s)) - g(0)\|\, ds \right| + \left| \int_0^t \|g(0)\|\, ds \right| \\
&\leq \|\varphi\| + L \left| \int_0^t \|u(s)\|\, ds \right| + \|g(0)\|\, |t| \\
&\leq \|\varphi\| + L\, \|u\|_E \left| \int_0^t e^{k|s|} ds \right| + \|g(0)\|\, |t|.
\end{aligned}
$$

Mas como

$$
\int_0^t e^{k|s|} ds = \operatorname{sgn}(t) \left(\frac{e^{k|t|}}{k} - \frac{1}{k} \right),
$$

obtemos

$$
\|\Phi u(t)\| \leq \|\varphi\| + L\, \|u\|_E \left(\frac{e^{k|t|}}{k} - \frac{1}{k} \right) + |t|\, \|g(0)\|.
$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{-k|t|}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
e^{-k|t|}\|\Phi u(t)\| &\leq e^{-k|t|}\|\varphi\| + L\, \|u\|_E \left(\frac{1}{k} - \frac{e^{-k|t|}}{k} \right) + e^{-k|t|}|t|\, \|g(0)\| \\
&\leq \|\varphi\| + \frac{L}{k}\|u\|_E + \sup_{t\in\mathbb{R}} |t| e^{-k|t|}\, \|g(0)\|.
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-k|t|}\|\Phi u(t)\| < \infty,
$$

mostrando a afirmação. ∎

Afirmação 2. $\Phi : E \to E$ *é uma contração.*

De fato, sejam $u, v \in E$ e observe que $u - v \in E$, com

$$
\|u(s) - v(s)\| \leq e^{k|s|}\|u - v\|_E, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.
$$

Segue então que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)(g(u(s)) - g(v(s)))\, ds \right\| \\
&\leq \left| \int_0^t \|g(u(s)) - g(v(s))\|\, ds \right| \\
&\leq L \left| \int_0^t \|u(s) - v(s)\|\, ds \right| \\
&\leq L\|u - v\|_E \left| \int_0^t e^{k|s|} ds \right| \\
&= L\|u - v\|_E \left(\frac{e^{k|s|}}{k} - \frac{1}{k} \right).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$e^{-k|t|}\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\| \leq L\|u - v\|_E \left(\frac{1}{k} - \frac{e^{-k|t|}}{k}\right) \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_E.$$

Tomando o supremo em $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\|_E \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_E.$$

Como $k > L$, segue que Φ é uma contração em E, o que conclui a prova da afirmação. ■

Para finalizar, aplicamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach [7, Teorema 5.7], que assegura a existência de uma função $u \in C(\mathbb{R}, H)$ que satisfaz a equação $\Phi u = u$, o que implica que u é uma solução generalizada do problema (PS). □

Como consequência, a solução depende continuamente dos dados iniciais, ou seja:

Corolário 2.7 (Dependência contínua)**.** *Seja g uma aplicação lipschitziana em H, com constante de Lipschitz L, e sejam u e v as soluções generalizadas globais associadas aos dados inicias φ e ψ, respectivamente. Então*

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t|}\|\varphi - \psi\|, \quad \textit{para todo } t \in I.$$

Demonstração. Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$u(t) - v(t) = T(t)(\varphi - \psi) + \int_0^t T(t-s)(g(u(s)) - g(v(s)))ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|u(t) - v(t)\| &\leq \|\varphi - \psi\| + \left|\int_0^t \|g(u(s)) - g(v(s))\|ds\right| \\ &\leq \|\varphi - \psi\| + L\left|\int_0^t \|u(s) - v(s)\|ds\right|.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, conclui-se o resultado desejado. □

Quando o dado inicial é mais regular, a solução generalizada se torna clássica:

Corolário 2.8 (Regularidade)**.** *Suponha que no Teorema 2.9, g seja lipschitziana com constante de Lipschitz L e $\varphi \in D(A)$. Então, a solução generalizada u é solução clássica.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que u é lipschitziana em partes compactas de $\mathbb{R}$. Para isso, fixamos $h \in \mathbb{R}$ e definimos a função $v(t) = u(t + h)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Observe que v é solução generalizada do problema (PS) com dado inicial $u(h)$, pois satisfaz

$$v(t) = T(t)u(h) + \int_0^t T(t-s)g(v(s))ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim, pelo Corolário 2.7, obtemos

$$\|v(t) - u(t)\| = \|u(t+h) - u(t)\| \le e^{L|t|}\|u(h) - \varphi\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Para estimar o termo à direita, note que, por u ser solução generalizada com dado inicial φ, temos

$$u(h) - \varphi = T(h)\varphi - \varphi + \int_0^h T(s)g(u(s))\,ds = \int_0^h T(s)A\varphi\,ds + \int_0^h T(s)g(u(s))\,ds,$$

onde a última igualdade decorre do Lema 2.2-(c), uma vez que $\varphi \in D(A)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|u(h) - \varphi\| &\le \left\|\int_0^h T(s)A\varphi\,ds\right\| + \left\|\int_0^h T(s)g(u(s))\,ds\right\| \\
&\le \left|\int_0^h \|A\varphi\| ds\right| + \left\|\int_0^h T(s)(g(u(s)) - g(\varphi))ds\right\| + \left\|\int_0^h T(s)g(\varphi)\,ds\right\| \\
&\le \|A\varphi\|\,|h| + \left|\int_0^h \|g(u(s)) - g(\varphi)\|\,ds\right| + \left|\int_0^h \|g(\varphi)\|\,ds\right| \\
&\le (\|A\varphi\| + \|g(\varphi)\|)\,|h| + L\left|\int_0^h \|u(s) - \varphi\|\,ds\right|.
\end{aligned}$$

Daí, aplicando a desigualdade de Gronwall e fazendo $M = \|A\varphi\| + \|g(\varphi)\|$, obtemos

$$\|u(h) - \varphi\| \le M|h|e^{L|h|}, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Esta última expressão, combinada com (2.17) nos permite obter

$$\|u(t+h) - u(t)\| \le Me^{L(|h|+|t|)}\,|h|, \quad \text{para todo } t, h \in \mathbb{R},$$

donde se conclui que u é lipschitziana em partes compactas de $\mathbb{R}$.

Com isso, temos que a composição $f = g(u(\cdot))$ é lipschitziana em qualquer intervalo compacto I contendo a origem. Assim, pelo Corolário 2.4, segue que a solução generalizada u é solução clássica em I. Como I é arbitrário, segue que u é solução clássica em $\mathbb{R}$. □

Até agora, os resultados apresentados nesta seção foram obtidos sob a suposição de que g é lipschitziana. Entretanto, essa condição é bastante restritiva, pois implica que

$$\|g(u)\| \le L\|u\| + \|g(0)\|, \quad \text{para todo } u \in H.$$

Ou seja, impõe que o crescimento de $\|g(u)\|$ seja, no máximo, linear à medida que $\|u\|$ tende ao infinito. Tal restrição exclui diversas aplicações relevantes, o que evidencia a necessidade de considerar hipóteses mais flexíveis, capazes de ampliar a abrangência e a aplicabilidade. A seguir, buscamos enfraquecer significativamente essa hipótese, exigindo que g satisfaça apenas a condição local de Lipschitz.

Diz-se que uma aplicação $g : H \to H$ satisfaz a *condição local de Lipschitz* quando, para todo $M > 0$, existe uma constante $L(M)$ tal que

$$\|g(u) - g(v)\| \leq L(M)\|u - v\|, \quad \forall u, v \in H, \ \|u\|, \|v\| \leq M. \tag{2.18}$$

Em particular, $L(M)$ é uma função não decrescente de M.

Lema 2.7 (Unicidade). *Assuma que g satisfaça a condição local de Lipschitz (2.18), e seja I um intervalo compacto contento a origem. Se $u, v \in C(I, H)$ são duas soluções generalizadas do problema (PS) em I, associadas ao dado inicial $\varphi \in H$, então $u = v$.*

Demonstração. Seja $M = \max\{\|u\|_{C(I,H)}, \|v\|_{C(I,H)}\}$. Para todo $t \in I$, temos

$$\begin{aligned}\|u(t) - v(t)\| &\leq \left\| \int_0^t T(t-s)(g(u(s)) - g(v(s)))\, ds \right\| \\ &\leq \left| \int_0^t \|g(u(s)) - g(v(s))\|\, ds \right| \\ &\leq L(M) \left| \int_0^t \|u(s) - v(s)\|\, ds \right|.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, conclui-se que $u = v$. $\square$

No resultado a seguir, utilizamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para estabelecer a existência local de uma única solução generalizada.

Lema 2.8 (Existência local). *Suponha que g satisfaça a condição local de Lipschitz (2.18) e seja $M > 0$. Então, existe uma constante positiva T_M tal que, para todo dado inicial $\varphi \in H$ com $\|\varphi\| \leq M$, o problema (PS) admite uma única solução generalizada*

$$u \in C([-T_M, T_M], H), \quad \textit{com} \quad \|u\|_{C([-T_M,T_M],H)} \leq 2M + \|g(0)\|.$$

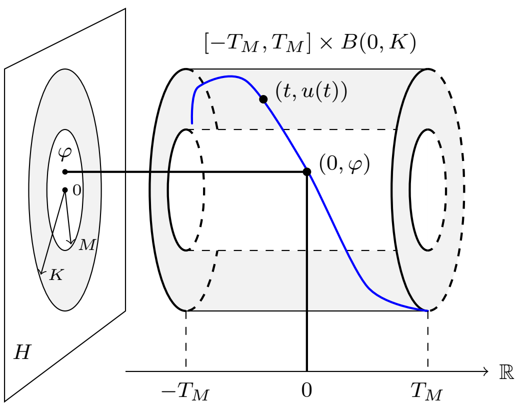

Figura 2.1: Para qualquer dado inicial φ na bola de raio M em H centrada na origem, o gráfico da solução generalizada u está contido no cilindro $[-T_M, T_M] \times B(0, K)$, onde $K = 2M + \|g(0)\|$.

Demonstração. A unicidade decorre diretamente do Lema 2.7. Para mostrar a existência, definimos os números positivos

$$K = 2M + \|g(0)\| \qquad \text{e} \qquad T_M = \frac{1}{2L(K) + 2}.$$

Considere a bola fechada

$$E = \left\{ u \in C([-T_M, T_M], H); \qquad \sup_{t \in [-T_M, T_M]} \|u(t)\| \leq K \right\},$$

equipada com a métrica induzida pela norma usual de $C([-T_M, T_M], H)$, que a torna um espaço métrico completo. Defina, nesse espaço, a aplicação

$$\Phi u(t) := T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds, \quad \forall t \in [-T_M, T_M],\ u \in E.$$

Afirmação 1. $\Phi(E) \subset E$.

De fato, para qualquer $u \in E$, a continuidade de Φu segue diretamente da continuidade das funções $T(\cdot)\varphi$ e $g(u(\cdot))$. Ademais, para todo $s \in [-T_M, T_M]$ temos

$$\begin{aligned} \|g(u(s))\| &\leq \|g(u(s)) - g(0)\| + \|g(0)\| \\ &\leq L(K)\|u(s)\| + \|g(0)\| \\ &\leq L(K)K + \|g(0)\| \end{aligned}$$

Mas como $L(K) = 1/(2T_M) - 1$, resulta que

$$\begin{aligned} \|g(u(s))\| &\leq \left(\frac{1}{2T_M} - 1\right)(2M + \|g(0)\|) + \|g(0)\| \\ &\leq \frac{M}{T_M} + \frac{\|g(0)\|}{2T_M} - 2M \\ &\leq \frac{M + \|g(0)\|}{T_M}. \end{aligned}$$

Logo, $\Phi u \in E$, pois para todo $|t| \leq T_M$,

$$\begin{aligned} \|\Phi u(t)\| &\leq \|T(t)\varphi\| + \left\|\int_0^t T(t-s)g(u(s))\,ds\right\| \\ &\leq \|\varphi\| + \left|\int_0^t \|g(u(s))\|\,ds\right| \\ &\leq M + \frac{M + \|g(0)\|}{T_M} \cdot |t| \\ &\leq K. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Afirmação 2. $\Phi : E \to E$ *é uma contração.*

Em efeito, para quaisquer $u, v \in E$ e todo $|t| \leq T_M$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)(g(u(s)) - g(v(s)))\, ds \right\| \\
&\leq \left| \int_0^t \|g(u(s)) - g(v(s))\|\, ds \right| \\
&\leq L(K) \left| \int_0^t \|u(s) - v(s)\|\, ds \right| \\
&\leq L(K)\, T_M\, \|u - v\|_{C([-T_M, T_M], H)} \\
&\leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{C([-T_M, T_M], H)}
\end{aligned}$$

donde se conclui que Φ é uma contração. ∎

Por fim, aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, concluímos que existe uma função $u \in E$ tal que $\Phi u = u$, o que garante que u é uma solução generaliza do problema (PS) e, pela definição de E, u satisfaz a estimativa desejada. □

O resultado a seguir estabelece a existência de uma única solução maximal, assim como a possível ocorrência de *blow-up* em tempo finito.

Teorema 2.10 (Solução maximal)**.** *Assuma que g satisfaça a condição (2.18). Então existem funções $T_{\max}, T_{\min} : H \to (0, \infty]$ com as seguintes propriedades: Para todo dado inicial $\varphi \in H$, existe uma única função*

$$u \in C\left((-T_{\min}, T_{\max}), H\right), \quad \textit{com} \quad T_{\max} = T_{\max}(\varphi) \;\; \textit{e} \;\; T_{\min} = T_{\min}(\varphi),$$

tal que, para todo intervalo compacto $I \subset (-T_{\min}, T_{\max})$ contendo a origem, u é a única solução generalizada do problema (PS) em I. Além disso,

$$2\,L\left(\|g(0)\| + 2\|u(t)\|\right) + 2 \geq (T_{\max} - t)^{-1}, \quad \textit{para todo} \;\; 0 \leq t < T_{\max}, \tag{2.19}$$

$$2\,L\left(\|g(0)\| + 2\|u(t)\|\right) + 2 \geq (T_{\min} + t)^{-1}, \quad \textit{para todo} \;\; -T_{\min} < t \leq 0. \tag{2.20}$$

Em particular, temos as seguintes alternativas:

(i) $T_{\max} = \infty$ ou, $T_{\max} < \infty$ e $\|u(t)\| \to \infty$ quando $t \to T_{\max}^-$;

(ii) $T_{\min} = \infty$ ou, $T_{\min} < \infty$ e $\|u(t)\| \to \infty$ quando $t \to -T_{\min}^+$.

Demonstração. Dado $\varphi \in H$, definamos os seguintes valores positivos

$$T_{\max}(\varphi) := \sup\left\{\theta > 0;\ \exists\, u \in C([0,\theta], H) \text{ solução generalizada de (PS) em } [0,\theta]\right\},$$

$$T_{\min}(\varphi) := \sup\left\{\theta > 0;\ \exists\, u \in C([-\theta,0], H) \text{ solução generalizada de (PS) em } [-\theta,0]\right\}.$$

Pela unicidade de solução garantida pelo Lema 2.7, é possível construir uma única função $u_1 \in C([0, T_{\max}), H)$ que é solução generalizada do problema (PS) em qualquer subintervalo compacto de $[0, T_{\max})$. Analogamente, existe uma única função $u_2 \in C((-T_{\min}, 0], H)$ que é solução generalizada do problema (PS) em qualquer subintervalo compacto de $(-T_{\min}, 0]$. Assim, a função $u : (-T_{\min}, T_{\max}) \to H$ definida por

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t), & \text{se } 0 \leq t < T_{\max} \\ u_2(t), & \text{se } -T_{\min} < t \leq 0 \end{cases}$$

é contínua e é a única solução generalizada do problema (PS) em qualquer subintervalo compacto de $(-T_{\max}, T_{\min})$ que contenha a origem.

Para provar (2.19), note que o caso $T_{\max} = \infty$ é trivial. Assim, assuma que $T_{\max} < \infty$ e suponha, por absurdo, que exista $t < T_{\max}$ tal que

$$2L(\|g(0)\| + 2\|u(t)\|) + 2 < \frac{1}{T_{\max} - t}. \tag{2.21}$$

Aplicando o Lema 2.8 com $M = \|u(t)\|$ e $\varphi = u(t)$, existe uma única solução generalizada $v \in C([0, T_M], H)$ do problema (PS) com dado inicial $u(t)$, onde

$$T_M = \frac{1}{2L(K) + 2} \qquad \text{e} \qquad K = 2\|u(t)\| + \|g(0)\|.$$

Essa última relação, junto com (2.21), implica que $T_{\max} < T_M + t$.

Por outro lado, ao definirmos a função $w \in C([0, T_M + t], H)$ por

$$w(s) = \begin{cases} u(s), & \text{se } s \in [0, t] \\ v(s - t), & \text{se } s \in [t, T_M + t], \end{cases}$$

observamos que, para todo $s \in [0, t]$, dado que u é solução generalizada de (PS) no intervalo $[0, t]$ e com dado inicial φ, obtemos

$$w(s) = T(s)\varphi + \int_0^s T(s - \tau) g(w(\tau)) d\tau, \quad \forall s \in [0, t].$$

Já para todo $s \in [t, T_M + t]$, usando que v é solução generalizada com dado inicial $u(t)$,

$$\begin{aligned} w(s) &= T(s-t)u(t) + \int_0^{s-t} T(s - t - \sigma) g(v(\sigma)) d\sigma \\ &= T(s-t)\left(T(t)\varphi + \int_0^t T(t-\tau) g(u(\tau)) d\tau\right) + \int_t^s T(s-\tau) g(v(\tau - t)) d\tau \\ &= T(s)\varphi + \int_0^t T(s-\tau) g(u(\tau)) d\tau + \int_t^s T(s-\tau) g(w(\tau)) d\tau \\ &= T(s)\varphi + \int_0^s T(s-\tau) g(w(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Isso mostra que w é uma solução generalizada do problema (PS) no intervalo $[0, T_M + t]$

com dado inicial φ, contradizendo a maximalidade de $T_{\max}$, uma vez que $T_{\max} < T_M + t$, o que conclui a prova. A demonstração de (2.20) é análoga.

Finalmente, para verificar (i), suponha que $T_{\max} < \infty$ e, por absurdo, que exista uma sequência $(t_n) \subset (0, T_{\max})$ tal que

$$t_n \to T_{\max} \qquad \text{e} \qquad \|u(t_n)\| \to Q \in \mathbb{R}.$$

Como $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u(t_n)\|$ é finito, a partir de (2.19) e da monotonicidade crescente de L, segue que

$$2L(\|g(0)\| + 2M) + 2 \geq \frac{1}{T_{\max} - t_n}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ao tomar o limite quando $n \to \infty$, obtemos $2L(\|g(0)\| + 2M) = \infty$, o que é um absurdo. A demonstração de (ii) é análoga. □

Observação 2.3. As alternativas (i) e (ii) do Teorema 2.10 significam que a existência global da solução generalizada é equivalente à obtenção de uma estimativa a priori da norma $\|u(t)\|$ no intervalo maximal $(-T_{\min}, T_{\max})$.

Prosseguimos agora com um resultado que estabelece a regularidade adicional das soluções generalizadas, no caso em que o dado inicial possui maior regularidade.

Teorema 2.11 (Regularidade)**.** *Assuma as hipóteses do Teorema 2.10 e que o dado inicial φ pertença a $D(A)$. Então a solução generalizada maximal u satisfaz*

$$u \in C\left((-T_{\min}, T_{\max}), D(A)\right) \cap C^1\left((-T_{\min}, T_{\max}), H\right),$$

e, além disso, é a única solução clássica de (PS) *em qualquer subintervalo compacto de $(-T_{\min}, T_{\max})$ que contenha a origem.*

Demonstração. Seja $I \subset (-T_{\min}, T_{\max})$ um intervalo compacto arbitrário contendo a origem. Para quaisquer $t, t+h \in I$, temos

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) = T(t)(T(h)\varphi - \varphi) + \int_0^h T(t+h-\tau) g(u(s))\, ds \\ + \int_0^t T(s)\left(g(u(t+h-s)) - g(u(t-s))\right) ds. \end{aligned}$$

A função $g(u)$, por ser contínua no intervalo compacto I, ela é limitada. Assim, tomando norma na expressão anterior e lembrando que $T(\tau)$ é uma isometria, temos

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\| \leq \|T(h)\varphi - \varphi\| + \|g(u)\|_{C(I,H)} |h| \\ + \left| \int_0^t \|g(u(t+h-s)) - g(u(t-s))\| \, ds \right|. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade (2.18), com $M = \|u\|_{C(I,H)}$, na última integral e, em seguida, fazendo a mudança de variável $\tau = t - s$, obtemos

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq \|T(h)\varphi - \varphi\| + \|g(u)\|_{C(I,H)} |h| + L(M) \left| \int_0^t \|u(\tau + h) - u(\tau)\| d\tau \right|.$$

Por outro lado, dado que $\varphi \in D(A)$, pelo Lema 2.2-(c), segue que

$$\|T(h)\varphi - \varphi\| = \left\| \int_0^h T(s) A\varphi \, ds \right\| \leq \|A\varphi\| \, |h|.$$

Combinando essas duas estimativas e definindo $a = \|A\varphi\| + \|g(u)\|_{C(I,H)}$,

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq a|h| + L(M) \left| \int_0^t \|u(\tau + h) - u(\tau)\| d\tau \right|, \quad \forall t, t+h \in I.$$

A desigualdade de Gronwall garante então que

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq a|h| e^{L(M)|t|} \leq a e^{L(M)|I|} \, |h|, \quad \forall t, t+h \in I,$$

mostrando que u é Lipschitz em I. Logo, $f = g(u(\cdot))$ também é Lipschitz em I. Assim, pelo Corolário 2.4, u é a única solução clássica de (PS) em I e, em particular,

$$u \in C(I, D(A)) \cap C^1(I, H).$$

Como I foi escolhido arbitrariamente, a prova fica completa. □

O próximo resultado mostra que a solução depende continuamente do dado inicial.

Teorema 2.12 (Dependência contínua). *Usando a notação do Teorema 2.10, temos*

(a) As funções $T_{\max}, T_{\min} : H \to (0, \infty]$ são semicontínuas inferiormente.

(b) Se $\varphi_n \to \varphi$ em H, então, para qualquer intervalo compacto $I \subset (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi))$, as soluções generalizadas máximas u_n e u de (PS) associadas, respectivamente, a φ_n e φ, satisfazem $u_n \to u$ em $C(I, H)$.

Demonstração. Seja $\varphi_n \to \varphi$ em H. Começamos por estabelecer o seguinte resultado auxiliar, que garante a existência de uma estimativa uniforme:

Afirmação 1. *Se $T \in (0, T_{\max}(\varphi))$, existe uma constante positiva C, que depende de T, tal que, para todo n suficientemente grande,*

$$T_{\max}(\varphi_n) > T \qquad e \qquad \|u_n - u\|_{C([0,T],H)} \leq C \|\varphi_n - \varphi\|.$$

De fato, considerando

$$M = 2\|u\|_{C([0,T],H)} \qquad \text{e} \qquad K = 2M + \|g(0)\|,$$

definamos

$$\theta_n = \sup\left\{\theta \in [0, T_{\max}(\varphi_n));\ \|u_n\|_{C([0,\theta],H)} \leq K\right\}.$$

Para n suficientemente grande, temos

$$\|\varphi_n\| \leq \|u(0)\| + \|\varphi - \varphi_n\| \leq \|u\|_{C([0,T],H)} + \|\varphi - \varphi_n\| < M.$$

Assim, pelo Lema 2.8,

$$\|u_n\|_{C[0,T_M]} \leq K \qquad \text{e} \qquad T_M < T_{\max}(\varphi_n),$$

o que implica que $\theta_n > T_M > 0$. Portanto, o intervalo $J = [0,T] \cap [0,\theta_n)$ é não vazio, e para todo $t \in J$, temos $\|u_n\|_{C([0,t],H)} \leq K$ e

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u_n(t)\| &= \left\|T(t)(\varphi - \varphi_n) + \int_0^t T(t-s)(g(u(s)) - g(u_n(s)))\, ds\right\| \\
&\leq \|\varphi - \varphi_n\| + \int_0^t \|g(u(s)) - g(u_n(s))\|\, ds \\
&\leq \|\varphi - \varphi_n\| + L(K) \int_0^t \|u(s) - u_n(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|u(t) - u_n(t)\| \leq e^{L(K)T}\|\varphi - \varphi_n\|, \quad \forall t \in J. \tag{2.22}$$

Logo,

$$\|u_n(t)\| \leq \|u\|_{C([0,T],H)} + e^{L(K)T}\|\varphi - \varphi_n\|, \quad \forall t \in J.$$

Como o lado direito é independente de t e o segundo termo converge para zero, segue que, para n suficientemente grande,

$$\|u_n(t)\| \leq M, \quad \text{para todo } t \in J. \tag{2.23}$$

Afirmamos agora que $\theta_n > T$. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $\theta_n \leq T$. No caso em que $\theta_n = T_{\max}(\varphi_n)$, a estimativa (2.23) implica que a função $\|u_n(\cdot)\|$ é uniformemente limitada no intervalo maximal $[0, T_{\max}(\varphi_n))$. Portanto, pela alternativa (i) do Teorema 2.9, deveríamos ter $T_{\max}(\varphi_n) = \infty$, o contradiz o fato de θ_n ser finito. Por outro lado, caso $\theta_n < T_{\max}(\varphi_n)$, pela continuidade de u_n em θ_n existe $\theta_n < \vartheta < T_{\max}(\varphi_n)$ tal que

$$\|u_n(s) - u_n(\theta_n)\| < M, \quad \text{para todo } s \in [\theta_n, \vartheta].$$

De (2.23), segue que $\|u_n(\theta_n)\| \leq M$, e portanto

$$\|u_n(s)\| \leq \|u_n(\theta_n)\| + M \leq 2M, \quad \text{para todo } s \in [\theta_n, \vartheta].$$

Juntando isso com (2.23), concluímos que

$$\|u_n(s)\| \leq 2M \leq K, \quad \text{para todo } s \in [0, \vartheta],$$

o que contradiz a maximalidade de θ_n. Em qualquer dos casos, resulta uma contradição. Logo, deve ocorrer que $\theta_n > T$ para n suficientemente grande, o que implica $T < T_{\max}(\varphi_n)$ e $J = [0, T]$. Assim, por (2.22),

$$\|u - u_n\|_{C([0,T],H)} \leq e^{L(K)T} \|\varphi - \varphi_n\|. \quad \blacksquare$$

Analogamente temos:

Afirmação 2. *Se $T \in (0, T_{\min}(\varphi))$, então existe uma constante positiva $C = C(T)$ tal que, para todo n suficientemente grande,*

$$T_{\min}(\varphi_n) > T \qquad e \qquad \|u_n - u\|_{C([-T,0],H)} \leq C\|\varphi_n - \varphi\|.$$

Por fim, para mostrar o item (a), note que, pela Afirmação 1, para todo $T < T_{\max}(\varphi)$ tem-se $\liminf T_{\max}(\varphi_n) \geq T$, o que implica $\liminf T_{\max}(\varphi_n) \geq T_{\max}(\varphi)$, mostrando assim que $T_{\max}$ é uma função semicontínua inferiormente. O mesmo argumento aplica-se a $T_{\min}$.

Para o item (b), considere um intervalo $I = [a, b]$ que contenha a origem. Pelas afirmações anteriores, para n suficientemente grande, tem-se

$$\|u_n - u\|_{C[0,b]} \leq C(b)\|\varphi_n - \varphi\| \qquad \text{e} \qquad \|u_n - u\|_{C[a,0]} \leq C(a)\|\varphi_n - \varphi\|.$$

Dessa forma,

$$\|u_n - u\|_{C(I,H)} \leq (C(a) + C(b))\|\varphi_n - \varphi\| \to 0,$$

e o resultado desejado segue imediatamente. □

Concluímos esta seção com os corolários a seguir, que mostram que, sob hipóteses ligeiramente mais fracas do que a condição global de Lipschitz, ainda assim garantimos a existência global da solução.

Corolário 2.9. *Suponha que g satisfaça a condição local de Lipschitz (2.18) e que existam constantes não negativas c_1, c_2 tais que*

$$\|g(u)\| \leq c_1\|u\| + c_2, \quad \forall v \in H.$$

Então para qualquer $\varphi \in H$, o problema (PS) admite uma única solução generalizada global, e para $\varphi \in D(A)$, uma única solução clássica global.

Demonstração. Pelo Teorema 2.10, o problema admite uma única solução generalizada u

definida no intervalo maximal $(-T_{\min}, T_{\max})$, satisfazendo

$$u(t) = T(s)\varphi + \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds, \quad \text{para todo } t \in (-T_{\min}, T_{\max}).$$

Dessa forma,

$$\|u(t)\| \leq \|\varphi\| + \left| \int_0^t \|g(u(s))\| \, ds \right| \leq \|\varphi\| + c_2|t| + c_1 \left| \int_0^t \|u(s)\| \, ds \right|.$$

Caso $T_{\max} < \infty$, pela desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|u(t)\| \leq (\|\varphi\| + c_2 T_{\max})\, e^{c_1 t}, \quad \text{para todo } t \in [0, T_{\max}),$$

o que contradiz $\|u(t)\| \to \infty$ quando $t \to T_{\max}^-$. Portanto, $T_{\max} = \infty$. O argumento para $T_{\min}$ é análogo, de modo que u é uma solução generalizada global. Além disso, em virtude do Teorema 2.11, essa solução generalizada é também clássica global sempre que $\varphi \in D(A)$. $\square$

A seguir, além de assegurar a existência de solução global, ressaltamos uma lei de conservação fundamental que descreve o comportamento do problema (PS).

Corolário 2.10. *Suponha que g satisfaça a condição local de Lipschtiz (2.18) e que*

$$\mathrm{Re}(g(v), v) = 0, \quad \forall v \in H.$$

Então para qualquer $\varphi \in H$, o problema (PS) admite uma única solução generalizada global $u \in C(\mathbb{R}, H)$, e para $\varphi \in D(A)$, uma única solução clássica global. Além disso,

$$\|u(t)\| = \|\varphi\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $\varphi \in D(A)$. Nesse caso, pelo Teorema 2.11, o problema admite uma única solução clássica u definida no intervalo maximal $(-T_{\min}, T_{\max})$. Tomando o produto interno da equação de evolução com $u(t)$ e considerando a parte real, obtemos, para todo $t \in (-T_{\min}, T_{\max})$,

$$\mathrm{Re}(u'(t), u(t)) = \mathrm{Re}(Au(t), u(t)) + \mathrm{Re}(g(u(t)), u(t)).$$

Como o operador A é anti-adjunto, o primeiro termo à direita é nulo. Além disso, a hipótese imposta a g garante que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = \mathrm{Re}(u'(t), u(t)) = \mathrm{Re}(g(u(t)), u(t)) = 0.$$

Segue então que a função $\|u(\cdot)\|$ é constante no intervalo maximal. Em particular,

$$\|u(t)\| = \|\varphi\|, \quad \text{para todo } t \in (-T_{\min}, T_{\max}).$$

Consequentemente, pelas alternativas de blow-up, (i) e (ii) do Teorema 2.10, concluímos que $(-T_{\min}, T_{\max}) = \mathbb{R}$, mostrando que u é solução clássica global.

No caso em que $\varphi \in H$, como A é densamente definido, existe $(\varphi_n) \subset D(A)$ tal que

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{em } H.$$

Denotemos por u_n e u as soluções generalizadas maximais de (PS) associadas, respectivamente, aos dados iniciais φ_n e φ. Então, pelo Teorema 2.12- (b), segue que

$$u_n(t) \to u(t) \quad \text{em } H, \quad \text{para todo } t \in (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi)).$$

Além disso, pelo caso anterior,

$$\|u_n(t)\| = \|\varphi_n\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, passando ao limite em n, obtemos

$$\|u(t)\| = \|\varphi\|, \quad \text{para todo } t \in (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi)).$$

Consequentemente, pelas alternativas de blow-up apresentados no Teorema 2.10, concluímos que $(-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi)) = \mathbb{R}$, ou seja, u é solução generalizada global. □

2.4 Equação de Schrödinger

Nesta seção, ilustramos de forma concisa como a teoria desenvolvida nas seções anteriores pode ser aplicada para analisar problemas de valor inicial para equação de Schrödinger. Consideremos, por exemplo, o problema abstrato:

$$iu' + \mathcal{A}u + g(u) = 0, \qquad u(0) = \varphi;$$

onde $\mathcal{A}$ é um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert H. Reescrevendo o problema na forma evolutiva usual, temos a forma equivalente

$$u' = i\mathcal{A}u + ig(u), \qquad u(0) = \varphi.$$

Neste contexto, o operador $A = i\mathcal{A}$ é anti-adjunto e, portanto, gera um grupo de operadores unitários fortemente contínuo. Esta estrutura permite a aplicação direta da teoria geral apresentada anteriormente, assegurando a existência e unicidade de soluções, bem como sua regularidade e dependência contínua em relação aos dados iniciais. Além disso, a presença do grupo unitário garante propriedades fundamentais de conservação, particularmente a invariância da norma ao longo do tempo, o que é uma característica essencial na dinâmica da equação de Schrödinger.

O objetivo desta seção é estudar a equação de Schrödinger no caso em que

$$\mathcal{A} = {}_V\Delta \qquad \text{e} \qquad H = L^2(\Omega, V),$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sendo um domínio limitado de fronteira suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, e V um peso que satisfaz as condições **V1** e **V2**. Para tanto, adotando a notação das Seções 1.2 e 1.3, iniciamos pela definição dos operadores de Schrödinger, que serão utilizados ao longo dos próximos capítulos.

Definição 2.2. No espaço de Hilbert $L^2(\Omega, V)$, definimos o operador $\mathbb{A}$ por

$$\begin{cases} D(\mathbb{A}) := \Big\{u \in H_0^1(\Omega, V);\ \Delta u \in L^2(\Omega, 1/V)\Big\} \\ \mathbb{A}u := i_V\Delta u = i\,\dfrac{\Delta u}{V}, \quad \text{para todo } u \in D(\mathbb{A}). \end{cases} \tag{2.24}$$

No espaço de Hilbert $H^{-1}(\Omega, V)$, definimos o operador A por

$$\begin{cases} D(A) := H_0^1(\Omega, V) \subset H^{-1}(\Omega, V) \\ Au := i\,{}_V\Delta u, \quad \text{para todo } u \in D(A), \end{cases} \tag{2.25}$$

sendo ${}_V\Delta u$ definido conforme (1.25).

É claro que ambos os operadores são lineares e, para todo $u \in D(\mathbb{A})$ e $v \in H_0^1(\Omega, V)$,

$$\langle Au, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = -i\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \langle \mathbb{A}u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V};$$

isto é,

$$Au = \mathbb{A}u \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V), \quad \forall u \in D(\mathbb{A}). \tag{2.26}$$

Além disso, temos a imersão contínua

$$\Big(H_0^1(\Omega, V), \|\cdot\|_{H^1(\Omega,V)}\Big) \hookrightarrow (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}), \tag{2.27}$$

pois, de acordo com (1.17) e (1.26), para qualquer $u \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{D(A)}^2 &= \|u\|_{H^{-1}(\Omega,V)}^2 + \|Au\|_{H^{-1}(\Omega,V)}^2 \\ &= \|u\|_{H^{-1}(\Omega,V)}^2 + \|{}_V\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega,V)}^2 \\ &\le \|u\|_{L^2(\Omega,V)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|u\|_{H^1(\Omega,V)}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, como o operador laplaciano com peso é auto-adjunto, $i\mathbb{A}$ e iA também o são. Assim, pelo Teorema 2.3, $\mathbb{A}$ e A geram C_0-grupos de operadores unitários

$$\{\mathscr{T}(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \quad \text{em } L^2(\Omega,V) \qquad \text{e} \qquad \{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \quad \text{em } H^{-1}(\Omega,V), \tag{2.28}$$

respectivamente. Em particular, $\mathbb{A}$ e A são operadores fechados e densamente definidos.

Lema 2.9 (Igualdade de grupos)**.** *Para todo $\varphi \in L^2(\Omega,V)$ e $t \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$\mathscr{T}(t)\varphi = T(t)\varphi \;\; \textit{em } H^{-1}(\Omega,V).$$

Demonstração. Suponha que $\varphi \in D(\mathbb{A})$ e seja $u = \mathscr{T}(\cdot)\varphi$. Pelo Lema 2.2 temos

$$u(t) \in D(\mathbb{A}) \qquad \text{e} \qquad u'(t) = \mathbb{A}u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, como

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u'(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u'(t) \right\|_{L^2(\Omega,V)},$$

segue que a derivada de $u(t)$ em $H^{-1}(\Omega,V)$ é

$$u'(t) = \mathbb{A}u(t) = Au(t) \quad \text{em } H^{-1}(\Omega,V),$$

sendo a última igualdade consequência de (2.26). Portanto, u é solução do problema

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t), & \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ w(0) = \varphi. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.4, concluímos então que $u = T(\cdot)\varphi$ em $H^{-1}(\Omega,V)$, e o resultado segue.

No caso em que $\varphi \in L^2(\Omega,V)$, pela densidade do domínio de $\mathbb{A}$, existe uma sequência $(\varphi_n) \subset D(\mathbb{A})$ tal que

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{em } L^2(\Omega,V).$$

Pelo caso já tratado, tem-se $\mathscr{T}(t)\varphi_n = T(t)\varphi_n$ e então

$$\begin{aligned} \|T(t)\varphi - \mathscr{T}(t)\varphi\|_{H^{-1}(\Omega,V)} &\leq \|T(t)\varphi - \mathscr{T}(t)\varphi_n\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + \|\mathscr{T}(t)\varphi_n - \mathscr{T}(t)\varphi\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\ &\leq \|T(t)\varphi - T(t)\varphi_n\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + \|\mathscr{T}(t)\varphi_n - \mathscr{T}(t)\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \\ &= \|\varphi - \varphi_n\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \\ &\leq 2\|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\Omega,V)}. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, conclui-se que $T(t)\varphi = \mathscr{T}(t)\varphi$ em $H^{-1}(\Omega,V)$. $\square$

Como consequência da existência de um grupo de operadores unitários, o próximo corolário garante a existência e a unicidade de solução clássica para a equação de Schrödinger homogénea:

$$\begin{cases} i\,\partial_t u + \frac{1}{V}\Delta u = 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R} \\ u(x,t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{para todo } x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.29}$$

onde a condição de contorno é considerada apenas para domínios limitados (quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, tal restrição naturalmente deixa de existir). Identificando $u(t)(\cdot) = u(\cdot, t)$ e observando que a condição de contorno está incorporada na definição do domínio de $\mathbb{A}$, o problema pode ser escrito como uma equação de evolução abstrata de primeira ordem:

$$u'(t) = \mathbb{A}u(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \qquad u(0) = \varphi. \tag{2.30}$$

Corolário 2.11. *Para todo dado inicial $\varphi \in D(\mathbb{A})$, o problema (2.29) admite uma única solução clássica*

$$u \in C(\mathbb{R}, D(\mathbb{A})) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega, V)),$$

dada por $u(t) = \mathscr{T}(t)\varphi$. Além disso, é lipschitziana, com

$$\|u(t) - u(s)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq \|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega,1/V)}\, |t - s|, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Valem ainda as leis de conservação de massa e energia:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \qquad e \qquad \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 sabemos que a função $u(t) = \mathscr{T}(t)\varphi$ é a única solução clássica do problema (2.30) e é Lipschitz contínua, satisfazendo

$$\|u(t) - u(s)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq \|\mathbb{A}\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}\, |t - s| = \|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega,1/V)}\, |t - s|, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Como cada operador $\mathscr{T}(t)$ é uma isometria em $L^2(\Omega, V)$, a solução conserva massa:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\mathscr{T}(t)\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, pelo Lema 2.9 temos $u(t) = T(t)\varphi$ em $H^{-1}(\Omega, V)$, e como $T(t)$ é também uma isometria neste espaço, resulta

$$\|u(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|T(t)\varphi\|_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{H^{-1}(\Omega,V)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, como $\varphi \in D(A)$, o Lema 2.2 permite comutar A e $T(t)$, obtendo

$$\begin{aligned}\|_V\Delta u(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} &= \|AT(t)\varphi\|_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|T(t)A\varphi\|_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|A\varphi\|_{H^{-1}(\Omega,V)}\\ &= \|_V\Delta\varphi\|_{H^{-1}(\Omega,V)}.\end{aligned}$$

Agora, aplicando a identidade (1.29) nesta igualdade, obtemos

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|u(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|\varphi\|^2_{H^{-1}(\Omega,V)}.$$

Por fim, combinando essa relação com as conservações de massa, segue a conservação de energia, ou seja,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Exemplo 2.2. No caso $V = 2$ e $N = 1$, a função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2it}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{1+2it}\right),$$

é a única solução do problema

$$\begin{cases} i\,\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\\ u(x,0) = \exp(-x^2), & x \in \mathbb{R}.\end{cases}$$

Exemplo 2.3. Assumindo $\Omega = \mathbb{R}^N$ e V constante, apresentaremos a seguir uma fórmula para $\mathscr{T}(t)$ aplicada a funções bem regulares. Para isso, recordamos algumas propriedades fundamentais da transformada de Fourier, começando pelo espaço de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) := \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N); \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+|x|^2)^{k/2}\sum_{|\alpha|\le\ell}|\partial^\alpha\varphi(x)| < \infty,\ \forall k,\ell \in \mathbb{N}_0\right\},$$

no qual a transformada de Fourier $\mathscr{F}$ é bem definida e invertível. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, define-se a transformada de Fourier

$$\mathscr{F}\varphi(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i\,x\cdot\xi}\,\varphi(x)dx, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^N,$$

sendo a transformada inversa dada por

$$\mathscr{F}^{-1}\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i\,x\cdot\xi}\,\varphi(\xi)d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Como propriedades bem conhecidas, temos

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \qquad \text{e} \qquad \mathscr{F}(\Delta\varphi)(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\,\mathscr{F}\varphi(\xi).$$

Além disso, de acordo com [9, Lema 2.2.4], a transformada de Fourier da função

$$K_a(x) = \left(\frac{1}{4\pi i a}\right)^{N/2} \exp\left(i\frac{|x|^2}{4a}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \text{onde } a \neq 0,$$

é dada por

$$\mathscr{F}(K_a)(\xi) = \exp\left(-i4\pi^2|\xi|^2 a\right).$$

A partir dessas propriedades, para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, a ação de $\mathscr{T}(t)$ pode ser explicitamente descrita por

$$\left(\mathscr{T}(t)\varphi\right)(x) = \left(\frac{V}{4\pi i t}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{i\,V|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ t \neq 0. \tag{2.31}$$

De fato, defina $u \in C(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ por

$$u(t)(x) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\exp\left(-4\pi^2 i|\xi|^2\frac{t}{V}\right)\mathscr{F}\varphi\right\}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$\mathscr{F}(\partial_t u(t))(\xi) = -4\pi^2 i|\xi|^2\frac{1}{V}\mathscr{F}(u(t))(\xi) \quad \text{e} \quad \mathscr{F}(\Delta u(t))(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\,\mathscr{F}(u(t))(\xi).$$

Assim,

$$\mathscr{F}(\partial_t u(t)) = \frac{i}{V}\mathscr{F}(\Delta u(t)),$$

ou seja,

$$\mathscr{F}(i\partial_t u(t) + {}_V\Delta u(t)) = 0.$$

Portanto, u satisfaz a equação $i\partial_t u + {}_V\Delta u(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, com condição inicial $u(0) = \varphi$. Logo, pela unicidade da solução temos $u(t) = \mathscr{T}(t)\varphi$. Finalmente, como

$$u(t) = \mathscr{F}^{-1}\left(\mathscr{F}(K_{t/V})\,\mathscr{F}\varphi\right) = \mathscr{F}^{-1}\left(\mathscr{F}(K_{t/V} * \varphi)\right) = K_{t/V} * \varphi, \quad \text{para todo } t \neq 0,$$

obtemos a fórmula (2.31).

O próximo resultado estabelece as condições sob as quais é possível garantir a existência de uma única solução para a equação de Schrödinger linear:

$$\begin{cases} i\,\partial_t u + \frac{1}{V}\Delta u + f(x,t) = 0, & \text{em } \Omega \times I \\ u(x,t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times I \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{para todo } x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.32}$$

onde a condição de contorno nula é imposta apenas quando Ω é limitado.

Corolário 2.12. *Seja I um intervalo aberto ao qual o ponto 0 é aderente e suponha que $f \in C(\bar{I}, L^2(\Omega, V))$. Uma função $u \in C(\bar{I}, D(\mathbb{A}))$ é solução clássica do problema* (2.32) *com dado inicial $\varphi \in D(\mathbb{A})$ se, e somente se,*

$$u(t) = \mathscr{T}(t)\varphi + i\int_0^t \mathscr{T}(t-s)f(u(s))ds, \quad \text{para todo } t \in \bar{I}. \tag{2.33}$$

Além disso, se f satisfaz uma das seguintes condições:

(a) $f \in L^1_{\text{loc}}(\bar{I}, D(\mathbb{A}))$;

(b) $f \in W^{1,1}(I, L^2(\Omega, V))$;

(c) f *lipschitziana e I limitado;*

então para cada dado inicial $\varphi \in D(\mathbb{A})$, a função u, definida por (2.33)*, é a única solução clássica do problema* (2.32).

Demonstração. Identificando $u(t)(\cdot) = u(\cdot, t)$ e $f(t)(\cdot) = f(\cdot, t)$, o problema (2.32) pode ser reformulado como uma equação abstrata de evolução de primeira ordem da seguinte forma:

$$\begin{cases} u'(t) = \mathbb{A}u(t) + if(t), & t \in I \\ u(0) = \varphi, \end{cases}$$

cuja análise fica reduzida à aplicação imediata dos Corolários 2.1 a 2.4, que garantem, sob as hipóteses enunciadas, a existência e unicidade da solução clássica, além de sua representação integral. □

Exemplo 2.4. Fixemos as funções $\phi \in L^2(\Omega, V)$ e $h \in C(\bar{I}, \mathbb{C})$, e consideremos a função contínua $f(t) = h(t)\phi$. Analisemos os seguintes casos:

1. Se $\phi \in D(\mathbb{A})$, então para todo $t \in \bar{I}$ temos

   $$\|f(t)\|_{D(\mathbb{A})} = \|h(t)\phi\|_{L^2(\Omega,V)} + \|\mathbb{A}h(t)\phi\|_{L^2(\Omega,V)} = |h(t)| \left(\|\phi\|_{L^2(\Omega,V)} + \|\mathbb{A}\phi\|_{L^2(\Omega,V)}\right).$$

   Como h é contínua, a expressão acima define uma função localmente integrável, e portanto $f \in L^1_{\text{loc}}(\bar{I}, D(\mathbb{A}))$.

2. Se $h \in W^{1,1}(I, \mathbb{C})$, então, para todo $\psi \in C_0^\infty(I, \mathbb{C})$, vale

   $$\int_I f(t)\psi'(t)dt = \left(\int_I h(t)\psi'(t)dt\right)\phi = -\left(\int_I h'(t)\psi(t)dt\right)\phi = -\int_I h'(t)\phi\,\psi(t)dt,$$

   o que mostra que f possui derivada fraca dada por $f'(t) = h'(t)\phi$. Como tanto h quanto sua derivada são integráveis, segue imediatamente que f e sua derivada fraca pertencem a $L^1(I, L^2(\Omega, V))$, implicando que $f \in W^{1,1}(I, L^2(\Omega, V))$.

3. Suponha que I seja limitado. Se h é lipschitziana, então f também é, pois

$$\|f(t) - f(s)\|_{L^2(\Omega,V)} = |h(t) - h(s)| \|\phi\|_{L^2(\Omega,V)} \leq C|t - s|, \quad \forall t, s \in \bar{I}.$$

Assim, sob as condições acima, se $\varphi \in D(\mathbb{A})$, segue do Corolário 2.12 que o problema (2.32) admite uma única solução clássica.

Exemplo 2.5. Suponha que I seja um intervalo compacto e considere uma função mensurável $f : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ tal que para todo $t \in I$, $f(\cdot, t) \in L^2(\Omega, V)$, e para quase todo $x \in \Omega$, $f(x, \cdot) \in C^1(I, \mathbb{C})$. Suponha ainda que exista uma função $g \in L^2(\Omega, V)$ satisfazendo

$$|\partial_t f(x, t)| \leq g(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \text{ para todo } t \in I. \tag{2.34}$$

Afirmamos que

$$f \in C^1(I, L^2(\Omega, V)), \quad \text{onde } f(t)(x) := f(x, t).$$

Com efeito, inicialmente observe que (2.34) implica que $\partial_t f(\cdot, t) \in L^2(\Omega, V)$ para todo t. Fixado $t \in I$, defina

$$f_h(x) := \frac{f(x, t + h) - f(x, t)}{h} - \partial_t f(x, t), \quad \forall x \in \Omega.$$

Para quase todo $x \in \Omega$, como $f(x, \cdot)$ é derivável, tem-se

$$|f_h(x)|^2 \to 0 \quad \text{quando } h \to 0.$$

Além disso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e (2.34), obtemos

$$|f_h(x)| = \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \partial_t f(x, s) ds - \partial_t f(x, t) \right| \leq 2g(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

de modo que $|f_h|^2 V$ é dominada pela função integrável $4\, g^2\, V$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\left\| \frac{f(t + h) - f(t)}{h} - \partial_t f(\cdot, t) \right\|^2_{L^2(\Omega,V)} = \int_\Omega |f_h|^2\, V dx \to 0 \quad \text{quando } h \to 0,$$

o que implica que f é derivável em t com derivada $f'(t) = \partial_t f(\cdot, t)$. Por fim, para mostrar que essa derivada é contínua, note que

$$\|f'(s) - f'(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} = \int_\Omega |\partial_t f(x, s) - \partial_t f(x, t)|^2\, V dx, \quad \forall t, s \in I.$$

Como $\partial_t f(x, \cdot)$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$, e está dominada pela função g, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue garante que a integral acima converge para zero quando $s \to t$, mostrando que f' é contínua em t.

Uma vez verificado que f é continuamente diferenciável e sendo I compacto, segue-se que $f \in W^{1,1}(I, L^2(\Omega, V))$. Assim, o Corolário 2.12 garante que o problema (2.32) admite uma única solução clássica para cada dado inicial $\varphi \in D(\mathbb{A})$.

Exemplo 2.6. Considere o caso unidimensional:

$$\begin{cases} i\partial_t u + e^{-x^2}\, \partial_x^2 u + \lambda\, e^{-2x^2} \sin(tx) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Neste caso, tomamos $V(x) = e^{x^2}$, que é uma função contínua com ínfimo positivo,

$$f(x,t) = \lambda\, e^{-2x^2} \sin(tx) \qquad \text{e} \qquad g(x) = |\lambda||x|e^{-2x^2}.$$

Claramente f é continuamente diferenciável, com $|\partial_t f(x,t)| \leq g(x)$ e

$$\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R},V)} \leq |\lambda|^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-3x^2} dx < \infty \qquad \text{e} \qquad \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R},V)} = |\lambda|^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-3x^2} dx < \infty.$$

Assim, todas as hipóteses do Exemplo 2.5 estão satisfeitas e, portanto, o problema (2.32) admite uma única solução clássica para todo dado inicial $\varphi \in D(\mathbb{A})$.

Para concluir este capítulo, apresentamos um resultado de existência e unicidade de solução para a equação de Schrödinger semilinear no caso mais simples, em que a não linearidade é apenas Lipschitz.

Corolário 2.13. *Suponha que $g : L^2(\Omega, V) \to L^2(\Omega, V)$ seja uma aplicação lipschitziana. Então, para todo dado inicial $\varphi \in D(\mathbb{A})$, o problema*

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, D(\mathbb{A})) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega, V)) \\ i\partial_t u + {}_V\Delta u + g(u) = 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases} \tag{2.35}$$

admite uma única solução. Além disso, se a não linearidade satisfaz

$$\operatorname{Re}(g(v), iv)_{L^2(\Omega,V)} = 0, \quad \textit{para todo } v \in L^2(\Omega, V),$$

então a solução conserva a massa, isto é,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 2.9 e dos Corolários 2.8 e 2.10. ☐

Exemplo 2.7. Seja $K \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ e considere a aplicação $g : L^2(\Omega, V) \to L^2(\Omega, V)$ definida por $g(u) = Ku$. Como

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq \|K\|_\infty \|u - v\|_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega, V),$$

temos que g é Lipschitz. Consequentemente, o problema (2.35) admite uma única solução para todo dado inicial $\varphi \in D(\mathbb{A})$. Além disso, quando K assume somente valores reais, a solução conserva a massa, já que

$$\operatorname{Re}(g(v), iv)_{L^2(\Omega,V)} = -\operatorname{Re}\left(i \int_\Omega K|v|^2 V dx\right) = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega, V).$$

Exemplo 2.8. Seja $V \in L^1(\Omega)$ uma função contínua com ínfimo positivo em um domínio limitado Ω, e considere a função complexa $g(z) = \lambda\, e^{i\mathrm{Re} z}$ (com $\lambda \in \mathbb{C}$), que é lipschitziana, pois para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ temos

$$|g(z) - g(w)| = 2|\lambda| \left|\sin\left(\frac{\mathrm{Re}z - \mathrm{Re}w}{2}\right)\right| \leq |\lambda||\mathrm{Re}z - \mathrm{Re}w| \leq |\lambda||w - z|.$$

Dessa forma, a aplicação $g : L^2(\Omega, V) \to L^2(\Omega, V)$, definida por $g(u)(x) = g(u(x))$, é bem definida e lipschitziana, já que

$$\|g(u)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq |\lambda|\|V\|^{1/2}_{L^1(\Omega)} \qquad \text{e} \qquad \|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq |\lambda|\|u - v\|_{L^2(\Omega,V)}.$$

Portanto, para cada dado inicial $\varphi \in D(\mathbb{A})$, segue do Corolário 2.13 que o problema (2.35) admite uma única solução.

Exemplo 2.9. Seja $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory, com $f(\cdot, 0) = 0$. Suponha ainda que f seja lipschitziana na segunda variável, ou seja, que exista uma constante L tal que

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v|, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \ \text{ para todo } u, v \geq 0.$$

Definimos a extensão complexa $\tilde{f} : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$\tilde{f}(x, u) := f(x, |u|)\frac{u}{|u|} \quad \text{para } u \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \tilde{f}(x, 0) := 0.$$

Para todo $u, v \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} |u||v|\left[\tilde{f}(x, u) - \tilde{f}(x, v)\right] &= u|v|\left[f(x, |u|) - f(x, |v|)\right] \\ &\quad + \left[u(|v| - |u|) + |u|(u - v)\right] f(x, |v|). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}|u||v|\left|\tilde{f}(x,u)-\tilde{f}(x,v)\right| &\leq |u||v|\Big|f(x,|u|)-f(x,|v|)\Big|+2|u||u-v||f(x,|v|)| \\ &\leq 3L|u||v||u-v|,\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\left|\tilde{f}(x,u)-\tilde{f}(x,v)\right| \leq 3L|u-v|, \quad \forall u,v\in\mathbb{C}.$$

Consequentemente, a aplicação $g : L^2(\Omega,V) \to L^2(\Omega,V)$, dada por $g(u)(x) = \tilde{f}(x,u(x))$, é bem definida e lipschitziana. Além disso,

$$\operatorname{Re}(g(v),iv)_{L^2(\Omega,V)} = -\operatorname{Re}\left(i\int_\Omega f(x,|v|)|v|\,V\,dx\right) = 0, \quad \forall v\in L^2(\Omega,V).$$

Nessas condições, o Corolário 2.13 garante que o problema (2.35) admite uma única solução para todo dado inicial $\varphi\in D(\mathbb{A})$, e que a solução conserva a massa.

Capítulo 3

Método da Energia

Neste capítulo, aplicaremos o método da energia junto com alguns resultados de compacidade para estabelecer um resultado de existência de solução para a seguinte classe de equações de Schrödinger semilineares:

$$\begin{cases} i\,\partial_t u + {}_V\Delta u + g(x,u) = 0, & \text{em } \Omega \times I \\ u(x,t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times I \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{para todo } x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo a origem, V um peso satisfazendo as hipóteses **V1** e **V2**, g uma não linearidade adequada, e φ uma função dada.

3.1 Definições

Utilizando a notação introduzida nas Seções 1.2, 1.3 e 2.4, e levando em consideração que a condição de contorno homogênea está incorporada na definição do operador laplaciano com peso, podemos reformular a equação de Schrödinger semilinear (3.1) como um problema de evolução de primeira ordem. Mais precisamente:

$$\begin{cases} i\,\partial_t u + {}_V\Delta u + g(u) = 0 \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{P}$$

onde $g(u)$ denota o operador de Nemytskii associado à função complexa g; isto é,

$$g(u)(x) := g(x, u(x)), \quad x \in \Omega.$$

A seguir, apresentamos duas noções de solução para o problema de Cauchy (P).

Definição 3.1. Assuma que $g \in C\left(H_0^1(\Omega, V), H^{-1}(\Omega, V)\right)$ e seja $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$.

(a) Uma H_0^1-**solução clássica** do problema (P) em I é uma função

$$u \in C(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap C^1(I, H^{-1}(\Omega, V))$$

tal que $u(0) = \varphi$ e

$$i\partial_t u + {}_V\Delta u + g(u) = 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V) \quad \text{para todo } t \in I.$$

(b) Uma H_0^1-**solução forte** do problema (P) em I é uma função

$$u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$$

tal que $u(0) = \varphi$ e

$$i\partial_t u + {}_V\Delta u + g(u) = 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V) \quad \text{para quase todo } t \in I.$$

Em ambas as situações, ${}_V\Delta u$ deve ser entendido de acordo com a Definição 1.6.

Observação 3.1. Pelo Corolário 3.1, se $u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$, então $u \in C(I, L^2(\Omega, V))$, de modo que a condição $u(0) = \varphi$ faz sentido na definição (b).

Ao longo deste capítulo, adotaremos a notação estabelecida na Seção 2.4 para os operadores de Schrödinger, bem como para os grupos de operadores unitários gerados por eles, conforme descrito em (2.24), (2.25) e (2.28).

Teorema 3.1 (Fórmula de Duhamel). *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo contento a origem, $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ um dado inicial, e*

$$g \in C(H_0^1(\Omega, V), H^{-1}(\Omega, V))$$

uma função limitada em conjuntos limitados. Então, uma função $u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V))$ é uma H_0^1-solução forte do problema (P) em I se, e somente se,

$$u(t) = T(t)\varphi + i\int_0^t T(t-s)g(u(s))ds, \quad q.t.p.\ t \in I.$$

A função $u \in C(\bar{I}, H_0^1(\Omega, V))$ é uma H_0^1-solução clássica do problema (P) em I se, e somente se, a igualdade acima vale para todo $t \in \bar{I}$.

Demonstração. Considere a função $f(t) = ig(u(t))$ e suponha que $u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V))$. Pela imersão (2.27), essa suposição implica, em particular, que $u \in L^\infty(I, D(A))$. Além disso, como g é limitada em conjuntos limitados e u é essencialmente limitada, segue que

$f \in L^\infty(I, H^{-1}(\Omega, V))$. Portanto, o resultado é consequência direta do Corolário 2.5. De modo análogo, se u é contínua, temos $f \in C(\bar{I}, H^{-1}(\Omega, V))$ e $u \in C(\bar{I}, D(A))$, o que permite concluir o resultado diretamente pelo Corolário 2.1. $\square$

A seguir, introduzimos a noção de problema localmente bem-posto. Embora diversas definições de boa-colocação apareçam na literatura, adotamos aqui uma formulação relativamente forte, que requer dependência contínua, unicidade e a alternativa de *blow-up*.

Definição 3.2. Assuma que $g \in C(H_0^1(\Omega, V), H^{-1}(\Omega, V))$. Dizemos que o problema (P) é *localmente bem posto em* $H_0^1(\Omega, V)$ se as seguintes propriedades forem válidas:

(a) **Existência:** Para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, existe uma H_0^1-solução clássica de (P) definida em um intervalo maximal $(-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi))$.

(b) **Unicidade:** Para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ e qualquer intervalo I contento zero, quaisquer duas H_0^1-soluções fortes de (P) coincidem em I.

(c) **Alternativa blow-up:** Se $T_{\max}(\varphi) < \infty$ (resp. $T_{\min}(\varphi) < \infty$), então

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \to \infty \quad \text{quando } t \to T_{\max}(\varphi)^- \quad (\text{resp. } t \to -T_{\min}(\varphi)^+ \;).$$

(d) **Dependência contínua:** Se $\varphi_n \to \varphi$ em $H_0^1(\Omega, V)$ e se $I \subset (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi))$ é um intervalo compacto, então a solução maximal u_n de (P) associada ao dado inicial φ_n está definida em I para n suficientemente grande e satisfaz $u_n \to u$ em $C(I, H_0^1(\Omega, V))$, onde u é a solução maximal de (P) associada ao dado inicial φ.

3.2 Resultados de compacidade

No decorrer da análise da existência de soluções locais ou globais para a equação (P), encontraremos diversas situações envolvendo convergência forte e fraca. Para tratá-las adequadamente, serão necessários alguns resultados de compacidade.

Usaremos repetidamente as seguintes propriedades básicas das topologias fracas.

Lema 3.1. *Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y$.*

(a) Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então $x_n \rightharpoonup x$ em Y.

(b) Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência limitada tal que $x_n \rightharpoonup y$ em Y. Se X é reflexivo, então $y \in X$ e $x_n \rightharpoonup y$ em X.

(c) Assuma que X é reflexivo e que I seja um intervalo aberto. Suponha que $u : \bar{I} \to Y$ seja fracamente contínua e que existam uma constante K e um subconjunto J denso em $\bar{I}$ tais que

$$u(t) \in X \qquad e \qquad \|u(t)\|_X \leq K, \quad \forall t \in J.$$

Então, as propriedades acima se estendem a todo $t \in \bar{I}$ e a função $u : \bar{I} \to X$ é fracamente contínua.

Demonstração. Dado que a imersão $X \hookrightarrow Y$ é contínua nas topologias fortes, segue de [6, Proposição 6.2.9] que ela também o é nas topologias fracas, de onde se conclui (a).

Para verificar (b), note que, como X é reflexivo, existe uma subsequência (x_{n_k}) e um elemento $x \in X$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em X e, portanto, em Y. Assim, pela unicidade do limite fraco, $y = x$. Como isso vale para toda subsequência, segue que $x_n \rightharpoonup y$ em X.

Para mostrar (c), seja $t \in \bar{I}$ e considere uma sequência $(t_n) \subset J$ tal que $t_n \to t$. A continuidade fraca u em Y garante que $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ em Y. Como $(u(t_n))$ é limitada em X por K, o resultado do item anterior implica que $u(t) \in X$ e $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ em X. Assim, pela semicontinuidade inferior da norma na topologia fraca, segue

$$\|u(t)\|_X \leq \liminf \|u(t_n)\|_X \leq K.$$

Por fim, a continuidade fraca de $u : \bar{I} \to X$ segue pelo mesmo argumento, pois $(u(t_n)) \subset X$ é limitada por K para qualquer sequência $(t_n) \subset \bar{I}$. $\square$

Uma consequência importante do Lema 3.1 é:

Corolário 3.1. *Seja I um intervalo aberto. Toda função*

$$u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$$

é fracamente contínua de $\bar{I}$ em $H_0^1(\Omega, V)$ e contínua de $\bar{I}$ em $L^2(\Omega, V)$. Além disso,

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \|u\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega,V))} \qquad e \qquad \|u(t) - u(s)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq 2C\,|t-s|^{1/2},$$

para quaisquer $t, s \in \bar{I}$, onde

$$C = \max\left\{\|u\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega,V))}, \|u'\|_{L^\infty(I,H^{-1}(\Omega,V))}\right\}.$$

Demonstração. Pelo Corolário A.4, a função $u : \bar{I} \to H^{-1}(\Omega, V)$ é contínua e, portanto, fracamente contínua. Pela definição do supremo essencial, existe um conjunto de medida nula $N \subset I$ tal que, para todo $t \in I \backslash N$,

$$u(t) \in H_0^1(\Omega, V) \qquad \text{e} \qquad \|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \|u\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega,V))}.$$

Como $I \backslash N$ é denso em $\bar{I}$, e em vista da imersão (1.16), segue do Lema 3.1-(c) que as propriedades acima valem para todo $t \in \bar{I}$ e que u é fracamente contínua de $\bar{I}$ em $H_0^1(\Omega, V)$.

Por outro lado, em virtude do Teorema A.9 temos

$$\|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq \|u'\|_{L^\infty(I,H^{-1}(\Omega,V))}|t-s|, \quad \forall t, s \in \bar{I}.$$

Assim, para quaisquer $t, s \in \bar{I}$,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(s)\|^2_{L^2(\Omega,V)} &= \langle u(t) - u(s), \overline{u(t) - u(s)} \rangle_{H^{-1},H^1_0,V} \\
&\leq \|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \, \|u(t) - u(s)\|_{H^1(\Omega,V)} \\
&\leq 2C\|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\
&\leq 2C\|u'\|_{L^\infty(I,H^{-1}(\Omega,V))} \, |t - s| \\
&\leq 2C^2|t - s|.
\end{aligned}$$

Por fim, extraindo raiz quadrada em ambos os lados, obtém-se a desigualdade desejada, de onde se conclui que u é contínua de $\bar{I}$ em $L^2(\Omega, V)$. □

A seguir, apresentamos o principal resultado de compacidade, fundamental para os argumentos seguintes. Por razões técnicas, omitimos sua demonstração.

Lema 3.2 [9, Proposição 1.1.2]**.** *Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y$, e seja I um intervalo aberto limitado. Suponha que (u_n) é uma sequência em $C(\bar{I}, Y)$ limitada e uniformemente equicontínua tal que, para alguma constante K,*

$$u_n(t) \in X \qquad e \qquad \|u_n(t)\|_X \leq K, \quad \textit{para todo } t \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Se X é reflexivo, então existe uma função $u \in C(\bar{I}, Y)$ e uma subsequência (u_{n_k}) tais que u é fracamente contínua de $\bar{I}$ em X, e

$$u_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t) \quad \textit{em } X, \quad \textit{para todo } t \in \bar{I}.$$

Suponha ainda que exista um espaço de Banach uniformemente convexo B tal que $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ e que $(u_n) \subset C(\bar{I}, B)$ satisfaça $\|u_{n_k}(t)\|_B \to \|u(t)\|_B$ uniformemente em I. Então

$$u \in C(\bar{I}, B) \qquad e \qquad u_{n_k} \to u \quad \textit{em } C(\bar{I}, B).$$

Um caso particular deste lema, é:

Lema 3.3. *Seja $(u_n) \subset W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$ uma sequência limitada, com I um intervalo aberto e limitado. Suponha que exista uma constante K tal que*

$$u_n(t) \in H^1_0(\Omega, V) \qquad e \qquad \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq K, \quad \textit{para todo } t \in I \ \textit{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Então,

(a) Existe uma função $u \in L^\infty(I, H^1_0(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$ e uma subsequência (u_{n_k}) tais que, para todo $t \in \bar{I}$,

$$u_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t) \quad \textit{em } H^1_0(\Omega, V).$$

(b) Suponha que $(u_n) \in C(\bar{I}, H_0^1(\Omega, V))$ *e que* $\|u_{n_k}(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \to \|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)}$ *uniformemente em* I*, então*

$$u \in C(\bar{I}, H_0^1(\Omega, V)) \qquad e \qquad u_{n_k} \to u \quad em \;\; C(\bar{I}, H_0^1(\Omega, V)).$$

(c) Se $\|u_{n_k}(t)\|_{L^2(\Omega,V)} \to \|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)}$ *uniformemente em* I*, então*

$$u \in C(\bar{I}, L^2(\Omega, V)) \qquad e \qquad u_{n_k} \to u \quad em \;\; C(\bar{I}, L^2(\Omega, V)).$$

Demonstração. Por hipótese, existe uma constante M tal que,

$$\|u_n\|_{W^{1,\infty}(I,H^{-1}(\Omega,V))} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo Corolário A.4, a sequência (u_n) é também limitada em $C(\bar{I}, H^{-1}(\Omega, V))$. Além disso, é uniformemente equicontínua, pois, para quaisquer $t, s \in \bar{I}$ e todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq \|u_n'\|_{L^\infty(I,H^{-1}(\Omega,V))}|t - s| \leq M|t - s|.$$

Aplicando então o Lema 3.2 com $X = H_0^1(\Omega, V)$ e $Y = H^{-1}(\Omega, V)$, obtemos a existência de uma função $u \in C(\bar{I}, H^{-1}(\Omega, V))$ e de uma subsequência (u_{n_k}) tal que, para todo $t \in \bar{I}$,

$$u_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V), \quad \text{e portanto em } H^{-1}(\Omega, V).$$

Além disso, devido às hipóteses, a subsequência (u_{n_k}) é limitada em $L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V))$ e em $W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$. Assim, o Teorema A.5 e o Corolário A.8 permitem concluir que

$$u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V)).$$

Finalmente, note que, pelo Corolário 3.1, cada função u_n pertence a $C(\bar{I}, L^2(\Omega, V))$. Assim, os itens (b) e (c) seguem diretamente do lema anterior, considerando $B = H_0^1(\Omega, V)$ e $B = L^2(\Omega, V)$, respectivamente. □

3.3 Um caso regular

Nesta seção, provaremos um resultado de existência e unicidade de solução global para a equação de Schrödinger (P), considerando uma não linearidade g que satisfaz a condição local de Lipschtiz. Para isso, será fundamental o seguinte resultado:

Lema 3.4. *Seja* $u \in C(I, D(\mathbb{A})) \cap C^1(I, L^2(\Omega, V))$ *e defina*

$$J(t) := \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \textit{para todo } t \in I.$$

Então $J \in C^1(I,\mathbb{R})$, com

$$J'(t) = -2\,\mathrm{Re}\left({}_V\Delta u(t), u'(t)\right)_{L^2(\Omega,V)}. \tag{3.2}$$

Demonstração. Sejam $t, s \in I$ arbitrários com $t \neq s$ e definamos

$$a(s) := \frac{J(s)-J(t)}{s-t} + 2\,\mathrm{Re}\left({}_V\Delta u(t), u'(t)\right)_{L^2(\Omega,V)}.$$

Vale lembrar que

$$\left({}_V\Delta u(t), u'(t)\right)_{L^2(\Omega,V)} = \int_\Omega \Delta u(t)\overline{u'(t)}\,dx.$$

Além disso, por (1.22), podemos escrever

$$\begin{aligned}
J(s)-J(t) &= \int_\Omega \left[\nabla u(s)\cdot\nabla(\overline{u(s)-u(t)}) + \nabla(u(s)-u(t))\cdot\nabla\overline{u(t)}\right]dx \\
&= -\int_\Omega \left[\Delta u(s)(\overline{u(s)-u(t)}) + (u(s)-u(t))\Delta\overline{u(t)}\right]dx \\
&= -\int_\Omega \left\{\Delta(u(s)-u(t))(\overline{u(s)-u(t)}) + 2\mathrm{Re}\left[\Delta u(t)(\overline{u(s)-u(t)})\right]\right\}dx.
\end{aligned}$$

Substituindo essas expressões em $a(s)$, obtemos

$$a(s) = \int_\Omega \left\{\Delta(u(s)-u(t))\left(\overline{\frac{u(s)-u(t)}{s-t}}\right) + 2\mathrm{Re}\left[\Delta u(t)\left(\overline{\frac{u(s)-u(t)}{s-t}} - \overline{u'(t)}\right)\right]\right\}dx.$$

Deste modo

$$|a(s)| \le \int_\Omega \left[|\Delta(u(s)-u(t))|\left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right| + 2|\Delta u(t)|\left|\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u'(t)\right|\right]dx.$$

Multiplicando e dividindo cada termo do lado direito por $\sqrt{V}$ e aplicando a desigualdade de Hölder, obtém-se

$$\begin{aligned}
|a(s)| \le \|\Delta(u(s)-u(t))\|_{L^2(\Omega,1/V)} &\left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right\|_{L^2(\Omega,V)} \\
&+ 2\|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega,1/V)}\left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u'(t)\right\|_{L^2(\Omega,V)}.
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\|\Delta w\|_{L^2(\Omega,1/V)} = \|\mathbb{A}w\|_{L^2(\Omega,V)} \le \|w\|_{D(\mathbb{A})}$, segue que

$$\begin{aligned}
|a(s)| \le \|u(s)-u(t)\|_{D(\mathbb{A})} &\left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right\|_{L^2(\Omega,V)} \\
&+ 2\|u(t)\|_{D(\mathbb{A})}\left\|\frac{u(s)-u(t)}{s-t} - u'(t)\right\|_{L^2(\Omega,V)}.
\end{aligned}$$

Como u é contínua com valores em $D(\mathbb{A})$ e diferenciável com valores em $L^2(\Omega, V)$, ao tomar o limite quando $s \to t$ obtemos que $a(s) \to 0$, o que comprova (3.2).

Finalmente, para verificar a continuidade de J', usando um raciocínio análogo temos

$$\begin{aligned} |J'(s) - J'(t)| &\leq 2 \int_\Omega \Big[|\Delta(u(s) - u(t))| \, |u'(s)| + |\Delta u(t)| \, |u'(s) - u'(t)| \Big] dx \\ &\leq 2 \|u(s) - u(t)\|_{D(\mathbb{A})} \|u'(s)\|_{L^2(\Omega, V)} + \|u(t)\|_{D(\mathbb{A})} \|u'(s) - u'(t)\|_{L^2(\Omega, V)}. \end{aligned}$$

Assim, pela continuidade de u em $D(\mathbb{A})$ e da sua derivada em $L^2(\Omega, V)$, ambos termos do lado direito tendem a zero quando $s \to t$, implicando que J' é contínua em t. $\square$

Teorema 3.2 (Existência global)**.** *Suponha que V satisfaça as hipóteses* **V1** *e* **V2***, e considere as seguintes suposições sobre g:*

h1 *A aplicação $g : L^2(\Omega, V) \to L^2(\Omega, V)$ satisfaz a condição local de Lipschitz, ou seja, para cada $M > 0$ existe uma constante positiva $L(M)$ tal que*

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega, V)} \leq L(M) \|u - v\|_{L^2(\Omega, V)},$$

para todo $u, v \in L^2(\Omega, V)$ com $\|u\|_{L^2(\Omega, V)}, \|v\|_{L^2(\Omega, V)} \leq M$.

h2 *Existe um funcional $G : L^2(\Omega, V) \to \mathbb{R}$ cuja restrição a $H_0^1(\Omega, V)$ é completamente contínua. Além disso, ao considerarmos $L^2(\Omega, V)$ como espaço de Hilbert real,*

$$L^2(\Omega, V) := \left(L^2(\Omega, V), +, .\mathbb{R}, \|\cdot\|_{L^2(\Omega, V)}, (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega, V), \mathbb{R}} \right),$$

onde o produto interno real é

$$(u, v)_{L^2(\Omega, V), \mathbb{R}} := \operatorname{Re}(u, v)_{L^2(\Omega, V)},$$

temos $G \in C^1(L^2(\Omega, V), \mathbb{R})$ e

$$G'(u)v = (g(u), v)_{L^2(\Omega, V), \mathbb{R}}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega, V).$$

h3 *Para todo $u \in L^2(\Omega, V)$ tem-se*

$$\operatorname{Re}(g(u), iu)_{L^2(\Omega, V)} = 0.$$

Além disso, considere o funcional de energia $E : H_0^1(\Omega, V) \to \mathbb{R}$ definido por

$$E(u) := \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - G(u). \tag{3.3}$$

Então, para todo dado inicial $\varphi \in L^2(\Omega, V)$ existe uma única solução generalizada global $u \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega, V))$ tal que

$$u(t) = \mathscr{T}(t)\varphi + i \int_0^t \mathscr{T}(t-s)g(u(s))ds. \tag{3.4}$$

Além disso, as seguintes propriedades são válidas:

(a) Lei da conservação de massa: para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}.$$

(b) Se $\varphi \in D(\mathbb{A})$, então u é a única solução clássica global do problema (P), ou seja,

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, D(\mathbb{A})) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega, V)) \\ i\,\partial_t u + {}_V\Delta u + g(u) = 0 \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{3.5}$$

(c) Se $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, então u é a única H_0^1-solução clássica global do problema (P) e satisfaz a lei da conservação de energia: para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$E(u(t)) = E(\varphi).$$

Demonstração. O problema (P) pode ser reformulado na forma abstrata em $L^2(\Omega, V)$ como

$$\begin{cases} u'(t) = \mathbb{A}u(t) + ig(u) \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

As hipóteses **h1** e **h3** garantem que esse problema satisfaz as condições do Corolário 2.10, considerando $H = L^2(\Omega, V)$. Dessa forma, as conclusões dos resultados (3.4), (a) e (b) seguem-se imediatamente. Finalmente, para provar (c), procederemos em quatro passos.

Passo 1. *Conservação de energia para dados iniciais em $D(\mathbb{A})$.*

Suponha que $\varphi \in D(\mathbb{A})$, e seja u a solução do problema (3.5). Tomando o produto interno da equação de Schrödinger semilinear com $u'(t)$ no espaço $L^2(\Omega, V)$, obtemos

$$i\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} + ({}_V\Delta u(t), u'(t))_{L^2(\Omega,V)} + (g(u(t)), u'(t))_{L^2(\Omega,V)} = 0.$$

Ao considerar a parte real dessa identidade, obtemos

$$\mathrm{Re}({}_V\Delta u(t), u'(t))_{L^2(\Omega,V)} + \mathrm{Re}(g(u(t)), u'(t))_{L^2(\Omega,V)} = 0.$$

Do Lema 3.4, segue que

$$\operatorname{Re}({}_V\Delta u(t), u'(t))_{L^2(\Omega,V)} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, pela hipótese **h2** e a regra da cadeia, temos

$$\operatorname{Re}(g(u(t)), u'(t))_{L^2(\Omega,V)} = (g(u(t)), u'(t))_{L^2(\Omega,V),\mathbb{R}} = G'(u(t))u'(t) = \frac{d}{dt}G(u(t)).$$

Assim, concluímos que

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}G(u(t)) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a função $E(u(\cdot))$ é constante, o que implica que $E(u(t)) = E(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Passo 2. *Desigualdade de energia para dados iniciais em $H^1_0(\Omega, V)$*

Seja $\varphi \in H^1_0(\Omega, V)$. Pela densidade de $D(\mathbb{A})$ em $H^1_0(\Omega, V)$, existe uma sequência

$$(\varphi_n) \subset D(\mathbb{A}) \quad \text{tal que} \quad \varphi_n \to \varphi \quad \text{em } H^1_0(\Omega, V). \tag{3.6}$$

Em particular,

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{H^1(\Omega,V)} < \infty.$$

Denotem-se por u e u_n as soluções generalizadas dadas por (3.4), associadas aos dados iniciais φ e φ_n, respectivamente. Assim, pelo Passo 1, segue que

$$E(u_n(t)) = E(\varphi_n), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Gostaríamos de passar ao limite e, assim, obter a desigualdade de energia. Mas para isso, como a norma é fracamente semicontínua inferiormente e G completamente contínua, basta garantir que, a menos de subsequência, $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ em $H^1_0(\Omega, V)$ para todo t. Para estabelecer essa convergência, recorreremos ao lema de compacidade 3.3, cuja aplicação requer a verificação prévia das seguintes propriedades:

(i) $u_n(t) \in H^1_0(\Omega, V)$, *para todo* $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$;

(ii) *Existe uma constante* K *tal que* $\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \le K$, *para todo* $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$;

(iii) $(u_n) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega, V))$ *é limitada.*

De fato, por (b), temos $u_n(t) \in D(\mathbb{A})$, o que garante (i). Quanto ao segundo item, a lei de conservação de massa implica que

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega,V)} \leq M, \quad \forall t \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, a sequência $(G(u_n(t)))$ é uniformemente limitada em t, pois como

$$\begin{aligned}
|G(u_n(t))| - |G(0)| &\leq |G(u_n(t)) - G(0)| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} G(su_n(t))\, ds \right| \\
&= \left| \int_0^1 G'(su_n(t)) u_n(t)\, ds \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \operatorname{Re} \left(g(su_n(t)), u_n(t) \right)_{L^2(\Omega,V)} \right| ds \\
&\leq \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega,V)} \int_0^1 \|g(su_n(t))\|_{L^2(\Omega,V)}\, ds \\
&\leq M \left[\int_0^1 \|g(su_n(t)) - g(0)\|_{L^2(\Omega,V)}\, ds + \|g(0)\|_{L^2(\Omega,V)} \right] \\
&\leq M \left[L(M) \int_0^1 \|su_n(t)\|_{L^2(\Omega,V)}\, ds + \|g(0)\|_{L^2(\Omega,V)} \right] \\
&\leq M \left(L(M)M + \|g(0)\|_{L^2(\Omega,V)} \right),
\end{aligned}$$

segue que existe uma constante c_1, independente de t e n, tal que

$$|G(u_n(t))| \leq c_1, \quad \forall t \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, a conservação de energia (3.7) implica que

$$\|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} - \|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} - 2G(u_n(t)) = \|\varphi_n\|^2_{H^1(\Omega,V)} - \|\varphi_n\|^2_{L^2(\Omega,V)} - 2G(\varphi_n).$$

Juntando isso com a conservação de massa e com a condição inicial $u_n(0) = \varphi_n$, obtemos

$$\|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi_n\|^2_{H^1(\Omega,V)} + 2G(u_n(t)) - 2G(u_n(0)), \quad \forall t \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Consequentemente, para todo $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

$$\|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} \leq M^2 + 4c_1 =: K^2,$$

provando (ii). Por fim, como u_n é solução do problema (3.5) com dado inicial φ_n, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} &\leq \|{}_V\Delta u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + \|g(u_n(t))\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\
&\leq \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} + \|g(u_n(t))\|_{L^2(\Omega,V)},
\end{aligned}$$

onde usamos (1.26) e (1.17). Por outro lado, pelo item anterior,

$$\|u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq K,$$

e, como g que satisfaz **h1**, tem-se

$$\begin{aligned}\|g(u_n(t))\|_{L^2(\Omega,V)} &\leq \|g(u_n(t)) - g(0)\|_{L^2(\Omega,V)} + \|g(0)\|_{L^2(\Omega,V)} \\ &\leq L(M)\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega,V)} + \|g(0)\|_{L^2(\Omega,V)} \\ &\leq L(M)M + \|g(0)\|_{L^2(\Omega,V)} =: c_2.\end{aligned}$$

Assim, combinando as estimativas anteriores, concluímos que

$$\|u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)}\,,\ \|\partial_t u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq K + c_2, \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R},$$

o que finaliza a prova de (iii).

Prosseguindo com a demonstração, fixado um intervalo aberto e limitado I, observa-se que, devido aos itens (i)-(iii), a sequência (u_n) satisfaz as hipóteses do Lema 3.3 em I. Portanto, existe uma função

$$v \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega,V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega,V))$$

tal que, a menos de subsequência, para todo $t \in \bar{I}$,

$$u_n(t) \rightharpoonup v(t) \quad \text{em } H_0^1(\Omega,V), \quad \text{e portanto em } L^2(\Omega,V). \tag{3.9}$$

Além disso, pelo Teorema 2.12, sabemos que as soluções generalizadas dependem continuamente dos dados iniciais, ou seja, $u_n \to u$ em $C(\bar{I}, L^2(\Omega,V))$. Em particular,

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{em } L^2(\Omega,V), \quad \text{para todo } t \in \bar{I}.$$

Assim, pela unicidade do limite, obtemos $v = u$ em $\bar{I}$. Por fim, passando ao limite inferior em (3.8) e usando os limites (3.6) e (3.9), juntamente como o fato de G ser completamente contínua e a norma fracamente semicontínua inferiormente, obtemos, para todo $t \in I$,

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} \leq \liminf \|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} + 2G(u(t)) - 2G(u(0)).$$

Juntando isso com a lei de conservação de massa e a condição inicial $u(0) = \varphi$, obtemos

$$\begin{aligned}2E(u(t)) &= \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(u(t)) - \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} \\ &\leq \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) - \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega,V)} \\ &= 2E(\varphi).\end{aligned}$$

Finalmente, como I é arbitrário, resulta que

$$E(u(t)) \leq E(\varphi), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, como $u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$, o Corolário 3.1 assegura que u é fracamente contínua de I em $H_0^1(\Omega, V)$, e essa continuidade se estende a todo $\mathbb{R}$.

Passo 3. *Conservação de energia para dados iniciais em $H_0^1(\Omega, V)$.*

Suponha que $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ e seja u a solução generalizada do problema (3.4) associada ao dado inicial φ. Pelo Passo 2 sabemos que u satisfaz

$$u(t) \in H_0^1(\Omega, V) \qquad \text{e} \qquad E(u(t)) \leq E(\varphi), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, considere a função definida por $v(s) := u(s+t)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Usando a representação integral de u, é imediato verificar que v é a solução generalizada associada ao dado inicial $u(t)$. Assim, pelo Passo 2,

$$E(v(s)) \leq E(u(t)), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $s = -t$, obtemos $E(\varphi) \leq E(u(t))$, concluindo assim a prova.

Passo 4. *A função u é a única H_0^1-solução clássica global*

Com o fim de aplicar o Teorema 3.1, seja u a única solução generalizada com dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$. A partir da representação integral (3.4) e do Lema 2.9, podemos expressar

$$u(t) = T(t)\varphi + i \int_0^t T(t-s) g(u(s)) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, pelos Passos 2 e 3, sabemos que u é fracamente contínua de $\mathbb{R}$ em $H_0^1(\Omega, V)$ e que satisfaz a leis de conservação de massa e energia, as quais implicam que

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2G(u(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Para mostrar que $u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega, V))$, fixe $t \in \mathbb{R}$ e seja (t_n) uma sequência tal que $t_n \to t$. Como u é fracamente contínua, temos $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ em $H_0^1(\Omega, V)$. Além disso, por (3.10),

$$\|u(t_n)\|^2_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2G(u(t_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite em ambos os lados da igualdade acima, e usando o fato de que G é completamente contínua, obtemos

$$\lim \|u(t_n)\|^2_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2G(u(t)) = \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)}.$$

Portanto, da convergência fraca e da convergência das normas, e sabendo que $H_0^1(\Omega, V)$ é uniformemente convexo, concluímos que

$$u(t_n) \to u(t) \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V).$$

o que completa a demonstração da continuidade de u. Finalmente, note que a função $g : H_0^1(\Omega, V) \to H^{-1}(\Omega, V)$ é contínua e limitada em conjuntos limitados, pois para quaisquer $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|u\|_{H^1(\Omega,V)}, \|v\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M$, a hipótese **h1** implica

$$
\begin{aligned}
\|g(u) - g(v)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} &\leq \|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega,V)} \\
&\leq L(M)\|u - v\|_{L^2(\Omega,V)} \\
&\leq L(M)\|u - v\|_{H^1(\Omega,V)}.
\end{aligned}
$$

Assim, satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.1, concluímos que u é uma H_0^1-solução clássica do problema (P). Finalmente, a unicidade dessa solução segue diretamente da unicidade da solução generalizada associada. □

Um fato interessante é que os operadores $\mathscr{T}(t)$ são também isometrias em $H_0^1(\Omega, V)$.

Corolário 3.2. *Para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ temos*

$$
\|\mathscr{T}(t)\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.
$$

Demonstração. Ao se considerar $g = 0$, com primitiva $G = 0$, no teorema anterior, a solução generalizada dada por (3.4) reduz-se a $u(t) = \mathscr{T}(t)\varphi$. Assim, as leis de conservação de massa e energia, juntamente com a identidade

$$
\| \cdot \|_{H^1(\Omega,V)}^2 = 2E(\cdot) + \| \cdot \|_{L^2(\Omega,V)}^2,
$$

garantem o resultado. □

3.4 Propriedades do resolvente

Com o objetivo de generalizar o teorema anterior e estabelecer um resultado que se aplique a diferentes não linearidades e que funcione bem tanto para domínios limitados quanto para $\Omega = \mathbb{R}^N$, achamos conveniente regularizar a não linearidade g aplicando o operador $(I - \varepsilon\, {}_V\Delta)^{-1}$, com $\varepsilon > 0$. Nesta seção, apresentamos algumas propriedades relevantes desse operador.

Pela teoria estabelecida na Seção 1.3, sabemos que o operador ${}_V\Delta$ em $H^{-1}(\Omega, V)$ é densamente definido, visto que é auto-adjunto, e dissipativo, uma vez que por (1.17)

$$
\operatorname{Re}({}_V\Delta u, u)_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|u\|_{H^{-1}(\Omega,V)}^2 - \|u\|_{L^2(\Omega,V)}^2 \leq 0.
$$

Além disso, pelo Lema de Lax-Milgram, para cada $f \in H^{-1}(\Omega, V)$ existe um único elemento $u \in H_0^1(\Omega, V)$ tal que $-{}_V\Delta u + u = f$ em $H^{-1}(\Omega, V)$, com

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|u\|_{H^1(\Omega,V)} = \left\|(I - {}_V\Delta)^{-1} f\right\|_{H^1(\Omega,V)}. \tag{3.11}$$

Isso mostra que o operador $I - {}_V\Delta$ é sobrejetivo. Consequentemente, pelos Teoremas de Lumer-Phillips e Hille-Yosida, para todo $\lambda > 0$, o operador resolvente $R(\lambda) = R(\lambda, {}_V\Delta)$ existe e é linear limitado. Com isso, para cada $\lambda \geq 1$, definimos o operador

$$J_\lambda : H^{-1}(\Omega, V) \to H_0^1(\Omega, V) \quad \text{por} \quad J_\lambda := \lambda\, R(\lambda) = \lambda(\lambda I - {}_V\Delta)^{-1}.$$

Isto é, para todo $f \in H^{-1}(\Omega, V)$, $u = J_\lambda f$ é a única solução da equação

$$-{}_V\Delta u + \lambda u = \lambda f \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V). \tag{3.12}$$

Pelo Teorema de Hille-Yosida, o resolvente $R(\lambda)$ possui norma limitada por λ^{-1}. Assim, J_λ é um operador linear e limitado de $H^{-1}(\Omega, V)$ em si mesmo, com

$$\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega,V),H^{-1}(\Omega,V))} \leq 1. \tag{3.13}$$

Também, é limitado de $H^{-1}(\Omega, V)$ em $H_0^1(\Omega, V)$, já que, tomando o produto de dualidade da equação (3.12) com $\bar{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^1(\Omega,V)}^2 &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda\|u\|_{L^2(\Omega,V)}^2 \\
&= \lambda\langle f, \bar{u}\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} \\
&\leq \lambda\|f\|_{H^{-1}(\Omega,V)}\|u\|_{H^1(\Omega,V)},
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\left\|J_\lambda\right\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega,V),H_0^1(\Omega,V))} \leq \lambda.$$

Ainda mais, J_λ é limitado de $L^2(\Omega, V)$ em si mesmo. De fato, para $f \in L^2(\Omega, V)$, ao tomar produto de dualidade da equação (3.12) com $\bar{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda\|u\|_{L^2(\Omega,V)}^2 &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda\|u\|_{L^2(\Omega,V)}^2 \\
&= \lambda\langle f, \bar{u}\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} \\
&= \lambda(f, u)_{L^2(\Omega,V)} \\
&\leq \lambda\|f\|_{L^2(\Omega,V)}\|u\|_{L^2(\Omega,V)},
\end{aligned}$$

e assim,

$$\left\|J_\lambda\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega,V),L^2(\Omega,V))} \leq 1.$$

Para mostrar que J_λ é limitado de $H_0^1(\Omega, V)$ em si mesmo, considere $f \in H_0^1(\Omega, V)$. Um cálculo direto mostra que o operador laplaciano com peso comuta com o resolvente, ou seja,

$$ {}_V\Delta\, R(\lambda) f = R(\lambda)\, {}_V\Delta f, $$

o que conduz a

$$ (I - {}_V\Delta)\, J_\lambda f = J_\lambda\, (I - {}_V\Delta) f. \tag{3.14} $$

Logo, por (3.11) e (3.13),

$$ \begin{aligned} \|J_\lambda f\|_{H^1(\Omega,V)} &= \left\|(I - {}_V\Delta)^{-1}(I - {}_V\Delta) J_\lambda f\right\|_{H^1(\Omega,V)} \\ &= \left\|(I - {}_V\Delta) J_\lambda f\right\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\ &= \left\|J_\lambda (I - {}_V\Delta) f\right\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\ &\leq \|(I - {}_V\Delta) f\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\ &= \left\|(I - {}_V\Delta)^{-1}(I - {}_V\Delta) f\right\|_{H^1(\Omega,V)} \\ &= \|f\|_{H^1(\Omega,V)}, \end{aligned} $$

mostrando assim

$$ \|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega,V),H_0^1(\Omega,V))} \leq 1. $$

Com o objetivo de estabelecer estimativas para $J_\lambda f$ em $L^p(\Omega, V)$, começamos por demonstrar um lema técnico que servirá como ferramenta auxiliar do próximo resultado.

Lema 3.5. *Suponha que $h \in C^\infty([0,\infty), \mathbb{R})$ e que existem constantes c_1 e c_2 tais que*

$$ |h(s)| \leq c_1 \qquad e \qquad |h'(s)| s \leq c_2, \quad \forall s \geq 0. \tag{3.15} $$

Então, para todo função $u \in H_0^1(\Omega, V)$ e todo $k = 1, \ldots, N$ temos

$$ v := h(|u|^2) u \in H_0^1(\Omega, V) \qquad e \qquad \partial_k v = 2h'(|u|^2)\, \mathrm{Re}\,(u\, \partial_k \bar{u})\, u + h(|u|^2) \partial_k u. $$

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega, V)$ e fixemos $k \in \{1, \ldots, N\}$. Definimos

$$ w_k := 2h'(|u|^2)\, \mathrm{Re}\,(u\, \partial_k \bar{u})\, u + h(|u|^2) \partial_k u. $$

Considere uma sequência $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ em $H_0^1(\Omega, V)$. Em particular,

$$ \varphi_n \to u \quad \text{em } L^2(\Omega, V) \qquad \text{e} \qquad \partial_k \varphi_n \to \partial_k u \quad \text{em } L^2(\Omega). $$

Por resultados da teoria da medida existem funções $f \in L^2(\Omega, V)$ e $f_k \in L^2(\Omega)$ tais que, a menos de subsequência,

$$ \varphi_n(x) \to u(x), \quad \partial_k \varphi_n(x) \to \partial_k u(x), \quad |\varphi_n| \leq f \quad \text{e} \quad |\partial_k \varphi_n| \leq f_k, \quad \text{q.t.p. em } \Omega. $$

Por outro lado, pelas suposições sobre φ_n e h, a função composta $v_n := h(|\varphi_n|^2)\varphi_n$ pertence a $C_0^\infty(\Omega)$ e, aplicando a regra da cadeia, temos

$$\partial_k v_n = 2h'(|\varphi_n|^2)\,\mathrm{Re}\,(\varphi_n\,\partial_k\,\bar{\varphi}_n)\,\varphi_n + h(|\varphi_n|^2)\,\partial_k\varphi_n.$$

Consequentemente, a continuidade de h e de sua derivada conduzem a

$$v_n(x) \to v(x) \qquad \text{e} \qquad \partial_k v_n(x) \to w_k(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

enquanto que as condições (3.15) implicam que, para todo n,

$$|v_n| \le c_1 f \qquad \text{e} \qquad |\partial_k v_n| \le (2c_2 + c_1)|\partial_k\varphi_n| \le (2c_2 + c_1) f_k.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada em espaços $L^p(\Omega,\mu)$, concluímos que

$$v \in L^2(\Omega, V), \;\; w_k \in L^2(\Omega), \quad v_n \to v \quad \text{em } L^2(\Omega,V) \quad \text{e} \quad \partial_k v_n \to w_k \quad \text{em } L^2(\Omega),$$

o que é suficiente para garantir que $v \in H_0^1(\Omega, V)$ e que $\partial_k v = w_k$. □

Lema 3.6. *Assuma que $\lambda > 0$ e $p \in [1,2]$. Se as funções $u \in H_0^1(\Omega,V)$ e $f \in L^p(\Omega,V)$ satisfazem a equação*

$$\langle -_V\Delta u + \lambda u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = \lambda \int_\Omega f v\, V dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, V), \tag{3.16}$$

então

$$u \in L^p(\Omega,V) \qquad e \qquad \|u\|_{L^p(\Omega,V)} \le \|f\|_{L^p(\Omega,V)}.$$

Demonstração. O caso $p = 2$ já foi mostrado anteriormente. Suponha, portanto, que $p < 2$ e seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Considere a função $h_\varepsilon \in C^\infty([0,\infty))$ dada por

$$h_\varepsilon(s) := (\varepsilon + s)^{(p-2)/2}, \quad \text{com derivada} \quad h_\varepsilon'(s) = \frac{p-2}{2}\cdot\frac{h_\varepsilon(s)}{\varepsilon+s}.$$

Como $p - 2 \in [-1, 0)$, segue que h_ε' é negativa e

$$h_\varepsilon(s) + 2h_\varepsilon'(s)s \ge h_\varepsilon(s)\left(1 - \frac{s}{\varepsilon+s}\right) \ge 0. \tag{3.17}$$

Por outro lado, é imediato que a função h_ε satisfaz as hipóteses do Lema 3.5, pois tanto $h_\varepsilon(s)$ quanto $h_\varepsilon'(s)s$ tendem a zero quando $s \to \infty$, e então

$$v_\varepsilon := h_\varepsilon(|u|^2)u \in H_0^1(\Omega, V) \qquad \text{e} \qquad \partial_k v_\varepsilon = 2h_\varepsilon'(|u|^2)\,\mathrm{Re}\,(u\,\partial_k\bar{u})\,u + h_\varepsilon(|u|^2)\,\partial_k u.$$

Logo, ao tomar $v = \bar{v}_\varepsilon$ como função teste na equação (3.16), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v}_\varepsilon \, dx + \lambda \int_\Omega h_\varepsilon(|u|^2)|u|^2 V dx = \lambda \int_\Omega f \bar{v}_\varepsilon V dx.$$

Daí, extraindo a parte real, resulta

$$\sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \mathrm{Re}(\partial_k u \, \partial_k \bar{v}_\varepsilon) dx + \lambda \int_\Omega h_\varepsilon(|u|^2)|u|^2 V dx = \lambda \int_\Omega \mathrm{Re}(f \bar{v}_\varepsilon) V dx. \tag{3.18}$$

Note que a primeira parcela do lado esquerdo é não negativa, pois

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(\partial_k u \, \partial_k \bar{v}_\varepsilon) &= 2h'_\varepsilon(|u|^2) \left[\mathrm{Re}\,(u \, \partial_k \bar{u})\right]^2 + h_\varepsilon(|u|^2) \, |\partial_k u|^2 \\
&\geq \left(2h'_\varepsilon(|u|^2)|u|^2 + h_\varepsilon(|u|^2)\right) |\partial_k u|^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos que h'_ε é negativa e que $|Re(u\partial_k \bar{u})| \leq |u||\partial_k u|$, enquanto a segunda segue de (3.17). Portanto, (3.18) implica a seguinte desigualdade:

$$\int_\Omega h_\varepsilon(|u|^2)|u|^2 \, V dx \leq \int_\Omega \mathrm{Re}(f \, \bar{v}_\varepsilon) V dx \leq \int_\Omega |f| \, h_\varepsilon(|u|^2)|u| \, V dx.$$

Para estimar a última integral, note que $h_\varepsilon(s^2) \leq s^{p-2}$, o que implica que

$$h_\varepsilon(s^2) s \leq \left(h_\varepsilon(s^2) \, s^2\right)^{(p-1)/p}.$$

Dessa forma

$$\int_\Omega h_\varepsilon(|u|^2) \, |u|^2 V dx \leq \int_\Omega |f| \, \left(h_\varepsilon(|u|^2) \, |u|^2\right)^{(p-1)/p} V dx.$$

Aplicando agora a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega h_\varepsilon(|u|^2) \, |u|^2 V dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega,V)} \left(\int_\Omega h_\varepsilon(|u|^2) \, |u|^2 V dx\right)^{(p-1)/p},$$

o que nos dá

$$\int_\Omega h_\varepsilon(|u|^2)|u|^2 V dx \leq \|f\|^p_{L^p(\Omega,V)}.$$

Portanto, ao tomar o limite quando $\varepsilon \to 0$ e aplicar o lema de Fatou, juntamente com a convergência pontual $h_\varepsilon(|u|^2) \to |u|^{p-2}$, obtemos

$$\int_\Omega |u|^p V dx \leq \|f\|^p_{L^p(\Omega,V)},$$

de onde a conclusão do teorema segue imediatamente. □

Observação 3.2. O resultado anterior pode ser generalizado para o caso em que $p > 2$ por meio de um argumento análogo, utilizando a função

$$h_\varepsilon(s) = \left(\frac{s^2}{1+\varepsilon s^2}\right)^{(p-2)/2}.$$

A única diferença, neste caso, é que é necessário verificar com cuidado que v_ε pertence a $H_0^1(\Omega, V)$, uma vez que o Lema 3.5 não pode ser aplicado diretamente para assegurar essa propriedade.

A situação que nos interessa é a seguinte:

Corolário 3.3. *Suponha que $H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow L^p(\Omega, V)$ para algum $p \geq 2$. Então,*

$$\|J_\lambda u\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq \|u\|_{L^{p'}(\Omega,V)}, \quad \text{para todo } u \in L^{p'}(\Omega, V) \text{ e } \lambda \geq 1.$$

Demonstração. Dado qualquer $u \in L^{p'}(\Omega, V)$, segue de (1.18) que $u \in H^{-1}(\Omega, V)$. Assim, pela definição de J_λ e usando (1.19), concluímos que $J_\lambda u \in H_0^1(\Omega, V)$ e

$$\langle -_V\Delta J_\lambda u + \lambda J_\lambda u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = \lambda\langle u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = \lambda \int_\Omega uvV\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, V).$$

Portanto, basta aplicar o Lema 3.6 com p como sendo $p' \leq 2$ para obter o resultado. □

A seguir, apresentaremos resultados de convergência que envolvem o operador J_n, os quais desempenham um papel fundamental na generalização do teorema anterior.

Lema 3.7. *Seja X um dos espaços $H^{-1}(\Omega, V)$ ou $H_0^1(\Omega, V)$. Então, para todo $u \in X$,*

$$J_n u \to u \quad \text{em } X \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Demonstração. Considere $X = H^{-1}(\Omega, V)$ e suponha inicialmente que $u \in H_0^1(\Omega, V)$. Nesse caso, temos

$$nR(n)u - u = R(n)_V\Delta u,$$

de modo que

$$\|J_n u - u\|_{H^{-1}(\Omega,V)} = \|R(n)_V\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq \frac{1}{n} \cdot \|_V\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \to 0.$$

Suponha agora que $u \in X$ e seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $H_0^1(\Omega, V)$ é denso em X, existe $v \in H_0^1(\Omega, V)$ tal que

$$\|u - v\|_{H^{-1}(\Omega,V)} < \varepsilon.$$

Assim, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \|J_n u - u\|_{H^{-1}(\Omega,V)} &\leq \|J_n(u-v)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + \|J_n v - v\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + \|v - u\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\ &\leq 2\varepsilon + \|J_n v - v\|_{H^{-1}(\Omega,V)}. \end{aligned}$$

Passando ao limite superior em n e usando o resultado do caso anterior, segue

$$\limsup_{n\to\infty} \|J_n u - u\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq 2\varepsilon,$$

e, ao fazer $\varepsilon \to 0$, obtemos o resultado desejado. Por fim, no caso $X = H_0^1(\Omega, V)$, procede-se como em (3.14) para obter

$$(I - {}_V\Delta)J_n u = J_n(I - {}_V\Delta)u.$$

Dessa forma, aplicando a fórmula (3.11) e usando o caso anterior, temos

$$\begin{aligned}
\|J_n u - u\|_{H^1(\Omega,V)} &= \|(I - {}_V\Delta)(J_n u - u)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\
&= \|J_n(I - {}_V\Delta)u - (I - {}_V\Delta)u\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \to 0,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Lema 3.8. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $H^{-1}(\Omega, V)$. Então*

$$J_n u_n - u_n \rightharpoonup 0 \quad \textit{em } H^{-1}(\Omega, V) \quad \textit{quando } n \to \infty.$$

Demonstração. Como (u_n) é limitada, a sequência $v_n = J_n u_n$ também é limitada e, por definição satisfaz

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \cdot {}_V\Delta v_n.$$

Seja $w \in H^{-1}(\Omega, V)$ arbitrário. Por densidade, dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu \in H_0^1(\Omega, V)$ tal que

$$\|w - \nu\|_{H^{-1}(\Omega,V)} < \varepsilon.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 1.6, temos que

$$\begin{aligned}
|(v_n - u_n, w)_{H^{-1}(\Omega,V)}| &\leq |(v_n - u_n, w - \nu)_{H^{-1}(\Omega,V)}| + |(v_n - u_n, \nu)_{H^{-1}(\Omega,V)}| \\
&\leq \|v_n - u_n\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \|w - \nu\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + n^{-1} \left|({}_V\Delta v_n, \nu)_{H^{-1}(\Omega,V)}\right| \\
&\leq \varepsilon \cdot \|v_n - u_n\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + n^{-1} \left|(v_n, {}_V\Delta\nu)_{H^{-1}(\Omega,V)}\right| \\
&\leq \varepsilon \cdot \|v_n - u_n\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + n^{-1} \|v_n\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \|{}_V\Delta\nu\|_{H^{-1}(\Omega,V)}.
\end{aligned}$$

Como as sequências (u_n) e (v_n) são limitadas, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} |(v_n - u_n, w)_{H^{-1}(\Omega,V)}| \leq \varepsilon \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n - u_n\|_{H^{-1}(\Omega,V)}.$$

Finalmente, fazendo $\varepsilon \to 0$,

$$(v_n - u_n, w)_{H^{-1}(\Omega,V)} \to 0, \quad \text{para todo } w \in H^{-1}(\Omega, V),$$

o que implica que $v_n - u_n \rightharpoonup 0$. □

3.5 Existência local

O Teorema 3.2 é muito eficaz, mas sua aplicação fica limitada a não linearidades bastante regulares. Na prática, ele não cobre casos em que $g(u) = g(\cdot, u(\cdot))$ apresenta um crescimento que vai além do sublinear. Nesta seção, buscamos melhorar o teorema anterior sob suposições mais fracas para funções g com crescimento maior.

Observe que as condições **h2** e **h3** são essenciais para garantir as leis de conservação da massa e da energia, enquanto **h1** fornece informações sobre o comportamento da não linearidade. Note-se ainda que **h3** é automaticamente satisfeita quando $\mathrm{Im}(g(u)\bar{u}) = 0$. Motivados por essa observação, passamos a considerar as seguintes hipóteses:

H1 *Existem $p, r \in [2, 2^*)$ para $N \geq 2$ e $p, r \in [2, \infty]$ para $N = 1$, tais que*

$$g \in C\left(H_0^1(\Omega, V), L^{p'}(\Omega, V)\right)$$

e tal que para cada $M > 0$ existe uma constante positiva $C(M)$ tal que

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq C(M)\|u - v\|_{L^r(\Omega,V)},$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|u\|_{H^1(\Omega,V)}, \|v\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M$.

H2 *Existe um funcional completamente contínuo $G : H_0^1(\Omega, V) \to \mathbb{R}$. Além disso, ao considerarmos $H_0^1(\Omega, V)$ como espaço de Banach real,*

$$H_0^1(\Omega, V) := \left(H_0^1(\Omega, V), +, .\mathbb{R}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega,V)}\right),$$

temos $G \in C^1(H_0^1(\Omega, V), \mathbb{R})$ e

$$G'(u)v = \mathrm{Re}\langle g(u), \bar{v}\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega, V).$$

H3 *Para todo $u \in H_0^1(\Omega, V)$, tem-se*

$$\mathrm{Im}(g(u)\bar{u}) = 0, \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

No que concerne ao peso V, é essencial que sua escolha assegure simultaneamente a imersão $H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow L^s(\Omega, V)$ para $s = r, p$, bem como a validade de uma desigualdade do tipo Gagliardo-Nirenberg. Portanto, nesta seção, consideramos apenas os pesos que satisfazem a seguinte condição:

H4 *Seja $V : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo* **V1** *e* **V2**, *ou seja, contínua e com ínfimo positivo. Suponha ainda que existem $q, \varrho \in [2, 2^*)$, tais que*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega, V) \qquad e \qquad L^\varrho(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega, V). \tag{3.19}$$

Considerando tais condições, formulamos a seguir o teorema principal deste capítulo.

Teorema 3.3 (Existência local)**.** *Suponha que as funções g, G e V satisfazem* **H1**-**H4**. *Então, para cada $M > 0$, existe uma constante $T_M > 0$ tal que, para todo dado inicial*

$$\varphi \in H_0^1(\Omega, V) \quad com \quad \|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M,$$

existe uma H_0^1-solução forte u do problema (P) *no intervalo $I = (-T_M, T_M)$ satisfazendo*

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \quad para\ todo\ t \in \bar{I}.$$

Além disso, u satisfaz a conservação de massa e a desigualdade de energia:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \qquad e \qquad E(u(t)) \leq E(\varphi), \quad para\ todo\ t \in I,$$

onde E é definida como em (3.3).

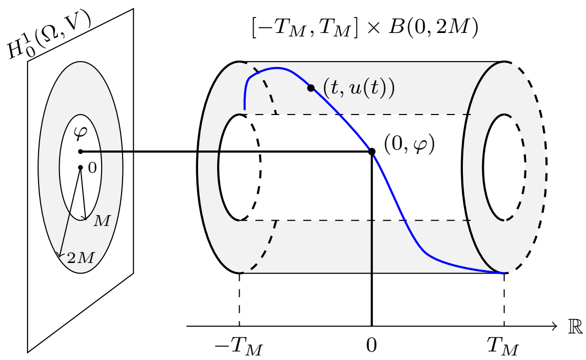

Figura 3.1: Existência local.

Observação 3.3. O Teorema 3.3 garante a existência local de uma H_0^1-solução forte, mas não assegura sua unicidade nem sua regularidade temporal. Infelizmente, as técnicas disponíveis para tratar a unicidade dependem, em geral, da estrutura específica do problema considerado, como é discutido nas Seções 4.3 e 4.4, bem como em [9, Capítulo 4], onde o autor ilustra que as estimativas de Strichartz são a chave para estabelecer a unicidade de certas classes de problemas em $\mathbb{R}^N$ para $V = 1$.

Observação 3.4. O Teorema 3.3 não garante que a solução encontrada seja maximal. Em outras palavras, fora do intervalo $[-T_M, T_M]$ em que a existência é assegurada, a solução obtida pode ser estendida para intervalos maiores.

Antes de passarmos à prova, apresentamos alguns resultados preliminares necessários. Iniciamos destacando que a condição **H4**, juntamente com as imersões de Sobolev [1], garante que

$$H_0^1(\Omega,V) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\varrho}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega,V), \tag{3.20}$$
$$H_0^1(\Omega,V) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega,V). \tag{3.21}$$

Em particular, conforme observado na Seção 1.2, temos

$$L^{p'}(\Omega,V) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega,V). \tag{3.22}$$

Cabe também destacar que essa hipótese não é vazia, como será ilustrado a seguir:

Exemplo 3.1. Existem funções que satisfazem **H4**, por exemplo:

(i) Caso V seja limitado superiormente e inferiormente por uma quantidade positiva, basta considerar $q = p$ e $\varrho = r$. Nesse caso, os espaços $L^p(\Omega,V)$ e $L^p(\Omega)$, assim como também $H^1(\Omega,V)$ e $H^1(\Omega)$, coincidem e possuem normas equivalentes,

(ii) Caso contrário, podemos considerar $q \in (p, 2^*)$ e $\varrho \in (r, 2^*)$ e assumir que

$$V \in L^{q/(q-p)}(\Omega) \cap L^{\varrho/(\varrho-r)}(\Omega),$$

pois, de acordo com [2, Teorema 2.2], as imersões (3.19) ocorrem se, e somente se, V satisfaz essa condição. É importante ressaltar que, nesta situação, o conjunto Ω deve ser limitado, ou ao menos ter medida finita, pois $\|V\|_{L^{q/(q-p)}(\Omega)} \geq \inf V \cdot |\Omega|^{(q-p)/q}$.

(iii) Assim, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, só é admissível considerar o peso V como sendo limitado.

(iv) No Capítulo 4, apresentam-se exemplos de funções g, G e V que satisfazem as hipóteses mencionadas.

Lema 3.9. *Suponha que V satisfaz **V1** e **V2**, e que existem $p, q \in [2, 2^*)$ tais que*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega,V).$$

Então, existe uma constante C tal que, para todo $u \in H_0^1(\Omega,V)$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega,V)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega,V)}^{1-\theta}\|u\|_{L^2(\Omega,V)}^{\theta}, \quad \textit{onde} \quad \theta = 1 - N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right).$$

Demonstração. Pela Desigualdade de Gagliardo-Niremberg [22, Teorema 1.1], existe uma constante C_1 tal que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{1-\theta}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\theta}, \quad \forall u \in H_0^1(\mathbb{R}^N).$$

Usando o argumento do operador de extensão por zero fora de Ω, concluímos que essa desigualdade permanece válida quando substituímos $\mathbb{R}^N$ por Ω. Por fim, combinando esse fato com as imersões contínuas

$$H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow H_0^1(\Omega), \qquad L^2(\Omega, V) \hookrightarrow L^2(\Omega) \qquad \text{e} \qquad L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega, V),$$

obtemos o resultado desejado. $\square$

Lema 3.10. *Suponha que as funções g, G e V satisfaçam* **H1**-**H4**. *Então, após uma possível modificação da função $C(M)$, temos*

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq C(M)\|u - v\|^{\alpha}_{L^2(\Omega,V)}, \tag{3.23}$$

$$|G(u) - G(v)| \leq C(M)\|u - v\|^{\beta}_{L^2(\Omega,V)}, \tag{3.24}$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|u\|_{H^1(\Omega,V)}, \|v\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M$, onde

$$\alpha = 1 - N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varrho}\right) \qquad e \qquad \beta = 1 - N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$$

Demonstração. Aplicando a hipótese **H1** e o Lema 3.9 com $p = r$ e $q = \varrho$, existe uma constante C tal que

$$\begin{aligned}
\|g(u) - g(v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &\leq C(M)\|u - v\|_{L^r(\Omega,V)} \\
&\leq C(M) \cdot C\, \|u - v\|^{1-\alpha}_{H^1(\Omega,V)}\|u - v\|^{\alpha}_{L^2(\Omega,V)} \\
&\leq C(M) \cdot C \cdot (2M)^{1-\alpha}\, \|u - v\|^{\alpha}_{L^2(\Omega,V)},
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade ocorre porque $\alpha \in (0, 1]$.

Em relação à desigualdade em G, a hipótese **H2** implica que

$$\begin{aligned}
|G(u) - G(v)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{ds} G(su + (1-s)v)\, ds\right| \\
&= \left|\int_0^1 \operatorname{Re}\, \langle g(su + (1-s)v), \bar{u} - \bar{v}\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V}\ ds\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|\langle g(su + (1-s)v), \bar{u} - \bar{v}\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V}\right| ds \\
&= \int_0^1 \left|\langle g(su + (1-s)v), \bar{u} - \bar{v}\rangle_{L^{p'}, L^p, V}\right| ds \\
&\leq \int_0^1 \|g(su + (1-s)v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}\, ds\ \cdot\ \|u - v\|_{L^p(\Omega,V)}
\end{aligned}$$

Note agora que, por **H1**, para todo $s \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\|g(su + (1-s)v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &\leq \|g(su + (1-s)v) - g(0)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} + \|g(0)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \\
&\leq C(M)\, \|su + (1-s)v\|_{L^r(\Omega,V)} + \|g(0)\|_{L^{p'}(\Omega,V)},
\end{aligned}$$

Mas pela imersão (3.20), existe uma constante C_r tal que

$$\begin{aligned}\|g(su+(1-s)v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &\leq C(M)\cdot C_r\,\|su+(1-s)v\|_{H^1(\Omega,V)}+\|g(0)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}\\ &\leq C(M)\cdot C_r\cdot M+\|g(0)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}=:C_1.\end{aligned}$$

Além disso, o Lema 3.9 garante a existência de uma constante C tal que

$$\|u-v\|_{L^p(\Omega,V)}\leq C\|u-v\|^{1-\beta}_{H^1(\Omega,V)}\,\|u-v\|^{\beta}_{L^2(\Omega,V)}\leq C\cdot(2M)^{1-\beta}\,\|u-v\|^{\beta}_{L^2(\Omega,V)}.$$

Portanto, combinando as desigualdades anteriores, obtemos

$$|G(u)-G(v)|\leq C_1\cdot C\cdot(2M)^{1-\beta}\,\|u-v\|^{\beta}_{L^2(\Omega,V)},$$

o que conclui a demonstração. □

O lema a seguir nos permitirá demonstrar a lei de conservação da massa.

Lema 3.11. *Seja I um intervalo aberto. Para toda função*

$$u\in L^\infty(I,H^1_0(\Omega,V))\cap W^{1,\infty}(I,H^{-1}(\Omega,V)),$$

a função real $\|u(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega,V)}$ é lipschitziana em $\bar{I}$ e diferenciável em quase todo ponto, com

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)}=2\operatorname{Re}\left\langle u'(t),\overline{u(t)}\right\rangle_{H^{-1},H^1_0,V},\quad q.t.p.\ t\in I.$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.1, sabemos que u é fracamente contínua de $\bar{I}$ em $H^1_0(\Omega,V)$, de modo que fica bem definida a função

$$\mathscr{N}(t):=\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)}=\left\langle u(t),\overline{u(t)}\right\rangle_{H^{-1},H^1_0,V},\quad \text{para todo } t\in\bar{I}.$$

Além disso, o Teorema A.9 garante que u, considerada como valores em $H^{-1}(\Omega,V)$, é diferenciável quase em toda parte de I, e satisfaz

$$\|u(t)-u(s)\|_{H^{-1}(\Omega,V)}\leq\|u'\|_{L^\infty(I,H^{-1}(\Omega,V))}\,|t-s|,\quad \text{para todo } t,s\in\bar{I}.$$

Consequentemente, $\mathscr{N}$ é lipschitziana, pois para quaisquer $t,s\in\bar{I}$ temos

$$\begin{aligned}|\mathscr{N}(t)-\mathscr{N}(s)| &= \left|\left\langle u(t)-u(s),\overline{u(s)}\right\rangle_{H^{-1},H^1_0,V}+\left\langle\overline{u(t)-u(s)},u(t)\right\rangle_{H^{-1},H^1_0,V}\right|\\ &\leq\|u(t)-u(s)\|_{H^{-1}(\Omega,V)}\left(\|u(s)\|_{H^1(\Omega,V)}+\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)}\right)\\ &\leq 2\,\|u'\|_{L^\infty(I,H^{-1}(\Omega,V))}\|u\|_{L^\infty(I,H^1_0(\Omega,V))}\,|t-s|.\end{aligned}$$

Finalmente, para mostrar que $\mathscr{N}$ é diferenciável, note que, para todo $t \in I$ e $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathscr{N}(t+h) - \mathscr{N}(t) = \left\langle u(t+h) - u(t), \overline{u(t+h)} \right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} \\ + \quad \left\langle u(t), \overline{u(t+h) - u(t)} \right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}.\end{aligned}$$

Pela definição (1.15), temos a propriedade

$$\langle w, \bar{v} \rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = \overline{\langle v, \bar{w} \rangle}_{H^{-1},H_0^1,V}, \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega, V),$$

o que permite reescrever a expressão anterior como

$$\begin{aligned}\mathscr{N}(t+h) - \mathscr{N}(t) = \left\langle u(t+h) - u(t), \overline{u(t+h)} \right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} \\ + \quad \overline{\left\langle u(t+h) - u(t), \overline{u(t)} \right\rangle}_{H^{-1},H_0^1,V}.\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por h e somando e subtraindo termos apropriados, temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{N}(t+h) - \mathscr{N}(t)}{h} &= \left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t), \overline{u(t+h)} \right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} \\ &\quad + \overline{\left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t), \overline{u(t)} \right\rangle}_{H^{-1},H_0^1,V} \\ &\quad + \left\langle u'(t), \overline{u(t+h)} \right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} \quad + \quad \overline{\left\langle u'(t), \overline{u(t)} \right\rangle}_{H^{-1},H_0^1,V} \\ &=: a_1(h) + a_2(h) + a_3(h) + a_4.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Agora, sendo u diferenciável quase em todo I, para quase todo $t \in I$ obtemos

$$|a_1(h)|,\ |a_2(h)| \leq \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \|u\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega,V))} \to 0$$

quando $h \to 0$. Por outro lado, como u é fracamente contínua, tem-se

$$u(t+h) \rightharpoonup u(t) \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V) \quad \text{quando } h \to 0.$$

E, como $u'(t)$ pertence ao dual de $H_0^1(\Omega, V)$, segue que

$$a_3(h) \to \left\langle u'(t), \overline{u(t)} \right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} \quad \text{quando } h \to 0.$$

Por fim, tomando o limite $h \to 0$ em (3.25), resulta

$$\mathscr{N}'(t) = \left\langle u'(t), \overline{u(t)} \right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} + \overline{\left\langle u'(t), \overline{u(t)} \right\rangle}_{H^{-1},H_0^1,V} = 2\,\mathrm{Re} \left\langle u'(t), \overline{u(t)} \right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V},$$

para quase todo $t \in I$. $\square$

Com as ferramentas desenvolvidas até aqui, estamos prontos para iniciar a demonstração do Teorema 3.3, a qual será realizada em seis passos: (1) construímos uma família de funções g_n, para as quais é possível aplicar o Teorema 3.2, garantindo assim a existência de soluções aproximadas u_n, definidas em todo $\mathbb{R}$, que satisfazem as leis de conservação; (2) a partir das leis de conservação, garantimos a existência de T_M para que as sequências $u_n(t)$ e $g_n(u_n(t))$ admitam uma estimativa uniforme em I. Com isso, ao aplicar os lemas de compacidade, asseguramos a existência de limites fracos pontuais u e f; (3) usamos essas estimativas para realizar a passagem ao limite na equação de evolução aproximada, obtendo assim a equação $i\,\partial_t u + {}_V\Delta u + f = 0$; (4) estabelecemos a lei de conservação de massa para a função u; (5) demonstramos a desigualdade de energia; e (6) usando a conservação de massa, mostramos que $f = g(u)$ e, consequentemente, que u é uma H_0^1-solução forte.

Demonstração do Teorema 3.3. Considere $M > 0$ e

$$\varphi \in H_0^1(\Omega, V) \quad \text{com} \quad \|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M.$$

Passo 1. *Construção de soluções aproximadas.*

Para cada inteiro positivo n, seja J_n o operador linear definido na Seção 3.4. Com relação a esse operador sabemos que

$$J_n : H^{-1}(\Omega, V) \to H_0^1(\Omega, V), \qquad \|J_n\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega,V),H_0^1(\Omega,V))} \leq n, \tag{3.26}$$

$$J_n : H_0^1(\Omega, V) \to H_0^1(\Omega, V), \qquad \|J_n\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega,V),H_0^1(\Omega,V))} \leq 1, \tag{3.27}$$

$$J_n : L^2(\Omega, V) \to L^2(\Omega, V), \qquad \|J_n\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega,V),L^2(\Omega,V))} \leq 1, \tag{3.28}$$

$$J_n : L^{p'}(\Omega, V) \to L^{p'}(\Omega, V), \qquad \|J_n\|_{\mathcal{L}(L^{p'}(\Omega,V),L^{p'}(\Omega,V))} \leq 1. \tag{3.29}$$

Definimos agora o operador $g_n : L^2(\Omega, V) \to L^2(\Omega, V)$ e o funcional $G_n : L^2(\Omega, V) \to \mathbb{R}$, dados por

$$g_n(u) := J_n\left(g(J_n u)\right) \qquad \text{e} \qquad G_n := G\left(J_n u\right).$$

A seguir, mostraremos que g_n e G_n satisfazem as hipóteses do Teorema 3.2.

Para verificar que g_n satisfaz a condição local de Lipschitz, seja K uma constante positiva e considere $u, v \in L^2(\Omega, V)$ arbitrários tais que $\|u\|_{L^2(\Omega,V)}, \|v\|_{L^2(\Omega,V)} \leq K$. Assim, por (3.26) e denotando por $C_{p'}$ a constante da imersão (3.22), temos

$$\begin{aligned}
\|g_n(u) - g_n(v)\|_{L^2(\Omega,V)} &= \|J_n\left(g(J_n u) - g(J_n v)\right)\|_{L^2(\Omega,V)} \\
&\leq \|J_n(g(J_n u) - g(J_n v))\|_{H^1(\Omega,V)} \\
&\leq n\,\|g(J_n u) - g(J_n v)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\
&\leq n \cdot C_{p'}\,\|g(J_n u) - g(J_n v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}.
\end{aligned}$$

Mas como, para todo $w \in L^2(\Omega, V)$, vale

$$\|J_n w\|_{H^1(\Omega,V)} \leq n\|w\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq n\|w\|_{L^2(\Omega,V)},$$

segue que

$$\|J_n u\|_{H^1(\Omega,V)}, \|J_n v\|_{H^1(\Omega,V)} \leq nK.$$

Logo, a hipótese **H1**, a imersão (3.20) e as estimativas (3.26) e (1.17), implicam que

$$\begin{aligned}
\|g_n(u) - g_n(v)\|_{L^2(\Omega,V)} &\leq n \cdot C_{p'} \cdot C(nK) \, \|J_n u - J_n v\|_{L^r(\Omega,V)} \\
&\leq n \cdot C_{p'} \cdot C(nK) \cdot C_r \, \|J_n(u - v)\|_{H^1(\Omega,V)} \\
&\leq n \cdot C_{p'} \cdot C(nK) \cdot C_r \cdot n \, \|u - v\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\
&\leq n \cdot C_{p'} \cdot C(nK) \cdot C_r \cdot n \, \|u - v\|_{L^2(\Omega,V)},
\end{aligned}$$

o que garante que g_n satisfaz **h1**.

Para comprovar que g_n satisfaz a condição **h3**, sejam $u, v \in L^2(\Omega, V)$ arbitrários. Segue da definição de J_n e de g_n que

$$-\frac{1}{n} {}_V\Delta g_n(u) + g_n(u) = g(J_n u) \qquad \text{e} \qquad -\frac{1}{n} {}_V\Delta J_n\bar{v} + J_n\bar{v} = \bar{v} \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V).$$

Como $\overline{J_n v} = J_n\bar{v}$, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle g(J_n u), \overline{J_n v} \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} &= \left\langle -\frac{1}{n} {}_V\Delta g_n(u) + g_n(u), J_n\bar{v} \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} \\
&= \int_\Omega \left(\frac{1}{n} \nabla g_n(u) \cdot \nabla J_n\bar{v} + g_n(u) \, J_n\bar{v} \, V \right) dx \\
&= \left\langle -\frac{1}{n} {}_V\Delta J_n\bar{v} + J_n\bar{v}, g_n(u) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} \\
&= \langle \bar{v}, g_n(u) \rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} \\
&= (g_n(u), v)_{L^2(\Omega,V)},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade resulta de (1.15). Portanto,

$$\left\langle g(J_n u), \overline{J_n v} \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} = (g_n(u), v)_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega, V). \tag{3.30}$$

Em particular, ao considerar a parte real com $v = iu$ e aplicar (1.19), obtém-se

$$\operatorname{Re}(g_n(u), iu)_{L^2(\Omega,V)} = \operatorname{Re} \int_\Omega g(J_n u) \, \overline{J_n iu} \, V dx = \int_\Omega \operatorname{Im} \left(g(J_n u) \overline{J_n u} \right) V dx,$$

a qual é nula em virtude da condição **H3**, provando assim que g_n satisfaz **h3**.

Para provar que G_n satisfaz **h2**, começamos mostrando que sua restrição a $H_0^1(\Omega, V)$ é completamente contínua. Para isso, considere uma sequência

$$(u_k) \subset H_0^1(\Omega, V) \quad \text{tal que} \quad u_k \rightharpoonup u \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V).$$

Como $J_n : H_0^1(\Omega, V) \to H_0^1(\Omega, V)$ é linear e contínuo nas topologias fortes, segue de [6, Proposição 6.2.9] que J_n é também contínuo nas topologias fracas, e assim

$$J_n u_k \rightharpoonup J_n u \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V) \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Logo, devido a que G é completamente contínuo,

$$G_n(u_k) = G(J_n u_k) \to G(J_n u) = G_n(u) \quad \text{quando } \ k \to \infty,$$

e o resultado segue. Finalmente, como $J_n : L^2(\Omega, V) \to H_0^1(\Omega, V)$ é um operador linear e contínuo, pois

$$\|J_n u\|_{H^1(\Omega,V)} \leq n\|u\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq n\|u\|_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall u \in L^2(\Omega, V),$$

segue que

$$J_n \in C^1(L^2(\Omega, V), H_0^1(\Omega, V)), \quad \text{com} \quad J_n'(u) = J_n.$$

Ademais, pela hipótese **H2**,

$$G \in C^1(H_0^1(\Omega, V), \mathbb{R}),$$

de modo que, pela regra da cadeia,

$$G_n = G \circ J_n \in C^1(L^2(\Omega, V), \mathbb{R}), \quad \text{com} \quad G_n'(u) = G'(J_n u) J_n.$$

Por fim, por **H2** e (3.30), temos que, para quaisquer $u, v \in L^2(\Omega, V)$,

$$G_n'(u)v = G'(J_n u) J_n v = \operatorname{Re} \left\langle g(J_n u), \overline{J_n v} \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} = \operatorname{Re}(g_n(u), v)_{L^2(\Omega,V)},$$

o que conclui a demonstração de que G_n satisfaz **h3**.

Uma vez verificadas as hipóteses do Teorema 3.2, o item (c) garante a existência de uma sequência de funções (u_n) que satisfaz o problema

$$\begin{cases} u_n \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega, V)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega, V)) \\ i\, \partial_t u_n + {}_V\Delta u_n + g_n(u_n) = 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V) \\ u_n(0) = \varphi. \end{cases} \tag{3.31}$$

Além disso, cada u_n preserva a massa e a energia, ou seja,

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \qquad \text{e} \qquad E(u_n(t)) = E(\varphi), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, combinando essas duas propriedades, obtemos

$$\|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} + 2G_n(u_n(t)) - 2G_n(\varphi), \quad \forall t \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

Passo 2. *Estimativas uniformes e existência de limites.*

Nosso objetivo agora é encontrar um intervalo no qual as hipóteses do Lema 3.3 sejam satisfeitas. Para isso, começamos definindo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\theta_n := \sup\left\{\tau > 0;\ \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq 2M,\ \text{para todo } t \in (-\tau,\tau)\right\}.$$

Afirmação 1. *Existe uma constante K, dependente apenas de M, tal que*

$$\|u_n\|_{W^{1,\infty}((-\theta_n,\theta_n),H^{-1}(\Omega,V))} \leq K, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De fato, seja $t \in (-\theta_n,\theta_n)$ arbitrário. Pela definição de θ_n, temos

$$\|u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M. \tag{3.33}$$

Logo, pela equação (3.31) e a imersão (3.22), obtemos

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} &\leq \|{}_V\Delta u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} + \|g_n(u_n(t))\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \\ &\leq \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} + C_{p'}\, \|g_n(u_n(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \\ &\leq 2M + C_{p'}\, \|g_n(u_n(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Note agora que, por (3.29), podemos estimar

$$\begin{aligned} \|g_n(u_n(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &= \|J_n(g(J_n u_n(t)))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \\ &\leq \|g(J_n u_n(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \\ &\leq \|g(J_n u_n(t)) - g(0)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} + \|g(0)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Para estimar a primeira parcela da última desigualdade, observe que, em virtude de (3.27), temos

$$\|J_n u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M,$$

de modo que, pela hipótese **H1** e a imersão (3.20), segue que

$$\begin{aligned} \|g(J_n u_n(t)) - g(0)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &\leq C(2M)\|J_n u_n(t)\|_{L^r(\Omega,V)} \\ &\leq C(2M)\cdot C_r\, \|J_n u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \\ &\leq C(2M)\cdot C_r \cdot 2M =: c_1. \end{aligned}$$

Juntando isso com (3.35) e fazendo $c_2 = c_1 + \|g(0)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}$ temos

$$\|g_n(u_n(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq \|g(J_n u_n(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq c_2, \quad \forall t \in (-\theta_n, \theta_n). \tag{3.36}$$

Combinando essa estimativa com a desigualdade (3.34), obtemos

$$\|\partial_t u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq 2M + C_{p'} \cdot c_2 =: K.$$

Assim, junto com (3.33), concluímos a prova da afirmação. ∎

Até agora, cada função u_n está limitada uniformemente em um intervalo que depende de n. Nosso próximo passo é encontrar um intervalo comum, independente n, onde essas funções permaneçam limitadas. Para isso, observe que

$$u_n \in L^\infty((-\theta_n, \theta_n), H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}((-\theta_n, \theta_n), H^{-1}(\Omega, V)),$$

com

$$\max\left\{\|u_n\|_{L^\infty((-\theta_n,\theta_n),H_0^1(\Omega,V))}, \|\partial_t u_n\|_{L^\infty((-\theta_n,\theta_n),H^{-1}(\Omega,V))}\right\} \leq K,$$

de modo que, pelo Corolário 3.1, segue que

$$\|u_n(t) - u_n(s)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq 2K\,|t-s|^{1/2}, \quad \text{para todo } |t|, |s| \leq \theta_n. \tag{3.37}$$

Por outro lado, para todo $|t| \leq \theta_n$, tem-se

$$\|u_n(0)\|_{H^1(\Omega,V)}, \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M.$$

Dessa forma, o Lema 3.10 e (3.37), implicam que

$$\begin{aligned}
|G_n(u_n(t)) - G_n(u_n(0))| &\leq C(2M)\,\|u_n(t) - u_n(0)\,\|_{L^2(\Omega,V)}^\beta \\
&\leq C(2M) \cdot (2K)^\beta\,|t|^{\beta/2} \\
&=: c_3\,|t|^{\beta/2}.
\end{aligned}$$

Combinando este resultado com (3.32) e visto que $u_n(0) = \varphi$ e $\|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M$, obtemos

$$\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)}^2 \leq M^2 + 2c_3\,|t|^{\beta/2}, \quad \text{para todo } |t| \leq \theta_n.$$

Portanto, podemos definir T_M de modo que

$$c_3 \cdot T_M^{\beta/2} = M^2.$$

Dessa forma, para $T = \min\{T_M, \theta_n\}$, segue que

$$\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \sqrt{3}M, \quad \text{para todo } |t| \leq T. \tag{3.38}$$

Afirmação 2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\theta_n \geq T_M$.*

De fato, suponha, por absurdo, que $T_M > \theta_n$ e então $T = \theta_n$. Pela continuidade da função u_n, existe um ponto $\vartheta > \theta_n$ tal que

$$\|u_n(s) - u_n(\theta_n)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M - \sqrt{3}M, \quad \forall s \in [\theta_n, \vartheta],$$
$$\|u_n(s) - u_n(-\theta_n)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M - \sqrt{3}M, \quad \forall s \in [-\vartheta, -\theta_n].$$

Logo, pela desigualdade triangular reversa e visto que $\|u_n(\pm\theta_n)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \sqrt{3}M$, obtemos

$$\|u_n(s)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \quad \text{para todo } s \in [-\vartheta, -\theta_n] \cup [\theta_n, \vartheta]$$

Juntando isso com (3.38), concluímos que

$$\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \quad \text{para todo } t \in (-\vartheta, \vartheta),$$

o que contradiz a maximalidade de θ_n, concluindo assim a prova da afirmação. ■

Por fim, uma vez que $T_M \leq \theta_n$, temos $T = T_M$ e

$$I := (-T_M, T_M) \subset (-\theta_n, \theta_n), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Afirmação 1, a sequência (u_n) é limitada em $W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$ e, por (3.38), obtemos

$$\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \quad \text{para todo } t \in \bar{I} \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{3.39}$$

Com isso, segue que a sequência (u_n) satisfaz as condições do Lema 3.3 em I. Portanto, deve existir uma função

$$u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$$

tal que, a menos de subsequência,

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V), \quad \text{para todo } t \in \bar{I}. \tag{3.40}$$

Em particular, como a norma é fracamente semicontínua inferiormente, de (3.39) e (3.40) deduzimos que

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \quad \text{para todo } t \in \bar{I}.$$

Para concluir este passo, observe que, de acordo com (3.36), a sequência $(g_n(u_n))$ é limitada em $C(\bar{I}, L^{p'}(\Omega, V))$ e, mais ainda, é uniformemente equicontínua, pois, dado que,

$$\|J_n u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \quad \forall t \in \bar{I},$$

segue do Lema 3.10 e de (3.37) que, para quaisquer $t, s \in \bar{I}$,

$$\begin{aligned}\|g_n(u_n(t)) - g_n(u_n(s))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &= \|J_n(g(J_n u_n(t)) - g(J_n u_n(s)))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \\ &\leq \|g(J_n u_n(t)) - g(J_n u_n(s))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \\ &\leq C(2M)\, \|J_n u_n(t) - J_n u_n(s)\|^{\alpha}_{L^2(\Omega,V)} \\ &\leq C(2M)\, \|u_n(t) - u_n(s)\|^{\alpha}_{L^2(\Omega,V)} \\ &\leq C(2M)(2K)^{\alpha}|t-s|^{\alpha/2}.\end{aligned}$$

Portanto, ao aplicar o Lema 3.2 com $X = Y = L^{p'}(\Omega, V)$, existe uma função

$$f \in C(\bar{I}, L^{p'}(\Omega, V))$$

tal que, a menos de subsequência,

$$g_n(u_n(t)) \rightharpoonup f(t) \quad \text{em } L^{p'}(\Omega, V), \quad \text{para todo } t \in \bar{I}. \tag{3.41}$$

Passo 3. *Passando ao limite para obter uma equação de Schrödinger em u.*

Seja $v \in H_0^1(\Omega, V)$ arbitrário. Tomando o produto de dualidade da equação (3.31) com v, obtemos, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$i\,\langle \partial_t u_n, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} + \langle {}_V\Delta u_n, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} + \langle g_n(u_n), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$i\,\frac{d}{dt}\langle u_n, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} + \langle {}_V\Delta u_n, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} + \langle g_n(u_n), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = 0.$$

Dessa forma, para toda função $\psi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$, temos

$$\int_I \left(i\,\frac{d}{dt}\langle u_n, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\,\psi + \langle {}_V\Delta u_n, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\,\psi + \langle g_n(u_n), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\,\psi \right) dt = 0.$$

Após integrar por partes o primeiro termo da integral, resulta que

$$\int_I \left(-i\,\langle u_n, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\,\psi' + \langle {}_V\Delta u_n, v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\,\psi + \langle g_n(u_n), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\,\psi \right) dt = 0. \tag{3.42}$$

Denotemos por $h_n(t)$ o integrando do lado esquerdo da equação acima. Pelas propriedades do produto de dualidade, podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} h_n(t) = -i\langle v, u_n(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\,\psi'(t) + \langle {}_V\Delta v, u_n(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\,\psi(t) \\ + \langle g_n(u_n(t)), v\rangle_{L^{p'},L^p,V}\,\psi(t). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Daí, passando ao limite em n e usando os limites fracos (3.40) e (3.41), concluímos que, para todo $t \in I$,

$$h_n(t) \to -i\langle v, u(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\, \psi'(t) + \langle {}_V\Delta v, u(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\, \psi(t) + \langle f(t), v\rangle_{L^{p'},L^p,V}\, \psi(t).$$

Mas como $u(t) \in H_0^1(\Omega, V)$, podemos reescrever esse limite como

$$h_n(t) \to -i\langle u(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\, \psi'(t) + \langle {}_V\Delta u(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\, \psi(t) + \langle f(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\, \psi(t).$$

Além disso, cada função h_n é dominada por uma função integrável, pois, ao tomar o módulo em (3.43) e utilizar as estimativas (3.39) e (3.36), obtemos

$$\begin{aligned} |h_n| &\leq \|v\|_{H^{-1}(\Omega,V)}\|u_n(\cdot)\|_{H^1(\Omega,V)}|\psi'| + \|{}_V\Delta v\|_{H^{-1}(\Omega,V)}\|u_n(\cdot)\|_{H^1(\Omega,V)}|\psi| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \|g_n(u_n(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)}\|v\|_{L^p(\Omega,V)}|\psi| \\ &\leq \|v\|_{H^{-1}(\Omega,V)}2M|\psi'| + \|{}_V\Delta v\|_{H^{-1}(\Omega,V)}2M|\psi| + c_2\|v\|_{L^p(\Omega,V)}|\psi| \in L^1(I,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada em (3.42) para obter

$$\int_I \Big(-i\langle u(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\, \psi' + \langle {}_V\Delta u(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\, \psi + \langle f(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\, \psi\Big)\, dt = 0.$$

Agora, como sabemos pelo Corolário A.6 que

$$-\int_I \langle u(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\psi'(t)dt = \int_I \langle u'(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\psi(t)dt,$$

podemos reescrever a identidade anterior da seguinte forma

$$\int_I \langle iu'(t) + {}_V\Delta u(t) + f(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}\ \ \psi(t)\, dt = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(I),\ v \in H_0^1(\Omega, V).$$

Em seguida, como $H_0^1(\Omega, V)$ separável, podemos aplicar o Teorema A.8 para obter que

$$iu'(t) + {}_V\Delta u(t) + f(t) = 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V), \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

Por fim, como

$$\varphi = u_n(0) \rightharpoonup u(0) \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V),$$

concluímos que u satisfaz a equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i\,\partial_t u + {}_V\Delta u + f = 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V), \quad \text{q.t.p. } t \in I \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{3.44}$$

Passo 4. *Lei da conservação de massa.*

O ponto crucial para obter a lei da conservação de massa é o seguinte resultado:

Afirmação 3. *Para todo $t \in I$, tem-se*

$$\operatorname{Im}\left(f(t)\,\overline{u(t)}\right) = 0, \quad q.t.p. \ em \ \Omega.$$

Consequentemente,

$$\operatorname{Re}\left\langle f(t), \overline{iu(t)}\right\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} = 0. \tag{3.45}$$

De fato, fixado $t \in I$, por resultados clássicos da teoria da medida, é suficiente verificar que, para todo conjunto aberto limitado $Q \subset \Omega$, tem-se

$$\int_Q \operatorname{Im}\left(f(t)\,\overline{u(t)}\right) V dx = 0.$$

Para isso, omitimos a dependência temporal t, a fim de simplificar a notação, e escrevemos

$$\begin{aligned}\int_Q f\bar{u}\,V dx = \int_Q (f - g_n(u_n))\,\bar{u}\,V dx + \int_Q (g_n(u_n) - g(J_n u_n))\,\bar{u}\,V dx \\ + \int_Q g(J_n u_n)\,(\overline{u - u_n})\,V dx + \int_Q g(J_n u_n)\,\left(\overline{u_n - J_n u_n}\right) V dx \\ + \int_Q g(J_n u_n)\,\overline{J_n u_n}\,V dx =: a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n + a_5^n.\end{aligned}$$

Observando que, segundo a hipótese **H3**,

$$\operatorname{Im} a_5^n = \int_Q \operatorname{Im}\left(g(J_n u_n)\,\overline{J_n u_n}\right) V dx = 0,$$

segue que

$$\int_Q \operatorname{Im}(f\,\bar{u})\,V dx = \operatorname{Im}(a_1^n + \ldots + a_4^n), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.46}$$

Mostraremos a seguir que

$$a_k^n \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty, \quad \text{para todo } k = 1, \ldots, 4. \tag{3.47}$$

Para isso, começamos por estabelecer a seguinte cadeia de imersões:

$$H_0^1(\Omega, V) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^q(Q) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^p(Q, V). \tag{3.48}$$

De fato, a primeira imersão contínua decorre do fato de que V é limitada inferiormente (ver (1.11)). A última imersão contínua segue da primeira imersão contínua assumida na hipótese **H4**, combinada com o fato de que $Q \subset \Omega$. Para justificar a imersão compacta, consideremos inicialmente o caso em que Ω é limitado. Pela imersão compacta de Sobolev, temos

$$H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \underset{\text{cont}}{\hookrightarrow} L^q(Q).$$

Por fim, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, a imersão $H_0^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ já não é compacta. No entanto, sabe-se que $H_0^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(B)$ é compacta para todo aberto limitado $B \subset \mathbb{R}^N$. Em particular,

$$H_0^1(\mathbb{R}^N) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^q(Q),$$

o que conclui a demonstração de (3.48).

Iniciemos a prova de (3.47) considerando o caso $k = 1$. Pela convergência em (3.41),

$$f(t) - g_n(u_n(t)) \rightharpoonup 0 \quad \text{em } L^{p'}(\Omega, V), \ \text{ e portanto em } L^{p'}(Q, V).$$

Assim, pela definição de convergência fraca e lembrando que $u(t) \in H_0^1(\Omega, V) \subset L^p(Q, V)$, concluímos que

$$a_1^n = \int_Q (f(t) - g_n(u_n(t)))\, \overline{u(t)}\, V dx \to 0.$$

Para $k = 2$, note que, por (3.36), a sequência $(g(J_n u_n(t)))$ é limitada em $L^{p'}(\Omega, V)$, e portanto também em $H^{-1}(\Omega, V)$. Assim, pelo Lema 3.8, obtemos

$$g_n(u_n(t)) - g(J_n u_n(t)) = J_n\, g(J_n u_n(t)) - g(J_n u_n(t)) \rightharpoonup 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V).$$

Aplicando agora o Lema 3.1-(b) com

$$L^{p'}(\Omega, V) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega, V) \qquad \text{e} \qquad x_n = g_n(u_n(t)) - g(J_n u_n(t)) \in L^{p'}(\Omega, V)$$

segue que

$$g_n(u_n(t)) - g(J_n u_n(t)) \rightharpoonup 0 \quad \text{em } L^{p'}(\Omega, V), \ \text{ e portanto em } L^{p'}(Q, V).$$

Assim, pela definição de convergência fraca, obtemos

$$a_2^n = \int_Q \Big(g_n(u_n(t)) - g(J_n u_n(t))\Big)\overline{u(t)}\, V dx \to 0.$$

No que concerne a $k = 3$, a imersão compacta (3.48), combinada com a convergência fraca (3.40), implica que

$$u_n(t) \to u(t) \quad \text{em } L^p(Q, V).$$

Por outro lado, conforme a (3.36), a sequência $(g(J_n u_n(t)))$ é limitada em $L^{p'}(\Omega, V)$ por c_2. Dessa forma, pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
|a_3^n| &\leq \|g(J_n u_n(t))\|_{L^{p'}(Q,V)}\, \|u(t) - u_n(t)\|_{L^p(Q,V)} \\
&\leq c_2 \|u(t) - u_n(t)\|_{L^p(Q,V)} \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Por fim, no caso $k = 4$, note que, por (3.39), a sequência $(u_n(t))$ é limitada em $H_0^1(\Omega, V)$, e portanto também em $H^{-1}(\Omega, V)$. Assim, pelo Lema 3.8,

$$u_n(t) - J_n u_n(t) \rightharpoonup 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V).$$

Aplicando agora o Lema 3.1-(b) com

$$H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega, V) \qquad \text{e} \qquad x_n = u_n(t) - J_n u_n(t) \in H_0^1(\Omega, V),$$

obtemos

$$u_n(t) - J_n u_n(t) \rightharpoonup 0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V). \tag{3.49}$$

Isso, juntamente com a imersão compacta (3.48), implica

$$u_n(t) - J_n u_n(t) \to 0 \quad \text{em } L^p(Q, V).$$

Finalmente, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |a_4^n| &\le \|g(J_n u_n(t))\|_{L^{p'}(Q,V)} \, \|u_n(t) - J_n u_n(t)\|_{L^p(Q,V)} \\ &\le c_2 \|u_n(t) - J_n u_n(t)\|_{L^p(Q,V)} \\ &\to 0, \end{aligned}$$

o que conclui a prova de (3.47).

Para completar a prova, basta passar ao limite em n na identidade (3.46) e usar os limites obtidos em (3.47). Além disso, a validade de (3.45) resulta de

$$\operatorname{Re}\left\langle f(t), \overline{iu(t)}\right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = \int_\Omega \operatorname{Im}\Big(f(t)\,\overline{u(t)}\Big)V\,dx = 0. \;\blacksquare$$

Como consequência, ao tomar o produto de dualidade da equação (3.44) com $\overline{iu(t)}$ e aplicar a definição do laplaciano com peso (1.25), obtemos

$$\left\langle u'(t), \overline{u(t)}\right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} + i\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \left\langle f(t), \overline{iu(t)}\right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = 0, \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

Daí, extraindo a parte real e usando (3.45), resulta

$$\operatorname{Re}\left\langle u'(t), \overline{u(t)}\right\rangle_{H^{-1},H_0^1,V} = 0, \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

Isso, combinado com o Lema 3.11, garante que a função $\|u(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega,V)}$ é diferenciável quase em toda parte de I, com derivada nula, além de ser lipschitziana em $\bar{I}$ e, consequentemente, localmente absolutamente contínua. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para funções absolutamente contínuas [15, Teorema 3.35] concluímos que $\|u(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega,V)}$ é constante. Em particular, como $u(0) = \varphi$, segue que

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall t \in \bar{I}. \tag{3.50}$$

Passo 5 *Desigualdade de energia.*

A ideia consiste em passar ao limite inferior na identidade (3.32), a qual pode ser reescrita para todo $t \in \bar{I}$ e $n \in \mathbb{N}$ como

$$\|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G_n(u_n(t)) = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G_n(u_n(0)). \tag{3.51}$$

Para isso, combinando os limites fracos (3.40) e (3.49), obtemos

$$J_n u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{em } H^1_0(\Omega, V).$$

Como G é completamente contínua, segue então que

$$G_n(u_n(t)) = G(J_n u_n(t)) \to G(u(t)), \quad \forall t \in \bar{I}.$$

Portanto, ao passar para o limite inferior em (3.51) e lembrando que $u(0) = \varphi$, temos

$$\liminf \|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(u(t)) = \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi), \quad \forall t \in \bar{I}.$$

Juntando isso com (3.50) obtemos

$$\begin{aligned} 2E(u(t)) &= \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(u(t)) - \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} \\ &\leq \liminf \|u_n(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(u(t)) - \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} \\ &= \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) - \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega,V)} \\ &= 2E(\varphi), \end{aligned}$$

implicando que u satisfaz a desigualdade de energia

$$E(u(t)) \leq E(\varphi), \quad \forall t \in \bar{I}.$$

Passo 6. *u é uma H^1_0-solução forte.*

Até agora, sabemos que u satisfaz a equação (3.44). Portanto, para que u seja uma H^1_0-solução forte do problema (P), resta apenas demonstrar que $f = g(u)$. Para isso, observe que, para todo $t \in I$, temos

$$\begin{aligned} g_n(u_n(t)) - g(u(t)) &= J_n\left[g(J_n u_n(t)) - g(J_n u(t))\right] \\ &\qquad + J_n\left[g(J_n u(t)) - g(u(t))\right] + \left[J_n g(u(t)) - g(u(t))\right] \\ &=: a_1^n + a_2^n + a_3^n. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Afirmamos que

$$a_k^n \rightharpoonup 0 \quad \text{em } L^{p'}(\Omega, V) \quad \text{quando } n \to \infty, \quad \text{para } k = 1, 2, 3. \tag{3.53}$$

De fato, para o caso $k = 1$, por (3.29), temos

$$\begin{aligned} \|a_1^n\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &= \|J_n[g(J_n u_n(t)) - g(J_n u(t))]\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \\ &\leq \|g(J_n u_n(t)) - g(J_n u(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)}. \end{aligned}$$

Para estimar o último termo, observe que, como

$$\begin{aligned} \|J_n u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \quad \text{e} \\ \|J_n u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \end{aligned}$$

podemos aplicar o Lema 3.10 e concluir que

$$\begin{aligned} \|a_1^n\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &\leq C(2M)\, \|J_n u_n(t) - J_n u(t)\|^{\alpha}_{L^2(\Omega,V)} \\ &\leq C(2M) \|u_n(t) - u(t)\|^{\alpha}_{L^2(\Omega,V)}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Por outro lado, como u_n e u satisfazem a lei de conservação de massa em $L^2(\Omega, V)$, ambos com o mesmo dado inicial φ, obtemos

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega,V)} \to \|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} \quad \text{uniformemente em } \bar{I}.$$

Segue, portanto, do Lema 3.3-(c), que

$$u \in C(\bar{I}, L^2(\Omega, V)) \qquad \text{e} \qquad u_n \to u \quad \text{em } C(\bar{I}, L^2(\Omega, V)).$$

Consequentemente, ao passar ao limite em (3.54), obtemos que $a_1^n \to 0$ em $L^{p'}(\Omega, V)$, em particular, converge fracamente para a função nula.

Para o caso $k = 2$, observe que, pela hipótese **H1** e pela imersão (3.20), tem-se

$$\begin{aligned} \|a_2^n\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &= \|J_n(g(J_n u(t)) - g(u(t)))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \\ &\leq \|g(J_n u(t)) - g(u(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \\ &\leq C(2M)\, \|J_n u(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega,V)} \\ &\leq C(2M) \cdot C_r \|J_n u(t) - u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 3.7, tem-se $J_n u(t) \to u(t)$ em $H_0^1(\Omega, V)$. Dessa forma, ao passar ao limite na desigualdade anterior, obtemos $a_2^n \to 0$ em $L^{p'}(\Omega, V)$, em particular, converge fracamente para a função nula.

No caso $k = 3$, o Lema 3.7 implica que

$$a_3^n = J_n g(u(t)) - g(u(t)) \to 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V)$$

Além disso, a sequência (a_3^n) é limitada em $L^{p'}(\Omega, V)$, pois

$$\|a_3^n\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq 2\|g(u(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)}.$$

Portanto, podemos aplicar o Lema 3.1-(b) à sequência $x_n = a_3^n$, com a imersão

$$L^{p'}(\Omega, V) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega, V),$$

para concluir que

$$a_3^n \rightharpoonup 0 \quad \text{em } L^{p'}(\Omega, V),$$

o que finaliza a demonstração de (3.53).

Finalmente, combinando (3.52) e (3.53), conseguimos

$$g_n(u_n(t)) \rightharpoonup g(u(t)) \quad \text{em } L^{p'}(\Omega, V), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Assim, pela unicidade do limite fraco e em virtude de (3.41), segue que $f(t) = g(u(t))$. □

3.6 Problema localmente bem-posto

Nesta seção, mostraremos que o problema (P) é localmente bem posto em $H_0^1(\Omega, V)$, desde que se disponha, a priori, da informação de que as soluções sejam únicas. Nessas condições, valem também as leis de conservação da massa e da energia. Para fazer isso, começamos demonstrando o seguinte resultado, o qual será fundamental para estabelecer a dependência contínua.

Lema 3.12. *Assuma que as funções g, G e V satisfazem as hipóteses* **H1-H4**, *e que o problema* (P) *admite unicidade. Seja $M > 0$ e denote por T_M o tempo correspondente determinado no Teorema 3.3. Suponha que*

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V) \qquad \text{e} \qquad \|\varphi_n\|_{H_0^1(\Omega,V)} \leq M. \tag{3.55}$$

Sejam u_n e u as únicas H_0^1-soluções fortes do problema (P) *associadas, respectivamente, aos dados iniciais φ_n e φ, no intervalo $I := (-T_M, T_M)$. Então*

$$u_n \to u \quad \text{em } C(\bar{I}, L^2(\Omega, V)).$$

Demonstração. A segunda condição de (3.55) e o Teorema 3.3, implicam que cada função u_n satisfaz a conservação de massa e

$$\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \quad \forall t \in \bar{I}.$$

A partir dessa estimativa e repetindo os argumentos da Afirmação 1 do Teorema 3.3, obtemos que existem constantes K e c_2, dependentes apenas de M, tais que

$$\|\partial_t u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega,V)} \leq K \quad \text{q.t.p. } t \in I \qquad \text{e} \qquad \|g(u_n(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq c_2 \quad \forall t \in I.$$

Além disso, a sequência $(g(u_n))$ é equicontínua em $C(\bar{I}, L^{p'}(\Omega, V))$, pois o Lema 3.10 e o Corolário 3.1 permitem escrever, para todo $t, s \in \bar{I}$,

$$\begin{aligned}\|g(u_n(t)) - g(u_n(s))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} &\leq C(2M)\, \|u_n(t) - u_n(s)\|^{\alpha}_{L^2(\Omega,V)} \\ &\leq C(2M)\Big(2\, \max\{2M, K\}\Big)^{\alpha} |t-s|^{\alpha/2}.\end{aligned}$$

Assim, as estimativas obtidas garantem que as sequências (u_n) e $(g(u_n))$ satisfazem, respectivamente, as hipóteses dos Lemas 3.3 e 3.2. Logo, existem funções

$$v \in L^{\infty}(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V)) \qquad \text{e} \qquad f \in C(\bar{I}, L^{p'}(\Omega, V)),$$

e uma subsequência $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tal que, para todo $t \in \bar{I}$,

$$u_{n_k}(t) \rightharpoonup v(t) \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V) \qquad \text{e} \qquad g(u_{n_k}(t)) \rightharpoonup f(t) \quad \text{em } L^{p'}(\Omega, V).$$

De modo análogo ao Passo 3 do Teorema 3.3, os limites obtidos implicam que

$$\begin{cases} i\,\partial_t v + {}_V\Delta v + f = 0 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega, V), \quad \text{q.t.p. } t \in I \\ v(0) = \varphi. \end{cases}$$

Afirmação 1. *Temos que $f = g(v)$ e, portanto, v é uma solução do problema* (P).

De fato, fixados $t \in I$ e um conjunto $Q \subset \Omega$ aberto e limitado, temos

$$\begin{aligned}\int_Q \operatorname{Im}\Big(f(t)\,\overline{v(t)}\Big)\,V dx &= \operatorname{Im}\int_Q \big(f(t) - g(u_{n_k}(t))\big)\,\overline{v(t)}\,V dx \\ &\quad + \operatorname{Im}\int_Q g(u_{n_k}(t))\,\Big(\overline{v(t) - u_{n_k}(t)}\Big)\,V dx \\ &\quad + \int_Q \operatorname{Im}\Big(g(u_{n_k}(t))\,\overline{u_{n_k}(t)}\Big)\,V dx \\ &=: a_1^{n_k} + a_2^{n_k} + a_3^{n_k}.\end{aligned} \tag{3.56}$$

Pela hipótese **H3**, temos $a_3^{n_k} = 0$. Além disso, a convergência $f(t) - g(u_{n_k}(t)) \rightharpoonup 0$ em $L^{p'}(\Omega, V)$, que também vale em $L^{p'}(Q, V)$, combinada com o fato de que $v(t) \in L^p(Q, V)$ (por (3.48)), implica, pela definição de convergência fraca, que $a_1^{n_k} \to 0$. Por outro lado, considerando que a sequência $(g(u_n(t)))$ é limitada em $L^{p'}(\Omega, V)$ e que, pela imersão compacta (3.48), $u_{n_k}(t) - v(t) \to 0$ em $L^p(Q, V)$, segue da desigualdade de Hölder que

$$|a_2^{n_k}| \leq \|g(u_{n_k}(t))\|_{L^{p'}(Q,V)}\|u_{n_k}(t) - v(t)\|_{L^p(Q,V)} \to 0.$$

Portanto, ao passar ao limite em (3.56), obtemos

$$\int_Q \operatorname{Im}\left(f(t)\,\overline{v(t)}\right) V dx = 0.$$

Mas como Q é arbitrário, segue que

$$\operatorname{Im}(f(t)\overline{v(t)}) = 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Logo, repetindo o argumento do Passo 4 do Teorema 3.3, obtemos que a função $\|v(\cdot)\|_{L^2(\Omega,V)}$ é constante em I. Assim, valem as leis de conservação:

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega,V)} \qquad \text{e} \qquad \|v(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall t \in I,$$

donde se deduz que

$$\|u_{n_k}(t)\|_{L^2(\Omega,V)} \to \|v(t)\|_{L^2(\Omega,V)} \quad \text{uniformemente em } I.$$

Consequentemente, pelo Lema 3.3-(c), obtemos

$$u_{n_k} \to v \quad \text{em } C(\bar{I}, L^2(\Omega, V)).$$

Usando esse limite e o Lema 3.10, para todo $t \in \bar{I}$, obtemos

$$\|g(u_{n_k}(t)) - g(v(t))\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq C(2M)\|u_{n_k}(t) - v(t)\|^{\alpha}_{L^2(\Omega,V)} \to 0.$$

Consequentemente,

$$g(u_{n_k}(t)) \rightharpoonup g(v(t)) \quad \text{em } L^{p'}(\Omega, V).$$

Assim, pela unicidade do limite fraco, segue que $f(t) = g(v(t))$. ∎

Para concluir a demonstração, uma vez que o problema (P) admite solução única e que u e v soluções do mesmo problema, segue-se que $v = u$. Em particular,

$$u_{n_k} \to u \quad C(\bar{I}, L^2(\Omega, V)).$$

Por fim, note que, o argumento usado mostra que toda subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$, possui uma subsequência $(u_{n_{k_j}})$ tal que

$$u_{n_{k_j}} \to u \quad \text{em } C(\bar{I}, L^2(\Omega, V)).$$

Isso implica, portanto, que a própria sequência (u_n) converge para u nesse espaço. □

Antes de apresentar o próximo resultado, convém observar que a hipótese **H1**, juntamente com as imersões (3.20) e (3.22), implica que a função g é contínua de $H_0^1(\Omega, V)$ em $H^{-1}(\Omega, V)$ e limitada em conjuntos limitados. Tal propriedade revela-se crucial para a aplicação da fórmula de Duhamel na representação integral da solução.

Teorema 3.4 (Problema bem posto)**.** *Suponha que as funções g, G e V satisfazem as hipóteses* **H1**-**H4***, e que o problema* (P) *admite unicidade. Então,* (P) *é localmente bem posto em $H_0^1(\Omega, V)$ e satisfaz as leis de conservação de massa e energia:*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \quad e \quad E(u(t)) = E(\varphi) \quad \forall t \in (-T_{\min}, T_{\max}), \tag{3.57}$$

onde u é a H_0^1-solução clássica maximal de (P) *com dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$.*

Demonstração. Apresentaremos a prova em cinco etapas:

Passo 1. *Existência de uma solução maximal.*

Dado $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, definimos os valores

$$\begin{aligned} T_{\max}(\varphi) &:= \sup\left\{T > 0 : \ (\text{P}) \text{ possui uma } H_0^1\text{-solução forte em } [0, T]\right\}, \\ T_{\min}(\varphi) &:= \sup\left\{T > 0 : (\text{P}) \text{ possui uma } H_0^1\text{-solução forte em } [-T, 0]\right\}, \end{aligned}$$

os quais são positivos em virtude do Teorema 3.3. Pela unicidade da solução, é possível construir uma função $u : (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi)) \to H_0^1(\Omega, V)$ que é uma H_0^1-solução forte do problema (P), com dado inicial φ, em qualquer subintervalo compacto contido no intervalo maximal de existência e que contenha a origem.

Portanto, para todo intervalo aberto limitado I, compactamente contido no intervalo maximal e contendo a origem, tem-se

$$u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V)).$$

Assim, pelo Corolário 3.1, u é fracamente contínua em $\bar{I}$ com valores em $H_0^1(\Omega, V)$. Além disso, pela fórmula de Duhamel (veja Teorema 3.1), temos

$$u(t) = T(t)\varphi + i\int_0^t T(t-s)g(u(s))ds, \quad \text{q.t.p. } t \in I. \tag{3.58}$$

Finalmente, como I é arbitrário, concluímos que tanto a continuidade fraca quanto a representação integral da função u se estendem a todo o intervalo maximal.

Passo 2. *Conservação de massa e energia.*

Para estabelecer a validade das leis (3.57) no intervalo maximal, basta mostrar que elas se verificam em qualquer subintervalo compacto $I \subset (-T_{\min}, T_{\max})$ contendo a origem. Para este fim, note primeiramente que, por construção, temos

$$\|u\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega,V))} =: M < \infty. \tag{3.59}$$

Como $\|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M$, tome T_M fornecido pelo Teorema 3.3 e note que $T_M \leq T_{\max}, T_{\min}$. O resultado será consequência imediata do que se estabelece a seguir:

Afirmação 1. *As funções reais $\|u(\cdot)\|_{L^2(\Omega,V)}$ e $E(u(\cdot))$ são constantes em todo subintervalo compacto $J \subset I$ de comprimento menor que T_M.*

Com efeito, fixemos um subintervalo compacto $J \subset I$ com $|J| < T_M$ e sejam $a, b \in J$ arbitrários. Segue do Corolário 3.1 e (3.59) que

$$\|u(a)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M.$$

Assim, pelo Teorema 3.3, existe uma H_0^1-solução forte v do problema

$$\begin{cases} i\partial_t v + {}_V\Delta v + g(v) = 0 \\ v(0) = u(a), \end{cases} \tag{3.60}$$

definida no intervalo $(-T_M, T_M)$, tal que

$$\|v(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|u(a)\|_{L^2(\Omega,V)} \qquad \text{e} \qquad E(v(t)) \leq E(u(a)), \quad \text{para } |t| < T_M. \tag{3.61}$$

Por outro lado, usando a representação integral (3.58), é fácil de ver que

$$u(a + \cdot) \in L^\infty(I - a, H_0^1(\Omega, V))$$

é uma solução generalizada do problema (3.60) no intervalo $I - a$, ou seja,

$$u(a+t) = T(t)u(a) + i\int_0^t T(t-\tau)g(u(a+\tau))d\tau, \quad \text{q.t.p. } t \in I - a.$$

Esses fatos, combinados com o Teorema 3.1, garantem que $u(a + \cdot)$ também é uma H_0^1-solução forte do problema (3.60) no intervalo $I - a$. Portanto, pela unicidade da solução, devemos ter

$$v = u(a + \cdot) \quad \text{em} \quad \mathcal{I} := (I - a) \cap (-T_M, T_M).$$

Consequentemente, por (3.61),

$$\|u(a+t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|u(a)\|_{L^2(\Omega,V)} \qquad \text{e} \qquad E(u(a+t)) \leq E(u(a)), \quad \text{para } t \in \mathcal{I}.$$

Em particular, para $b \in J$, definimos $t = b - a$, que pertence a $\mathcal{I}$ pois

$$|t| \leq |J| < T_M \qquad \text{e} \qquad t \in J - a \subset I - a.$$

Assim, a relação anterior implica

$$\|u(b)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|u(a)\|_{L^2(\Omega,V)} \qquad \text{e} \qquad E(u(b)) \leq E(u(a)).$$

Por fim, como a e b são arbitrários em J, essas relações implicam que as funções $\|u(\cdot)\|_{L^2(\Omega,V)}$ e $E(u(\cdot))$ são constantes em J. ∎

Para concluir a prova, observe que, por ser I compacto, este pode ser coberto por uma quantidade finita de subintervalos de comprimento menor que T_M. Como as funções $\|u(\cdot)\|_{L^2(\Omega,V)}$ e $E(u(\cdot))$ são constantes em cada um desses subintervalos, segue, pela conexidade de I, que elas são constantes em todo o intervalo I. Em particular, como $u(0) = \varphi$,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \quad \text{e} \quad E(u(t)) = E(\varphi), \quad \forall t \in I.$$

Passo 3. *Regularidade.*

Pelo Passo 1, sabemos que $u : (-T_{\min}, T_{\max}) \to H_0^1(\Omega, V)$ é fracamente contínua. Além disso, como $G : H_0^1(\Omega, V) \to \mathbb{R}$ é, por hipótese, completamente contínua, segue-se que a função composta $G(u)$ é contínua. Por outro lado, combinando as leis de conservação obtidas no passo anterior, podemos escrever

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} + 2G(u(t)) - 2G(\varphi) \qquad \forall t \in (-T_{\min}, T_{\max}),$$

o que implica a continuidade da função $\|u(\cdot)\|_{H^1(\Omega,V)}$. Como $H_0^1(\Omega, V)$ é um espaço uniformemente convexo, a continuidade fraca juntamente com a continuidade da norma garante que u é fortemente contínua, ou seja,

$$u \in C((-T_{\min}, T_{\max}), H_0^1(\Omega, V)).$$

Consequentemente, as funções ${}_V\Delta u$ e $g(u)$ também são contínuas. Portanto, da igualdade

$$\partial_t u = i_V\Delta u + ig(u) \quad \text{q.t.p.} \quad t \in (-T_{\min}, T_{\max})$$

segue que a derivada fraca $\partial_t u$ é contínua em $(-T_{\min}, T_{\max})$ com valores em $H^{-1}(\Omega, V)$. Consequentemente, a derivada temporal de u existe no sentido clássico e é uma função contínua. Assim, concluímos que

$$u \in C^1\Big((-T_{\min}, T_{\max}), H^{-1}(\Omega, V)\Big).$$

Passo 4. *Alternativa blow-up.*

Suponha $T_{\max} < \infty$ e, por absurdo, que existem uma constante M e uma sequência $t_n \nearrow T_{\max}$ tais que $\|u(t_n)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M$ para todo n. Denote por T_M o tempo de existência local fornecido pelo Teorema 3.3. Então, pela definição de limite, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$T_{\max} < t_k + T_M. \tag{3.62}$$

Como $\|u(t_k)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M$, o Teorema 3.3 garante a existência de uma H_0^1-solução forte v do problema (P) com dado inicial $u(t_k)$, definida no intervalo $(-T_M, T_M)$, e pelo Teorema 3.1, v pode ser representada por

$$v(t) = T(t)u(t_k) + i\int_0^t T(t-s)g(v(s))ds, \quad \text{q.t.p. } t \in (-T_M, T_M).$$

Combinando essa expressão com (3.58), obtemos, para quase todo $t \in [t_k, T_M + t_k)$,

$$v(t-t_k) = T(t)\varphi + i\int_0^{t_k} T(t-s)g(u(s))ds + i\int_{t_k}^t T(t-s)g(v(s-t_k))ds.$$

Dessa forma, definindo a função

$$w(t) := \begin{cases} u(t), & \text{se } 0 \leq t \leq t_k \\ v(t-t_k), & \text{se } t_k \leq t < t_k + T_M, \end{cases}$$

vemos que w pertence a $L^\infty((0, t_k + T_M), H_0^1(\Omega, V))$ e satisfaz a identidade

$$w(t) = T(t)\varphi + i\int_0^t T(t-s)g(w(s))ds, \quad \text{q.t.p. } t \in (0, t_k + T_M).$$

Tais propriedades satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1, garantindo assim que w é uma H_0^1-solução forte do problema (P) com dado inicial φ no intervalo $[0, t_k + T_M)$. No entanto, nenhuma solução pode ser estendida além de $T_{\max}$, de modo que devemos ter $t_k + T_M \leq T_{\max}$, o que contradiz (3.62). Assim, concluímos que

$$\lim_{t \to T_{\max}^+} \|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} = \infty \qquad \text{quando } T_{\max} < \infty.$$

O caso $T_{\min} < \infty$ é tratado de maneira análoga.

Passo 5. *Dependência contínua dos dados iniciais.*

Assuma que $\varphi_n \to \varphi$ em $H_0^1(\Omega, V)$, e denote por u_n e u as únicas H_0^1-soluções clássicas maximais do problema (P) associadas, respectivamente, aos dados iniciais φ_n e φ. Nosso objetivo, neste passo, é mostrar que, para n suficientemente grande, u_n está bem definida em qualquer intervalo compacto $I \subset (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi))$ contendo origem, e que

$$u_n \to u \quad \text{em } C(I, H_0^1(\Omega, V)).$$

Para isso, fixamos um intervalo $I = [a, b]$ contendo a origem, e consideramos a constante

$$M := 2\sup\left\{\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)};\ t \in I\right\},$$

que é finita devido à continuidade de u. Ademais, denotemos por T_M o tempo de existência local garantido pelo Teorema 3.3 associado a M. Por fim, cabe destacar que as leis de conservação de massa e energia permitem expressar

$$\begin{aligned} \|u_n(\cdot)\|_{H^1(\Omega,V)}^2 &= \|\varphi_n\|_{H^1(\Omega,V)}^2 + 2G(u_n(\cdot)) - 2G(u_n(0)), \\ \|u(\cdot)\|_{H^1(\Omega,V)}^2 &= \|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)}^2 + 2G(u(\cdot)) - 2G(u(0)). \end{aligned} \tag{3.63}$$

A demonstração será apresentada em etapas sucessivas.

Etapa 1. *Convergência uniforme em* $I_1 := [-T_M, T_M]$

A partir de $\varphi_n \to \varphi$, podemos encontrar um índice n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$,

$$\|u(0)\|_{H^1(\Omega,V)} + \|\varphi_n - \varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M.$$

Em consequência, pela desigualdade triangular e visto que $u(0) = \varphi$, obtemos

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)},\ \|\varphi_n\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M, \quad \text{para todo } n \geq n_1.$$

Dessa forma, o Teorema 3.3 assegura que podemos encontrar solução para a equação de Schrödinger no intervalo I_1 para os dados iniciais φ e φ_n. Portanto,

$$I_1 \subset (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi)),\ (-T_{\min}(\varphi_n), T_{\max}(\varphi_n)).$$

Além disso, temos as estimativas uniformes

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)}, \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq 2M, \quad \text{para todo } t \in I_1 \text{ e } n \geq n_1,$$

com as quais, argumentando como na Afirmação 1 do Teorema 3.3, obtemos que $(u_n)_{n\geq n_1}$ é limitada em $W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$. Por outro lado, aplicando o Lema 3.12 à sequência $(\varphi_n)_{n\geq n_1}$, obtemos

$$u_n \to u \quad \text{em } C(I_1, L^2(\Omega, V)).$$

Combinando isso com o Lema 3.10, que garante que

$$|G(u_n(t)) - G(u(t))| \leq C(2M)\|u_n(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega,V)}^{\beta}, \quad \forall t \in I_1,$$

concluímos que a sequência $(G(u_n(\cdot)))_{n\geq n_1}$ converge uniformemente para $G(u(\cdot))$ em I_1. Isso, por sua vez, implica, via (3.63), que

$$\|u_n(\cdot)\|_{H^1(\Omega,V)} \to \|u(\cdot)\|_{H^1(\Omega,V)} \quad \text{uniformemente em } I_1.$$

Por fim, como $(u_n) \subset C(I_1, H_0^1(\Omega, V))$, o Lema 3.3-(b) permite concluir que

$$u_n \to u \quad \text{em } C(I_1, H_0^1(\Omega, V)).$$

No caso em que $I \subset I_1$, o resultado está provado. Caso contrário, como T_M não depende do dado inicial, podemos iterar o procedimento para cobrir todo o intervalo I.

Etapa 2. *Convergência uniforme em* $I_2 = [0, 2T_M]$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $T_M < b$. Como já foi demonstrado que

$$u_n(T_M) \to u(T_M) \quad \text{em } H_0^1(\Omega, V),$$

podemos, seguindo o raciocínio da etapa anterior, encontrar um índice $n_2 > n_1$ tal que

$$\|u(T_M)\|_{H^1(\Omega,V)},\ \|u_n(T_M)\|_{H^1(\Omega,V)} \le M, \quad \text{para todo } n \ge n_2.$$

Dessa forma, o Teorema 3.3 garante a existência de H_0^1-soluções fortes v_n e v para a equação de Schrödinger no intervalo $[-T_M, T_M]$, associadas, respectivamente, aos dados iniciais $u_n(T_M)$ e $u(T_M)$, e satisfazendo as estimativas uniformes

$$\|v_n(t)\|_{H_0^1(\Omega,V)},\ \|v(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \le 2M, \quad \text{para todo } |t| \le T_M \text{ e } n \ge n_2. \tag{3.64}$$

Além disso, aplicando o Lema 3.12 à sequência de dados iniciais $(u_n(T_M))_{n \ge n_2}$, obtemos

$$v_n \to v \quad \text{em } C([-T_M, T_M], L^2(\Omega, V)). \tag{3.65}$$

Definindo agora as funções

$$w_n(t) = \begin{cases} u_n(t), & \text{se } 0 \le t \le T_M \\ v_n(t - T_M), & \text{se } T_M \le t \le 2T_M \end{cases} \quad \text{e} \quad w(t) = \begin{cases} u(t), & \text{se } 0 \le t \le T_M \\ v(t - T_M), & \text{se } T_M \le t \le 2T_M, \end{cases}$$

verifica-se, por um argumento análogo ao do Passo 4, que w_n e w são H_0^1-soluções fortes do problema (P) no intervalo $[0, 2T_M]$, com dados iniciais φ_n e φ, respectivamente. Consequentemente, pela maximalidade dos intervalos de existência, segue que

$$[0, 2T_M] \subset [0, T_{\max}(\varphi)),\ [0, T_{\max}(\varphi_n)), \quad \text{para todo } n \ge n_2.$$

Além disso, pela unicidade da solução, temos

$$u_n(\cdot) = v_n(\cdot - T_M) \qquad \text{e} \qquad u = v(\cdot - T_M) \quad \text{em } J := [T_M, 2T_M].$$

Consequentemente, a estimativa (3.64) se traduz em

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)}, \|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \le 2M, \quad \forall t \in J,$$

com as quais, argumentando como na Afirmação 1 do Teorema 3.3, obtemos que $(u_n)_{n\geq n_2}$ é limitada em $W^{1,\infty}(J, H^{-1}(\Omega, V))$. Além disso, a convergência (3.65) passar a ser

$$u_n \to u \quad \text{em } C(J, L^2(\Omega, V)).$$

Essa convergência junto ao fato, assegurado pelo Lema 3.10, de que

$$|G(u_n(t)) - G(u(t))| \leq C(2M)\|u_n(t) - u(t)\|^{\beta}_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall t \in J,$$

implica que a sequência $(G(u_n))_{n\geq n_2}$ converge uniformemente para $G(u)$ em J. Dessa forma, por (3.63), resulta que $\|u_n(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \to \|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)}$ uniformemente em J. Por fim, como $(u_n) \subset C(J, H_0^1(\Omega, V))$, o Lema 3.3-(b) permite concluir que

$$u_n \to u \quad \text{em } C([T_M, 2T_M], H_0^1(\Omega, V)).$$

Combinando esse resultado com o da Etapa 1, temos

$$u_n \to u \quad C([0, 2T_M], H_0^1(\Omega, V)).$$

Etapa 3. Repetindo esse procedimento, conseguimos estender a convergência para o intervalo completo $[0, b]$, onde $b \leq kT_M$ para algum inteiro k. Dessa forma, temos

$$u_n \to u \quad C([0, b], H_0^1(\Omega, V)).$$

Aplicando o mesmo raciocínio no intervalo $[a, 0]$, obtemos finalmente que

$$u_n \to u \quad C([a, b], H_0^1(\Omega, V)),$$

finalizando a prova. □

Apresentamos a seguir uma condição suficiente para a unicidade.

Corolário 3.4. *Suponha que as funções g, G e V satisfazem as hipóteses* **H1**-**H4**, *com $p = r = 2$. Então, o problema* (P) *é localmente bem posto em $H_0^1(\Omega, V)$ e satisfaz as leis de conservação de massa e de energia.*

Demonstração. Precisamos apenas demonstrar a unicidade. Seja I um intervalo contento 0, $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ um dado inicial e considere $u_1, u_2 \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$ duas soluções do problema (P). Pela fórmula de Duhamel (ver Teorema 3.1) temos

$$u_2(t) - u_1(t) = i \int_0^t \mathscr{T}(t - s)(g(u_2(s)) - g(u_1(s)))ds.$$

Aplicando a norma em $L^2(\Omega, V)$ e usando a hipótese **H1**, com $p = r = 2$ e

$$M = \max\{\|u_k\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega,V))};\ k = 1,2\},$$

segue que

$$\begin{aligned}\|u_2(t) - u_1(t)\|_{L^2(\Omega,V)} &\le \left|\int_0^t \|g(u_2(s)) - g(u_1(s))\|_{L^2(\Omega,V)} ds\right| \\ &\le C(M)\left|\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\|_{L^2(\Omega,V)} ds\right|.\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Gronwall, concluímos que $u_1 = u_2$. □

3.7 Existência global

Nesta seção, provamos que, sob condições adicionais apropriadas sobre a primitiva da não linearidade g, o problema (P) admite uma solução global no tempo. A demonstração se baseia na conservação da massa e na desigualdade da energia.

Teorema 3.5. *Assuma que as funções g, G e V satisfazem as hipóteses* **H1**-**H4**. *Suponha ainda que, para todo $R > 0$, existam constantes $C(R) > 0$ e $\varepsilon \in (0,1)$ tais que*

$$G(v) \le \frac{1-\varepsilon}{2}\|v\|^2_{H^1(\Omega,V)} + C(R), \tag{3.66}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|v\|_{L^2(\Omega,V)} \le R$. Então, para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, o problema (P) *admite uma H_0^1-solução forte global limitada*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega, V)),$$

que satisfaz, para todo $t \in \mathbb{R}$, a conservação da massa e a desigualdade de energia:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \qquad e \qquad E(u(t)) \le E(\varphi). \tag{3.67}$$

Demonstração. Dado $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, fixemos uma constante R tal que $\|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \le R$ e definamos a constante positiva

$$M^2 = \frac{1}{\varepsilon}\Big[\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2C(R)\Big],$$

de modo que, à luz da condição (3.66), tem-se $\|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \le M$. O ponto crucial da demonstração reside na seguinte estimativa.

Afirmação 1. *Seja u uma H_0^1-solução forte do problema* (P) *com dado inicial φ, definida em um intervalo I, e que satisfaz a conservação da massa e a desigualdade de energia* (3.67) *em I. Então*

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \le M, \quad \textit{para todo } t \in I.$$

De fato, note inicialmente que a conservação da massa combinada com a desigualdade de energia implicam que, para todo $t \in I$,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} &= \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} + 2E(u(t)) + 2G(u(t)) \\
&\leq \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega,V)} + 2E(\varphi) + 2G(u(t)) \\
&= \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} - 2G(\varphi) + 2G(u(t))
\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} \leq \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2G(u(t)).$$

Mas como, pela conservação da massa, $\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R$, podemos aplicar (3.66) e obter

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} \leq \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + (1-\varepsilon)\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} + 2C(R).$$

Reorganizando, obtemos

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega,V)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\Big[\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2C(R)\Big] = M^2,$$

de onde o resultado segue. ∎

Dando continuidade à demonstração, como $\|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M$, o Teorema 3.3 garante a existência de uma H^1_0-solução forte u do o problema (P) com dado inicial φ no intervalo $[0, T_M]$, satisfazendo (3.67) nesse intervalo. Assim, pela Afirmação 1,

$$\|u(T_M)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M.$$

Com isso, uma nova aplicação do Teorema 3.3 nos fornece uma H^1_0-solução forte u_1 do problema (P) com dado inicial $\varphi_1 = u(T_M)$ no intervalo $[0, T_M]$, satisfazendo a conservação da massa e a desigualdade de energia. Definimos então a função

$$u(t) := \begin{cases} u(t), & \text{se } 0 \leq t \leq T_M \\ u_1(t - T_M), & \text{se } T_M \leq t \leq 2T_M. \end{cases}$$

Por um argumento análogo ao do Passo 4 do Teorema 3.5, verifica-se que essa extensão é uma H^1_0-solução forte do problema (P) com dado inicial φ no intervalo $[0, 2T_M]$. Além disso, ela satisfaz a conservação da massa e a desigualdade de energia (3.67) nesse intervalo, pois, basta observar que, para todo $t \in [T_M, 2T_M]$, a conservação de massa de u_1 garante

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|u_1(t - T_M)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega,V)} = \|u(T_M)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)},$$

e, pela desigualdade de energia satisfeita por u_1, segue que

$$E(u(t)) = E(u_1(t - T_M)) \leq E(\varphi_1) = E(u(T_M)) \leq E(\varphi).$$

Portanto, podemos aplicar a Afirmação 1 para obter

$$\|u(2T_M)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M.$$

Iterando esse procedimento, obtemos uma H_0^1-solução forte u do problema (P) com dado inicial φ, definida em $[0, \infty)$ e satisfazendo (3.67) para todo $t \geq 0$. De modo análogo, estendemos a solução para $(-\infty, 0]$, obtendo assim uma solução global $u : \mathbb{R} \to H_0^1(\Omega, V)$ do problema (P) que satisfaz (3.67) em todo $\mathbb{R}$. Por último, a Afirmação 1 assegura que $u \in L^\infty(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega, V))$, o que conclui a prova. $\square$

Note que a hipótese *"para todo R ..."* foi usada apenas para garantir que, *"para qualquer dado inicial"* podemos obter uma solução global. No entanto, o mesmo argumento da demonstração anterior garante o seguinte resultado:

Corolário 3.5. *Assuma que as funções g, G e V satisfazem as hipóteses* **H1**-**H4**. *Suponha ainda que existam constantes R, $C(R) > 0$ e $\varepsilon \in (0, 1)$ tais que*

$$G(v) \leq \frac{1-\varepsilon}{2} \|v\|^2_{H^1(\Omega,V)} + C(R), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, V),\ \|v\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R.$$

Então, para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R$, o problema (P) admite uma H_0^1-solução forte global uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega, V)$, que satisfaz a conservação da massa e a desigualdade de energia.

A seguir, mostramos que, sob uma hipótese diferente sobre g, também é possível garantir a existência de uma H_0^1-solução forte global limitada no tempo, desde que o dado inicial seja suficientemente pequeno.

Teorema 3.6. *Assuma que g, G e V satisfazem as hipóteses* **H1**-**H4**, *com $G(0) = 0$. Suponha ainda que existam uma constante $\varepsilon > 0$ e uma função contínua não negativa $\vartheta : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}$, com $\vartheta(0) = 0$, tais que, para todo $v \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|v\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon$,*

$$G(v) \leq \frac{1-\varepsilon}{2} \|v\|^2_{H^1(\Omega,V)} + \vartheta\left(\|v\|_{L^2(\Omega,V)}\right). \tag{3.68}$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que, para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega,V)} \leq \delta$, o problema (P) admite uma H_0^1-solução forte global u que satisfaz a conservação de massa e a desigualdade de energia (3.67) para todo $t \in \mathbb{R}$, e $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R},H_0^1(\Omega,V))} \leq \varepsilon$.

Demonstração. Primeiro, para garantir a existência de δ, note que, pelas suposições sobre G e ϑ, a aplicação

$$\varphi \in H_0^1(\Omega, V) \longmapsto \frac{1}{\varepsilon}\Big[\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2\vartheta\Big(\|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}\Big)\Big],$$

é contínua e se anula em $\varphi = 0$. Dessa forma, podemos escolher $\delta \in (0, \varepsilon/2]$ tal que, para todo $\|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \delta$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big[\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2\vartheta\Big(\|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}\Big)\Big] \leq \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{3.69}$$

Agora, fixemos um dado inicial $\varphi \in H^1_0(\Omega, V)$ com $\|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \delta$. O argumento que segue será análogo ao do teorema anterior, desde que se comprove a seguinte estimativa:

Afirmação 1. *Suponha que u seja uma H^1_0-solução forte do problema (P) com dado inicial φ no intervalo I, e que satisfaz a conservação da massa e a desigualdade de energia. Se existir $t_0 \in I$ tal que $\|u(t_0)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon$, então necessariamente*

$$\|u(t_0)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon/2.$$

De fato, assim como no teorema anterior, a conservação da massa e a desigualdade de energia implicam que

$$\|u(t_0)\|^2_{H^1(\Omega,V)} \leq \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2G(u(t_0)).$$

Como $\|u(t_0)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon$, aplicamos (3.68), obtendo

$$\|u(t_0)\|^2_{H^1(\Omega,V)} \leq \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + (1-\varepsilon)\|u(t_0)\|^2_{H^1(\Omega,V)} + 2\vartheta\left(\|u(t_0)\|_{L^2(\Omega,V)}\right).$$

Pela conservação da massa, $\|u(t_0)\|_{L^2(\Omega,V)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}$, o que permite reescrever a desigualdade como

$$\|u(t_0)\|^2_{H^1(\Omega,V)} \leq \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + (1-\varepsilon)\|u(t_0)\|^2_{H^1(\Omega,V)} + 2\vartheta\left(\|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}\right).$$

Reorganizando os termos e aplicando (3.69), obtemos

$$\|u(t_0)\|^2_{H^1(\Omega,V)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\Big[\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega,V)} - 2G(\varphi) + 2\vartheta\left(\|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}\right)\Big] \leq \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad \blacksquare$$

Agora, como $\|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \delta \leq \varepsilon/2$, o Teorema 3.3 garante a existência de uma H^1_0-solução forte u do problema (P), definida no intervalo $[0, T_{\varepsilon/2}]$, que satisfaz a conservação da massa, a desigualdade de energia, bem como a estimativa uniforme

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, T_{\varepsilon/2}].$$

Em particular, a Afirmação 1 pode ser aplicada para concluir que

$$\|u(T_{\varepsilon/2})\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon/2.$$

Com isso, uma nova aplicação do Teorema 3.3 nos fornece uma H_0^1-solução forte u_1 do problema (P) com dado inicial $\varphi_1 = u(T_{\varepsilon/2})$, definida no intervalo $[0, T_{\varepsilon/2}]$, que satisfaz a conservação de massa, a desigualdade de energia, e a estimativa uniforme

$$\|u_1(t)\|_{H_0^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, T_{\varepsilon/2}].$$

Definimos então a função

$$u(t) := \begin{cases} u(t), & \text{se } 0 \leq t \leq T_{\varepsilon/2} \\ u_1(t - T_{\varepsilon/2}), & \text{se } T_{\varepsilon/2} \leq t \leq 2T_{\varepsilon/2}. \end{cases}$$

Como no Teorema anterior, essa extensão é uma H_0^1-solução forte do problema (P) com dado inicial φ no intervalo $[0, 2T_{\varepsilon/2}]$, que satisfaz a conservação de massa, a desigualdade de energia e ainda a estimativa

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, 2T_{\varepsilon/2}].$$

Isso ocorre porque tanto u quanto u_1 verificam essas propriedades no intervalo $[0, T_M]$. Com isso, podemos aplicar a Afirmação 1 para obter

$$\|u(2T_{\varepsilon/2})\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon/2.$$

Podemos então repetir o argumento acima e construir uma H_0^1-solução forte u de (P) no intervalo $[0, \infty)$, e depois em $\mathbb{R}$, que satisfaz todas as conclusões do teorema. $\square$

Capítulo 4

Exemplos

Neste capítulo, apresentamos alguns modelos clássicos de não linearidades associados à equação de Schrödinger semilinear com peso (1).

4.1 Potencial externo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e V um peso que satisfaz as condições **V1** e **V2**. Considere um potencial $K : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$K \in L^\alpha(\Omega, V) \quad \text{para algum } \alpha > 1 \text{ com } \alpha > N/2,$$

sendo entendido que, no caso $\alpha = \infty$, o espaço $L^\infty(\Omega, V)$ corresponde a $L^\infty(\Omega)$. Definamos os expoentes conjugados

$$p := \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \qquad \text{e} \qquad p' := \frac{2\alpha}{\alpha + 1},$$

de modo que, pela restrição imposta sobre α, temos $p \in [2, 2^*)$. Finalmente, suponhamos que o peso V satisfaça a condição:

$$V \in L^{q/(q-p)}(\Omega) \quad \text{para algum } q \in [p, 2^*).$$

Nessas circunstâncias, a desigualdade de Hölder assegura que

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega, V),$$

de modo que V satisfaz a hipótese **H4**, com $r = p$ e $q = \varrho$. Consequentemente, por Ω ser limitado, e seguindo o raciocínio de (3.21), obtemos a imersão compacta

$$H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow L^p(\Omega, V). \tag{4.1}$$

Proposição 4.1. *A aplicação* $g : H_0^1(\Omega, V) \to L^{p'}(\Omega, V)$*, dada por* $g(u) := Ku$*, é bem definida, linear e contínua. Além disso,* g *satisfaz*

$$\|g(u)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq \|K\|_{L^{\alpha}(\Omega,V)}\|u\|_{L^{p}(\Omega,V)}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega, V).$$

Em particular, g *satisfaz a hipótese* **H1** *com* $r = p$*.*

Demonstração. Para $\alpha = \infty$, temos $p = p' = 2$ e então

$$\|g(u)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq \|K\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega,V)}.$$

No caso em que $\alpha < \infty$, podemos aplicar a desigualdade de Hölder com expoentes $(\alpha+1)/2$ e $(\alpha + 1)/(\alpha - 1)$, para obter

$$\begin{aligned}
\|g(u)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}^{p'} &= \int_\Omega |K|^{p'}|u|^{p'}\, V dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |K|^{\alpha}\, V dx\right)^{2/(\alpha+1)} \left(\int_\Omega |u|^{p}\, V dx\right)^{(\alpha-1)/(\alpha+1)} \\
&= \|K\|_{L^{\alpha}(\Omega,V)}^{p'}\|u\|_{L^{p}(\Omega,V)}^{p'}.
\end{aligned}$$

Para concluir, observamos que as estimativas obtidas garantem que g está bem definida e, além disso, é contínua, em virtude de sua linearidade e ao fato de que ainda temos

$$\|g(u)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq C_p\|K\|_{L^{\alpha}(\Omega,V)}\|u\|_{H^1(\Omega,V)},$$

onde C_p é a constante da imersão (4.1). □

Proposição 4.2. *O funcional* $G : H_0^1(\Omega, V) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$G(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega K|u|^2 V dx,$$

é bem definido e completamente contínuo. Além disso, ao considerarmos $H_0^1(\Omega, V)$ *como um espaço de Banach real, temos que* $C^1(H_0^1(\Omega, V), \mathbb{R})$ *e*

$$G'(u)v = \operatorname{Re}\int_\Omega Ku\bar{v}\, V dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega, V).$$

Demonstração. Dados $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$, seja o funcional $\Phi(u) : H_0^1(\Omega, V) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u)w := \operatorname{Re}\int_\Omega g(u)\bar{w}\, V dx,$$

o qual é $\mathbb{R}$-linear e limitado, devido à desigualdade de Hölder. Além disso, temos

$$G(u + v) - G(u) - \Phi(u)v = \frac{1}{2}\int_\Omega K|v|^2\, V dx = G(v).$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes α e $\alpha/(\alpha-1)$, obtemos

$$|G(v)| \leq \frac{1}{2}\|K\|_{L^{\alpha}(\Omega,V)}\|v\|^2_{L^p(\Omega,V)} \leq \frac{C_p^2}{2}\|K\|_{L^{\alpha}(\Omega,V)}\|v\|^2_{H^1(\Omega,V)},$$

implicando que G é bem definida e que

$$\frac{G(v)}{\|v\|_{H^1(\Omega,V)}} \to 0 \quad \text{quando} \qquad v \to 0 \text{ em } H_0^1(\Omega,V).$$

Combinando esses resultados, concluímos que G é Fréchet diferenciável em u, com derivada $G'(u) = \Phi(u)$. Finalmente, a continuidade da derivada é garantida pela desigualdade

$$\|G'(u) - G'(w)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega,V),\mathbb{R})} \leq \|g(u) - g(w)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}, \quad \forall u, w \in H_0^1(\Omega,V),$$

o que nos permite concluir que G é continuamente diferenciável.

Para mostrar que G é completamente contínua, consideremos $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega,V)$. Pela imersão compacta (4.1), temos $u_n \to u$ em $L^p(\Omega,V)$. Logo, pela teoria da medida, existe uma função $w \in L^p(\Omega,V)$ e uma subsequência (u_{n_k}) tal que

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \qquad \text{e} \qquad |u_{n_k}| \leq w \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Deste modo,

$$K|u_{n_k}|^2 \to K|u|^2 \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \qquad \text{e} \qquad K|u_{n_k}|^2 \leq K|w|^2 \in L^1(\Omega,V).$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e obter

$$G(u_{n_k}) = \frac{1}{2}\int_\Omega K|u_{n_k}|^2\, V dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega K|u|^2\, V dx = G(u).$$

O argumento usado mostra que toda subsequência de $(G(u_n))$ tem uma subsequência que converge para $G(u)$. Consequentemente, $G(u_n) \to G(u)$. $\square$

Corolário 4.1. *Para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega,V)$, existe um intervalo I e uma H_0^1-solução forte da equação de Schrödinger semilinear com peso*

$$\begin{cases} i\partial_t u + {}_V\Delta u + Ku = 0, & \textit{em } \Omega \times I \\ u(x,t) = 0, & \textit{sobre } \partial\Omega \times I \\ u(x,0) = \varphi(x), & \textit{para } x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

a qual conserva a massa ao longo do tempo. Além disso, se K é limitado, então o problema é bem posto e a solução é global.

Demonstração. Sejam g, G e V as funções previamente definidas. As Proposições 4.1 e 4.2, juntamente com o fato de que $\text{Im}(g(u)\bar{u}) = \text{Im}(K|u|^2) = 0$ e que V satisfaz **H4**, permitem concluir que essas funções satisfazem as condições **H1-H4** com $r = p$. Portanto, podemos aplicar o Teorema 3.3 a cada dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, com $M = \|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)}$, para garantir a existência de um intervalo aberto I e de uma H_0^1-solução forte u para o problema (4.2) que conserva a massa.

Consideremos agora o caso em que K é limitada, ou seja, $\alpha = \infty$ e $p = r = 2$. Nesse cenário, o Corolário 3.4 garante que o problema (4.2) é localmente bem posto em $H_0^1(\Omega, V)$. Para demonstrar que essa solução é global, observe que, para todo $R > 0$,

$$G(u) \leq \|K\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\Omega,V)} \leq \|K\|_{L^\infty(\Omega)}R^2 =: C(R),$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|u\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R$. Essa estimativa garante que G satisfaz a condição exigida no Teorema 3.5 para algum $\varepsilon \in (0, 1)$. Assim, a solução pode ser estendida globalmente no tempo e está uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega, V)$. □

4.2 Não linearidade local

Considere um domínio limitado com fronteira suave $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $f(\cdot, 0) = 0$;

(f_2) f satisfaz a condição local de Lipschitz na segunda variável, ou seja, para cada $M > 0$, existe uma constante $L(M)$, chamada *constante de Lipschitz local*, tal que

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L(M)|u - v|, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \text{ para todo } |u|, |v| \leq M.$$

Consideremos agora a extensão de f ao plano complexo, $\tilde{f} : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por

$$\tilde{f}(x, u) := f(x, |u|)\,\frac{u}{|u|} \quad \text{para } u \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \tilde{f}(x, 0) := 0. \tag{4.3}$$

Convém enfatizar que essa extensão permanece uma função de Carathéodory e, seguindo a argumentação do Exemplo 2.9, verifica-se que $\tilde{f}$ satisfaz a condição local de Lipschitz na segunda variável, agora com constante $3L(M)$, que, por simplicidade, continuaremos a denotar por $L(M)$. Além disso, consideramos a função real $F : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, z) := \int_0^{|z|} f(x, s)ds, \tag{4.4}$$

a qual é uma função Carathéodory. Com relação a essa função, apresentamos a seguir um resultado que fornece uma fórmula para as derivadas direcionais.

Proposição 4.3. *Para quase todo $x \in \Omega$ e para quaisquer $u, v \in \mathbb{C}$, tem-se*

$$\lim_{h \in \mathbb{R} \to 0} \frac{F(x, u+hv) - F(x, u)}{h} = \mathrm{Re}\left(\tilde{f}(x, u)\bar{v}\right). \tag{4.5}$$

Além disso, existe um número real $\theta = \theta(x, u, v)$ com $0 < |\theta| < |h|$ tal que

$$F(x, u+hv) - F(x, u) = \mathrm{Re}\Big(\tilde{f}(x, u+\theta v)\bar{v}\Big)\, h. \tag{4.6}$$

Demonstração. O caso $v = 0$ é trivial, de modo que assumimos $v \neq 0$. Suponha que $u \neq 0$ e note que, para todo número real h não nulo,

$$\begin{aligned}
\frac{F(x, u+hv) - F(x, u)}{h} &= \frac{F(x, u+hv) - F(x, u)}{|u+hv| - |u|} \cdot \left[\frac{|u+hv| - |u|}{h} \cdot \frac{|u+hv| + |u|}{|u+hv| + |u|}\right] \\
&= \frac{1}{|u+hv| - |u|} \int_{|u|}^{|u+hv|} f(x, s)ds \cdot \left[\frac{2\mathrm{Re}(u\bar{v}) + h|v|^2}{|u+hv| + |u|}\right].
\end{aligned}$$

Como $f(x, \cdot)$ é uma função contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|u+hv| - |u|} \int_{|u|}^{|u+tv|} f(x, s)ds = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{|u|}^{|u|+t} f(x, s)ds = f(x, |u|).$$

Além disso, observa-se que

$$\lim_{h \to 0} \frac{2\mathrm{Re}(u\bar{v}) + h|v|^2}{|u+hv| + |u|} = \frac{\mathrm{Re}(u\bar{v})}{|u|}.$$

Combinando esses limites, obtemos

$$\lim_{h \in \mathbb{R} \to 0} \frac{F(x, u+hv) - F(x, u)}{h} = f(x, |u|) \cdot \frac{\mathrm{Re}(u\bar{v})}{|u|} = \mathrm{Re}\left(\tilde{f}(x, u)\bar{v}\right).$$

Consideremos agora o caso $u = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade da função $f(x, \cdot)$ em zero, existe um δ tal que $|f(x, s)| < \varepsilon/|v|$ para todo $s \in [0, \delta]$. Logo,

$$\left|\frac{F(u+hv) - F(u)}{h}\right| \leq \frac{1}{|h|} \int_0^{|hv|} |f(s)|ds \leq \varepsilon, \quad \text{sempre que } 0 < |h| < \delta/|v|.$$

Isso implica que o limite do quociente diferencial é zero, e assim

$$\lim_{h \in \mathbb{R} \to 0} \frac{F(x, 0+hv) - F(x, 0)}{h} = 0 = \mathrm{Re}\left(\tilde{f}(x, 0)\bar{v}\right).$$

Finalmente, para mostrar (4.6), considere a função real $\gamma(s) = F(x, u+sv)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Pela propriedade anterior, essa função é derivável, com

$$\gamma'(s) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x, u + sv + hv) - F(x, u + sv)}{h} = \mathrm{Re}(\tilde{f}(x, u + sv)\bar{v}).$$

Aplicando então o Teorema do Valor Médio à função γ, achamos um θ com $0 < |\theta| < |h|$ tal que $\gamma(h) - \gamma(0) = \gamma'(\theta)\, h$, de onde o resultado segue. $\square$

Continuando com nosso exemplo, consideremos o caso $N \geq 2$ e suponhamos que a constante de Lipschitz local $L(s)$, vista como função de s, satisfaça a condição de crescimento polinomial

$$L(s) \leq Cs^{\alpha}, \quad \text{para algum } \alpha \in [0, 4/(N-2)). \tag{4.7}$$

Definimos então os expoentes conjugados

$$p := \alpha + 2 \qquad \text{e} \qquad p' := (\alpha + 2)/(\alpha + 1),$$

de modo que, pela restrição imposta sobre α, temos $p \in [2, 2^*)$. Além disso, o crescimento de L nos permite estimar, para quase todo $x \in \Omega$ e todo $u \in \mathbb{C}$,

$$|\tilde{f}(x, u)| \leq L(|u|)\,|u| \leq C|u|^{\alpha+1}$$

e

$$|F(x, u)| \leq \int_0^{|u|} |f(x, s)| ds \leq \int_0^{|u|} L(s)s\, ds \leq \int_0^{|u|} Cs^{\alpha+1} \leq C|u|^{\alpha+2}.$$

Ou ainda, pela definição de p,

$$|\tilde{f}(x, u)| \leq C|u|^{p-1} \qquad \text{e} \qquad |F(x, u)| \leq C|u|^p, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,\ \forall u \in \mathbb{C}. \tag{4.8}$$

Finalmente, consideremos um peso V que satisfaça as hipóteses **V1** e **V2**, e suponhamos que exista $q \in [p, 2^*)$ tal que

$$V \in L^{q/(q-p)}(\Omega).$$

Conforme discutido na seção anterior, essas hipóteses garantem que V satisfaz **H4**, com $r = p$ e $q = \varrho$. Além disso, asseguram a imersão compacta

$$H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow L^p(\Omega, V). \tag{4.9}$$

Proposição 4.4. *A aplicação $g : H_0^1(\Omega, V) \to L^{p'}(\Omega, V)$, dada por $g(u) := \tilde{f}(\cdot, u)$, é bem definida, contínua, e após uma possível modificação da constante C, temos*

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq C\left(\|u\|^{\alpha}_{H^1(\Omega,V)} + \|v\|^{\alpha}_{H^1(\Omega,V)}\right) \|u - v\|_{L^p(\Omega,V)},$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$. Em particular, g satisfaz a hipótese **H1** *com $r = p$.*

Demonstração. Primeiramente, note que g é bem definida em virtude de (4.8) e (4.9), pois

$$\int_\Omega |g(u)|^{p'} V dx \leq C^{p'} \int_\Omega |u|^{p'(p-1)} V dx = C^{p'} \int_\Omega |u|^p V dx < \infty, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega, V).$$

No caso em que $\alpha = 0$, temos $p = p' = 2$ e $\tilde{f}$ é globalmente Lipschitz na segunda variável. Consequentemente,

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega,V)} \leq C\|u - v\|_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega, V).$$

Suponha agora que $\alpha > 0$ e considere $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$. Para quase todo $x \in \Omega$, vale

$$\begin{aligned} \left|\tilde{f}(x, u(x)) - \tilde{f}(x, v(x))\right| &\leq L(\max\{|u(x)|, |v(x)|\}) \, |u(x) - v(x)| \\ &\leq C\Big[|u(x)|^\alpha + c|v(x)|^\alpha\Big] \, |u(x) - v(x)|, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}^{p'} &\leq C^{p'} \int_\Omega \Big[|u|^\alpha + |v|^\alpha\Big]^{p'} |u - v|^{p'} V dx \\ &\leq C^{p'} \cdot 2^{p'} \left[\int_\Omega |u|^{\alpha p'} |u - v|^{p'} V dx + \int_\Omega |v|^{\alpha p'} |u - v|^{p'} V dx\right]. \end{aligned}$$

Como $p' < p$, aplicamos a desigualdade de Hölder com $p/(p - p')$ e p/p', para obter

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^{\alpha p'} |u - v|^{p'} V dx &\leq \left(\int_\Omega |u|^{\alpha p' p/(p-p')} \, V dx\right)^{(p-p')/p} \left(\int_\Omega |u - v|^p V dx\right)^{p'/p} \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega,V)}^{p-p'} \|u - v\|_{L^p(\Omega,V)}^{p'} \end{aligned}$$

sendo que a última igualdade ocorre porque, pela definição dos expoentes, $\alpha p'/(p-p') = 1$. De modo análogo, obtemos

$$\int_\Omega |v|^{\alpha p'} |u - v|^{p'} V dx \leq \|v\|_{L^p(\Omega,V)}^{p-p'} \|u - v\|_{L^p(\Omega,V)}^{p'}.$$

Assim, somando as duas últimas desigualdades,

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)}^{p'} \leq (2C)^{p'} \left[\|u\|_{L^p(\Omega,V)}^{p-p'} + \|v\|_{L^p(\Omega,V)}^{p-p'}\right] \|u - v\|_{L^p(\Omega,V)}^{p'},$$

ou ainda,

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq 2C \cdot 2^{1/p'} \left[\|u\|_{L^p(\Omega,V)}^{(p-p')/p'} + \|v\|_{L^p(\Omega,V)}^{(p-p')/p'}\right] \|u - v\|_{L^p(\Omega,V)}.$$

Como $(p - p')/p' = \alpha$ e pela imersão (4.9), a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq 2C \cdot 2^{1/p'} C_p^\alpha \left[\|u\|_{H^1(\Omega,V)}^\alpha + \|v\|_{H^1(\Omega,V)}^\alpha\right] \|u - v\|_{L^p(\Omega,V)},$$

o que estabelece a desigualdade desejada. Além disso, observando que

$$\|g(u)-g(v)\|_{L^{p'}(\Omega,V)} \leq \tilde{C}\left[\|u\|_{H^1(\Omega,V)}^{\alpha}+\|v\|_{H^1(\Omega,V)}^{\alpha}\right]\|u-v\|_{H^1(\Omega,V)},$$

concluímos que g é contínua. $\square$

Proposição 4.5. *O funcional $G : H_0^1(\Omega, V) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$G(u) := \int_\Omega F(x,u)V\,dx,$$

é bem definido e completamente contínuo. Além disso, ao considerarmos $H_0^1(\Omega, V)$ como um espaço de Banach real, temos que $G \in C^1(H_0^1(\Omega,V),\mathbb{R})$ e

$$G'(u)v = \operatorname{Re}\int_\Omega g(u)\bar{v}\,V\,dx = \operatorname{Re}\langle g(u),\bar{v}\rangle_{H^{-1},H_0^1,V}, \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega,V).$$

Demonstração. Primeiramente, G é bem definida, pois, por (4.8) e (4.9), temos

$$|G(u)| \leq \int_\Omega C|u|^p V\,dx < \infty, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega,V).$$

Para mostrar que G é continuamente diferenciável, começamos calculando suas derivadas direcionais. Para fazer isso, consideremos $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$ arbitrários e, para $0 < |h| \ll 1$, definamos a função

$$A_h(x) := \frac{F(x,u(x)+h\,v(x))-F(x,u(x))}{h}.$$

Pela Proposição 4.3, sabemos que

$$A_h(x) \to \operatorname{Re}\left(\tilde{f}(x,u(x))\,\overline{v(x)}\right) \quad \text{q.t.p. } x\in\Omega \quad \text{quando } h \to 0,$$

e que existe θ real, com $|\theta| < |h|$, tal que

$$\begin{aligned}
|A_h(x)| &= |\operatorname{Re}(\tilde{f}(x,u+\theta v)\,\bar{v})| \\
&\leq |\tilde{f}(x,u+\theta v)|\,|v| \\
&\leq C|u+\theta v|^{p-1}|v| \\
&\leq C\cdot 2^{p-1}\left(|u|^{p-1}|v|+|v|^p\right) \in L^1(\Omega,V).
\end{aligned}$$

Com isso, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e obter

$$\frac{G(u+hv)-G(u)}{h} = \int_\Omega A_h\,V\,dx \to \int_\Omega \operatorname{Re}(\tilde{f}(x,u)\bar{v})\,V\,dx = \operatorname{Re}\int_\Omega g(u)\bar{v}\,V\,dx,$$

o que nos dá

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u) = \mathrm{Re}\int_\Omega g(u)\bar{v}\, V dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega, V).$$

Não é difícil ver que, para u fixado, essa expressão define um funcional $\mathbb{R}$-linear e contínuo na variável v. Além disso, em virtude da continuidade de g, essa derivada depende continuamente de u, pois

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial(\cdot)}(u) - \frac{\partial G}{\partial(\cdot)}(w) \right\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega,V),\mathbb{R})} \leq C_p \left\| g(u) - g(w) \right\|_{L^{p'}(\Omega,V)}, \quad \forall u, w \in H_0^1(\Omega, V).$$

Portanto, concluímos que G é continuamente diferenciável no sentido de Fréchet, ou seja,

$$G \in C^1(H_0^1(\Omega, V), \mathbb{R}), \quad \text{com derivada} \quad G'(u)v = \frac{\partial G}{\partial v}(u).$$

Finalmente, para mostrar que G é completamente contínua, suponha que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega, V)$. Pela imersão compacta (4.9), obtemos $u_n \to u$ em $L^p(\Omega, V)$. Logo existem uma função $w \in L^p(\Omega, V)$ e uma subsequência (u_{n_k}) tal que

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \qquad \text{e} \qquad |u_{n_k}| \leq w \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim, pela continuidade de F na segunda variável e por (4.8), obtemos

$$F(x, u_{n_k}(x)) \to F(x, u(x)) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \qquad \text{e} \qquad |F(\cdot, u_{n_k})| \leq C|w|^p \in L^1(\Omega, V).$$

Usando então o Teorema da Convergência Dominada, podemos afirmar que

$$G(u_{n_k}) = \int_\Omega F(x, u_{n_k}) V dx \to \int_\Omega F(x, u) V dx = G(u).$$

O argumento usado mostra que toda subsequência $(G(u_n))$ tem uma subsequência que converge para $G(u)$. Portanto, a própria sequência $(G(u_n))$ converge para $G(u)$. $\square$

Corolário 4.2. *Para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, existe um intervalo I e uma H_0^1-solução forte da equação de Schrödinger semilinear com peso*

$$\begin{cases} i\partial_t u + {}_V\Delta u + \tilde{f}(x, u) = 0, & \textit{em } \Omega \times I \\ u(x,t) = 0, & \textit{sobre } \partial\Omega \times I \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \textit{para } x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

a qual conserva a massa. No caso $\alpha = 0$, o problema é bem posto e a solução é global.

Demonstração. Sejam g, G e V as funções definidas anteriormente. Com base nas Proposições 4.4 e 4.5, no fato de que

$$\mathrm{Im}(g(u)\bar{u}) = \mathrm{Im}(f(\cdot, |u|)|u|) = 0,$$

e no cumprimento da hipótese **H4** por V, conclui-se que as hipóteses **H1-H4** são satisfeitas com $r = p$.

Aplicando o Teorema 3.3 a cada dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, com $M = \|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)}$, garantimos a existência de um intervalo aberto I e de uma H_0^1-solução forte u do problema (4.10), a qual conserva a massa ao longo do tempo.

Consideremos agora o caso $\alpha = 0$, ou seja, $p = r = 2$. Nesta situação, o Corolário 3.4 garante que o problema (4.10) é localmente bem posto em $H_0^1(\Omega, V)$. Para mostrar que a solução é global, observe que, para todo $R > 0$, tem-se

$$G(u) \leq C\|u\|^2_{L^2(\Omega,V)} \leq CR^2 =: C(R), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega, V),\ \|u\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R.$$

Dessa forma, o Teorema 3.5 garante que a solução é global. □

Exemplo 4.1. Assumindo que $\alpha \in (0, 4/(N-2))$ e λ um número real, para cada dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, existe um intervalo I e uma H_0^1-solução forte do problema

$$\begin{cases} i\partial_t u + {}_V\Delta u + \lambda|u|^\alpha u = 0, & \text{em } \Omega \times I \\ u(x,t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times I \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{para } x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.11}$$

Esse resultado é consequência do Corolário anterior, considerando a função de Carathéodory $f(x,s) = \lambda s^{\alpha+1}$, que satisfaz as condições (f_1), (f_2) e (4.7), com constante de Lipschitz local

$$L(s) = |\lambda|(1+\alpha)s^\alpha.$$

Convém observar que, no caso $\lambda \leq 0$, o problema acima admite uma H_0^1-solução forte global, ou seja, $I = \mathbb{R}$. De fato, como

$$F(x,u) = \int_0^{|u|} f(x,s)ds = \frac{\lambda}{\alpha+1}|u|^{\alpha+2} \leq 0, \quad \forall u \in \mathbb{C},\ x \in \Omega,$$

segue que, para todo $R > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|u\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R$,

$$G(u) = \int_\Omega F(x,u)V dx \leq 0 < 1 =: C(R).$$

Essa estimativa garante que G satisfaz a condição exigida no Teorema 3.5 para algum $\varepsilon \in (0,1)$. Portanto, a solução pode ser estendida a todo $\mathbb{R}$.

4.3 Equação de Schrödinger em uma dimensão

Na seção anterior, tratamos do caso $N \geq 2$. Passamos agora a considerar a dimensão unidimensional, isto é, o caso $N = 1$, mantendo a notação e as hipóteses previamente impostas sobre as funções f, $\tilde{f}$ e F. Além disso, supomos que a constante de Lipschitz local $L(s)$, vista como função de s, seja contínua em $[0, \infty)$. Essa suposição é suficiente neste contexto, pois, em dimensão um, vale a imersão contínua

$$H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega),$$

a qual garante a existência de uma constante C_∞ tal que

$$|u(x)| \leq C_\infty \|u\|_{H^1(\Omega,V)} \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega, V). \tag{4.12}$$

No que diz respeito ao peso V, além de cumprir as condições **V1** e **V2**, assumimos que existe algum $q \in [2, \infty)$ tal que

$$V \in L^{q/(q-2)}(\Omega).$$

Essa hipótese é essencial para garantir, por meio da desigualdade de Hölder, que V satisfaz a condição **H4** com $p = r = 2$ e $q = \varrho$. Além disso, temos a imersão compacta

$$H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow H_0^1(\Omega, V) \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega, V).$$

Proposição 4.6. *A aplicação* $g : H_0^1(\Omega, V) \to L^2(\Omega, V)$*, dada por* $g(u) = \tilde{f}(\cdot, u)$*, satisfaz a hipótese* **H1** *com* $p = r = 2$.

Demonstração. Dados $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|u\|_{H^1(\Omega,V)}, \|v\|_{H^1(\Omega,V)} \leq M$, temos que

$$|u(x)|, |v(x)| \leq C_\infty M, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

o que permite estimar

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega,V)}^2 &= \int_\Omega |\tilde{f}(x, u) - \tilde{f}(x, v)|^2 V dx \\ &\leq L(C_\infty M)^2 \int_\Omega |u - v|^2 V dx \\ &\leq L(C_\infty M)^2 \|u - v\|_{L^2(\Omega,V)}^2 \end{aligned}$$

de onde o resultado se segue imediatamente. □

Observação 4.1. O resultado da Proposição 4.5 ainda é válido sob as condições consideradas nesta seção. A única diferença relevante na demonstração ocorre ao justificar que

G está bem definida, assim como ao assegurar que as funções A_h e $F(\cdot, u_{n_k})$ são dominadas por alguma função em $L^1(\Omega, V)$. Para evitar a repetição completa do argumento, indicaremos apenas os pontos necessários para adaptar a prova a este caso.

Comecemos observando que, para todo M e qualquer $u \in \mathbb{C}$ com $|u| \leq M$, temos

$$|F(x,u)| \leq \int_0^{|u|} |f(x,s)| ds \leq \int_0^{|u|} L(M) s\, ds \leq L(M)|u|^2.$$

Combinando isso com (4.12), obtemos, para todo $u \in H_0^1(\Omega, V)$,

$$|G(u)| \leq \int_\Omega |F(x,u)| V dx \leq L(C_\infty \|u\|_{H^1(\Omega,V)}) \int_\Omega |u|^2 V dx < \infty.$$

o que garante que G está bem definida. Para dominar a função A_h, notamos que

$$|u + \theta v| \leq |u| + |v| \leq C_\infty \Big(\|u\|_{H^1(\Omega,V)} + \|v\|_{H^1(\Omega,V)} \Big) =: M,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |A_h| &\leq |\tilde{f}(x, u + \theta v)||v| \\ &\leq L(M)|u + \theta v||v| \\ &\leq L(M) \left(|u||v| + |v|^2 \right) \in L^1(\Omega, V). \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$|u_{n_k}| \leq C_\infty \|u_{n_k}\|_{H^1(\Omega,V)} \leq C_\infty \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{H^1(\Omega,V)} =: M,$$

obtemos

$$|F(\cdot, u_{n_k})| \leq L(M)|u_{n_k}|^2 \leq L(M)|w|^2 \in L^1(\Omega, V).$$

Essas são as únicas diferenças; fora isso, o argumento permanece inalterado.

Reunindo todas as observações e resultados anteriores, e sabendo que $\mathrm{Im}(g(u)\bar{u}) = 0$, concluímos que as funções g, G e V satisfazem as hipóteses **H1-H4** com $p = r = 2$. Com base nessas propriedades, podemos então estabelecer o seguinte resultado:

Corolário 4.3. *O problema*

$$\begin{cases} i\, \partial_t u + \frac{1}{V}\, \partial_x^2 u + \tilde{f}(x,u) = 0, & \text{em } \Omega \times I \\ u(x,t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times I \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{para } x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.13}$$

é localmente bem colocado em $H_0^1(\Omega, V)$ e satisfaz as leis de conservação da massa e da energia. Além disso, existe um δ tal que, para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|\varphi\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \delta$, a H_0^1-solução clássica é global e uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega, V)$.

Demonstração. O Corolário 3.4 estabelece que o problema (4.13) em localmente bem posto em $H_0^1(\Omega, V)$, garantindo ainda a conservação da massa e da energia. Para justificar a existência de δ, observe que $G(0) = 0$. Além disso, ao fixarmos $0 < \varepsilon \ll 1$, temos que, para todo $u \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|u\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \varepsilon$, vale $|u| \leq C_\infty$ e assim

$$G(u) \leq \int_\Omega |F(x,u)| V dx \leq L(C_\infty) \int_\Omega |u|^2 V dx =: \vartheta(\|u\|_{L^2(\Omega,V)}).$$

Isso mostra que G satisfaz as hipóteses do Teorema 3.6, o que garante a existência de um δ com as propriedades desejadas. $\square$

Exemplo 4.2. Os resultados do Corolário 4.3 continuam válidos quando

$$\tilde{f}(x,u) = W(x)u + \lambda |u|^\alpha u,$$

onde $W : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$, pois $\tilde{f}$ está associada à função de Carathéodory

$$f(x,s) = W(x)s + \lambda s^{\alpha+1},$$

que satisfaz as condições (f_1) e (f_2), com constante de Lipschitz local

$$L(s) = \|W\|_{L^\infty(\Omega)} + |\lambda|(\alpha+1)s^\alpha.$$

Convém observar que, para $\lambda \leq 0$, a H_0^1-solução clássica é global. De fato, como

$$F(x,u) = \frac{W(x)}{2}|u|^2 + \frac{\lambda}{\alpha+1}|u|^{\alpha+2} \leq \|W\|_{L^\infty(\Omega)}|u|^2, \quad \forall u \in \mathbb{C},\ x \in \Omega,$$

segue que, para todo $R > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|u\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R$,

$$G(u) = \int_\Omega F(x,u) V dx \leq \|W\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^2_{L^2(\Omega,V)} \leq \|W\|_{L^\infty(\Omega)} R^2 =: C(R).$$

Essa estimativa assegura que G satisfaz a condição exigida pelo Teorema 3.5 para algum $\varepsilon \in (0,1)$, garantindo assim que a solução se estenda a todo $\mathbb{R}$.

A seguir, impomos uma condição sobre a primitiva F que garante que, para todo dado inicial, a solução é global.

Corolário 4.4. *Suponha que existam $2 < p \leq \sigma$ e uma constante positiva C_1 tais que*

$$F(x,u) \leq C_1 \left(|u|^2 + |u|^p\right) \qquad e \qquad V \in L^{\sigma/(\sigma-p)}(\Omega).$$

Se $p(\sigma - 2) < 4\sigma$ então para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, a H_0^1-solução clássica de (4.13) é global e uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega, V)$. No caso limite $p(\sigma-2) = 4\sigma$, a mesma conclusão vale, desde que $\|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)}$ seja suficientemente pequena.

Demonstração. Para todo $u \in H_0^1(\Omega, V)$, pela definição de G e a condição imposta sobre F, temos

$$G(u) \leq C_1 \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega,V)} + \|u\|^p_{L^p(\Omega,V)} \right).$$

A hipótese sobre V garante que $L^\sigma(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega, V)$. Dessa forma, pelo Lema 3.9, existe uma constante C_2 tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega,V)} \leq C_2 \|u\|^{1-\theta}_{H^1(\Omega,V)} \|u\|^{\theta}_{L^2(\Omega,V)}, \quad \text{com} \quad \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sigma}.$$

Combinando essas desigualdades, temos

$$G(u) \leq \|u\|^{p(\sigma-2)/2\sigma}_{H^1(\Omega,V)} \cdot \|u\|^{p(\sigma+2)/2\sigma}_{L^2(\Omega,V)} \cdot C_2 \cdot C_1 + C_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega,V)}. \tag{4.14}$$

Consequentemente, para todo $R > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|u\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R$, obtemos uma constante $C(R)$ tal que

$$G(u) \leq \|u\|^{p(\sigma-2)/2\sigma}_{H^1(\Omega,V)} \cdot C(R) + C(R)$$

Se por acaso $p(\sigma - 2) < 4\sigma$, aplicamos a desigualdade de Young: $ab \leq \varepsilon a^\gamma + C(\varepsilon) b^{\gamma'}$, ao primeiro somando, com $\gamma = 4\sigma/p(\sigma - 2)$ e $\varepsilon = 1/4$, para obter, após uma modificação na constante $C(R)$, que

$$G(u) \leq \frac{1}{4} \|u\|^2_{H^1(\Omega,V)} + C(R).$$

Essa estimativa garante que G satisfaz a condição exigida no Teorema 3.5 com $\varepsilon = 1/2$. Assim, para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, a solução do problema (4.13) é global e uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega, V)$.

Finalmente, no caso em que $p(\sigma - 2) = 4\sigma$, escolhemos R de modo que

$$R^{p(\sigma+2)/2\sigma} \cdot C_2 \cdot C_1 \leq 1/4.$$

Dessa forma, por (4.14), obtemos

$$G(u) \leq \frac{1}{4} \|u\|^2_{H^1(\Omega,V)} + C_1 R^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega, V), \quad \|u\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R.$$

Isso mostra que G cumpre os requisitos do Corolário 3.5, com constantes $C(R) := C_1 R^2$ e $\varepsilon = 1/2$. Assim, segue-se que, para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ com $\|\varphi\|_{L^2(\Omega,V)} \leq R$, o problema (4.13) admite solução global uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega, V)$. □

Exemplo 4.3. Sejam f e $\tilde{f}$ as funções do Exemplo 4.2, com $\lambda, \alpha > 0$. Fazendo $p = \alpha + 2$, temos

$$F(x, u) = \frac{W(x)}{2} |u|^2 + \frac{\lambda}{p} |u|^p \leq \max \left\{ \|W\|_{L^\infty(\Omega)}, \lambda \right\} \left(|u|^2 + |u|^p \right).$$

Suponha agora que

$$V \in L^{\sigma/(\sigma-p)}(\Omega), \quad \text{para algum } \sigma \geq p.$$

Então, do Corolário 4.4, segue que, se $(\alpha+2)(\sigma-2) < 4\sigma$, a H_0^1-solução clássica do problema (4.13) é global, para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$.

4.4 Equação de Schrödinger em duas dimensões

Nesta seção, nosso objetivo é utilizar a desigualdade de Trudinger–Moser para mostrar que o problema (4.10) é bem posto na dimensão dois. Para isso, começamos recordando uma formulação essencial dessa desigualdade: seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$, então

$$\sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq 1}} \int_\Omega e^{\theta |u|^2} dx < \infty \quad \text{se, e somente se,} \quad \theta \leq 4\pi.$$

Em particular, para todo $M < \infty$ e $\beta \in (0, 4\pi/M^2]$, existe uma constante K, dependente de M e β, tal que

$$\int_\Omega e^{\beta |u|^2} dx \leq K, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq M. \tag{4.15}$$

Corolário 4.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, e consideremos as funções f, L, $\tilde{f}$, V, g e G definidas na Seção 4.2, com V limitada superiormente. Suponha ainda que L satisfaça a condição (4.7) para $\alpha \leq 2$. Então o problema (4.10) é localmente bem posto em $H_0^1(\Omega, V)$. Além disso, satisfaz a leis de conservação da massa e da energia.*

Demonstração. À luz do Teorema 3.4, precisamos apenas mostrar a unicidade das H_0^1-soluções fortes. Além disso, como se trata de uma propriedade local, é suficiente verificá-la em intervalos suficientemente pequenos. Para isso, seja I um intervalo contento a origem, $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$ e suponha que $u, v \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega, V)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega, V))$ sejam duas H_0^1-soluções fortes do problema (4.10). Tomando $w = v - u$, temos

$$\begin{cases} i\partial_t w + {}_V\Delta w + g(v) - g(u) = 0 & \text{em } H_0^1(\Omega, V), \quad \text{q.t.p. } t \in I \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando o produto de dualidade da equação acima com $\overline{iw}$, obtemos

$$\langle \partial_t w, \bar{w} \rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} + i \int_\Omega |\nabla w|^2 dx - i \int_\Omega (g(v) - g(u)) \bar{w} V dx = 0, \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

Daí, extraindo a parte real,

$$\mathrm{Re} \langle \partial_t w, \bar{w} \rangle_{H^{-1}, H_0^1, V} = \mathrm{Im} \int_\Omega (g(u) - g(v)) \bar{w} V dx, \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

Mas pelo Lema 3.11, pode-se reescrever como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} = \operatorname{Im}\int_\Omega (g(u(t)) - g(v(t)))\,\overline{w(t)}\,V dx, \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

Consequentemente, para quase todo $s \in I$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega,V)} &\leq \int_\Omega |g(u(s)) - g(v(s))|\ |w(s)|\,V dx \\
&= \int_\Omega \left|\tilde{f}(x,u(s)) - \tilde{f}(x,v(s))\right| |w(s)|\,V dx \\
&\leq \int_\Omega L\Big(|u(s)| + |v(s)|\Big)\,|u(s) - v(s)|\,|w(s)|\,V dx \\
&\leq C\|V\|_\infty \int_\Omega \Big(|u(s)| + |v(s)|\Big)^\alpha |w(s)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Ao integrar a desigualdade anterior de 0 até $t \in I$ e fazendo $h(s) = |u(s)| + |v(s)|$, obtemos

$$\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega,V)} \leq 2C\|V\|_\infty \left|\int_0^t \int_\Omega h(s)^\alpha |w(s)|^2 dx\, dt\right|, \quad \forall t \in I.$$

Como $L^2(\Omega, V) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, para alguma constante c_1 se tem

$$\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \left|\int_0^t \int_\Omega h(s)^\alpha |w(s)|^2 dx\, dt\right|, \quad \forall t \in I. \tag{4.16}$$

Nosso objetivo agora é reescrever o termo do lado direito de forma que dependa da norma $\|w(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$. Para isso, fixamos $\rho > 4$ e aplicamos a desigualdade de Hölder com expoentes $\rho/2$ e $\rho/(\rho-2)$, obtendo, para todo $s \in I$, que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(s)^\alpha |w(s)|^2 dx &= \int_\Omega \Big(h(s)^{\alpha\rho/2}|w(s)|^2\Big)^{2/\rho} |w(s)|^{(2\rho-4)/\rho} dx \\
&\leq \left(\int_\Omega h(s)^{\alpha\rho/2}|w(s)|^2 dx\right)^{2/\rho} \left(\int_\Omega |w(s)|^2 dx\right)^{(\rho-2)/\rho} \\
&\leq \left[\left(\int_\Omega h(s)^{\alpha\rho} dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |w(s)|^4 dx\right)^{1/2}\right]^{2/\rho} \left(\int_\Omega |w(s)|^2 dx\right)^{(\rho-2)/\rho} \\
&= \left(\int_\Omega h(s)^{\alpha\rho} dx\right)^{1/\rho} \|w(s)\|^{4/\rho}_{L^4(\Omega)} \|w(s)\|^{(2\rho-4)/\rho}_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $H^1_0(\Omega, V) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, segue que

$$\|w(s)\|^{4/\rho}_{L^4(\Omega)} \leq \Big(c_2\|w(s)\|_{H^1(\Omega,V)}\Big)^{4/\rho} \leq (c_2 M)^{4/\rho} \leq 1 + c_2 M =: c_3,$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega h(s)^\alpha |w(s)|^2 dx \leq c_3 \left(\int_\Omega h(s)^{\alpha\rho} dx\right)^{1/\rho} \|w(s)\|^{(2\rho-4)/\rho}_{L^2(\Omega)}. \tag{4.17}$$

Para estimar a integral do lado direito, observe que, para todo $s \in I$,

$$\|h(s)\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{C}\|h(s)\|_{H^1(\Omega,V)} \leq \tilde{C}(\|u\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega,V))} + \|v\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega,V))}) =: M.$$

Assim, definindo $\beta = 4\pi/M^2$, a desigualdade de Trudinger-Moser (4.15), garante a existência de uma constante K tal que

$$\int_\Omega e^{\beta h(s)^2} dx \leq K, \quad \text{para todo } s \in I.$$

Em seguida, aplicando a desigualdade

$$y^q \leq \left(\frac{q}{\mu}\right)^q e^{\beta y}, \quad \text{para } y, q, \beta > 0,$$

obtemos

$$\int_\Omega h(s)^{\alpha\rho} dx = \int_\Omega \left(h(s)^2\right)^{\alpha\rho/2} dx \leq \left(\frac{\alpha\rho}{2\beta}\right)^{\alpha\rho/2} \int_\Omega e^{\beta h(s)^2} dx \leq \left(\frac{\alpha\rho}{2\beta}\right)^{\alpha\rho/2} K.$$

Consequentemente, como $\alpha \leq 2$, tem-se

$$\left(\int_\Omega h(s)^{\alpha\rho} dx\right)^{1/\rho} \leq \left(\frac{\alpha\rho}{2\mu}\right)^{\alpha/2} K^{1/\rho} \leq \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^{\alpha/2} \rho^{\alpha/2}(1+K) = c_4 \cdot \rho^{\alpha/2} \leq c_4\rho.$$

Juntando isso com (4.17) temos

$$\int_\Omega h(s)^\alpha |w(s)|^2 dx \leq c_5 \cdot \rho \cdot \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^{(2\rho-4)/\rho}.$$

Logo, substituindo em (4.16), resulta

$$\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_6 \cdot \rho \cdot \left|\int_0^t \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^{2(\rho-2)/\rho} ds\right|, \quad \forall t \in I, \quad \rho \approx \infty. \tag{4.18}$$

Definamos agora as funções

$$\phi(t) := \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \qquad e \qquad \Phi_\rho(t) := \int_0^t \phi(s)^{(\rho-2)/\rho} ds, \quad \forall t \in I.$$

Com esta notação, a desigualdade (4.18) pode ser reescrita como

$$\phi(t) \leq c_6 \cdot \rho \cdot |\Phi_\rho(t)|, \quad \forall t \in I.$$

Além disso, a função Φ_ρ é continuamente diferenciável e com derivada,

$$\Phi_\rho'(t) = \phi(t)^{(\rho-2)/\rho}.$$

Combinando essas duas relações, obtemos, para ρ suficientemente grande,

$$\Phi'_\rho(t) \leq \Big(c_6 \cdot \rho \cdot |\Phi_\rho(t)|\Big)^{(\rho-2)/\rho} \leq c_6 \cdot \rho \cdot |\Phi_\rho(t)|^{(\rho-2)/\rho},$$

onde a última desigualdade é devido a $(\rho - 2)/\rho < 1$. Em seguida, separando variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{\rho}{2} \cdot |\Phi_\rho(t)|^{2/\rho} \leq c_6 \cdot \rho \cdot |t|,$$

ou equivalentemente,

$$|\Phi_\rho(t)| \leq \Big(c \cdot |t|\Big)^{\rho/2}, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Portanto, ao escolher $T > 0$ tal que $[-T, T] \subset I$ e que satisfaça $c \cdot T < 1$, temos

$$\lim_{\rho\to\infty} |\Phi_\rho(\pm T)| = 0.$$

Para finalizar a demonstração, aplicamos o Lema de Fatou e obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds &= \int_0^T \lim_{\rho\to\infty} \|w(s)\|^{2(\rho-2)/\rho}_{L^2(\Omega)}\, ds \\
&\leq \liminf_{\rho\to\infty} \int_0^T \|w(s)\|^{2(\rho-2)/\rho}_{L^2(\Omega)} ds \\
&= \liminf_{\rho\to\infty} \Phi_\rho(T) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos

$$\int_{-T}^0 \|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds = 0.$$

Por fim, a partir dessas igualdades e sabendo que a função $w : \bar{I} \to L^2(\Omega)$ é contínua (ver Corolário 3.1), segue que $\|w(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ para todo $t \in [-T, T]$ e, portanto, $u = v$ nesse intervalo. □

Observação 4.2. No Corolário 4.2 mostra-se, em particular, que, em dimensão dois, o problema (4.10) admite uma H^1_0-solução forte local para cada dado inicial $\varphi \in H^1_0(\Omega, V)$, sempre que a constante de Lipschitz local $L(s)$ satisfaça

$$L(s) \leq Cs^\alpha, \quad \text{para algum } \alpha \in [0, \infty).$$

Esse resultado, entretanto, não garante unicidade nem maximalidade da solução. Já o Corolário 4.5 assegura que, quando $\alpha \leq 2$, o problema (4.10) é localmente bem posto em $H^1_0(\Omega, V)$; em particular, admite uma única H^1_0-solução clássica maximal.

4.5 Não linearidade com crescimento exponencial

Nesta seção, investigamos a existência local de uma H_0^1-solução forte para a seguinte equação de Schrödinger semilinear com peso:

$$\begin{cases} i\partial_t u + {}_V\Delta u + f(|u|^2)u = 0, & \text{em } \Omega \times I \\ u(x,t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times I \\ u(x,0) = \varphi(x), & \text{para todo } x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.19}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira suave, V é um peso limitado superiormente que satisfaz as condições **V1** e **V2**, e $f \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\lim_{s\to\infty} f'(s)e^{-\beta s} = 0, \quad \forall \beta > 0. \tag{4.20}$$

Essa condição implica que, para todo $\beta > 0$, existe uma constante C_β tal que

$$|f'(s)| \leq C_\beta\, e^{\beta s}, \quad \forall s \geq 0. \tag{4.21}$$

Em vista disso, e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, não é difícil de ver que,

$$|f(s) - f(\sigma)| \leq C_\beta\, e^{\beta(s+\sigma)}|s-\sigma|, \quad \text{para todo } s, \sigma \geq 0 \text{ e } \beta > 0. \tag{4.22}$$

Essa desigualdade nos permite demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 4.7. *Para todo $\beta > 0$, e após possível ajuste da constante C_β, tem-se*

$$\Big| f(|u|^2)u - f(|v|^2)v \Big| \leq C_\beta\, e^{\beta(|u|+|v|)^2}|u-v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{C}. \tag{4.23}$$

Demonstração. Seja $\alpha = \beta/2$. Pela desigualdade triangular temos

$$\Big| f(|u|^2)u - f(|v|^2)v \Big| \leq \Big| f(|u|^2) - f(|v|^2) \Big|\, |u| + \Big| f(|v|^2) - f(0) \Big|\, |u-v| + |f(0)||u-v|.$$

Para o primeiro termo do lado direito, temos

$$\begin{aligned} \Big| f(|u|^2) - f(|v|^2) \Big| |u| &\leq C_\alpha\, e^{\alpha(|u|^2+|v|^2)} \Big| |u|^2 - |v|^2 \Big|\, |u| \\ &\leq C_\alpha\, e^{\alpha(|u|+|v|)^2}(|u|+|v|)|u-v||u| \\ &\leq C_\alpha\, e^{\alpha(|u|+|v|)^2} \Big(|u|^2 + |u||v| \Big)\, |u-v|. \end{aligned}$$

Para o segundo termo, tem-se

$$\begin{aligned} \Big| f(|v|^2) - f(0) \Big|\, |u-v| &\leq C_\alpha\, e^{\alpha|v|^2}|v|^2|u-v| \\ &\leq C_\alpha\, e^{\alpha(|u|+|v|)^2}|v|^2|u-v|. \end{aligned}$$

Por fim, o terceiro termo pode ser estimativo por

$$|f(0)||u-v| \le |f(0)|e^{\alpha(|u|+|v|)^2}|u-v|.$$

Juntando as estimativas anteriores, obtemos

$$\begin{aligned}\left|f(|u|^2)u - f(|v|^2)v\right| &\le e^{\alpha(|u|+|v|)^2}|u-v|\,\Big(C_\alpha(|u|^2+|u||v|)+C_\alpha|v|^2+|f(0)|\Big)\\ &\le e^{\alpha(|u|+|v|)^2}|u-v|\,\max\{C_\alpha,|f(0)|\}\,\Big(|u|^2+|u||v|+|v|^2+1\Big)\\ &\le e^{\alpha(|u|+|v|)^2}|u-v|\,\max\{C_\alpha,|f(0)|\}\,(1+|u|+|v|)^2.\end{aligned}$$

Para finalizar, notamos que

$$\lim_{s\to\infty}\frac{(1+s)^2}{e^{\alpha s^2}}=0,$$

o que garante a existência de uma constante A_α tal que

$$(1+s^2) \le A_\alpha\, e^{\alpha s^2}, \quad \text{para todo } s \ge 0.$$

Em particular,

$$(1+|u|+|v|)^2 \le A_\alpha\, e^{\alpha(|u|+|v|)^2}.$$

Assim, obtemos a estimativa final

$$\left|f(|u|^2)u - f(|v|^2)v\right| \le \max\{C_\alpha,|f(0)|\}A_\alpha\, e^{2\alpha(|u|+|v|)^2}|u-v|,$$

o que estabelece a estimativa desejada, uma vez que $2\alpha=\beta$. □

Antes de prosseguir com o próximo resultado, vale destacar que, devido ao fato de V ser limitada superiormente, dispõe-se da seguinte cadeia de imersões contínuas e compactas:

$$H_0^1(\Omega,V) \underset{\text{cont.}}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \underset{\text{comp.}}{\hookrightarrow} L^p(\Omega) \underset{\text{cont.}}{\hookrightarrow} L^p(\Omega,V), \quad \text{para todo } p\ge 1. \tag{4.24}$$

Proposição 4.8. *A aplicação $g: H_0^1(\Omega,V)\to L^2(\Omega,V)$, dada por $g(u):=f(|u|^2)u$, é bem definida e satisfaz a hipótese* **H1**, *com $p=2$ e $r=4$. Isto é, para todo $M>0$, existe uma constante $C(M)$ tal que*

$$\|g(u)-g(v)\|_{L^2(\Omega,V)} \le C(M)\|u-v\|_{L^4(\Omega,V)},$$

para todo $u,v\in H_0^1(\Omega,V)$ com $\|u\|_{H^1(\Omega,V)},\|v\|_{H^1(\Omega,V)}\le M$.

Demonstração. Para verificar que g está bem definida, considere $u\in H_0^1(\Omega,V)$ não nula. Por (4.23), temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |g(u)|^2 V dx &\le \int_\Omega \left| f(|u|^2)u \right|^2 V dx \\
&\le \|V\|_{L^\infty(\Omega)}\, C_\beta^2 \int_\Omega e^{2\beta|u|^2} |u|^2 dx \\
&\le \|V\|_{L^\infty(\Omega)}\, C_\beta^2 \, \|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \left(\int_\Omega e^{4\beta|u|^2} dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Assim, escolhendo $\beta \le \pi/\|u\|_{H^1(\Omega)}^2$, a desigualdade de Trudinger-Moser (4.15) garante que a última integral é finita, o que assegura que $g(u) \in L^2(\Omega, V)$.

Sejam agora $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$ tais que $\|u\|_{H^1(\Omega,V)}, \|v\|_{H^1(\Omega,V)} \le M$. Por (4.23), temos

$$
\begin{aligned}
\|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega,V)}^2 &\le \int_\Omega \left| f(|u|^2)u - f(|v|^2)v \right|^2 V dx \\
&\le C_\beta^2 \int_\Omega e^{2\beta(|u|+|v|)^2} |u - v|^2 \, V dx \\
&\le C_\beta^2 \left(\int_\Omega e^{4\beta(|u|+|v|)^2} V dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u - v|^4 V dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Como V é limitada superiormente, obtemos

$$
\|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega,V)}^2 \le \|V\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}\, C_\beta^2 \left(\int_\Omega e^{4\beta(|u|+|v|)^2} dx \right)^{1/2} \|u - v\|_{L^4(\Omega,V)}^2.
$$

Pelas imersões (4.24), existe uma constante C tal que

$$
\|w\|_{H^1(\Omega)} \le C \|w\|_{H^1(\Omega,V)}, \quad \text{para todo } w \in H_0^1(\Omega, V),
$$

o que implica que $\||u| + |v|\|_{H^1(\Omega)} \le 2CM$. Portanto, escolhendo β tal que $\beta \le \pi/(2CM)^2$, a desigualdade de Trudinger-Moser (4.15) garante a existência de uma constante K, dependente de M, tal que

$$
\int_\Omega e^{4\beta(|u|+|v|)^2} dx \le K.
$$

Combinando as desigualdades anteriores, obtemos

$$
\|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega,V)}^2 \le \|V\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}\, C_\beta^2 \, K^{1/2} \|u - v\|_{L^4(\Omega,V)}^2,
$$

o que estabelece a desigualdade desejada. Além disso, essa estimativa, combinada com a imersão contínua $H_0^1(\Omega, V) \hookrightarrow L^4(\Omega, V)$, permite concluir que g é é contínua. $\square$

Com o objetivo de construir uma primitiva para g, consideremos a função real

$$
F(s) := \int_0^s f(\sigma) d\sigma, \quad \text{para todo } s \ge 0.
$$

Proposição 4.9. *Para todo $\beta > 0$, e após uma possível modificação da constante C_β, tem-se*

$$
|F(s)| \le C_\beta \, e^{\beta s}, \quad \textit{para todo } s \ge 0. \tag{4.25}
$$

Consequentemente, o funcional $G : H_0^1(\Omega, V) \to \mathbb{R}$ dado por

$$G(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega F(|u|^2) V dx,$$

é bem definido e completamente contínuo.

Demonstração. Seja $\alpha = \beta/2$. Aplicando (4.22), temos

$$\begin{aligned}
|F(s)| &\leq \int_0^s |f(\sigma) - f(0)| d\sigma + |f(0)| s \\
&\leq C_\alpha \int_0^s e^{\alpha\sigma} \sigma \, d\sigma + |f(0)| e^{\alpha s} s \\
&\leq C_\alpha \, e^{\alpha s} \, s^2 + |f(0)| e^{\alpha s} \, s \\
&\leq \max\{C_\alpha, |f(0)|\} \, e^{\alpha s} (s^2 + s).
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{s \to \infty} (s^2 + s) e^{-\alpha s} = 0,$$

existe uma constante A_α tal que

$$(s^2 + s) \leq A_\alpha \, e^{\alpha s}, \quad \text{para todo } s \geq 0.$$

Consequentemente,

$$|F(s)| \leq \max\{C_\alpha, |f(0)|\} A_\alpha e^{2\alpha s},$$

de onde segue (4.25), uma vez que $2\alpha = \beta$. Por fim, para mostrar que G está bem definido, seja $u \in H_0^1(\Omega, V)$ não nulo, já que $G(0) = 0$. Então

$$|G(u)| \leq \|V\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |F(|u|^2)| dx \leq \|V\|_{L^\infty(\Omega)} \, C_\beta \int_\Omega e^{\beta |u|^2} dx.$$

Assim, escolhendo $\beta \leq 4\pi / \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, a desigualdade de Trudinger-Moser (4.15) garante que a última integral é finita, o que assegura que $G(u) \in \mathbb{R}$.

Para mostrar que G é completamente contínua, seja $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega, V)$ e defina

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{H^1(\Omega)} < \infty.$$

Escolhendo $\beta \leq 2\pi / M^2$, a desigualdade de Trudinger-Moser (4.15) garante a existência de uma constante K, dependente de M, tal que

$$\int_\Omega \left| F(|u_n|^2) \right|^2 dx \leq C_\beta^2 \int_\Omega e^{2\beta |u_n|^2} dx \leq K, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde a primeira desigualdade segue de (4.25). Dessa forma, a sequência $(F(|u_n|^2))$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Assim, pela reflexividade desse espaço, existe uma função $\Phi \in L^2(\Omega)$ e uma subsequência (u_{n_k}) tal que

$$F(|u_{n_k}|^2) \rightharpoonup \Phi \quad \text{em } L^2(\Omega). \tag{4.26}$$

Por outro lado, devido à imersão compacta (4.24) e à convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega, V)$, seque que $u_{n_k} \to u$ em $L^2(\Omega)$. Assim, a menos de uma subsequência,

$$u_{n_k} \to u, \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Logo, pela continuidade de F,

$$F(|u_{n_k}|^2) \to F(|u|^2), \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{4.27}$$

Então, por resultados clássicos da análise funcional, os limites (4.26) e (4.27) implicam que $\Phi = F(|u|^2)$. Assim, pela definição de convergência fraca e uma vez que $V \in L^2(\Omega)$, segue que

$$G(u_{n_k}) = \frac{1}{2}\int_\Omega F(|u_{n_k}|^2)V\,dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega F(|u|^2)V\,dx = G(u).$$

O argumento usado mostra que toda subsequência $(G(u_n))$ tem uma subsequência que converge para $G(u)$. Portanto, a própria sequência $(G(u_n))$ converge para $G(u)$. □

Proposição 4.10. *Considerando $H_0^1(\Omega, V)$ como um espaço de Banach real, temos que $G \in C^1(H_0^1(\Omega, V), \mathbb{R})$ e*

$$G'(u)v = \operatorname{Re}\int_\Omega g(u)\bar{v}V\,dx = \operatorname{Re}\langle g(u), \bar{v}\rangle_{H^{-1}, H_0^1, V}, \quad \forall u, v, \in H_0^1(\Omega, V).$$

Demonstração. Consideremos $u, v \in H_0^1(\Omega, V)$ arbitrários e, para $0 \le |h| \ll 1$, definamos as funções

$$A_h := F(|u + hv|^2) \qquad \text{e} \qquad B_h := \frac{F(|u + hv|^2) - F(|u|^2)}{h}.$$

Como $F' = f$, segue que A_h é diferenciável em relação a h, sendo sua derivada dada por

$$\partial_h A_h = F'(|u + hv|^2)\partial_h |u + hv|^2 = 2\, f(|u + hv|^2)\operatorname{Re}((u + hv)\bar{v}), \quad \text{q.t.p. } \Omega.$$

Assim,

$$B_h \to \partial_h A_h\Big|_{h=0} = 2\, f(|u|^2)\operatorname{Re}(u\bar{v}) \quad \text{quando } h \to 0, \quad \text{q.t.p. } \Omega,$$

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio, existe um θ com $|\theta| \le |h| \ll 1$ tal que

$$\begin{aligned} |B_h| &= \left|\partial_h A_h\Big|_{h=\theta}\right| \\ &= 2\left|f(|u + \theta v|^2)\right| |\operatorname{Re}((u + \theta v)\bar{v})| \\ &\le 2\left|f(|u + \theta v|^2)(u + \theta v)\right| |v| \end{aligned}$$

Mais ainda, por (4.23),

$$|B_h| \leq 2C_\beta\, e^{\beta|u+\theta v|^2}|u+\theta v|\,|v| \leq 2C_\beta\, e^{\beta(|u|+|v|)^2}\left(|u||v|+|v|^2\right) =: w_\beta.$$

Note agora que, pelas desigualdades de Hölder e de Trudinger–Moser, verifica-se sem dificuldade que $w_\beta \in L^1(\Omega)$, para algum β suficientemente pequeno. Mais ainda, como V é limitado superiormente, $w_\beta \in L^1(\Omega, V)$. Com isso, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e obter

$$\frac{G(u+hv)-G(u)}{h} = \frac{1}{2}\int_\Omega B_h\, V dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega 2f(|u|^2)\mathrm{Re}(u\bar{v})\, V dx = \mathrm{Re}\int_\Omega g(u)\bar{v}\, V dx,$$

o que nos dá

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u) = \mathrm{Re}\int_\Omega g(u)\bar{v}\, V dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega, V).$$

Não é difícil ver que, para u fixado, essa expressão define um funcional $\mathbb{R}$-linear e contínuo na variável v. Além disso, em virtude da continuidade de g, essa derivada depende continuamente de u, pois

$$\left\|\frac{\partial G}{\partial(\cdot)}(u) - \frac{\partial G}{\partial(\cdot)}(w)\right\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega,V),\mathbb{R})} \leq \|g(u)-g(w)\|_{L^2(\Omega,V)}, \quad \forall u, w \in H_0^1(\Omega, V).$$

Portanto, $G \in C^1(H_0^1(\Omega, V), \mathbb{R})$, com derivada de Fréchet dada por

$$G'(u)v = \frac{\partial G}{\partial v}(u),$$

o que conclui a prova. □

Corolário 4.6. *Para todo dado inicial $\varphi \in H_0^1(\Omega, V)$, existe um intervalo I e uma H_0^1-solução forte da equação de Schrödinger semilinear com peso (4.19), a qual conserva a massa.*

Demonstração. A identidade $\mathrm{Im}(g(v)\bar{v}) = \mathrm{Im}(f(|v|^2)|v|^2) = 0$ e as Proposições 4.8 e 4.10 garantem que as funções g e G satisfazem as hipóteses **H1-H3** para $p = 2$ e $r = 4$. Ademais, como V é limitada superiormente, a condição **H4** também é satisfeita. Logo, o resultado se segue ao aplicar o Teorema 3.3. □

Apêndice A

Funções com Valores Vetoriais

Neste apêndice, apresentamos um resumo da teoria das funções com valores em espaços de Banach, generalizando as noções básicas da análise real e complexa. Iniciamos com o estudo das funções contínuas e diferenciáveis, seguimos com as propriedades da integral de Bochner e finalizamos com os espaços de Sobolev unidimensionais. Para uma abordagem mais detalhada, geral e aprofundada, remetemos o leitor a [10, 16, 18].

A.1 Continuidade e diferenciabilidade

De agora em diante, salvo indicação em contrário, assumimos que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, real ou complexo e que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Iniciamos apresentando duas noções de continuidade para caminhos.

Definição A.1. Dizemos que a função $u : I \to X$ é *fracamente contínua* (resp. *contínua*) no ponto $t \in I$ se, para toda sequência $(t_n) \subset I$ com $t_n \to t$, tivermos

$$u(t_n) \rightharpoonup u(t) \quad \text{em } X \quad (\text{resp. } u(t_n) \to u(t) \quad \text{em } X).$$

Se u for fracamente contínua (resp. contínua) em todos os pontos de seu domínio, dizemos que u é fracamente contínua (resp. contínua). Denotamos por $C(I, X)$ o conjunto das funções contínuas de I em X, e por $C_b(I, X)$, aquelas que são contínuas e limitadas.

É claro que toda função contínua é fracamente contínua. A recíproca, por exemplo, é válida sob a condição de que o espaço X seja uniformemente convexo e que a função $\|u(\cdot)\|$ seja contínua. Por outro lado, o espaço $C_b(I, X)$, munido da norma

$$\|u\|_{C_b(I,X)} := \sup_{t \in I} \|u(t)\|,$$

é um espaço de Banach. Quando o intervalo I é compacto, a função real $\|u(\cdot)\|$ atinge seu máximo, o que garante que $C(I, X) = C_b(I, X)$.

Definição A.2. Dizemos que a função $u : I \to X$ é *diferenciável* em $t \in I$ se existir um vetor $u'(t) \in X$, chamado de *derivada* de u em t, tal que

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\| \to 0 \quad \text{quando } h \to 0.$$

Se u for diferenciável em todos os pontos de I, dizemos que u é diferenciável, e a função $u' : I \to X$ é chamada derivada de u. Denotamos por $C^1(I, X)$ o conjunto das funções de I em X que são diferenciáveis e cuja derivada é contínua.

Exemplo A.1. Suponha que X seja um espaço de Hilbert complexo e seja $u : I \to X$ uma função diferenciável. Então

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2\mathrm{Re}(u'(t), u(t)), \quad \forall t \in I.$$

A.2 Integral de Bochner

A construção da integral de Bochner requer, como etapa preliminar, a definição adequada de função mensurável. Uma função $s : I \to X$ é chamada de *função simples mensurável* se existem vetores $w_1, \ldots, w_m \in X$ e conjuntos Lebesgue mensuráveis disjuntos $J_1, \ldots, J_m \subset I$, todos com medida finita, tais que

$$s = w_1 \chi_{J_1} + \ldots + w_m \chi_{J_m}. \tag{A.1}$$

Uma função $u : I \to X$ é chamada *mensurável* ou *Bochner mensurável* se existe uma sequência de funções simples mensuráveis $\{s_n : I \to X\}$ tal que

$$s_n(t) \to u(t) \quad \text{em } X, \quad \text{q.t.p. } t \in I.$$

De forma imediata, se u é Bochner mensurável, então a função real $\|u(\cdot)\|$ é Lebesgue mensurável. Além disso, caso $X \hookrightarrow Y$, então u, considerada como função com valores em Y, também é mensurável.

Teorema A.1 (Pettis, [16, Teorema 2.1.3])**.** *A função $u : I \to X$ é mensurável se, e somente se, satisfaz as seguintes duas condições:*

(1) u é fracamente mensurável, isto é, para todo funcional $\psi \in X'$, a função escalar $t \in I \mapsto \langle \psi, u(t) \rangle_{X',X}$ é Lebesgue mensurável.

(2) u é essencialmente separavelmente valorada, ou seja, existe um conjunto de medida nula N tal que $u(I - N)$ é um subconjunto separável de X.

Usando essa caracterização, podem ser demonstrados os seguintes resultados:

Corolário A.1 [10, Corolários 1.4.8 e 1.4.9]**.** *Toda função fracamente contínua é mensurável. Além disso, se (u_n) é uma sequência de funções mensuráveis tal que, para quase todo $t \in I$, $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ em X, então u é mensurável.*

Para uma função simples mensurável s, escrita na forma (A.1), sua *integral* é definida de maneira natural como
$$\int_I s\,dt := \sum_{k=1}^{m} |J_k| w_k.$$
Pode-se verificar que essa definição independe da escolha da representação de s como combinação de funções características. Seja agora uma função mensurável $u : I \to X$. Dizemos que u é *integrável* ou *Bochner integrável* se existe uma sequência $\{s_n : I \to X\}$ de funções simples mensuráveis tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|s_n - u\| dt = 0.$$

Nesse caso, a *integral de Bochner* de u é definida como

$$\int_I u\,dt := \lim_{n\to\infty} \int_I s_n\,dt.$$

Não é difícil verificar que esse limite existe como um elemento de X e independe da escolha da sequência (s_n). Convém observar que, como consequência direta da definição, a integral de Bochner define um operador linear. Quando $I = (a, b)$, também é comum usar a notação $\int_a^b u\,dt$. Assim como ocorre com funções escalares, é conveniente adotar a convenção
$$\int_b^a u\,dt := -\int_a^b u\,dt.$$
Teorema A.2 (Bochner, [16, Proposição 2.1.10])**.** *Uma função mensurável $u : I \to X$ é Bochner integrável se, e somente se, a função real $\|u(\cdot)\|$ é Lebesgue integrável. Nesse caso,*
$$\left\|\int_I u\,dt\right\| \leq \int_I \|u\| dt.$$

Esse resultado evidencia que a teoria da integral de Bochner é uma extensão direta da teoria integral de Lebesgue, em que os valores absolutos são substituídos pela norma do espaço. Logo depois, diversas propriedades fundamentais, como o teorema da convergência dominada e a desigualdade de Hölder, podem ser facilmente adaptas ao contexto vetorial.

Corolário A.2 (Convergência Dominada, [16, Proposição 2.1.13])**.** *Seja $\{u_n : I \to X\}$ uma sequência de funções integráveis. Suponha que exista uma função $g \in L^1(I, \mathbb{R})$ tal que, para quase todo $t \in I$,*

$$u_n(t) \to u(t) \qquad e \qquad \|u_n(t)\| \leq g(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então u é integrável e
$$\int_I u\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_I u_n\, dt.$$

Seguindo o raciocínio da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo para funções escalares, mas agora substituindo o modulo pela norma, obtemos:

Teorema A.3 (Teorema Fundamental do Cálculo, [8, Proposição 1.14])**.** *Se $u \in C^1(I,E)$, então, para quaisquer $a, b \in I$, tem-se*

$$\int_a^b u'(t)\, dt = u(b) - u(a).$$

O próximo teorema apresenta uma propriedade forte da integral de Bochner que não possui equivalente na teoria da integral de Lebesgue.

Teorema A.4 [16, Teorema 2.1.17]**.** *Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear fechado entre espaços de Banach. Se $u : I \to X$ é uma função integrável tal que Au também seja integrável, então*
$$A\left(\int_I u\, dt\right) = \int_I Au\, dt.$$
Em particular, quando $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ou $A \in X'$, a igualdade acima vale para toda função Bochner integrável u.

Finalmente, introduzimos os espaços de funções p-integráveis com valores em um espaço de Banach de forma análoga ao caso escalar. Para $1 \le p \le \infty$, denotamos por $L^p(I,X)$ o espaço das classes de equivalência (no sentido de igualdade em quase todo ponto) de funções mensuráveis $u : I \to X$ tais que $\|u(\cdot)\| \in L^p(I,\mathbb{R})$. Equipado com a norma natural

$$\|u\|_{L^p(I,X)} := \left(\int_I \|u(t)\|^p dt\right)^{1/p} \quad (\text{se } p < \infty) \qquad \text{e} \qquad \|u\|_{L^\infty(I,X)} := \operatorname*{esssup}_{t\in I} \|u(t)\|,$$

esse espaço é Banach. Além disso, denotamos por $L^p_{\text{loc}}(I,X)$ o conjunto das funções mensuráveis $u : I \to X$ tais que para todo intervalo compacto $J \subset I$, $u \in L^p(J,X)$.

Teorema A.5. *Sejam $1 \le p \le \infty$, $(u_n) \subset L^p(I,X)$ uma sequência limitada e $u : I \to X$ uma função, tais que $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ em X, para quase todo $t \in I$. Então*

$$u \in L^p(I,X) \qquad e \qquad \|u\|_{L^p(I,X)} \le \liminf \|u_n\|_{L^p(I,X)}.$$

Demonstração. Pelo Corolário A.1, u é mensurável e, como a norma é fracamente semicontínua inferiormente, temos $\|u(t)\| \le \liminf \|u_n(t)\|$ para quase todo $t \in I$. Dessa desigualdade segue imediatamente o caso $p = \infty$. Para $p < \infty$, aplicando o Lema de Fatou para funções reais, obtemos

$$\int_I \|u(t)\|^p dt \le \int_I \liminf \|u_n(t)\|^p dt \le \liminf \int_I \|u_n(t)\|^p dt,$$

e o resultado segue. $\square$

Um resultado fundamental da teoria da medida, conhecido como Teorema da Diferenciação de Lebesgue, afirma que a primitiva de uma função integrável é derivável em quase todo ponto, e que a derivada coincide quase sempre com a função original. Esse fato também vale para funções vetoriais.

Teorema A.6 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue, [18, Teorema 2.16])**.** *Suponha que I seja um intervalo aberto e $u \in L^1_{\text{loc}}(I, X)$. Então*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)ds = u(t), \quad q.t.p.\ t \in I.$$

Caso u seja contínua, a igualdade vale para todo $t \in I$.

Com o resultado anterior, obtemos uma generalização do Lema Fundamental das Distribuições, conforme a seguir:

Corolário A.3. *Sejam I um intervalo aberto e $u \in L^1_{\text{loc}}(I, X)$ tais que*

$$\int_I u\psi\, dt = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}).$$

Então $u = 0$ em quase todo ponto de I.

Demonstração. Fixado um intervalo compacto $J \subset I$, tome uma sequência $(\psi_n) \subset C_0^\infty(I)$ tal que $\psi_n \leq 1$ e $\psi_n \to \chi_J$ em quase todo ponto. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada A.2, temos

$$\int_J u\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_I u\psi_n\ \ dt = 0.$$

Como J é arbitrário, segue do teorema anterior que

$$u(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)\, ds = 0, \quad \text{q.t.p. } t \in I,$$

o que conclui a prova. $\square$

O próximo resultado estende a convergência quase em todo ponto, apresentada no teorema anterior, para uma convergência forte em L^p.

Teorema A.7 [10, Proposição 1.4.29]**.** *Suponha que $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$, com $1 \leq p < \infty$. Para cada $h \neq 0$, defina a função*

$$M_h u(t) := \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)\, ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então, $M_h u \to u$ em $L^p(\mathbb{R}, X)$ quando $h \to 0$.

Teorema A.8. *Seja X um espaço de Banach separável e $u \in L^1_{loc}(I, X')$. Suponha que*

$$\int_I \langle u(t), v\rangle_{X',X}\ \psi(t)\, dt = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}),\ v \in X.$$

Então, $u = 0$ em quase todo ponto de I.

Demonstração. Considere uma sequencia (v_n) densa em X. Para cada n, temos

$$\int_I \langle u(t), v_n\rangle_{X',X}\ \psi(t)\, dt = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$$

Assim, pelo Lema Fundamental das Distribuições, existe um conjunto $N_n \subset I$ de medida nula tal que

$$\langle u(t), v_n\rangle_{X',X} = 0, \quad \text{para todo } t \in I - N_n.$$

Definindo $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$, que também é de medida nula, temos

$$\langle u(t), v_n\rangle_{X',X} = 0, \quad \text{para todo } t \in I - N \ \text{ e } \ n \in \mathbb{N}.$$

Como (v_n) é densa em X e $u(t)$ é funcional contínuo para cada t, esta igualdade se estende para qualquer $v \in X$, ou seja, para todo $t \in I - N$, tem-se

$$\langle u(t), v\rangle_{X',X} = 0, \quad \forall v \in X,$$

o que implica que $u(t) = 0$ para todo $t \in I - N$. □

A.3 Espaços de Sobolev

Para definir os espaços de Sobolev vetoriais, consideramos um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e começamos definindo a derivada fraca. Dadas duas funções $u, v \in L^1_{\text{loc}}(I, X)$, dizemos que v é a *derivada fraca* de u se

$$\int_I v\psi\, dt = -\int_I u\psi'\, dt, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}).$$

Em virtude do Corolário A.3, a derivada fraca, quando existe, é única e será denotada por u'. Para cada $1 \le p \le \infty$, definimos o *espaço de Sobolev*

$$W^{1,p}(I, X) = \Big\{u \in L^p(I, X);\ u' \in L^p(I, X)\Big\}.$$

Conforme a [18, Proposição 3.5], este espaço é Banach, quando equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(I,X)} := \|u\|_{L^p(I,X)} + \|u'\|_{L^p(I,X)}.$$

O próximo resultado afirma que os elementos do espaço de Sobolev $W^{1,p}(I,X)$ são, em termos gerais, primitivas de funções em L^p, além disso, fornece uma caracterização desses elementos com base na noção de diferenciabilidade em quase todo ponto.

Teorema A.9 [10, Teorema 1.4.35]**.** *Seja $u \in L^p(I,X)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $u \in W^{1,p}(I,X)$;

(b) Existe uma função $v \in L^p(I,X)$ tal que

$$u(t) - u(s) = \int_s^t v(\tau)d\tau, \quad q.t.p\ t, s \in I.$$

(c) u é localmente absolutamente contínua, diferenciável em quase todo ponto, com derivada u' pertencente a $L^p(I,X)$;

(d) u é fracamente localmente absolutamente contínua, fracamente diferenciável em quase todo ponto, com derivada u' em $L^p(I,X)$. Isto é, para todo funcional $\psi \in X'$, a função escalar $\psi \circ u$ é localmente absolutamente contínua e diferenciável em quase todo ponto, com

$$\frac{d}{dt}\langle \psi, u(t)\rangle_{X',X} = \langle \psi, u'(t)\rangle_{X',X}.$$

As funções v e u' mencionadas em (b), (c) e (d) são iguais à derivada fraca de u.

Observação A.1. O item (b) afirma que toda função $u \in W^{1,p}(I,X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, admite apenas um representante contínuo $\tilde{u} \in C(\bar{I},X)$, ou seja, $u = \tilde{u}$ em quase todo ponto de I. Esse representante é caracterizado pela identidade

$$\tilde{u}(t) - \tilde{u}(s) = \int_s^t u'(\tau)d\tau, \quad \forall t, s \in \bar{I}.$$

Para simplificar notação, denotaremos também por u esse representante contínuo.

Como primeira consequência desse teorema, destacamos a seguinte imersão:

Corolário A.4 [10, Corolário 1.4.36]**.** *Se $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$W^{1,p}(I,X) \hookrightarrow C_b(\bar{I},X).$$

Outra consequência importante é que, para funções do espaço de Sobolev, os quocientes de Newton convergem em L^p para a derivada, a saber:

Corolário A.5 [10, Corolário 1.4.39]**.** *Suponha $u \in W^{1,p}((a,b),X)$ com $p < \infty$. Então, para todo intervalo aberto $J \Subset (a,b)$, tem-se*

$$\frac{u(\cdot + h) - u(\cdot)}{h} \to u'(\cdot) \quad \text{em } L^p(J,X) \quad \text{quando } h \to 0.$$

Nos casos em que $J = (a,c)$ ou $J = (c,b)$, com $a < c < b$, essa convergência ocorre, respectivamente, no sentido lateral à direita ou à esquerda.

Demonstração. Considere J um intervalo com as características do enunciado. Para h suficientemente pequeno, com sinal compatível com J, o Teorema A.9-(b) garante que

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = M_h u'(t), \quad \forall t \in J.$$

Como $u' \in L^p((a,b),X)$, ao estender u' por zero fora de (a,b) e aplicar o Teorema A.7 à extensão obtida, obtemos, em particular, que

$$M_h u' \to u' \quad \text{em } L^p(J,X) \quad \text{quando } h \to 0,$$

donde o resultado segue. □

O próximo corolário estabelece uma fórmula de integração por partes. Essa formulação é fundamental na teoria de equações diferenciais em espaços de Banach, especialmente no estudo de soluções fracas.

Corolário A.6. *Suponha que $u \in W^{1,p}(I,X')$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$\int_I \langle u'(t), v\rangle_{X',X}\ \psi(t)\,dt = -\int_I \langle u(t), v\rangle_{X',X}\ \psi'(t)\,dt, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R}),\ v \in X.$$

Demonstração. Dado $v \in X$, considere o funcional $J_v \in X''$ definido por

$$\langle J_v, w\rangle_{X'',X'} := \langle w, v\rangle_{X',X}, \quad \forall w \in X'.$$

Pelo Teorema A.9-(d), sabemos que a função escalar $J_v \circ u$ é localmente absolutamente contínua e diferenciável em quase todo ponto, com

$$\frac{d}{dt}\langle J_v, u(t)\rangle_{X'',X'} = \langle J_v, u'(t)\rangle_{X'',X'}.$$

Em particular, $\langle J_v, u(\cdot)\rangle_{X'',X'} \in W^{1,p}(I,\mathbb{C})$, sendo sua derivada fraca dada pela derivada clássica quase todo ponto. Assim, pela definição de derivada fraca, temos

$$\begin{aligned}\int_I \langle J_v, u'(t),\rangle_{X'',X'}\ \psi(t)\,dt &= \int_I \frac{d}{dt}\langle J_v, u(t),\rangle_{X'',X'}\ \psi(t)\,dt \\ &= -\int_I \langle J_v, u(t)\rangle_{X'',X'}\ \psi'(t)\,dt,\end{aligned}$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R})$. Por fim, substituindo nas expressões acima a definição de J_v, obtemos o resultado desejado. □

Um problema importante é saber quando uma função é fracamente derivável. Embora existam diversos critérios para funções com valores escalares, esses critérios não se estendem a funções com valores em espaços vetoriais. Para contornar essa dificuldade, é preciso impor certas propriedades geométricas ao espaço X.

Teorema A.10 [10, Teorema 1.4.40]**.** *Seja X um espaço reflexivo e $u \in L^p(I,X)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $u \in W^{1,p}(I,X)$ se, e somente se, existe $g \in L^p(I,\mathbb{R})$ tal que*

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \left| \int_s^t g(\tau) d\tau \right|, \quad q.t.p. \ t, s \in I.$$

Neste caso,

$$\|u'\|_{L^p(I,X)} \leq \|\varphi\|_{L^p(I,\mathbb{R})}.$$

A partir disso, deduzimos imediatamente o seguinte resultado.

Corolário A.7. *Seja X um espaço reflexivo e $u \in L^\infty(I,X)$ uma função lipschitziana em quase todo ponto, isto é, existe uma constante L tal que*

$$\|u(t) - u(s)\| \leq L|t - s|, \quad q.t.p. \ t, s \in I.$$

Então $u \in W^{1,\infty}(I,X)$.

Finalmente, temos uma versão do Teorema A.5 para funções do espaço de Sobolev.

Corolário A.8 [10, Corolário 1.4.42]**.** *Sejam X um espaço reflexivo, $1 < p \leq \infty$ e (u_n) uma sequência limitada em $W^{1,p}(I,X)$. Se $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ para quase todo $t \in I$, então*

$$u \in W^{1,p}(I,X) \qquad e \qquad \|u'\|_{L^p(I,X)} \leq \liminf \|u_n'\|_{L^p(I,X)}.$$

Bibliografia

[1] R. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1975.

[2] A. Avantaggiati. On compact embedding theorems in weighted Sobolev spaces. *Czechoslavak Mathematical Journal*, 29 (104), 1979.

[3] S. Axler. *Measure, Integration and Real Analysis.* Springer, Cham, 2020.

[4] R. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Wiley and Sons, INC, 1995.

[5] A. Bazán, A. Farah e C. Souza. *Introdução aos Espaços de Banach.* IMPA, Rio de Janeiro, 1st edition, 2023. 34° Colóquio Brasileiro de Matemática, Volume 3.

[6] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional.* Editora SBM, 3ª edição, 2023.

[7] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[8] M. Cavalcanti e V. Domingos. *Semigrupos Lineares e Não Lineares e Aplicações.* Universidade Estadual de Maringá, Brasil, 2016. Livro-texto do Departamento de Matemática.

[9] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger Equations.* Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[10] T. Cazenave, A. Haraux and Y. Martel. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations.* Oxford University Press, 1998.

[11] T. Cazenave and F.B. Weissler. The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in H1. *Manuscripta Math* 61, 477–494, 1988.

[12] T. Cazenave and F.B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in Hs. *Nonlinear Analysis TMA*, 14 (10), 807-836, 1990.

[13] R. Coleman. *Calculus on Normed Vector Spaces.* Springer, 2012.

[14] K. Engel and R. Nagel. *One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Graduate Texts in Mathematics, 194. Springer, 2000.

[15] G. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, New York, 2nd edition, 1999.

[16] L. Gasiński and N. Papageorgiou. *Nonlinear analysis*. Chapman and Hall/CRC, 1st edition, 2005.

[17] W. Greiner. *Quantum Mechanics: An Introduction*. Springer, Berlin, 2001.

[18] M. Kreuter. Sobolev spaces of Vector-Valued Functions. Master's thesis, Ulm University, Faculty of Mathematics and Economics, Ulm, Germany, 2015.

[19] A. Kufner and B. Opic. How to define reasonably weighted Sobolev spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 25(3):537–554, 1984.

[20] F. Linares and G. Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Springer, New York, 2015.

[21] M. Nielsen and I. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 10th Anniversary Edition, 2010.

[22] T. Ozawa and T. Takeuchi. A new proof of the Gagliardo-Nirenberg and Sobolev inequalities: Heat semigroup aproach. *Proceedings of the american mathematical society, series B*, 11:371–377, 2024.

[23] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44. Springer, 1983.

[24] B. Reynne and M. Youngson. *Linear Functional Analysis*. Springer, 2nd edition, 2008.

[25] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1991.

[26] L. Schiff. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 1968.

[27] K. Schmüdgen. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Springer, 2012.

[28] T. Tao. *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*, volume 106 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[29] S. Zheng. *Nonlinear Evolution Equations*. Chapman and Hall/CRC, 2004.