Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Lucas Hariel Cavalcanti de Oliveira †

Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico de Soluções Positivas para um Problema Elíptico Linear e Sublinear

Campina Grande - PB

2026

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Lucas Hariel Cavalcanti de Oliveira

Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico de Soluções Positivas para um Problema Elíptico Linear e Sublinear

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa Equações Diferenciais Parciais (EDP) e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Aurério Soares Souto

Campina Grande - PB

2026

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

O48e Oliveira, Lucas Hariel Cavalcanti de.

Existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções positivas para um problema elíptico linear e sublinear / Lucas Hariel Cavalcanti de Oliveira. – 2026.

153 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.

"Orientação: Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto".

Referências.

1. Iteração Monotônica. 2. Problema Elíptico Semilinear. 3. Função Radial. 4. Sub e Supersolução. 5. Decaimento. I. Souto, Marco Aurélio Soares. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico de Soluções Positivas para um Problema Elíptico Linear e Sublinear

por

Lucas Hariel Cavalcanti de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Aprovada em:

Documento assinado digitalmente
gov.br DENILSON DA SILVA PEREIRA
Data: 09/04/2026 18:30:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Denilson Pereira da Silva - UFCG

Documento assinado digitalmente
gov.br NATAN DE ASSIS LIMA
Data: 07/04/2026 19:15:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Natan de Assis Lima - UEPB

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCO AURELIO SOARES SOUTO
Data: 13/04/2026 20:52:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Janeiro - 2026

Agradecimentos

Agradeço à Deus por estabelecer um conjunto de costumes que, desde o advento do Cristianismo, foi tão miraculosa, surpreendente e veementemente propagada pelo Ocidente a ponto de influir e, sobretudo, alicerçar a cultura ocidental e, ao longo dos séculos, se adaptar e sobreviver triunfantemente à perseguição romana, à Idade Média, à dois Cismas, ao Concílio de Trento, à Contrarreforma, à Noite de São Bartolomeu, ao secularismo, dentre tantas adversidades, até finalmente alcançar a minha vida e torná-la cada vez mais fascinante.

Agradeço a minha mãe Maria Ednalva Cavalcanti de Oliveira e ao meu pai Francisco Miguel de Melo Oliveira pelo amor, pelo zelo, pelas orações, pelas renúncias, pelo apoio e, principalmente, pelo incentivo ao estudo e à busca pelos meus objetivos.

Agradeço ao meu irmão Gustavo Emanuel Cavalcanti de Oliveira pela companhia, pelo zelo, pelos momentos de felicidade e pelos pratos culinários apetitosos.

Agradeço ao professor Dr. Marco Aurélio Soares Souto, por quem tive a honra de ser orientado, pelos esclarecimentos, pelas correções, pelas perguntas e pelas críticas durante as orientações, que me ajudaram a obter uma visão mais nítida a respeito dos principais tópicos de Equações Diferenciais Parciais (certamente, eu dei trabalho a você! Espero que em algum momento eu o retribua!)

Agradeço especialmente ao meu antigo orientador Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior por me proporcionar uma preparação algébrica mais robusta.

Agradeço aos professores avaliadores Dr. Denilson Silva Pereira, Dr. Natan de Assis Lima pelas correções e por assistirem a minha defesa.

Agradeço ao corpo docente da UAMat, em especial aos professores Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega, Dr. Claudianor Oliveira Alves, Dr. Denilson da Silva Pereira, Dr. Henrique Fernandes de Lima e Dr. Marco Aurélio Soares Souto e a professora Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida pelas aulas.

Agradeço especialmente ao professor Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho por me incentivar a ingressar no PET-Matemática-UFCG, pelas orientações, por mostrar sua visão de mundo, por elogiar a minha escrita, pelas aulas de Lógica aplicada à Matemática, de Prática de Ensino de Matemática I, II e III e de Análise matemática para Licenciatura, e por me instigar a ser cada vez melhor a cada dia.

Agradeço aos coordenadores da UAMat durante o meu Mestrado Dr. Claudianor Oliveira Alves e Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva.

Agradeço a todos os mangakás do Japão, em especial a Eiichiro Oda, a Yoshihiro Togashi, a Yüki Tabata, a Hirohiko Araki e a Akira Toriyama, que, através dos mangás, me inspiraram a sempre perseguir os meus objetivos e a jamais desistir.

Agradeço à Aninha, a autoridade máxima da UAMat, pela ajuda, pela gentileza, por sempre conferir um ambiente de conforto e de alegria à UAMat e por ser a primeira pessoa com quem me deparei quando adentrei a UAMat pela primeira vez.

Agradeço a todos os ex-integrantes do PET-Matemática-UFCG do período que compreende os anos de 2016, 2017 e 2018, que me incentivaram a não só estudar matemática, mas também a me tornar um ser humano honesto, amante da dignidade e do compromisso e, acima de tudo, mais consciente.

Agradeço à Cecília Nunes Magalhães por se dispor a me ajudar sempre que eu precisava, por me agraciar com sua alegria, por ser gentil e atenciosa e pelos elogios gratuitos e espontâneos que, com toda a certeza, me tornaram a pessoa mais feliz do mundo!

Agradeço à Ester Silva Rangel, a futura renomada cientista matemática e futura ganhadora da Medalha Fields, pelas conversas, pela convivência e por acreditar em mim.

Agradeço à José Lucas de Almeida Silva, o "pai do PET", por tornar os meus dias mais alegres, por sempre me defender, por nunca me deixar triste, por nunca me deixar na mão, por me aceitar do jeito que sou, por ser compreensivo comigo. Certamente, eu dei trabalho a você. Espero que em algum momento eu o retribua.

Agradeço à Thiago Ferreira Cruz pela convivência, pela dedicação, pela inspiração, por sempre sorrir, independente das circunstâncias, e por haver se atentado às minhas

conversas sobre música, história e cultura nos meus momentos de mais profunda arrogância.

Dedicatória

Dedico à todos aqueles que me motivaram à progredir cada vez mais em todos os aspectos

Resumo

Esta dissertação estuda a equação semilinear $\Delta u + f(x)u^{\gamma} = 0$ em $\mathbb{R}^n$, explorando os regimes sublinear ($0 < \gamma < 1$) e linear ($\gamma = 1$); usando estimativas de Schauder, Princípio do Máximo Forte, métodos de sub e supersolução, argumentos variacionais e redução radial, o trabalho estabelece condições suficientes de existência e unicidade de soluções positivas, descreve o comportamento assintótico e critérios de decaimento quando $|x| \to \infty$, e apresenta resultados de não-existência sob hipóteses sobre o sinal e integrabilidade de f, complementados por provas detalhadas e exemplos ilustrativos.

Palavras-chave: iteração monotônica, problema elíptico semilinear, função radial, sub e supersolução, decaimento.

Abstract

This master thesis studies the semilinear equation $\Delta u + f(x)u^{\gamma} = 0$ in $\mathbb{R}^n$, exploring the sublinear ($0 < \gamma < 1$) and linear ($\gamma = 1$) regimes; using Schauder estimates, Strong Maximum Principle, sub and supersolution methods, variational arguments, and radial reduction, this work establishes sufficient conditions for the existence and uniqueness of positive solutions (including localized solutions), describes the asymptotic behavior and decay criteria when $|x| \to \infty$, and presents non-existence results under hypotheses about the sign and integrability of f, complemented by detailed proofs and illustrative examples.

Key Words: monotonic iteraction, semilinear elliptic problem, radial function, sub- and supersolution, decay.

Sumário

Lista de Notações

$|\cdot|$ Norma euclidiana.

$|\Omega|$ *Medida* ou *volume* de Ω.

$\approx$ está próximo a.

χ_M *Função característica* de $M \subset \mathbb{R}^n$ definida por $\begin{cases} \chi_M(x) = 1, \text{ se } x \in M \\ \chi_M(x) = 0, \text{ se } x \notin M. \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial \eta_x}$ Derivada direcional de f na direção de $\eta_x \in \mathbb{R}^n$ dada por $\boldsymbol{\nabla} f \cdot \eta$.

$\displaystyle ⨍_{\partial B_r(x)} u \; \mathrm{d}\sigma_y$ *Média esférica* de uma função u, dada por $\displaystyle \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u \; \mathrm{d}\sigma_y$

$\displaystyle ⨍_{B_r(x)} u \; \mathrm{d}y$ *Média sólida* de uma função u, dada por $\displaystyle \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u \; \mathrm{d}y$.

η_x vetor normal unitário exterior, para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ Espaço euclidiano n-dimensional.

$\|\cdot\|_E$ Norma de um espaço vetorial E.

Ω *Domínio* ou *região* de $\mathbb{R}^n$ (conjunto aberto e conexo).

ω_n *Volume* da bola unitária B_1.

$\overline{M}$ Fecho de um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$.

$\partial B_r(x),\ S_r,\ \partial B_1,\ S_1$ Fronteira de $B_r(x)$

∂M Fronteira de um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$.

Φ *Solução Fundamental da Equação de Laplace*, dada por $\Phi(x) = \frac{|x|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

$\operatorname{dist}(x, M)$ Distância de x a um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$.

B_r Bola aberta de raio $r > 0$ e centro na origem ($B_r(0)$).

$B_r(x)$ Bolas abertas de raio $r > 0$ e centro em x.

$C^k(X)$ Espaço das funções k-vezes continuamente diferenciáveis em um conjunto X.

$C_0^k(X)$ Subespaço de $C^k(X)$ das funções contínuas com *suporte compacto* em um conjunto X.

$C^{0,\alpha}(X),\ 0 < \alpha < 1$ Espaço das funções α-Hölder-contínuas em um conjunto X.

$C^{k,\alpha}(X),\ 0 < \alpha < 1$ Subespaço de $C^k(X)$ onde as derivadas de k-ésima ordem pertencem a $C^{0,\alpha}(X)$.

$C_0^{k,\alpha}(X),\ 0 < \alpha < 1$ Subespaço de $C_0^k(X)$ onde as derivadas de k-ésima ordem pertencem a $C^{0,\alpha}(X)$.

$D_i u$ i-ésima derivada parcial de primeira ordem de uma função u

$D_{ij} u$ ij-ésima derivada parcial de segunda ordem de uma função u

$H^k(X)$ Equivale a $W^{k,2}(X)$.

$L^p(X)$ Espaço das funções p-integráveis em um conjunto X.

$L^\infty(X)$ Espaço das funções limitadas a menos de um conjunto de medida nula em um conjunto X.

$L^\infty_{\text{loc}}(X)$ Espaço das funções limitadas a menos de um conjunto de medida nula em um conjunto X.

$L^p_{\text{loc}}(X)$ Espaço das funções p-integráveis em cada $\omega \subset\subset X \subset \mathbb{R}^n$

$M \subset\subset N$ $\overline{M} \subset N$.

$M \backslash N$ Diferença entre os conjuntos M e N dada por $\{x \in M; x \notin N\}$.

$O(|x|^n)$ Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ que satisfaz $|f(x)| \leq c|x|^n$ para x próximo de um $a \in X \subset \mathbb{R}^n$.

$o(|x|^n)$ Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ que satisfaz $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{|x|^n} = 0$ para um $a \in X$.

$W^{k,p}(X)$ Espaço de Sobolev as funções $f\colon X \to \mathbb{R}$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$.

x Ponto em $\mathbb{R}^n$ (Pode ser escrito da forma $x = (x_1. \dots, x_n)$).

$x \cdot y$ Produto interno (escalar) em $\mathbb{R}^n$ dado por $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

$x \downarrow a$ x tende a a pela direita.

$x \uparrow a$ x tende a a pela esquerda.

q.t.p. Em *quase todo ponto*, isto é, a menos de um conjunto de medida nula.

Introdução

No decorrer deste trabalho, estamos interessados em estudar uma classe de problemas elípticos semilineares que, conforme Aranson e Weinberger [1], encontram aplicações em modelos físicos acerca de mecânica quântica e do estudo de reação-difusão. Como explicam Cazenave e Lions [4], modelos semilineares surgem, por exemplo, no estudo da existência e estabilidade de ondas estacionárias.

Problemas semilineares carregam uma dificuldade no que se refere a boa definição de certos funcionais, que necessitam de boa integridade das funções abordadas. A título de ilustração, considere, por exemplo, a função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Observe que f é uma função contínua e, portanto, integrável em quaisquer conjuntos compactos contidos em $\mathbb{R}^n$. Entretanto, sabe-se que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} f(x) \ \mathrm{d}x = \infty.$$

Por outro lado, se $p > 2$, considerando a função $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{1+|x|^p}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

percebemos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} g(x) \ \mathrm{d}x < \infty.$$

Como veremos adiante, funções do tipo f não garantem a existência de solução para a classe de problemas elípticos que estaremos abordando, enquanto que para funções do tipo g obtemos uma resposta positiva.

No trabalho de Brezis-Oswald [3], os autores aplicam métodos variacionais para demonstrar a existência e a unicidade de solução para o problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)g(u) \text{ em } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde

(i) Ω é um domínio de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ com fronteira suave;

(ii) $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função em L^∞_{loc};

(iii) $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de tal modo que $\dfrac{g(\cdot)}{\cdot}$ seja decrescente.

Seguindo uma abordagem diferente, vemos no trabalho de Figueiredo [6] que o autor aborda uma equação elíptica do tipo Ambrosetti-Prodi da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + h(x) \text{ em } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{AP}$$

onde a função h é de classe $C^{0,\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$; a função $g \colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e satisfaz

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{g(x,s)}{s} < \lambda_1 < \limsup_{s \to \infty} \frac{g(x,s)}{s} \text{ uniformemente em } x$$

e Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Para provar a existência da solução de tal problema, os autores recorrem à construção de uma sequência (u_k) em $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} -\Delta u_{k+1} = g(x,u_k) + h(x) \text{ em } \Omega \\ \quad u_{k+1} = 0 \text{ sobre } \Omega, \end{cases}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, onde $u_1 \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ é uma subsolução do problema (AP), de tal sorte que o limite pontual de (u_k) é a solução do problema proposto. Desta forma, um problema de equações diferenciais é convertido em um problema envolvendo harmonicidade, Teoria da Medida e Imersões de Sobolev.

Por outro lado, entretanto, devemos observar que a construção da sequência (u_k) está intimamente ligada às propriedades das funções g e h. Desta maneira, a depender das características de g e h, podemos nos deparar com algumas dificuldades tanto com respeito a obtenção dos termos desta sequência quanto com a diferenciabilidade de cada um dos seus termos.

Consideremos, agora, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)u^{\gamma} \text{ em } \mathbb{R}^n \\ \liminf\limits_{|x|\to\infty} u = 0, \end{cases} \tag{BK}$$

para algum $0 < \gamma < 1$, onde f é uma função de classe $C^{0,\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$. Esta classe de problemas, como veremos, é derivado de um caso particular de (AP), onde consideramos

$$g(x,u) = f(x)u^{\gamma}; \; h(x) = 0,$$

para quaisquer $x \in \Omega$ e $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, e está relacionado com a hipótese de que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} f(x) \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{f_0}$$

É possível encontrarmos trabalhos que tratam sobre tal problema, a exemplo de Brezis e Kamin [2], que utilizam técnicas clássicas de sub e supersolução e interação monotônica para mostrar a existência de solução clássica para o problema proposto.

Além disso, consideremos a seguinte equação elíptica semilinear

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(x)g(u) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \\ u(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty \\ |\boldsymbol{\nabla} u| \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

onde $\lambda \geq 0$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com $g(0) = 0$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função positiva e de classe $C^{0,\alpha}$ para algum $0 < \alpha < 1$ que satisfaz (f_0).

Tal classe de problemas é amplamente estudada na literatura. Podemos citar, por exemplo, Naito [11] e, de forma mais generalizada, Edelson-Rumbos [8], que usam resultados de Análise Funcional e, mais especificamente, de Teoria Espectral para mostrar existência de solução clássica para este problema. No trabalho de [11], por sua vez, é mostrado que existem constantes λ_0, λ_1, com $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1$ que satisfazem o seguinte

(i) se $\lambda \in (0, \lambda_0)$, a equação $\Delta u + \lambda p(|x|)u = 0$ tem uma solução limitada, radial, que nunca se anula e que é assintótica a uma constante positiva.

(ii) se $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$, então $\Delta u + \lambda p(|x|)u = 0$ tem uma solução limitada, radial, que nunca se anula u_λ de modo que, para algum $c > 0$,

$$|x|^{n-2} u_\lambda(|x|) \to c \text{ quando } |x| \to \infty.$$

Devemos destacar que, embora existam semelhanças entre os problemas anteriores, as técnicas utilizadas em cada trabalho apresentam diferenças e peculiaridades significativas. Porém, sempre nos deparamos com a condição (f_0). Isto está relacionado à propriedade (H) abaixo, que se articula diretamente com conceitos centrais da teoria do potencial e das equações elípticas. Dizemos que uma função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cumpre a propriedade (H) quando existe $U \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ limitada tal que

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{H}$$

Nesta dissertação, tomando como base o trabalho de [2] e de [8], estamos interessados em estudar a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n \\ \liminf\limits_{|x|\to\infty} |u(x)| = 0. \end{cases} \tag{BK}$$

para algum $0 < \gamma \leq 1$, onde f é uma função não negativa de classe $C^{0,\alpha}$.

Observe que o problema (BK) possui uma dependência natural da potência γ, a qual será explorada ao longo do trabalho, de modo a estudar a existência e a unicidade de solução de (BK).

Observe ainda que o problema (BK), se $\gamma = 1$, reduz-se ao problema linear considerado por [8], onde é feito uso de Imersão Compacta e Teoria Espectral para investigar a existência de soluções para a classe de problemas proposto. Uma dificuldade inerente ao problema reside nas singularidades de funções (a exemplo da solução fundamental da Equação de Laplace) e na não limitação do domínio das funções (afinal estamos considerando todo o espaço euclidiano), o que nos remete em geral a elaborarmos estratégias mais sofisticadas para obtermos condições suficientes de alguns resultados de uso recorrente na Análise, como o *Teorema da Convergência Dominada* ou as *Identidades de Green*.

Ao longo do nosso trabalho estamos interessados em mostrar principalmente os seguintes resultados obtidos por [2]:

Teorema 0.1 (Existência de solução)**.** Seja uma função não negativa $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, com $0 < \alpha < 1$. Então, dado $0 < \gamma < 1$, existe uma função limitada $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$-\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n$$

se, e somente se, f tem a propriedade (H).

Teorema 0.2 (Unicidade de solução)**.** Se f tem a propriedade (H), então a solução u dada no **Teorema 0.1** é única, desde que

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

No terceiro e último capítulo, trataremos o regime linear. Nosso interesse reside em provar o resultado devido a [8]:

Teorema 0.3. Suponha que $f, P \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ de tal modo que

$$0 < f(x) \leq P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e que P seja radialmente simétrica que satisfaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Então, existe λ, a saber λ_1, para que a equação

$$\Delta u + \lambda f(x)u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n$$

tenha uma solução limitada positiva u que satisfaz

$$|x|^{n-2}u(x) \to c \text{ quando } |x| \to \infty,$$

para algum $c > 0$.

Nosso estudo combina métodos de sub e supersolução, argumentos variacionais quando aplicáveis, estimativas Schauder para elevar regularidade e técnicas de redução radial para estudar soluções simétricas. Em suma, inicialmente estudaremos a classe de problemas ($0 < \gamma < 1$)

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \Omega \\ \quad u > 0 \text{ em } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{BK$_0$}$$

onde f é uma função de classe $C^{0,\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$, Ω é um domínio de $\mathbb{R}^n$ e com fronteira suave, e observaremos que soluções para tais problemas qualificam-se como subsolução para o problema (BK). Veja a definição abaixo,

Definição 0.1. Dizemos que $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ é uma *supersolução* do problema (BK) se

$$-\Delta u \geq f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Da mesma forma, dizemos que $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ é uma *subsolução* do problema (BK) se

$$-\Delta u \leq f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Logo em seguida, a natureza do problema nos permite obter uma supersolução de modo que a subsolução é quase sempre dominada pela supersolução. Daí, constroem-se sequências de sub e supersoluções que convergem para soluções fracas do problema e utilizam-se resultados de imersão e estimativas de Schauder para elevar a regularidade de tais soluções.

De forma mais precisa, mostra-se o seguinte Lema,

Lema 0.1 (Existência de solução)**.** Sejam $\underline{u}$ e $\overline{u}$ sub e supersoluções de (BK$_0$), respectivamente, que satisfazem

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Então, existem $\underline{U}, \overline{U} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que

(i) $\underline{U}$ e $\overline{U}$ são soluções de (BK$_0$);

(ii) $\underline{u}(x) \leq \underline{U}(x) \leq \overline{U}(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega.$

Além disso, se uma solução u de (BK_0) satisfaz

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega,$$

então

$$\underline{U}(x) \leq u(x) \leq \overline{U}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Com isto, somos capazes de obter uma primeira solução u para o problema (BK) através de iteração monotônica.

Este trabalho possui três capítulos. No primeiro capítulo, amparados pelos artigos de [2] e [6], estudamos a classe de problemas (BK_0) via sub e supersolução e interação monotônica. Em seguida, tratamos de equivalências que envolvem a propriedade (H) e a condição (f_0) que serão imprescindíveis para o desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo, seguindo de perto o trabalho de [2], estudamos a existência, a unicidade e o padrão assintótico das soluções para a classe de problemas (BK) no caso sublinear $(0 < \gamma < 1)$.

No terceiro capítulo, apoiados pelo trabalho de [8], estudamos também a existência, a unicidade e o padrão assintótico das soluções para a classe de problemas (BK) no caso linear $(\gamma = 1)$.

Por fim, apresentamos três apêndices, dentre os quais o primeiro aborda resultados gerais envolvendo funções harmônicas; o segundo, por sua vez, trata de uma função radialmente simétrica e harmônica que nos será bastante útil para desenvolvermos alguns cálculos e, por último, um resultado que comprova a existência de subsolução para a classe de problemas (BK) no caso sublinear.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Problemas com não linearidade sublinear aparecem naturalmente em modelagens físicas e biológicas. Do ponto de vista matemático, a sublinearidade altera propriedades qualitativas das soluções. A comparação com casos lineares, o comportamento no infinito, a unicidade e até mesmo a existência de soluções positivas exigem abordagens adaptadas.

O operador Laplaciano no espaço euclidiano traz questões de comportamento global que não surgem em domínios limitados, como decaimento em infinito por exemplo.

Neste capítulo, analisamos a equação

$$-\Delta u = f(x)u^{\gamma} \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{BK}$$

onde $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e f é uma função não negativa em $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, com $0 < \alpha, \gamma < 1$.

Trata-se de um problema elíptico semilinear cuja parte não linear em u cresce de forma sublinear. Nesta seção, apresentamos motivações, hipóteses precisas, dificuldades principais, técnicas que serão usadas e a organização do capítulo.

1.1 Método da sub e supersolução

O *método de sub e supersolução* é uma técnica poderosa para provar a existência (e às vezes a unicidade) de soluções de **Equações Diferenciais Parciais (EDP)** não lineares que se baseia na construção de duas funções que intermedeiam uma possível solução e que explora propriedades de monotonicidade e continuidade para garantir que tal solução intermediária exista. Na presente seção, utilizaremos este método, que pode ser encontrado na referência [6], para provar que, dadas uma região Ω limitada com fronteira C^2 e uma função não-nula $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

(i) $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, com $0 < \alpha < 1$;

(ii) $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$,

existe uma única função não-nula $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, com

$$u(x) \geq 0, \ \forall x \in \overline{\Omega},$$

tal que, para algum $0 < \gamma < 1$,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \Omega, \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{BK-Ω}$$

Pelo **Teorema A.5** no **Apêndice**,

$$u(x) > 0, \ \forall x \in \Omega.$$

Mas antes, é necessário que nos familiarizemos com as definições e observações que se seguem.

Observação 1.1. Considere uma função $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Mostraremos que

$$f(x)u^\gamma \in C^{0,\alpha\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Neste caso, vamos mostrar apenas que u^γ é de classe $C^{0,\alpha\gamma}$. De fato, seja $g\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(t) = \frac{1 - t^\gamma}{(1-t)^\gamma}, \ 0 \leq t < 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \left(\frac{1-t^\gamma}{(1-t)^\gamma}\right)' \\
&= \left((1-t)^{-\gamma} - \frac{t^\gamma}{(1-t)^\gamma}\right)' \\
&= \gamma(1-t)^{-\gamma-1} - \frac{\gamma t^{\gamma-1}(1-t)^\gamma + t^\gamma\gamma(1-t)^{\gamma-1}}{(1-t)^{2\gamma}} \\
&= \gamma(1-t)^{-\gamma-1} - \frac{\gamma t^{\gamma-1}(1-t)^{\gamma-1}\left((1-t)+t\right)}{(1-t)^{2\gamma}} \\
&= \gamma(1-t)^{-\gamma-1} - \gamma t^{\gamma-1}(1-t)^{-\gamma-1} \\
&= \gamma(1-t)^{-\gamma-1}\left(1-t^{\gamma-1}\right) \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

para todo $0 < t < 1$. Daí, g é decrescente, o que significa que

$$\frac{1-t^\gamma}{(1-t)^\gamma} = g(t) \leq g(0) = 1, \;\; 0 \leq t < 1.$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, suponha, primeiramente, que

$$u(x) < u(y).$$

Assim,

$$\frac{1-\left(\dfrac{u(x)}{u(y)}\right)^\gamma}{\left(1-\dfrac{u(x)}{u(y)}\right)^\gamma} = g\left(\frac{u(x)}{u(y)}\right) \leq 1,$$

isto é,

$$u^\gamma(x) - u^\gamma(y) \leq (u(x)-u(y))^\gamma \leq c|x-y|^{\alpha\gamma}.$$

Analogamente, se $u(y) \leq u(x)$, então

$$u^\gamma(y) - u^\gamma(x) \leq c|x-y|^{\alpha\gamma}.$$

Logo,

$$|u^\gamma(x) - u^\gamma(y)| \leq c|x-y|^{\alpha\gamma}.$$

Portanto,

$$fu^\gamma \in C^{0,\alpha\gamma}(\overline{\Omega}).$$

A observação anterior nos será imprescindível para conseguirmos regularizar as funções que aparecerão na demonstração da existência de solução para o problema (BK-Ω), isto é, provaremos que tais funções pertencerão a uma classe de diferenciabilidade superior.

Na teoria das EDP, as *sub* e *supersolução* são ferramentas cruciais para estudarmos a existência, unicidade e comportamento de soluções. Veremos posteriormente que as sub e supersoluções permitem delimitar a solução de uma EDP, mesmo quando não conseguimos encontrá-la explicitamente, o que nos remete a defini-los como se segue.

Definição 1.1. Dizemos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma *supersolução* do problema (BK-Ω) se

$$\begin{cases} -\Delta u \geq f(x)u^{\gamma} \text{ em } \Omega \\ \quad u \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Da mesma forma, dizemos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma *subsolução* do problema (BK-Ω) se

$$\begin{cases} -\Delta u \leq f(x)u^{\gamma} \text{ em } \Omega \\ \quad u \leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tais definições serão importantes para podermos aplicar no decorrer da demonstração seguinte resultados clássicos da Análise Matemática, tais como **Teorema da Convergência Dominada** e alguns resultados envolvendo existência de limite.

Lema 1.1 (Existência de solução)**.** Sejam $\underline{u}$ e $\overline{u}$ sub e supersoluções de (BK-Ω), respectivamente, que satisfazem

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Então, existem $\underline{U}, \overline{U} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que

(i) $\underline{U}$ e $\overline{U}$ são soluções de (BK-Ω);

(ii) $\underline{u}(x) \leq \underline{U}(x) \leq \overline{U}(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega.$

Além disso, se uma solução u de (BK-Ω) satisfaz

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega,$$

então

$$\underline{U}(x) \leq u(x) \leq \overline{U}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que existem $\underline{U}, \overline{U} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que $\underline{U}$ e $\overline{U}$ são soluções de (BK-Ω). Para isso, construiremos uma função $T\colon C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e, a partir da aplicação iterada da função T em $\underline{u}$ e em $\overline{u}$, construiremos duas sequências que convergem para a $\underline{U}$ e $\overline{U}$, respectivamente.

Pelo **Teorema 6.14** do **Gilbarg e Trudinger [10, p. 107]**, existe, para cada $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$, um único $T_u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta T_u = f(x)u^\gamma \text{ em } \Omega \\ \quad T_u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Assim, podemos considerar a função $T\colon C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+) \to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ dada por

$$Tu = T_u, \ \forall u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$$

Sejam $u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ (arbitrários) de modo que

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \text{ e } v(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega,$$

A afirmação seguinte nos ajudará a demonstrar a monotonidade das sequências que ainda construiremos, o que nos será importante para demonstrarmos a convergência de tais sequências.

Afirmação 1.1.

$$u(x) \leq v(x) \Rightarrow Tu(x) \leq Tv(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Demonstração. De fato, por (1.1),

$$\begin{aligned} -\Delta(Tu - Tv)(x) &= -\Delta Tu(x) - (-\Delta Tv(x)) \\ &= f(x)u(x)^\gamma - f(x)v(x)^\gamma \\ &= f(x)\left(u(x)^\gamma - v(x)^\gamma\right) \\ &\leq f(x)\left(v(x)^\gamma - v(x)^\gamma\right) \\ &= f(x) \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$, e

$$\begin{aligned} (Tu - Tv)(x) &= Tu(x) - Tv(x) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Pelo **Princípio do Máximo Fraco** (vide **Evans [9, p. 27]**),

$$\begin{aligned} Tu(x) &\leq \max_{\overline{\Omega}}[(Tu - Tv)(x)] + Tv(x) \\ &= \max_{\partial\Omega}[(Tu - Tv)(x)] + Tv(x) \\ &= Tv(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$. $\square$

Agora, sejam

$$\begin{cases} \underline{u}_0 = \underline{u} \\ \underline{u}_k = T\underline{u}_{k-1}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \overline{u}_0 = \overline{u} \\ \overline{u}_k = T\overline{u}_{k-1}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A seguir, provaremos duas afirmações que evidenciam a monotonidade das sequências $(\underline{u}_k)$ e $(\overline{u}_k)$, o que garante a convergência de ambas.

Afirmação 1.2.

$$\underline{u}_0(x) \leq \underline{u}_1(x) \leq \cdots \leq \underline{u}_k(x) \leq \cdots \leq \overline{u}_k(x) \leq \cdots \leq \overline{u}_1(x) \leq \overline{u}_0(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Demonstração. De fato, como $\underline{u}_0 = \underline{u}$ é subsolução de (BK-Ω) e $\overline{u}_0 = \overline{u}$ é supersolução de (BK-Ω), temos

$$\begin{aligned} -\Delta(\underline{u}_0 - \underline{u}_1) &= -\Delta\underline{u}_0 - (-\Delta\underline{u}_1) \\ &= -\Delta\underline{u}_0 - f(x)\underline{u}_0^\gamma \\ &\leq f(x)\underline{u}_0^\gamma - f(x)\underline{u}_0^\gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$-\Delta(\overline{u}_0 - \overline{u}_1)(x) \geq 0,$$

para todo $x \in \Omega$. Além disso,

$$\begin{aligned} (\underline{u}_0 - \underline{u}_1)(x) &= \underline{u}(x) - \underline{u}_1(x) \\ &= \underline{u}(x) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

e, da mesma forma,

$$(\overline{u}_0 - \overline{u}_1)(x) \geq 0,$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Pelo **Princípio do Máximo Fraco**,

$$\begin{aligned} \underline{u}_0(x) &= (\underline{u}_0 - \underline{u}_1)(x) + \underline{u}_1(x) \\ &\leq \max_{\overline{\Omega}}(\underline{u}_0 - \underline{u}_1)(x) + \underline{u}_1(x) \\ &= \max_{\partial\Omega}(\underline{u}_0 - \underline{u}_1)(x) + \underline{u}_1(x) \\ &\leq \underline{u}_1(x), \end{aligned} \tag{1.2}$$

e, de maneira similar,

$$\overline{u}_0(x) \geq \overline{u}_1(x), \tag{1.3}$$

para todo $x \in \Omega$. Pela **Afirmação 1.1** e por (1.2) e (1.3), concluímos a **Afirmação 1.2**. $\square$

A **Afirmação 1.2**, por sua vez, nos garante a existência do limite pontual das sequências $(\underline{u}_k)$ e $(\overline{u}_k)$ Assim, podemos considerar as funções $\underline{U}, \overline{U} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \underline{u}_k(x) \\ \overline{U}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \overline{u}_k(x), \end{cases}$$

para todo $x \in \Omega$. Note que

$$\begin{aligned} |\underline{u}_k(x) - \underline{U}(x)| &\leq |\underline{u}_k(x)| + |\underline{U}(x)| \\ &= \underline{u}_k(x) + \underline{U}(x) \\ &\leq \underline{U}(x) + \underline{U}(x) \\ &= 2\underline{U}(x) \end{aligned}$$

e analogamente,

$$|\underline{u}_k(x) - \underline{U}(x)| \leq 2\overline{U}(x),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Pelo **Teorema da Convergência Dominada**, concluímos da **Afirmação 1.2** que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|\underline{u}_k - \underline{U}\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)} &= \lim_{k\to\infty} \left(\int_\Omega |\underline{u}_k - \underline{U}|^{\frac{n}{1-\alpha}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1-\alpha}{n}} \\ &= \left(\int_\Omega \lim_{k\to\infty} |\underline{u}_k - \underline{U}|^{\frac{n}{1-\alpha}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1-\alpha}{n}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\overline{u}_k - \overline{U}\right\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)} = 0,$$

isto é,

$$\begin{cases} \underline{u}_k \to \underline{U} \text{ em } L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega) \\ \overline{u}_k \to \overline{U} \text{ em } L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega). \end{cases}$$

Pela completude de $L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)$,

$$\underline{U}, \overline{U} \in L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)$$

Novamente, via **Imersões de Sobolev [9, p. 270]** e, em seguida, pelo **Lema 9.17** do

[10, p. 242],

$$\begin{aligned}
\|\underline{u}_k - \underline{u}_m\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leq C\|\underline{u}_k - \underline{u}_m\|_{W^{2,\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)}\\
&\leq C\|\Delta(\underline{u}_k - \underline{u}_m)\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)}\\
&\leq C\|f(\underline{u}_k^{\gamma} - \underline{u}_m^{\gamma})\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)}\\
&= C\left(\int_{\Omega} |f(x)(\underline{u}_k^{\gamma} - \underline{u}_m^{\gamma})|^{\frac{n}{1-\alpha}}\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1-\alpha}{n}}\\
&\leq C\|f\|_{C^{0,\sigma}(\overline{\Omega})}\|\underline{u}_k^{\gamma} - \underline{u}_m^{\gamma}\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)},
\end{aligned}$$

e, da mesma forma,

$$\|\overline{u}_k - \overline{u}_m\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\|\overline{u}_k^{\gamma} - \overline{u}_m^{\gamma}\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)},$$

para todo $k, m \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\underline{U}, \overline{U} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+).$$

Pelo **Corolário 6.9** do **[10, p. 101]**, conclui-se que

$$\underline{U}, \overline{U} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+).$$

Portanto, $\underline{U}$ e $\overline{U}$ são soluções de (BK-Ω). Pela **Afirmação 1.2**,

$$\underline{u}(x) \leq \underline{U}(x) \leq \overline{U}(x) \leq \overline{u}(x),\ \forall x \in \Omega$$

e, pela **Afirmação 1.1**, se u é uma solução de (BK-Ω) de modo que

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x),\ \forall x \in \Omega,$$

então

$$\underline{U}(x) \leq u(x) \leq \overline{U}(x),\ \forall x \in \Omega.$$

□

O método da iteração monótona oferece uma abordagem robusta para demonstrar a existência de soluções para **Equações Diferenciais Parciais**. Através da construção cuidadosa de sequências, conseguimos não apenas estabelecer a existência das soluções, mas também garantir sua unicidade em muitos casos.

Observe que, se considerarmos a função $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = t^{\gamma},\ \forall t > 0,$$

então, dados $t < s$, temos

$$\frac{g(s)}{s} = \frac{s^\gamma}{s} = \frac{1}{s^{1-\gamma}} < \frac{1}{t^{1-\gamma}} = \frac{t^\gamma}{t} = \frac{g(t)}{t}.$$

Logo, $\dfrac{g(t)}{t}$ é decrescente. Por isso, mostraremos a unicidade da solução de (BK-Ω) mostrando a unicidade da solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(x)g(u) \text{ em } \Omega \\ \quad u > 0 \text{ em } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lema 1.2 (Unicidade de solução)**.** Sejam Ω uma região cuja fronteira cumpre uma condição de esfera interior em cada um dos seus pontos e $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ funções que satisfazem

(i) $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}$;

(ii) red$\dfrac{g(\cdot)}{\cdot}$ seja decrescente.

Se existe uma função $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)g(u) \text{ em } \Omega \\ \quad u > 0 \text{ em } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

então u é a única função que satisfaz (1.4).

Demonstração. Sejam u_1 e u_2 soluções de (1.4). Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2} &= -\frac{-f(x)g(u_1)}{u_1} + \frac{-f(x)g(u_2)}{u_2} \\ &= \frac{f(x)g(u_1)}{u_1} - \frac{f(x)g(u_2)}{u_2} \\ &= f(x)\left(\frac{g(u_1)}{u_1} - \frac{g(u_2)}{u_2}\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Por um lado,

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla u_1 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\right|^2 &= |\nabla u_1|^2 - 2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + \frac{u_1^2}{u_2^2}|\nabla u_2|^2 \\
&= |\nabla u_1|^2 - \nabla u_2 \cdot \left(\frac{2u_2u_1\nabla u_1 - u_1^2\nabla u_2}{u_2^2}\right) \\
&= |\nabla u_1|^2 - \nabla u_2 \cdot \nabla\frac{u_1^2}{u_2} \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

e, analogamente,

$$
\left|\nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right|^2 = |\nabla u_2|^2 - \nabla u_1 \cdot \nabla\frac{u_2^2}{u_1}. \qquad (1.7)
$$

Somando (1.6) e (1.7),

$$
\left|\nabla u_1 - \frac{u_1\nabla u_2}{u_2}\right|^2 + \left|\nabla u_2 - \frac{u_2\nabla u_1}{u_1}\right|^2 = |\nabla u_1|^2 - \nabla u_1 \cdot \nabla\frac{u_2^2}{u_1} - \nabla u_2 \cdot \nabla\frac{u_1^2}{u_2} + |\nabla u_2|^2. \quad (1.8)
$$

Pretendemos aplicar as **Identidades de Green** em (1.8), mas antes, precisamos mostrar a seguinte afirmação.

Afirmação 1.3. Para cada $i, j \in \{1, 2\}$, com $i \neq j$, existe uma função $v_{i,j} \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

(i) $v_{i,j} = \dfrac{u_i^2}{u_j}$ em $\overline{\Omega}$;

(ii) $v_{i,j} \in C(\overline{\Omega})$

Demonstração. Considere, para cada $i, j = 1, 2$, a função $v_{i,j} \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por

$$
\begin{cases}
v_{i,j} = \dfrac{u_i^2}{u_j} \text{ em } \Omega \\
v_{i,j} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.
\end{cases}
$$

Queremos mostrar que, para cada $i, j = 1, 2$,

$$
v_{i,j} \in C(\overline{\Omega}).
$$

Para isso, é suficiente mostrar que, para cada $x_0 \in \partial\Omega$ e $i, j = 1, 2$,

$$
\lim_{x \to x_0} v_{i,j}(x) = v_{i,j}(x_0).
$$

De fato, dados $x_0 \in \partial\Omega$ e $i = 1, 2$, temos, para cada $i = 1, 2$,

(i) $-u_i$ é contínuo em x_0;

(ii) $(-u_i)(x_0) > (-u_i)(x), \ \forall x \in \Omega;$

(iii) $\partial\Omega$ cumpre uma condição de esfera interior em x_0.

Pelo **Lema de Hopf [10, p. 34]**, temos, para cada $i = 1, 2$,

$$\frac{\partial(-u_i)}{\partial \eta_x}(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial \eta_x}(x) < 0, \ \forall x \in \partial\Omega,$$

onde η_x é o vetor exterior unitário normal à cada $x \in \Omega$. Como $\partial\Omega$ cumpre uma condição de esfera interior em x_0, existem $\delta > 0$ e $x_1 \in \Omega$ tais que

(i) $B_\delta(x_1) \subset \Omega;$

(ii) $B_\delta(x_1) \cap \partial\Omega = \{x_0\}.$

Fixados $i, j = 1, 2$, podemos considerar as funções $\varphi, \psi \colon (0, \delta) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(t) = u_i(x_0 + t\eta_{x_0})^2, \ \psi(t) = u_j(x_0 + t\eta_{x_0}), \ \forall t \in (0, \delta)$$

Por **L'Hospital**,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} v_{i,j}(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u_i(x)^2}{u_j(x)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{u_i(x_0 + t\eta_{x_0}) \dfrac{\partial u_i}{\partial \eta_{x_0}}(x_0 + t\eta_{x_0})}{\dfrac{\partial u_j}{\partial \eta_{x_0}}(x_0 + t\eta_{x_0})} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{2u_i(x) \dfrac{\partial u_i}{\partial \eta_{x_0}}(x)}{\dfrac{\partial u_j}{\partial \eta_{x_0}}(x)} \\
&= 2 \lim_{x \to x_0} u_i(x) \cdot \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\partial u_i}{\partial \eta_{x_0}}(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\partial u_j}{\partial \eta_{x_0}}(x)} \\
&= 2 \cdot 0 \cdot \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\partial u_i}{\partial \eta_{x_0}}(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\partial u_j}{\partial \eta_{x_0}}(x)} \\
&= 0 \qquad (1.9) \\
&= v_{i,j}(x_0).
\end{aligned}$$

Portanto, para cada $i, j = 1, 2$,

$$v_{i,j} \in C(\overline{\Omega}).$$

$\square$

Pelas **Identidades de Green**, decorre de (1.9) que, para cada $i, j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u_i \cdot \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{u_j^2}{u_i} \right) &= \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u_i \cdot \boldsymbol{\nabla} v_{j,i} \\
&= -\int_\Omega v_{j,i} \Delta u_i + \int_{\partial\Omega} v_{j,i} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \\
&= -\int_\Omega \frac{u_j^2}{u_i} \Delta u_i + \int_{\partial\Omega} 0 \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \\
&= -\int_\Omega \frac{u_j^2}{u_i} \Delta u_i. \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Multiplicando (1.5) por $(u_1^2 - u_2^2)$, obtemos de (1.10) e de (1.8)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| \boldsymbol{\nabla} u_1 - \frac{u_1}{u_2} \boldsymbol{\nabla} u_2 \right|^2 + \left| \boldsymbol{\nabla} u_2 - \frac{u_2}{u_1} \boldsymbol{\nabla} u_1 \right|^2 = \\
&\int_\Omega \left(|\boldsymbol{\nabla} u_1|^2 - \boldsymbol{\nabla} u_1 \cdot \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{u_2^2}{u_1} \right) - \boldsymbol{\nabla} u_2 \cdot \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{u_1^2}{u_2} \right) + |\boldsymbol{\nabla} u_2|^2 \right) = \\
&\int_\Omega \left(-u_1 \Delta u_1 + \frac{u_2^2}{u_1} \Delta u_1 + \frac{u_1^2}{u_2} \Delta u_2 - u_2 \Delta u_2 \right) = \\
&\int_\Omega \left(-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2} \right) (u_1^2 - u_2^2) = \\
&\int_\Omega f(x) \left(\frac{g(u_1)}{u_1} - \frac{g(u_2)}{u_2} \right) (u_1^2 - u_2^2). \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

Denote $[f > 0] = \{x \in \Omega \colon f(x) > 0\}$. Se existisse $x_0 \in [f > 0]$ tal que $u_1(x_0) > u_2(x_0)$, então, por continuidade, existiria uma vizinhança $V \subset [f > 0]$ de x_0 tal que

$$u_1(x) > u_2(x),\ \forall x \in V.$$

Por hipótese,

$$\frac{g(u_1)}{u_1} - \frac{g(u_2)}{u_2} < 0 \text{ em } V.$$

Por (1.11),

$$0 \leq \int_V \left| \boldsymbol{\nabla} u_1 - \frac{u_1}{u_2} \boldsymbol{\nabla} u_2 \right|^2 + \left| \boldsymbol{\nabla} u_2 - \frac{u_2}{u_1} \boldsymbol{\nabla} u_1 \right|^2 < 0,$$

o que é um absurdo. Da mesma forma, $u_1(x_0) < u_2(x_0)$, para algum $x_0 \in \Omega$, não pode ocorrer. Logo,

$$u_1 = u_2 \text{ em } [f > 0],$$

o que implica que

$$f(x)g(u_1) = f(x)g(u_2) \text{ em } \Omega.$$

Por (1.4), temos, em Ω,

$$\begin{aligned}\Delta(u_1 - u_2) &= \Delta u_1 - \Delta u_2 \\ &= -f(x)g(u_1) - (-f(x)g(u_2)) \\ &= 0\end{aligned}$$

e, em $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned}u_1 - u_2 &= u_1 - u_2 \\ &= \psi - \psi \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pelo **Princípio do Máximo Fraco**, temos, em Ω,

$$\begin{aligned}0 &= \min_{\partial\Omega}(u_1 - u_2) \\ &\leq u_1 - u_2 \\ &\leq \max_{\partial\Omega}(u_1 - u_2) \\ &= 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$u_1 = u_2 \text{ em } \Omega,$$

o que justifica a unicidade. □

O problema elíptico semilinear (BK-Ω) apresenta uma rica estrutura matemática, cuja análise depende fortemente dos parâmetros envolvidos. Sob hipóteses adequadas de regularidade e positividade para f, é possível garantir a existência de soluções fracas por meio de técnicas de sub e supersoluções como vimos nesta seção.

A unicidade, por outro lado, é mais delicada, por ser assegurada em regimes sublineares, como no caso da equação que estamos estudando, devido à monotonicidade do termo não linear.

Assim, a existência é amplamente garantida sob condições naturais, enquanto a unicidade depende de uma análise mais refinada da não linearidade e da estrutura do coeficiente f.

1.2 Potencial Newtoniano e a Propriedade (H)

A *Equação de Poisson* é uma EDP fundamental, não apenas no campo da Matemática Pura, mas também em diversas áreas da Ciência Aplicada. Sua importância transcende disciplinas com aplicações que vão da Eletrostática — onde descreve o potencial elétrico gerado por uma distribuição de carga — à Mecânica dos Fluidos, modelando distribuições de pressão em escoamentos viscosos. Além disso, desempenha papel central em Geometria Diferencial, na análise de curvaturas e métricas e até mesmo em áreas modernas como o processamento de imagens, onde é utilizada para reconstrução de superfícies e suavização de ruído (vide **Renardy e Rogers [12]**).

Formalmente, a **Equação de Poisson** é expressa por:

$$-\Delta u = f,$$

onde

(i) u é a função desconhecida, que pode representar diferentes grandezas físicas ou geométricas, como potencial elétrico, temperatura, pressão ou altura de uma superfície.

(ii) f é uma função conhecida, que representa a fonte ou distribuição que gera o campo descrito por u.

Em problemas semilineares, a **Equação de Poisson** surge como uma base linear essencial para análise e aproximações. A estrutura linear da equação permite o uso de ferramentas clássicas de análise funcional, como espaços de Sobolev, operadores elípticos e métodos variacionais, que são fundamentais para entender o comportamento de soluções em contextos mais complexos.

Nesta seção, iremos explorar a relação entre a existência de solução para a **Equação de Poisson** e a **propriedade** (H), que será crucial para demonstrarmos a existência e a unicidade de solução para a equação semilinear

$$-\Delta u = f(x)u^{\gamma}, \tag{BK}$$

onde o termo não linear $f(x)u^{\gamma}$ introduz novos desafios analíticos. A presença da potência u^{γ} exige uma abordagem cuidadosa, pois a existência de solução depende não apenas da regularidade de f, mas também do comportamento de u nas regiões onde pode se anular ou crescer rapidamente. A análise será conduzida com base em métodos de continuidade, estimativas *a priori* e teoremas de ponto fixo, aproveitando a estrutura da equação linear como ponto de partida para tratar o caso semilinear.

Isto posto, pelos **Lemas 1.1** e **1.2**, existe, para cada $r > 0$, uma única função $u_r \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u_r = f(x) \text{ em } B_r \\ \quad u_r = 0 \text{ sobre } \partial B_r. \end{cases} \tag{Problema r}$$

Observação 1.2. Se $0 < r < s$, então

$$u_r(x) \leq u_s(x), \ \forall x \in B_r.$$

De fato, dados $s > r > 0$, temos, pelo **Problema** s,

$$\begin{cases} -\Delta u_s = f(x) \text{ em } B_r \subset B_s \\ \quad u_s > 0 \text{ sobre } \partial B_r. \end{cases} \tag{1.12}$$

Assim,

$$\begin{cases} -\Delta(u_s - u_r) = 0 \text{ em } B_r \\ \quad u_s - u_r \geq 0 \text{ sobre } \partial B_r. \end{cases}$$

Pelo **Princípio do Máximo Fraco**, temos

$$u_r(x) \leq u_s(x), \ \forall x \in B_r,$$

o que prova a asserção.

Observação 1.3. Observamos que u_r converge para uma função u_∞, isto é,

$$u_\infty = \lim_{r\to\infty} u_r.$$

Além disso, podemos escrever

$$u_\infty(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x-y|)f(y)\ \mathrm{d}y,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De fato, considere, para cada $r > 0$, a **Função de Green** $G_r \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associada ao problema de Dirichlet para a Equação de Poisson em B_r (vide **[10, p. 19]**) dada por,

$$G_r(x,y) = \begin{cases} \Phi(|x-y|) - \Phi\left(\left|\dfrac{|y|}{r}x - \dfrac{r}{|y|}y\right|\right), & \text{se } y \neq 0 \\ \Phi(|x|) - \Phi(r), & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

onde

$$\Phi(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x|^{n-2}},\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Fixado $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, temos (aqui é importante que $n \geq 3$. Observe que para $n = 2$ não funciona)

(i) Se $y \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} G_r(x,y) &= \lim_{r\to\infty}\left[\Phi(|x-y|) - \Phi\left(\left|\frac{|y|}{r}x - \frac{r}{|y|}y\right|\right)\right] \\ &= \Phi(|x-y|) - \lim_{r\to\infty}\Phi\left(\left|\frac{|y|}{r}x - \frac{r}{|y|}y\right|\right) \\ &= \Phi(|x-y|). \end{aligned} \tag{1.13}$$

(ii) Se $y = 0$, então

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} G_r(x,0) &= \lim_{r\to\infty}(\Phi(|x|) - \Phi(r)) \\ &= \Phi(|x|) - \lim_{r\to\infty}\Phi(r) \\ &= \Phi(|x|). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Para o **Problema** r (vide **Apêndice**),

$$u_r(x) = \int\limits_{B_r} G_r(x,y)f(y)\ \mathrm{d}y,\ \forall x \in B_r.$$

Pela **Observação 1.2**, podemos considerar a função $u_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por [1]

$$u_\infty(x) = \lim_{r\to\infty} u_r(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.15}$$

[1] eventualmente, podemos ter $u_\infty(x) = \infty$, para algum $x \in \mathbb{R}^n$ (Veja a **Observação 1.4**)

Por outro lado, temos, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$G_r(x,y) \leq \Phi(|x-y|),\ \forall r > 0. \tag{1.16}$$

Pelo **Teorema da Convergência Dominada**, segue de (1.13), de (1.14), de (1.15) e de (1.16)

$$u_\infty(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x-y|)f(y)\ \mathrm{d}y,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ao longo deste trabalho, usaremos u_∞ para denotar a integral obtida anteriormente denominada *Potencial Newtoniano*. Agora, definiremos uma propriedade que será usual no decorrer da seção.

Definição 1.2 (Propriedade (H))**.** Dizemos que f satisfaz a *propriedade* (H) se existir uma função limitada $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^2, tal que

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{H}$$

Observe que U pode ser escolhida positiva. De fato, como U é limitada, existe $c > 0$ tal que

$$|U(x)| < c,\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.17}$$

Assim, podemos considerar a função $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$V(x) = U(x) + c,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Aplicando o laplaciano em ambos os membros da última igualdade, temos

$$-\Delta V = -\Delta(U+c) = -\Delta U = f.$$

Além disso, usando (1.17), temos

$$\begin{aligned} V(x) &= U(x) + c \\ &> U(x) + |U(x)| \\ &\geq U(x) - U(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ao longo do trabalho, usaremos U para denotar a solução da Equação de Poisson da definição anterior.

Observação 1.4. [2]Queremos mostrar que a condição

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}}\, \mathrm{d}x < \infty$$

é válida se, e somente se,

$$u_\infty(x) < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De fato, supondo a primeira condição, denote para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{2|y-x|\leq|y|} \frac{f(y)}{n(n-2)\omega_n|x-y|^{n-2}}\, \mathrm{d}y \\ J(x) &= \int_{2|y-x|>|y|} \frac{f(y)}{n(n-2)\omega_n|x-y|^{n-2}}\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Note primeiramente que, se $2|y-x| \leq |x|$, então

$$\begin{aligned} |y-x| &= 2|y-x| - |y-x| \\ &\leq |x| - |y-x| \\ &= |(x-y)+y| - |y-x| \\ &\leq |x-y| + |y| - |y-x| \\ &= |y|. \end{aligned}$$

Além disso, via continuidade, podemos dizer que f é limitada em $\partial B_{|x|}$. Assim,

$$\begin{aligned} I(x) &\leq \int_{|y-x|\leq|x|} \frac{f(y)}{n(n-2)\omega_n|x-y|^{n-2}}\, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{|x|} \frac{1}{n(n-2)\omega_n t^{n-2}} \int_{|y-x|=t} f(y)\, \mathrm{d}\sigma_y\, \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{n(n-2)\omega_n} \int_0^{|x|} t^{2-n} \cdot n\omega_n t^{n-1}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{n-2}|x| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

[2]Note que este enunciado pode ser substituido por

$$u_\infty(0) < \infty \Leftrightarrow u_\infty(x) < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Por hipótese,

$$\begin{aligned}
J(x) &= \int\limits_{2|y-x|>|y|} \frac{f(y)}{n(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y \\
&< \int\limits_{2|y-x|>|y|} \frac{f(y)}{n(n-2)\omega_n (2^{-1}|y|)^{n-2}} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{2^{n-2}}{n(n-2)\omega_n} \int\limits_{2|y-x|>|y|} \frac{f(y)}{|y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y \\
&\leq \frac{2^{n-2}}{n(n-2)\omega_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$u_\infty(x) = I(x) + J(x) < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Nosso objetivo agora é demonstrar que a propriedade (H) garante limitação do Potencial Newtoniano u_∞. Esse resultado é de grande importância prática, pois garante estabilidade e previsibilidade na modelagem de fenômenos físicos descritos por Equações de Poisson, como distribuição de potencial elétrico, fluxo de calor estacionário ou concentração química **[9, p. 21]**.

Observação 1.5. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$u_\infty(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

De fato, considere, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int\limits_{B_1(x)} |x-y|^{2-n} f(y) \, \mathrm{d}y, \\
J(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(x)} |x-y|^{2-n} f(y) \, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Como $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$|I(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{B_1(x)} |x-y|^{2-n} \, \mathrm{d}y = n\omega_n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$
$$|J(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(x)} |f(y)| \, \mathrm{d}y \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim,

$$|u_\infty(x)| \leq n\omega_n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja,

$$u_\infty(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

que equivale a f satisfazer a propriedade (H).

Observação 1.6. Vamos construir um exemplo de uma função f de classe $C^{0,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$ que satisfaz

$$u_\infty(x) < \infty, \; \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

mas que

$$u_\infty \notin L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Defina a sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$, da seguinte forma: escolha um vetor unitário ν e considere, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$x_k = k^2 \nu.$$

Seja f uma função de classe $C^{0,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$ que satisfaz

(i) $f(x) = k$, se $|x - x_k| \leq 1$;

(ii) $0 \leq f(x) \leq k$, se $|x - x_k| \leq 2$,

para cada $k \in \mathbb{N}$, e

$$f(x) = 0, \; \forall x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} B_2(x_k).$$

(i) Veja que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} f(x) \, \mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_2(x_k)} |x|^{2-n} \, \mathrm{d}x.$$

Se $|x - x_k| \leq 2$, então

$$|x| \geq |x_k| - |x - x_k| \geq k^2 - 2.$$

Assim,

$$\int\limits_{B_2(x_k)} |x|^{2-n} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{(k^2-2)^{n-2}} |B_2(x_k)| = \frac{2^n \omega_n(n)}{(k^2-n)^{n-2}}.$$

Daí,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} f(x) \, \mathrm{d}x \leq 2^n \omega_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 - n)^{n-2}} < \infty.$$

Ou seja, $u_\infty(0) < \infty$ e portanto,

$$u_\infty(x) < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Por outro lado,

$$\begin{aligned} u_\infty(x_k) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y - x_k|^{2-n} f(y) \, \mathrm{d}y \\ &\geq \int\limits_{B_1(x_k)} |y - x_k|^{2-n} f(y) \, \mathrm{d}y \\ &= k \int\limits_{B_1(x_k)} |y - x_k|^{2-n} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{n\omega_n k}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, passando ao limite quando $k \to \infty$, concluímos que

$$u_\infty(x_k) \to \infty$$

e, portanto,

$$u_\infty \notin L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Podemos caracterizar a propriedade (H) através do seguinte lema.

Lema 1.3. Se f satisfaz a propriedade (H), então

$$u_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Reciprocamente, se $u_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então f satisfaz a propriedade (H).

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que

$$U(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim,

$$\begin{cases} -\Delta(U - u_r) = 0 \text{ em } B_r \\ \qquad U - u_r = U \geq 0 \text{ sobre } \partial B_r. \end{cases}$$

Pelo **Princípio do Máximo Fraco**, temos, para cada $r > 0$,

$$u_r(x) \leq U(x),$$

para todo $x \in B_r$. Passando ao limite quando $r \to \infty$,

$$u_\infty(x) \leq U(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.18}$$

Portanto,

$$u_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Reciprocamente, podemos afirmar diretamente do **Corolário A.1** que

$$-\Delta u_\infty = f \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Como $u_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, concluímos que f cumpre a propriedade (H). □

Decorre de (1.18) o seguinte resultado.

Corolário 1.1. Se a propriedade (H) vale, então u_∞ é a solução positiva minimal de (H), isto é,

$$u_\infty(x) \leq U(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

para qualquer função positiva limitada $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que cumpre

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

A seguir, demostraremos que a função u_∞ tende a zero no infinito.

Corolário 1.2. Se a propriedade (H) vale, então

$$\liminf_{|x| \to \infty} u_\infty(x) = 0.$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que

$$\liminf_{|x| \to \infty} u_\infty(x) \neq 0.$$

Como u_∞ é não-negativa, podemos dizer pela expressão anterior que existe $c > 0$ tal que

$$u_\infty(x) \geq c, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, a função $U = u_\infty - c$ é limitada (devido ao **Corolário 1.1**), não negativa e satisfaz

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Novamente, pelo **Corolário 1.1**,

$$u_\infty(x) \leq U(x) = u_\infty(x) - c, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

o que é um absurdo. Portanto,

$$\liminf_{|x| \to \infty} u_\infty(x) = 0.$$

□

Na verdade, qualquer solução limitada U da equação em (H) tal que

$$\liminf_{|x| \to \infty} U(x) = 0.$$

coincide com u_∞. Isso segue do fato de que a diferença de quaisquer duas soluções limitadas da equação em (H) ser uma função harmônica limitada e, portanto, constante pelo **Teorema de Liouville**. De fato, seja c a constante que satisfaz

$$u_\infty(x) + c = U(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo **Corolário 1.1**,

$$c \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} c &= \liminf_{|x| \to \infty} u_\infty(x) + \liminf_{|x| \to \infty} c \\ &\leq \liminf_{|x| \to \infty} (u_\infty(x) + c) \\ &= \liminf_{|x| \to \infty} U(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$c = 0.$$

Logo,

$$u_\infty(x) = U(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Uma forma mais forte de expressar que u_∞ tende a zero no infinito é a seguinte:

Lema 1.4. Suponha que

$$u_\infty(x) < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Então,

$$\lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u_\infty \, \mathrm{d}\sigma_x = 0.$$

Aqui, u_∞ não necessariamente cumpre a propriedade (H).

Demonstração. Para cada $r > 0$, temos por **Fubini**

$$\begin{aligned}
\fint_{S_r} u_\infty \, \mathrm{d}\sigma_y &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{n(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\sigma_y \\
&= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S_r} \frac{f(x)}{n(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}} \, \mathrm{d}\sigma_y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n^2(n-2)\omega_n^2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{r^{n-1}} \int_{S_r} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}} \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Considere, para cada $r > 0$, a função $I \colon \mathbb{R}^n \backslash S_r \to \mathbb{R}$ definida por (veja as propriedades no **Apêndice B**)

$$I(x) = \int_{S_r} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^{n-2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash S_r.$$

Pelo **Teorema de Fubini**,

$$\begin{aligned}
\fint_{S_r} u_\infty \, \mathrm{d}\sigma_y &= \frac{1}{n^2(n-2)\omega_n^2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{r^{n-1}} \int_{S_r} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n^2(n-2)\omega_n^2} \left(\int_{|x|<r} \frac{f(x)}{r^{n-1}} I(0) \, \mathrm{d}x + \int_{|x|>r} \frac{f(x)}{r^{n-1}} n\omega_n r \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{n\omega_n r}{n^2(n-2)\omega_n^2 r^{n-1}} \int_{|x|<r} f(x) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{|x|>r} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n(n-2)\omega_n r^{n-2}} \int_{|x|<r} f(x) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{|x|>r} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}} \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Note que

$$\left| \int_{|x|>r} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_{|x|>r} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}} \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Assim,

$$\lim_{r\uparrow\infty} \int_{|x|>r} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}} \, \mathrm{d}x = 0. \tag{1.19}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe por (1.19) $r_1 > 0$ tal que

$$\int\limits_{|x|>r_1} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}}\, \mathrm{d}x < \frac{n(n-2)\omega_n \varepsilon}{2}.$$

Como $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{1}{r^{n-2}} = 0$, existe também $r_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{r^{n-2}} \int\limits_{|x|<r_1} f(x)\, \mathrm{d}x < \frac{n(n-2)\omega_n \varepsilon}{2},\ \forall r \geq r_2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{c_n}{r^{n-2}} \int\limits_{|x|<r} f(x)\, \mathrm{d}x &= \frac{c_n}{r^{n-2}} \left(\int\limits_{|x|<r_1} f(x)\, \mathrm{d}x + \int\limits_{r_1<|x|<r} f(x)\, \mathrm{d}x \right) \\
&= c_n \left(\frac{1}{r^{n-2}} \int\limits_{|x|<r_1} f(x)\, \mathrm{d}x \right) + c_n \int\limits_{r_1<|x|<r} \frac{f(x)}{r^{n-2}}\, \mathrm{d}x \\
&\leq c_n \left(\frac{1}{r^{n-2}} \int\limits_{|x|<r_1} f(x)\, \mathrm{d}x \right) + c_n \int\limits_{r_1<|x|<r} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}}\, \mathrm{d}x \\
&< c_n \cdot \frac{n(n-2)\omega_n \varepsilon}{2} + c_n \cdot \frac{n(n-2)\omega_n \varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $r > r_0 = \max\{r_1, r_2\}$, onde

$$c_n = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}.$$

Portanto,

$$\lim_{r\to\infty} \fint\limits_{S_r} u_\infty\, \mathrm{d}\sigma_x = 0.$$

$\square$

A seguir, mostraremos que quaisquer soluções da **Equação de Poisson** cuja média esférica se aproxima cada vez mais de zero para um raio suficientemente grande coincide com a solução minimal.

Lema 1.5. Se U da definição da propriedade (H) cumpre

$$\fint_{S_r} U \, \mathrm{d}\sigma_x \to 0 \text{ quando } r \to \infty,$$

então U coincide com u_∞.

Demonstração. Basta usar o **Teorema de Liouville** para demonstrar o resultado. De fato, note que

$$\begin{aligned} \Delta(U - u_\infty) &= -\Delta U - (-\Delta u_\infty) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, $U - u_\infty$ é harmônica. Pelo **Teorema de Liouville**, conclui-se que $U - u_\infty$ é constante, isto é, para algum $c \in \mathbb{R}$,

$$U - u_\infty = c \text{ em } \mathbb{R}^n$$

Por hipótese,

$$\begin{aligned} c &= \fint_{S_r} c \, \mathrm{d}\sigma_x \\ &= \fint_{S_r} U - u_\infty \, \mathrm{d}\sigma_x \\ &= \fint_{S_r} U \, \mathrm{d}\sigma_x - \fint_{S_r} u_\infty \, \mathrm{d}\sigma_x, \end{aligned}$$

para todo $r > 0$. Pelo **lema anterior**,

$$\begin{aligned} c &= \lim_{r\to\infty} \left(\fint_{S_r} U \, \mathrm{d}\sigma_x - \fint_{S_r} u_\infty \, \mathrm{d}\sigma_x \right) \\ &= \lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} U \, \mathrm{d}\sigma_x - \lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u_\infty \, \mathrm{d}\sigma_x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$U = u_\infty.$$

$\square$

Por fim, provaremos que quaisquer subsoluções da **Equação de Poisson** cuja média esférica se aproxima de zero para um raio suficientemente grande está abaixo da solução minimal.

Lema 1.6. Suponha que a propriedade (H) seja válida e considere uma função positiva limitada $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 que satisfaz $-\Delta v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$-\Delta v(x) \leq f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\fint_{S_r} v \, \mathrm{d}x \to 0,\ \text{quando } r \to \infty,$$

então

$$v(x) \leq u_\infty(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = -\Delta(u_\infty - v)(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Por hipótese e pelo **Lema 1.4**, temos

$$\fint_{S_r} (u_\infty - v) \, \mathrm{d}\sigma_x = \fint_{S_r} u_\infty \, \mathrm{d}\sigma_x - \fint_{S_r} v \, \mathrm{d}\sigma_x \to 0,\ \text{quando } r \to \infty.$$

Pelo **Lema 1.5**,

$$(u_\infty - v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto,

$$v(x) \leq u_\infty(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

□

O potencial newtoniano é a ferramenta fundamental para inverter o Laplaciano na resolução da equação de Poisson; sua representação por convolução com um núcleo explícito facilita tanto construções analíticas quanto estimativas qualitativas e aplicações físicas em eletrostática e gravitação.

Capítulo 2

Equação sublinear no Espaço Euclidiano

Neste capítulo, analisaremos em profundidade a relação entre a propriedade (H) e a existência de soluções positivas e limitadas para uma classe de equações elípticas semilineares definidas em todo o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Mais precisamente, estudaremos a equivalência entre essa propriedade e a existência de uma função $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ positiva e uniformemente limitada, que satisfaça o problema elíptico não linear

$$-\Delta u = f(x)\, u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{BK}$$

Nosso objetivo será mostrar que a validade da propriedade (H) — cuja formulação será discutida e motivada ao longo do capítulo — é equivalente à possibilidade de resolver o problema acima de maneira global, obtendo uma solução que não apenas exista, mas que também apresente regularidade suficiente e comportamento controlado no infinito. Para isso, exploraremos ferramentas clássicas da teoria elíptica, como estimativas de Schauder, princípios do máximo, métodos de sub e supersoluções e argumentos de compacidade.

A análise dessa equivalência não apenas esclarece o papel estrutural desempenhado pela propriedade (H), mas também fornece um critério prático para determinar quando o problema admite soluções positivas e limitadas. Além disso, a presença do termo não linear u^γ, com $0 < \gamma < 1$, introduz um regime sublinear, que exige técnicas específicas e conduz a fenômenos qualitativos distintos daqueles observados em equações superlineares.

No decorrer do capítulo, iremos considerar $u_r \colon \overline{B_r} \to \mathbb{R}$ a função que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_r = f(x) u_r^\gamma \text{ em } B_r \\ \quad u_r = 0 \text{ sobre } \partial B_r, \end{cases}$$

para cada $r > 0$, cuja existência é garantida pelos **Lemas 1.1** e **1.2**.

Mostraremos que a família de tais funções é monótona com respeito ao raio. De fato, dados $r < s$, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_s = f(x) u_s^\gamma \text{ em } B_r \\ \quad u_s > 0 \text{ sobre } \partial B_r. \end{cases}$$

Logo, u_s é supersolução do (Problema r). Vamos denotá-lo por $\overline{u} = u_s$. Pelo **Lema C.1**, existe $\underline{u} \colon \overline{B_r} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in B_r.$$

Pelos **Lemas 1.1** e **1.2**,

$$\underline{u}(x) \leq u_r(x) \leq \overline{u}(x) = u_s(x), \ \forall x \in B_r.$$

Portanto,

$$0 < r < s \Rightarrow u_r(x) \leq u_s(x), \ \forall x \in B_r. \tag{2.1}$$

Na teoria das EDP, as *sub* e *supersolução* são ferramentas cruciais para estudarmos a existência, unicidade e comportamento de soluções. Veremos posteriormente que as sub e supersoluções permitem delimitar a solução de uma EDP, mesmo quando não conseguimos encontrá-la explicitamente, o que nos remete a defini-los como se segue:

Definição 2.1. Dizemos que $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ é uma *supersolução* do problema (BK) se

$$-\Delta u \geq f(x) u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Da mesma forma, dizemos que $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ é uma *subsolução* do problema (BK) se

$$-\Delta u \leq f(x) u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Tais definições serão importantes para podermos aplicar, no decorrer da demonstração seguinte, resultados clássicos da Análise Matemática, tais como **Teorema da Convergência Dominada** e alguns resultados envolvendo existência de limite.

2.1 Existência e unicidade

Nosso principal resultado de existência é

Teorema 2.1 (Existência de solução)**.** Seja uma função não negativa $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Então, existe uma função limitada $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$-\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n \tag{BK}$$

se, e somente se, f tem a propriedade (H).

Demonstração. Vamos supor que f tem a propriedade (H). Suponha, sem perda de generalidade, que U seja positiva, como no capítulo anterior.

Veja que um múltiplo de U é supersolução de (BK). De fato, como U é limitada, podemos considerar $M > 0$ de modo que

$$M^{1-\gamma} \geq \|U\|_\infty^\gamma.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\Delta\left(MU\right)(x) &= M(-\Delta U(x)) \\ &= Mf(x) \\ &= M^{1-\gamma} \cdot M^\gamma f(x) \\ &\geq \|U\|_\infty^\gamma M^\gamma f(x) \\ &\geq U(x)^\gamma M^\gamma f(x) \\ &= f(x)(MU(x))^\gamma, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, MU é uma supersolução da equação (BK). Pelo **Lema C.1**, existe uma subsolução do (Problema r) , para cada $r > 0$, tal que

$$\underline{u}_r(x) \leq MU(x), \ \forall x \in B_r.$$

Pelos **Lemas 1.1** e **1.2**, existe uma solução u_r de (BK) tal que

$$\underline{u}_r(x) \leq u_r(x) \leq MU(x), \ \forall x \in B_r, \ \forall r > 0. \tag{2.2}$$

Por (2.1) e (2.2), podemos deduzir que (u_r) converge pontualmente. Assim, podemos considerar a função $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \lim_{r\to\infty} u_r(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Vamos mostrar que u é a solução desejada. De fato, pelo **Teorema da Convergência Monótona**,

$$u_r \to u \text{ em } L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\mathbb{R}^n). \tag{2.4}$$

Via **Imersões de Sobolev** e, em seguida, pelo **Lema 9.17** do **Gilbarg e Trudinger [10]**, temos para cada domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^n$, $(\Omega \subset B_r \subset B_s)$

$$\begin{aligned}
\|u_r - u_s\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leq C\|u_r - u_s\|_{W^{2,\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)} \\
&\leq C\|\Delta(u_r - u_s)\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)} \\
&\leq C\|f(u_r^\gamma - u_s^\gamma)\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}} \\
&= C\left(\int_\Omega |f(x)(u_r^\gamma - u_s^\gamma)|^{\frac{n}{1-\alpha}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1-\alpha}{n}} \\
&\leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\|u_r^\gamma - u_s^\gamma\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

para todo $r, s \geq \operatorname{diam}(\Omega)$. Por (2.4) e (2.5),

$$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Pelo **Corolário 6.9** de **[10, p. 101]**,

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Portanto,

$$-\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e a condição suficiente está provada.

Reciprocamente, suponha que exista uma solução u para a equação (BK). Assim, podemos considerar $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$v = \frac{1}{1-\gamma}u^{1-\gamma}.$$

Vejamos que v é uma supersolução de (H). De fato, aplicando o laplaciano em v, temos

$$\begin{aligned}-\Delta v &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^{-\gamma}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left((-\gamma)\,u^{-\gamma-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u^{-\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)\\ &= \gamma u^{-\gamma-1}|\boldsymbol{\nabla} u|^2 - u^{-\gamma}\Delta u\\ &= \gamma u^{-\gamma-1}|\boldsymbol{\nabla} u|^2 + f(x)\\ &\geq f(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Considere, para cada $r > 0$, a função $v_r \colon B_r \to \mathbb{R}$ (positiva) que satisfaz

$$\begin{cases}-\Delta v_r = f \text{ em } B_r\\ \quad v_r = 0 \text{ sobre } \partial B_r.\end{cases}$$

Agora, vamos mostrar que

$$r < s \Rightarrow v_r \leq v_s.$$

De fato, dados $0 < r < s$, temos

$$\begin{aligned}-\Delta(v_s - v_r)(x) &= -\Delta v_s(x) - (-\Delta v_r(x))\\ &= f(x) - f(x)\\ &= 0,\end{aligned}$$

para todo $x \in B_r$, e

$$\begin{aligned}-\Delta(v - v_s)(x) &= -\Delta v(x) - (-\Delta v_s(x))\\ &\geq f(x) - f(x)\\ &= 0,\end{aligned}$$

para todo $x \in B_s$. Além disso,

$$(v_s - v_r)(x) = v_s(x) - v_r(x) = v_s(x) > 0, \ \forall x \in \partial B_r$$

e

$$(v - v_s)(x) = v(x) - v_s(x) = v(x) > 0, \ \forall x \in \partial B_s.$$

Pelo **Princípio do Máximo Fraco** (veja **Apêndice A**),

$$v(x) > v_s(x),$$

para todo $x \in B_s$, e

$$v_s(x) > v_r(x),$$

para todo $x \in B_r$. Logo, para todo $r < s$,

$$0 < v_r(x) < v_s(x) \leq v(x), \ \forall x \in B_r. \tag{2.6}$$

Usando o argumento anterior, prova-se que a sequência v_r cresce, quando $r \to \infty$, para U. □

Observação 2.1. A solução u de (BK), obtida na demonstração do **Teorema 2.1**, é a solução minimal de (BK). De fato, se V é outra solução de (BK), então, pelos **Lemas 1.1** e **1.2**,

$$u_r(x) \leq V(x), \ \forall x \in B_r,$$

para cada $r > 0$. Passando ao limite quando $r \to \infty$, conclui-se de (2.3)

$$u(x) \leq V(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 2.1. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^p}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se $p > 2$, então

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y &= \int\limits_{|y|\leq|x-y|} \frac{\mathrm{d}y}{(1+|y|^p)|x-y|^{n-2}} + \int\limits_{|y|\geq|x-y|} \frac{\mathrm{d}y}{(1+|y|^p)|x-y|^{n-2}} \\
&\leq \int\limits_{|y|\leq|x-y|} \frac{\mathrm{d}y}{(1+|y|^p)|y|^{n-2}} + \int\limits_{|y|\geq|x-y|} \frac{\mathrm{d}y}{(1+|x-y|^p)|x-y|^{n-2}} \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}y}{(1+|y|^p)|y|^{n-2}} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}y}{(1+|x-y|^p)|x-y|^{n-2}} \\
&= \int_0^\infty \frac{nr^{n-1}\omega_n}{(1+r^p)r^{n-2}} \, \mathrm{d}r + \int_0^\infty \frac{nr^{n-1}\omega_n}{(1+r^p)r^{n-2}} \, \mathrm{d}r \\
&= 2\left(\int_0^1 \frac{nr^{n-1}\omega_n}{(1+r^p)r^{n-2}} \, \mathrm{d}r + \int_1^\infty \frac{nr^{n-1}\omega_n}{(1+r^p)r^{n-2}} \, \mathrm{d}r\right) \\
&\leq 2\left(\int_0^1 \frac{nr^{n-1}\omega_n}{r^{n-2}} \, \mathrm{d}r + \int_1^\infty \frac{nr^{n-1}\omega_n}{r^p r^{n-2}} \, \mathrm{d}r\right) \\
&= 2\left(\int_0^1 nr\omega_n \, \mathrm{d}r + \int_1^\infty nr^{1-p}\omega_n \, \mathrm{d}r\right) \\
&= 2n\omega_n + 2n\omega_n \left(\frac{1}{2-p}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo **Lema 1.3**, existe uma função limitada $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n$$

Por outro lado, se $p \leq 2$, então

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}}\, \mathrm{d}x &= \int\limits_{B_1} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^p)|x|^{n-2}} + \int\limits_{|x|\geq 1} \frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|^p)|x|^{n-2}} \\
&\geq \int\limits_{B_1} \frac{\mathrm{d}x}{2} + \int\limits_{|x|\geq 1} \frac{\mathrm{d}x}{(|x|^p+|x|^p)|x|^{n-2}} \\
&= \int\limits_{B_1} \frac{\mathrm{d}x}{2} + \int\limits_{|x|\geq 1} \frac{\mathrm{d}x}{2|x|^p|x|^{n-2}} \\
&= \frac{n\omega_n}{2} + \frac{n\omega_n}{2} \int_1^\infty \frac{nr^{n-1}\omega_n \mathrm{d}r}{2r^p \cdot r^{n-2}} \\
&= n\omega_n + \frac{n\omega_n}{2} \int_1^\infty r^{1-p}\, \mathrm{d}r \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo **Lema 1.3**, não existe uma função limitada $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaça

$$\int\limits_{|x|\geq 1} \frac{f(x)}{|x|^{n-2}}\, \mathrm{d}x = \infty. \tag{2.7}$$

Vamos mostrar que, neste caso, não existe uma função não nula $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n \\ \quad u \geq 0. \end{cases}$$

De fato, caso contrário, teríamos

$$u \in W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\ \forall q < \infty.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que u seja positiva. Novamente, considere a função

$v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$v = \frac{1}{1-\gamma}u^{1-\gamma} \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e, para cada $r > 0$, a função $v_r\colon B_r \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v_r = f \text{ em } B_r \\ \quad v_r = 0 \text{ sobre } \partial B_r. \end{cases}$$

É sabido que, para cada $r > 0$,

$$-\Delta v(x) \geq f(x),\ \forall x \in B_r$$

e, para cada $r > 0$,

$$v_r(x) \leq v(x),\ \forall x \in B_r,$$

Seja G_r a **função de Green** em B_r, para cada $r > 0$. No capítulo anterior, vimos que

$$G_r(0,y)\chi_{B_r}(y) \leq \Phi(|y|),\ \forall r > 0 \tag{2.8}$$

e que

$$\lim_{r\to\infty} G_r(0,y)\chi_{B_r}(y) = \Phi(|y|), \tag{2.9}$$

para cada $y \in \mathbb{R}^n$. Pelo **Teorema da Convergência Dominada**, segue de (2.7), de (2.8) e de(2.9)

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} v_r(0) &= \lim_{r\to\infty} \int_{B_r} G_r(0,y)f(y)\ \mathrm{d}y \\ &= \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} G_r(0,y)\chi_{B_r}(y)f(y)\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|y|^{n-2}}\ \mathrm{d}y \\ &= \infty, \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{r\to\infty} v_r(x) = \infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

o que é uma contradição. Então, não existe uma função não nula $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n \\ \quad u \geq 0, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observação 2.2. Suponha que f satisfaz (H). Nosso intuito é mostrar que, dada uma solução u de (BK) de classe $C^{0,\alpha}$, temos

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

De fato, seja $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada que satisfaz

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{H}$$

Assim, existe $M > 0$ tal que

$$M^{1-\gamma} \geq \|U\|_\infty^\gamma.$$

Seja $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução de (BK). Como na demonstração do **Teorema 2.1**,

$$u(x) \leq MU(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim,

$$0 \leq \fint_{S_r} u \, \mathrm{d}\sigma_x \leq \fint_{S_r} MU \, \mathrm{d}\sigma_x, \ \forall r > 0.$$

Passando ao limite de $r \to \infty$, segue do **Lema 1.4**

$$\lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u \, \mathrm{d}\sigma_x = 0. \tag{2.10}$$

Suponha, por absurdo, que

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) \neq 0.$$

Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $r > 0$,

$$u(x) \geq \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash B_r.$$

Daí,

$$\fint_{S_r} u \, \mathrm{d}\sigma_x \geq \fint_{S_r} \varepsilon \, \mathrm{d}\sigma_x = \varepsilon, \ \forall r > 0.$$

Passando ao limite quando $r \to \infty$, segue de (2.10)

$$0 = \lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u \, \mathrm{d}\sigma_x \geq \varepsilon,$$

o que é um absurdo. Logo,

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Observação 2.3. Dadas funções positivas f_1 e f_2 de classe $C^{0,\alpha}$ que satisfazem a propriedade (H), queremos mostrar que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f_1(x) \leq f_2(x) \Rightarrow u_1(x) \leq u_2(x),$$

onde u_1 e u_2 são soluções minimais das equações

$$\begin{cases} -\Delta u = f_1(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n \\ -\Delta u = f_2(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

respectivamente. Suponha que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f_1(x) \leq f_2(x).$$

Então,

$$-\Delta u_2 = f_2(x)u_2^\gamma \geq f_1(x)u_2^\gamma \text{ em } B_r$$

e

$$u_2 \geq 0 \text{ sobre } \partial B_r.$$

Pelo **Lema C.1**, existe $\underline{u}\colon \overline{B_r} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f_1(x)\underline{u}^\gamma \text{ em } B_r \\ \quad \underline{u} \leq 0 \text{ sobre } \partial B_r \end{cases}$$

e

$$\underline{u}(x) \leq u_2(x), \ \forall x \in B_r.$$

Pelos **Lemas 1.1** e **1.2**, existe um único $u_{1,r} \in C^{2,\alpha}(\overline{B_r})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u_{1,r} = f_1 \text{ em } B_r \\ \quad u_{1,r} = 0 \text{ sobre } \partial B_r \end{cases}$$

e

$$\underline{u}(x) \leq u_{1,r}(x) \leq u_2(x), \ \forall x \in B_r.$$

Passando ao limite quando $r \to \infty$,

$$u_1(x) \leq u_2(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 2.4. Seja u uma solução positiva minimal de (BK) e uma função $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Mostraremos que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 U(x) \leq u(x) \leq C_2 U(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Sabemos que

$$U \leq \frac{1}{1-\gamma} u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e que, para algum $M > 0$,

$$u(x) \leq MU(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
C_1 U(x) &= (1-\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} \, U(x)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\
&\leq (1-\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot \left(\frac{1}{1-\gamma} u(x)^{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\
&= u(x) \\
&\leq MU(x) \\
&= C_2 U(x),
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, em que $C_1 = (1-\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ e $C_2 = M$.

Procuramos garantir não só a existência, mas também a unicidade entre soluções clássicas ou suficientemente regulares da equação

$$-\Delta u = f(x) u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n \tag{BK}$$

que sejam positivas e que satisfaçam condições de decaimento apropriadas no infinito. Neste sentido, nosso resultado de unicidade para a equação (BK) é

Teorema 2.2 (Unicidade de solução)**.** Se f tem a propriedade (H), então a solução u dada no **Teorema 2.1** é única, desde que

$$\liminf_{|x| \to \infty} u(x) = 0.$$

Antes de demonstrá-la, vamos observar o seguinte:

Observação 2.5. Suponha que f satisfaz a propriedade (H). Assim, existe uma função $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (positiva) limitada tal que

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Queremos mostrar que, dado $a > 0$, existe uma solução u de (BK) tal que

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) = a.$$

De fato, seja $\underline{u}$ a função identicamente igual a a. Assim,

$$-\Delta \underline{u}(x) = 0 \leq f(x)a^\gamma = f(x)\underline{u}(x)^\gamma, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $\underline{u}$ é subsolução de (BK). Como U é limitado, existe $M > 0$ tal que

$$M^{\frac{1}{\gamma}-1} - aM^{-1} \geq U(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $\overline{u}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\overline{u}(x) = MU(x) + a, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-\Delta \overline{u} &= (-\Delta U)M \\
&= f(x)M \\
&= f(x)\left(M\left(M^{\frac{1}{\gamma}-1} - aM^{-1}\right) + a\right)^\gamma \\
&\geq f(x)\left(MU + a\right)^\gamma \\
&= f(x)\overline{u}^\gamma,
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\overline{u}$ é supersolução de (BK). Além disso, note que

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pelos **Lemas 1.1** e **1.2**, existem $u_r \in C^{2,\alpha}(\overline{B_r})$, para cada $r > 0$, com

$$\begin{cases} -\Delta u_r = f(x)u_r^\gamma \text{ em } B_r \\ \quad u_r = a \text{ sobre } \partial B_r, \end{cases}$$

tal que

$$\underline{u}(x) \leq u_r(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Análogo ao que vimos no **Teorema 2.1**, podemos considerar a função $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \lim_{r\to\infty} u_r(x),\ \forall x \in B_r.$$

Passando ao limite quando $r \to \infty$,

$$a = \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) = MU(x) + a,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Suponha, por absurdo, que

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) \neq a.$$

Assim, existem $\varepsilon, r_0 > 0$ tais que

$$u(x) \geq a + \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{r_0}; \tag{2.11}$$

caso contrário, para todo $k \in \mathbb{N}$, existiria $x_k \in \mathbb{R}^n \backslash B_k$ tal que

$$u(x_k) < a + \frac{1}{k}.$$

Assim,

$$a \leq u(x_k) < a + \frac{1}{k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pelo **Teorema do Confronto**,

$$\lim_{n\to\infty} u(x_k) = a.$$

Por outro lado,

(i) $u(x) \geq a,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $|x_k| \to \infty$.

Logo,

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) = a,$$

o que é uma contradição. Por (2.11),

$$\fint_{S_r} u \ \mathrm{d}\sigma_x \geq \fint_{S_r} (a+\varepsilon) \ \mathrm{d}\sigma_x = a + \varepsilon,\ \forall r \geq r_0.$$

Passando ao limite quando $r \to \infty$, segue do **Lema 1.4**

$$a = \lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u \ \mathrm{d}\sigma_x \geq a + \varepsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto,

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) = a.$$

Observação 2.6. Queremos mostrar que, se $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ é uma função que satisfaz

$$-\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{BK}$$

então, dado $\tau > 0$, a função $v\colon \mathbb{R}^n \times (-\tau, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$v = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{u^\gamma}{(t+\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}},$$

satisfaz

$$f(x)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \Delta v^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{2.12}$$

De fato, dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $t \in (-\tau, \infty)$, temos

$$\begin{aligned}
f(x)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) &= f(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{u^\gamma}{(t+\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}\right)\\
&= -f(x)\left(\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \frac{u^\gamma}{(t+\tau)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)\\
&= \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}}{(t+\tau)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\left(-f(x)u^\gamma\right)\\
&= \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}}{(t+\tau)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\Delta u\\
&= \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}}{(t+\tau)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \frac{u}{(t+\tau)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{u}{(t+\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\\
&= \Delta\left(\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{u}{(t+\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\\
&= \Delta v^{\frac{1}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Para demonstrar o **Teorema 2.2**, relembremos primeiramente um fato bem conhecido sobre domínio limitado **[7]**.

Proposição 2.1. Sejam Ω um domínio limitado suave e $f \in L^\infty(\Omega)$ de modo que

$$f(x) \geq \delta > 0, \ \forall x \in \Omega.$$

Então, dado $v_0 \in L^\infty(\Omega)$ que satisfaz

$$v_0(x) \geq 0,\ \forall x \in \Omega,$$

existe uma única função $\hat{v}\colon \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\begin{cases} f\dfrac{\partial \hat{v}}{\partial t} - \Delta \hat{v}^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \\ \hat{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ \hat{v}(x,0) = v_0(x) \text{ em } x \in \Omega. \end{cases}$$

Mais ainda, se existir uma função $\tilde{v}\colon \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\begin{cases} f\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \Delta \tilde{v}^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \\ \tilde{v} \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ \tilde{v}(x,0) \geq v_0(x) \text{ em } x \in \Omega. \end{cases}$$

Então,

$$\tilde{v}(x,t) \geq \hat{v}(x,t),\ \forall (x,t) \in \Omega \times (0,\infty).$$

Demonstração do ***Teorema 2.2****.* Dividiremos a demonstração em 3 afirmações. A ideia é provar o **Teorema 2.2** supondo, sem perda de generalidade, que f é positivo. Mas antes, precisamos mostrar que de fato podemos supor, sem perda de generalidade, que f é positivo. Para isso, precisamos utilizar a seguinte afirmação:

Afirmação 2.1. Sejam $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções que satisfazem a propriedade (H) e que

$$f_1(x) \leq f_2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dada uma função positiva limitada $u_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$-\Delta u_1 = f_1(x) u_1^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

existe uma única função positiva limitada $u_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u_2 &= f_2(x) u_2^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n \\ \lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} & u_2 \, \mathrm{d}\sigma_x = 0 \end{aligned}$$

e

$$u_1(x) \leq u_2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $u_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função positiva limitada que satisfaz

$$-\Delta u_1 = f_1(x) u_1^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Por hipótese,

$$-\Delta u_1(x) = f_1(x) u_1(x)^\gamma \leq f_2(x) u_1(x)^\gamma, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Como u_1 é limitada, existe $M > 0$ tal que

$$-\Delta u_1(x) \leq M f_2(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo **Lema 1.6**,

$$u_1(x) \leq M \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f_2(y)}{n(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Considere $U_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$U_2(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f_2(y)}{n(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Escolha $M > 0$ de forma que

$$M^{1-\gamma} \geq \|U_2\|_\infty^\gamma.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-\Delta\left(M U_2\right) &= M(-\Delta U_2) \\
&= M f_2 \\
&= M^{1-\gamma} \cdot M^\gamma f_2 \\
&\geq \|U_2\|_\infty^\gamma \cdot M^\gamma f_1 \\
&\geq U_2^\gamma \cdot M^\gamma f_1 \\
&= f_1(x) M U_2^\gamma, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Pelos **Lemas 1.1** e **1.2**, existe $u_{2,r} \colon \overline{B_r} \to \mathbb{R}$, para cada $r > 0$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta u_{2,r} = f_2(x) u_{2,r}^\gamma \text{ em } B_r \\ \quad u_{2,r} = 0 \text{ sobre } \partial B_r \end{cases}$$

e

$$u_1(x) \leq u_{2,r}(x) \leq M U_2(x), \ \forall x \in B_r. \tag{2.13}$$

Por (2.1) e (2.13),

$$\lim_{r \to \infty} u_{2,r} \text{ existe.}$$

Assim, podemos considerar a função $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_2(x) = \lim_{r\to\infty} u_{2,r}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo **Teorema da Convergência Monótona**,

$$u_{2,k} \to u_2 \text{ em } L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\mathbb{R}^n). \tag{2.14}$$

Via **Imersões de Sobolev** e em seguida pelo **Lema 9.17** de **[10]**

$$\begin{aligned}
\|u_{2,k} - u_{2,m}\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} &\le C\|u_{2,k} - u_{2,m}\|_{W^{2,\frac{n}{1-\alpha}}} \\
&\le C\|\Delta(u_{2,k} - u_{2,m})\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)} \\
&\le C\big\|f(u_{2,k}^\gamma - u_{2,m}^\gamma)\big\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}} \\
&= C\left(\int_\Omega \left|f(x)\left(u_{2,k}^\gamma - u_{2,m}^\gamma\right)\right|^{\frac{n}{1-\alpha}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1-\alpha}{n}} \\
&\le C\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\big\|u_{2,k}^\gamma - u_{2,m}^\gamma\big\|_{L^{\frac{n}{1-\alpha}}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

para todo $k, m \ge \operatorname{diam}(\Omega)$. Por (2.14) e (2.15),

$$u_2 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Pelo **Corolário 6.9** em **[10, p. 101]**, temos

$$u_2 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Portanto,

$$-\Delta u_2 = f_2(x)u_2^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{2.16}$$

Por (2.13) e (2.16),

$$u_1(x) \le u_2(x) \le MU_2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.17}$$

Pelo **Lema 1.4** e por (2.16),

$$\lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u_2 \,\mathrm{d}\sigma_x \le M \lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} U_2 \,\mathrm{d}\sigma_x = 0,$$

o que conclui a afirmação.

Vamos mostrar agora que é suficiente provar o **Teorema 2.2** para o caso em que f é positivo.

Afirmação 2.2. Assuma que o **Teorema 2.2** foi provado para o caso

$$f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Então o **Teorema 2.2** vale para o caso geral

$$f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, com

$$h(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, podemos considerar para cada $\varepsilon > 0$ a função $f_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon h(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Precisamos mostrar que f_ε cumpre a propriedade (H), para cada $\varepsilon > 0$, para aplicarmos a **Afirmação 2.1**. Como $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{h(x)}{|x|^{n-2}} \,\mathrm{d}x &= \int\limits_{B_2} \frac{h(x)}{|x|^{n-2}} \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_2} \frac{h(x)}{|x|^{n-2}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^{n-2}} \int\limits_{B_2} h(x) \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_2} \frac{h(x)}{|x|^{n-2}} \,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2^{n-2}} \int\limits_{B_2} h(x) \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_2} \frac{h(x)}{2^{n-2}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^{n-2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x) \,\mathrm{d}x \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Pelo **Teorema 1.4**, conclui-se que h cumpre a propriedade (H), isto é existe uma função limitada $\varphi \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$-\Delta \varphi = h \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Como f também cumpre a propriedade (H), existe uma função limitada $U \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$-\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-\Delta(U + \varepsilon\varphi)(x) &= -\Delta U(x) + \varepsilon(-\Delta\varphi(x)) \\
&= f(x) + \varepsilon h(x) \\
&= f_\varepsilon(x),
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, f_ε cumpre a propriedade (H). Pela **Afirmação 2.1**, existe

$u_\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, para cada $\varepsilon > 0$, tal que

$$\begin{aligned} &-\Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon(x) u_\varepsilon^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n, \\ &\lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u_\varepsilon \, \mathrm{d}\sigma_x = 0 \end{aligned} \tag{BK$_\varepsilon$}$$

e existe $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} &-\Delta u = f(x) u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n, \\ &\lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u \, \mathrm{d}\sigma_x = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Observe que

$$f(x) < f_\varepsilon(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \varepsilon > 0. \tag{2.19}$$

Novamente, pela **Afirmação 2.1**, segue de (2.19)

$$u(x) \leq u_\varepsilon(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \varepsilon > 0. \tag{2.20}$$

Considere a função $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$-\Delta v = f \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e, para cada $r, \varepsilon > 0$, as funções $u_r, u_{\varepsilon,r}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\begin{cases} -\Delta u_r = f(x) u_r^\gamma \text{ em } B_r, \\ \quad u_r = 0 \text{ sobre } \partial B_r \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_{\varepsilon,r} = f_\varepsilon(x) u_{\varepsilon,r}^\gamma \text{ em } B_r, \\ \quad u_{\varepsilon,r} = 0 \text{ sobre } \partial B_r. \end{cases}$$

Via **Integração por Partes**, temos para cada $r, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{B_r} f_\varepsilon(x) u_{\varepsilon,r}^\gamma u_r \, \mathrm{d}x &= \int_{B_r} f(x) u_r^\gamma u_{\varepsilon,r} \, \mathrm{d}x + \left(-\int_{B_r} f(x) u_r^\gamma u_{\varepsilon,r} \, \mathrm{d}x + \int_{B_r} f_\varepsilon u_{\varepsilon,r}^\gamma u_r(x) \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \int_{B_r} f(x) u_r^\gamma u_{\varepsilon,r} \, \mathrm{d}x + \left(\int_{B_r} \Delta u_r u_{\varepsilon,r} - \int_{B_r} \Delta u_{\varepsilon,r} u_r \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \int_{B_r} f(x) u_r^\gamma u_{\varepsilon,r} \, \mathrm{d}x + \left(\int_{\partial B_r} \frac{\partial u_r}{\partial \eta_x} u_{\varepsilon,r} \, \mathrm{d}\sigma_x - \int_{\partial B_r} \frac{\partial u_{\varepsilon,r}}{\partial \eta_x} u_r \, \mathrm{d}\sigma_x \right) \\ &= \int_{B_r} f(x) u_r^\gamma u_{\varepsilon,r} \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Sejam $U, \varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções limitadas que satisfazem

$$-\Delta U = f$$

e

$$-\Delta \varphi = h,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\begin{aligned} -\Delta(U(x) + \varepsilon\varphi(x)) &= -\Delta U(x) + (-\Delta\varphi(x)) \\ &= f(x) + \varepsilon h(x) \\ &= f_\varepsilon(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como U e φ são limitados, existem $M, N > 0$ tais que

$$M^{1-\gamma} \geq \|U\|_\infty^\gamma$$

e

$$N^{1-\gamma} \geq \|U + \varphi\|_\infty^\gamma.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\Delta\left(MU\right) &= M(-\Delta U) \\ &= Mf(x) \\ &= M^{1-\gamma} \cdot M^\gamma f(x) \\ &\geq \|U\|_\infty^\gamma \cdot M^\gamma f(x) \\ &\geq U^\gamma \cdot M^\gamma f(x) \\ &= f(x)\left(MU\right)^\gamma, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

e, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} -\Delta\left(N(U + \varepsilon\varphi)\right)(x) &= N(-\Delta(U + \varepsilon\varphi)(x)) \\ &= Nf_\varepsilon(x) \\ &= N^{1-\gamma} \cdot N^\gamma f_\varepsilon(x) \\ &\geq \|U + \phi\|_\infty^\gamma \cdot N^\gamma f_\varepsilon(x) \\ &\geq ((U + \phi)(x))^\gamma \cdot N^\gamma f_\varepsilon(x) \\ &\geq ((U + \varepsilon\phi)(x))^\gamma \cdot N^\gamma f_\varepsilon(x) \\ &= f_\varepsilon(x)(N(U + \varepsilon\phi)(x))^\gamma, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Pelo **Lema C.1**, existem $\underline{u}_r, \underline{u}_{\varepsilon,r} \colon \overline{B_r} \to \mathbb{R}$ tais que, para cada $r > 0$,

$$\begin{cases} \underline{u}_r \leq f(x)\underline{u}_r^\gamma \text{ em } B_r \\ \underline{u}_r \leq 0 \text{ sobre } \partial B_r \end{cases}$$

e para cada $r, \varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \underline{u}_{\varepsilon,r} \leq f_\varepsilon(x)\underline{u}_{\varepsilon,r}^\gamma \text{ em } B_r \\ \underline{u}_{\varepsilon,r} \leq 0 \text{ sobre } \partial B_r. \end{cases}$$

Mais ainda para cada $r > 0$

$$\underline{u}_r(x) \leq MU(x),\ \forall x \in B_r$$

e para cada $r, \varepsilon > 0$

$$\underline{u}_{\varepsilon,r}(x) \leq N(U + \varepsilon\varphi)(x),\ \forall x \in B_r.$$

Pelos **Lemas 1.1** e **1.2**,

$$\underline{u}_r(x) \leq u_r(x) \leq MU(x),\ \forall x \in B_r,\ \forall r > 0 \tag{2.22}$$

e para cada $\varepsilon > 0$

$$\underline{u}_{\varepsilon,r}(x) \leq u_{\varepsilon,r}(x) \leq N(U + \varepsilon\varphi)(x),\ \forall x \in B_r,\ \forall r > 0. \tag{2.23}$$

Pela limitação garantida em (2.22) e (2.23) e pela monotonicidade garantida em (2.1), podemos afirmar que

$$\lim_{r\to\infty} u_r \text{ e } \lim_{r\to\infty} u_{\varepsilon,r} \text{ existem.}$$

Pela demonstração do **Teorema 2.1** e pela **Observação 2.1**, admitimos que u_r converge para a solução minimal de (BK), que denotaremos por $\underline{u}$. Combinando a demonstração do **Teorema 2.1**, que nos garante a convergência de $u_{\varepsilon,r}$ para a solução da primeira igualdade em (BK_ε), e o **Lema 1.2**, que nos garante unicidade de tal solução, temos

$$u_\varepsilon(x) = \lim_{r\to\infty} u_{\varepsilon,r}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Agora, defina

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} MU(x)\left(N(U(x) + \varphi(x))\right)^\gamma h(x)\, \mathrm{d}x.$$

Por (2.21), (2.22) e (2.23), temos para cada $r > 0$ e $0 < \varepsilon \leq 1$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B_r} f(x)u_{\varepsilon,r}^{\gamma}u_r^{\gamma}\left(u_{\varepsilon,r}^{1-\gamma} - u_r^{1-\gamma}\right)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{B_r}\left(f(x)u_{\varepsilon,r}u_r^{\gamma} - f(x)u_r u_{\varepsilon,r}^{\gamma}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{B_r} f(x)u_{\varepsilon,r}u_r^{\gamma}\,\mathrm{d}x - \int\limits_{B_r} f(x)u_r u_{\varepsilon,r}^{\gamma}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{B_r} f_{\varepsilon}(x)u_{\varepsilon,r}^{\gamma}u_r\,\mathrm{d}x - \int\limits_{B_r} f(x)u_r u_{\varepsilon,r}^{\gamma}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{B_r} (f_{\varepsilon}(x)u_{\varepsilon,r}^{\gamma}u_r - f(x)u_r u_{\varepsilon,r}^{\gamma})\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{B_r} u_r\left(f_{\varepsilon}(x)u_{\varepsilon,r}^{\gamma} - f(x)u_{\varepsilon,r}^{\gamma}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{B_r} u_r u_{\varepsilon,r}^{\gamma}(f_{\varepsilon}(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon\int\limits_{B_r} u_r u_{\varepsilon,r}^{\gamma}h(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon\int\limits_{B_r} MU(x)\left(N(U(x) + \varepsilon\varphi(x))\right)^{\gamma}h(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon\int\limits_{B_r} MU(x)\left(N(U(x) + \varphi(x))\right)^{\gamma}h(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n} MU(x)\left(N(U(x) + \varphi(x))\right)^{\gamma}h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon C.
\end{aligned}
$$

Passando ao limite quando $r \to \infty$, temos por **Fatou**

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)u_{\varepsilon}^{\gamma}\underline{u}^{\gamma}\left(u_{\varepsilon}^{1-\gamma} - \underline{u}^{1-\gamma}\right)\,\mathrm{d}x \leq C\varepsilon,$$

para cada $\varepsilon > 0$. Por (2.20),

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)u^{\gamma}\underline{u}^{\gamma}\left(u^{1-\gamma} - \underline{u}^{1-\gamma}\right)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)u_{\varepsilon}^{\gamma}\underline{u}^{\gamma}\left(u_{\varepsilon}^{1-\gamma} - \underline{u}^{1-\gamma}\right)\,\mathrm{d}x \leq C\varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0.$$

Passando ao limite quando $\varepsilon \to 0$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)u^{\gamma}\underline{u}^{\gamma}\left(u^{1-\gamma} - \underline{u}^{1-\gamma}\right)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.24}$$

Agora, mostraremos que

$$u(x) \leq \underline{u}(x), \ \forall x \in [f > 0].$$

Se existisse $x_0 \in [f > 0]$ tal que $u(x_0) > \underline{u}(x_0)$, então, por continuidade, existiria uma vizinhança $V \subset [f > 0]$ de x_0 tal que

$$u(x) > \underline{u}(x), \ \forall x \in V.$$

Assim,

$$u(x)^{1-\gamma} - \underline{u}(x)^{1-\gamma} > 0. \tag{2.25}$$

Por (2.24) e (2.25),

$$0 < \int\limits_V f(x) u^\gamma \underline{u}^\gamma \left(u^{1-\gamma} - \underline{u}^{1-\gamma} \right) \, \mathrm{d}x \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) u^\gamma \underline{u}^\gamma \left(u^{1-\gamma} - \underline{u}^{1-\gamma} \right) \, \mathrm{d}x = 0,$$

o que é um absurdo. Logo,

$$u(x) \leq \underline{u}(x) \Leftrightarrow u(x) = \underline{u}(x), \ \forall x \in [f > 0]. \tag{2.26}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos

(i) $x \in [f = 0]$

Neste caso, é claro que

$$f(x) u(x)^\gamma = 0 = f(x) \underline{u}(x)^\gamma.$$

(ii) $x \in [f > 0]$

Por (2.26),

$$u(x) = \underline{u}(x).$$

Assim,

$$f(x) u^\gamma = f(x) \underline{u}^\gamma.$$

Logo,

$$f(x) u^\gamma = f(x) \underline{u}^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Por (2.18),

$$\begin{aligned} -\Delta(u - \underline{u})(x) &= -\Delta u(x) - (-\Delta \underline{u}(x)) \\ &= f(x) u(x)^\gamma - f(x) \underline{u}(x)^\gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\lim_{r \to \infty} \fint\limits_{S_r} (u - \underline{u}) \, \mathrm{d}\sigma_x = \lim_{r \to \infty} \fint\limits_{S_r} u \, \mathrm{d}\sigma_x - \lim_{r \to \infty} \fint\limits_{S_r} \underline{u} \, \mathrm{d}\sigma_x = 0.$$

Pelo **Teorema de Liouville**,

$$u = \underline{u}.$$

A prova do **Teorema 2.2** depende da existência, da unicidade e de propriedades de comparação das soluções de (2.12).

Afirmação 2.3. Sejam u uma solução positiva limitada de (BK) que satisfaz

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

e $\underline{u}$ uma solução minimal positiva limitada de (BK). Então,

$$u(x) = \underline{u}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Pelo **Lema 1.4**,

$$\lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u \ \mathrm{d}\sigma_x = 0.$$

Pelo **Teorema 2.1**, podemos considerar, para cada $r > 0$, a função (não-negativa) $v_r \colon B_r \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\begin{cases} f\dfrac{\partial v_r}{\partial t} - \Delta v_r^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \text{ em } B_r \times (0,\infty) \\ \qquad\qquad v_r = 0 \text{ sobre } \partial B_r \times (0,\infty) \\ \qquad v_r(x,0) = \left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} u(x)^\gamma, \ \forall x \in B_r. \end{cases}$$

Por continuidade, existe $0 < \tau_r < 1$, para cada $r > 0$, tal que

$$\sup_{B_r} u^\gamma \leq \frac{\underline{u}(x)^\gamma}{\tau_r}, \ \forall x \in B_r. \tag{2.27}$$

Considere a função $v \colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$v(x,t) = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{u(x)^\gamma}{(t+1)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} \tag{2.28}$$

Considere também, para cada $r > 0$, a função $\underline{v}^{(r)} \colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\underline{v}^{(r)}(x,t) = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{\underline{u}(x)^\gamma}{(t+\tau_r)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}},$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Pela **Observação 2.6** e por u e $\underline{u}$ serem não negativos,

$$\begin{cases} f\dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \text{ em } B_r \times (0,\infty) \\ v \geq 0 \text{ sobre } \partial B_r \times (0,\infty) \\ v(x,0) = \left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} u^{\gamma} \text{ em } B_r \end{cases}$$

e, por (2.27), temos para cada $r > 0$

$$\begin{cases} f\dfrac{\partial \underline{v}^{(r)}}{\partial t} - \Delta \left(\underline{v}^{(r)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \text{ em } B_r \times (0,\infty) \\ \underline{v}^{(r)} \geq 0 \text{ sobre } \partial B_r \times (0,\infty) \\ \underline{v}^{(r)}(x,0) \geq \left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} u^{\gamma} \text{ em } B_r. \end{cases}$$

Pela **Proposição 2.1**, temos, para cada $r > 0$,

$$v_r(x,t) \leq v(x,t) = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{u^{\gamma}}{(t+1)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} \tag{2.29}$$

e

$$\begin{aligned} v_r(x,t) &\leq \underline{v}^{(r)}(x,t) \\ &= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{\underline{u}^{\gamma}}{(t+\tau_r)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} \\ &\leq \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{\underline{u}^{\gamma}}{t^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

para todo $(x,t) \in B_r \times (0,\infty)$. Dados $r < s$, temos em particular

$$\begin{cases} f\dfrac{\partial v_s}{\partial t} - \Delta v_s^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \text{ em } B_r \times (0,\infty) \\ v_s \geq 0 \text{ sobre } \partial B_r \times (0,\infty) \\ v_s(x,0) = \left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} u^{\gamma} \text{ em } B_r. \end{cases}$$

Pelo **Proposição 2.1**,

$$v_r(x,t) \leq v_s(x,t),$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Logo, o conjunto $\{v_r\}_{r>0}$ é monótono não-decrescente com relação à r. Pela limitação de $\{v_r\}_{r>0}$ garantida por (2.29) e pela monotonicidade de $\{v_r\}_{r>0}$,

$$\lim_{r\to\infty} v_r(x,t) \text{ existe},$$

para cada $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Denotemos por v_∞ o limite anterior. Passando (2.29) ao limite quando $r \to \infty$,

$$v_\infty(x,t) \leq \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{u^\gamma}{(t+1)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}, \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty). \tag{2.31}$$

Afirmamos que

$$v_\infty = v.$$

Pela **Observação 2.6**,

$$f\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Assim,

$$f(x)\frac{\partial(v-v_r)}{\partial t}(x,t) - \Delta\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right)(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Seja, para cada $r > 0$, a função $K\colon B_r \to \mathbb{R}$ definida por

$$K(x) = c\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}\right), \ \forall x \in B_r, \tag{2.32}$$

para algum $c > 0$. Fixado $t \in (0,T)$, temos, por K ser a **Função de Green** de B_r,

$$\begin{aligned}
\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right)(0,t) &= \int\limits_{\partial B_r} \left(K\frac{\partial\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right)}{\partial \eta_x} - \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right)\frac{\partial K}{\partial \eta_x}\right) - \int\limits_{B_r} K\Delta\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right) \\
&= \int\limits_{\partial B_r} K\frac{\partial\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right)}{\partial \eta_x} - \int\limits_{\partial B_r}\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right)\frac{\partial K}{\partial \eta_x} - \int\limits_{B_r} K\Delta\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right) \\
&= -\int\limits_{\partial B_r}\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right)\frac{\partial K}{\partial \eta_x} - \int\limits_{B_r} K\Delta\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int\limits_{B_r} \Delta\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right) K \, \mathrm{d}x = -\int\limits_{\partial B_r}\left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}}\right)\frac{\partial K}{\partial \eta_x}\, \mathrm{d}\sigma_x - \left((v(0,t))^{\frac{1}{\gamma}} - (v_r(0,t))^{\frac{1}{\gamma}}\right).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{B_r} \int_0^T \left(f \frac{\partial (v - v_r)}{\partial t} - \Delta \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}} \right) \right) K \\
&= \int\limits_{B_r} \int_0^T f \frac{\partial (v - v_r)}{\partial t} - \int\limits_{B_r} \int_0^T \Delta \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}} \right) K \\
&= \int\limits_{B_r} \int_0^T f \frac{\partial (v - v_r)}{\partial t} K - \int_0^T \int\limits_{B_r} \Delta \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}} \right) K \\
&= \int\limits_{B_r} f \left(\int_0^T \frac{\partial (v - v_r)}{\partial t} \right) K - \int_0^T \left(- \int\limits_{\partial B_r} \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}} \right) \frac{\partial K}{\partial \eta_x} - \left((v(0,t))^{\frac{1}{\gamma}} - (v_r(0,t))^{\frac{1}{\gamma}} \right) \right) \\
&= \int\limits_{B_r} f (v - v_r) K \ \mathrm{d}x|_{t=T} + \int_0^T \int\limits_{\partial B_r} \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}} \right) \frac{\partial K}{\partial \eta_x} \ \mathrm{d}\sigma_x \ \mathrm{d}t + \int_0^T \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}} \right) \ \mathrm{d}t|_{x=0},
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B_r} f (v - v_r) K \ \mathrm{d}x|_{t=T} + \int_0^T \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}} \right) \ \mathrm{d}t|_{x=0} &= - \int_0^T \int\limits_{\partial B_r} \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}} \right) \frac{\partial K}{\partial \eta_x} \ \mathrm{d}\sigma_x \ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^T \int\limits_{\partial B_r} v^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\partial K}{\partial \eta_x} \ \mathrm{d}\sigma_x \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{c(2-n)}{r^{n-1}} \int_0^T \int\limits_{\partial B_r} \frac{u}{(t+1)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} \ \mathrm{d}\sigma_x \ \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{c(2-n)}{r^{n-1}} \int_0^T \int\limits_{\partial B_r} u \ \mathrm{d}\sigma_x \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{c(2-n)}{r^{n-1}} \cdot T \int\limits_{\partial B_r} u \ \mathrm{d}\sigma_x \\
&= CT \cdot ⨍\limits_{\partial B_r} u \ \mathrm{d}\sigma_x,
\end{aligned}
$$

onde

$$
C = \frac{c(2-n)}{r^{n-1}}.
$$

Passando ao limite quando $r \to \infty$, temos, por **Fatou**,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(v - v_\infty)(x,t)K(x)\ \mathrm{d}x|_{t=T} + \int_0^T \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_\infty^{\frac{1}{\gamma}} \right)\ \mathrm{d}t|_{x=0} = \\
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \liminf_{r\to\infty} (v - v_r)(x,t)K(x)\ \mathrm{d}x|_{t=T} + \int_0^T \liminf_{r\to\infty} \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_r^{\frac{1}{\gamma}} \right)\ \mathrm{d}t|_{x=0} \le \\
\liminf_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(v - v_r)(x,t)K(x)|_{t=T} + \liminf_{r\to\infty} \int_0^T \left(v_r^{\frac{1}{\gamma}} - v^{\frac{1}{\gamma}} \right)|_{x=0} \le \\
\liminf_{r\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(v - v_r)(x,t)K(x)|_{t=T} + \int_0^T v_r^{\frac{1}{\gamma}}|_{x=0} - \int_0^T v^{\frac{1}{\gamma}}|_{x=0} \right) \le \\
\liminf_{r\to\infty} \left(CT \cdot \fint\limits_{\partial B_r} u \right) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Por (2.31), (2.28) e (2.33),

$$
0 \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(v - v_\infty)(x,t)K(x)\ \mathrm{d}x|_{t=T} = \int_0^T \left(v_\infty^{\frac{1}{\gamma}} - v^{\frac{1}{\gamma}} \right)\ \mathrm{d}t|_{x=0} \le 0,
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|f(v - v_\infty)(\cdot,T)K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(v - v_\infty)(x,t)K(x)\ \mathrm{d}x|_{t=T} \\
&= \int_0^T \left(v^{\frac{1}{\gamma}} - v_\infty^{\frac{1}{\gamma}} \right)\ \mathrm{d}t|_{x=0} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Pela definição de norma,

$$
f(v - v_\infty)(\cdot,T)K \equiv 0.
$$

Como f e K é positivo (vide (2.32)), concluímos que

$$
v = v_\infty.
$$

Passando (2.30) ao limite quando $r \to \infty$,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{u^\gamma}{(t+1)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} &= v(x,t) \\
&= v_\infty(x,t) \\
&\le \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{u^\gamma}{t^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}},
\end{aligned}
$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, isto é,

$$\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} u^\gamma \leq \underline{u}^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Passando ao limite quando $t \to \infty$,

$$u^\gamma \leq \underline{u}^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Como $\underline{u}$ é minimal, temos

$$\underline{u} \leq u \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Portanto,

$$u = \underline{u} \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Com isso, concluímos a demonstração. □

Observação 2.7. Assuma que f satisfaz a propriedade (H). Pelo **Lema 1.4**,

$$\lim_{r\to\infty} \fint_{S_r} u_\infty \, \mathrm{d}\sigma_x = 0$$

e pelo **Corolário 1.2**

$$\liminf_{|x|\to\infty} u_\infty(x) = 0.$$

Seja $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ $(n \geq 4)$ uma função não negativa e não nula. Assim, podemos considerar uma função positiva $\psi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_x \psi = f \text{ em } \mathbb{R}^{n-1} \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

Seja $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$U(t,x) = \psi(x),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Por (2.34),

$$\begin{aligned} -\Delta U(t,x) &= -\Delta\psi(x) \\ &= -\Delta_x\psi(x) - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x) \\ &= -\Delta_x\psi(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Entretanto,

$$\liminf_{|t|\to\infty} U(t,0) = \liminf_{|t|\to\infty} \psi(0) = \psi(0) > 0.$$

Logo,

$$\liminf_{|x|\to\infty} U(x) \neq 0.$$

Em tal situação, não existe uma função $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$-\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n$$

tal que

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

por causa da estimativa

$$\underline{u}^\gamma \geq \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} U \text{ em } \mathbb{R}^n$$

que decorre de (2.6). De fato, suponha que exista tal função. Assim,

$$\begin{aligned} u &= (u^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\geq (\underline{u}^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\geq \left(\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \cdot U\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $|x| \to \infty$, notamos que

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x) \geq \left(\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \cdot \liminf_{|x|\to\infty} U(x)\right)^{\frac{1}{\gamma}} > 0.$$

Teorema 2.3. Se existe uma função $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta U = f \text{ em } \mathbb{R}^n \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} U(x) = 0, \end{cases}$$

então existe uma única solução positiva de (BK) tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Demonstração. Vamos apresentar um argumento devido a **Louis Niremberg**. Pela demonstração do **Teorema 2.1**, existe $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$-\Delta u = f(x)u^\gamma \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e, para algum $M > 0$,

$$u(x) \leq MU(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Considere $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$v = \frac{1}{1-\gamma} u^{1-\gamma}.$$

Mostraremos que

$$-\Delta v - \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) \frac{|\boldsymbol{\nabla} v|^2}{v} = f \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{2.35}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-\Delta v - \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) \frac{|\boldsymbol{\nabla} v|^2}{v} &= -\Delta \left(\frac{1}{1-\gamma} u^{1-\gamma}\right) - \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) \frac{\left|\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{1-\gamma} u^{1-\gamma}\right)\right|^2}{\frac{1}{1-\gamma} u^{1-\gamma}} \\
&= -\frac{1}{1-\gamma} \Delta\left(u^{1-\gamma}\right) - \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) \frac{\left|\frac{1}{1-\gamma}\boldsymbol{\nabla}\left(u^{1-\gamma}\right)\right|^2}{\frac{1}{1-\gamma} u^{1-\gamma}} \\
&= -\frac{1}{1-\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(u^{1-\gamma}\right) - \frac{(1-\gamma)\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}{u^{1-\gamma}} \left|u^{-\gamma} \boldsymbol{\nabla} u\right|^2 \\
&= -\frac{1}{1-\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((1-\gamma) u^{-\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \gamma u^{-1-\gamma} |\boldsymbol{\nabla} u|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left(-\gamma u^{-1-\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + u^{-\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) - \gamma u^{-1-\gamma} |\boldsymbol{\nabla} u|^2 \\
&= \gamma u^{-1-\gamma} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 - u^{-\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \gamma u^{-1-\gamma} |\boldsymbol{\nabla} u|^2 \\
&= \gamma u^{-1-\gamma} |\boldsymbol{\nabla} u|^2 - u^{-\gamma} \Delta u - \gamma u^{-1-\gamma} |\boldsymbol{\nabla} u|^2 \\
&= u^{-\gamma}\left(-\Delta u\right) \\
&= u^{-\gamma} f u^{\gamma} \\
&= f.
\end{aligned}$$

Sejam v_1, v_2 soluções de (2.35) de modo que

$$\lim_{|x|\to\infty} v_1(x) = \lim_{|x|\to\infty} v_2(x) = 0.$$

Seja $L\colon C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \to C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ a aplicação dada por

$$Lw = \Delta w + \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}{v_1} \boldsymbol{\nabla}(v_1 + v_2) \cdot \boldsymbol{\nabla} w - \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}{v_1 v_2} |\boldsymbol{\nabla} v_2|^2 w, \ \forall w \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Se $w = v_1 - v_2$, então

$$\begin{aligned}
Lw &= \Delta w + \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}{v_1}\boldsymbol{\nabla}(v_1+v_2)\cdot\boldsymbol{\nabla} w - \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}{v_1 v_2}|\boldsymbol{\nabla} v_2|^2 w \\
&= \Delta(v_1 - v_2) + \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}{v_1}\boldsymbol{\nabla}(v_1+v_2)\cdot\boldsymbol{\nabla}(v_1 - v_2) - \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}{v_1 v_2}|\boldsymbol{\nabla} v_2|^2(v_1 - v_2) \\
&= \Delta v_1 - \Delta v_2 + \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}{v_1}\left(|\boldsymbol{\nabla} v_1|^2 - |\boldsymbol{\nabla} v_2|^2\right) - \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)|\boldsymbol{\nabla} v_2|^2}{v_2} + \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)|\boldsymbol{\nabla} v_2|^2}{v_1} \\
&= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left(-\frac{|\boldsymbol{\nabla} v_1|^2}{v_1} + \frac{|\boldsymbol{\nabla} v_2|^2}{v_2} + \frac{|\boldsymbol{\nabla} v_1|^2}{v_1} - \frac{|\boldsymbol{\nabla} v_2|^2}{v_1} - \frac{|\boldsymbol{\nabla} v_2|^2}{v_2} + \frac{|\boldsymbol{\nabla} v_2|^2}{v_1}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por continuidade e compacidade, existe, para cada $r > 0$, um ponto de máximo x_r de w em ∂B_r. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe $r_0 > 0$ tal que

$$|x| < r_0.$$

Como L é *elíptico*[1], temos, pelo **Corolário 3.2 ([10], p. 33)**,

$$\begin{aligned}
|v_1(x) - v_2(x)| &= |w(x)| \\
&\leq \sup_{B_r} |w| \\
&= \sup_{\partial B_r} |w| \\
&= |w(x_r)| \\
&= |v_1(x_r) - v_2(x_r)|, \ \forall r \geq r_0.
\end{aligned}$$

Passando ao limite quando $r \to \infty$,

$$|v_1(x) - v_2(x)| = 0.$$

Portanto,

$$v_1(x) = v_2(x),$$

concluindo assim o resultado. $\square$

[1]Diz-se que um operador diferencial L da forma

$$L = a^{ij}D_{ij} + b^i D_i + c, \ a^{ij} = a^{ji}$$

é *eliptico* quando, dado $x \in \mathbb{R}^n$, o maior e o menor autovalor $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ da matriz $[a^{ij}(x)]$, respectivamente, satisfaz

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2,$$

para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Observação 2.8. Claramente, se f é uma função *radial* satisfazendo (H), então

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = 0.$$

Isso também vale se f for limitado por uma função radial satisfazendo (H).

Capítulo 3

Problema linear e semilinear de autovalor

Os problemas de autovalor ocupam uma posição central no estudo de **Equações Diferenciais Parciais Lineares**. Em termos gerais, um problema de autovalor busca encontrar pares (λ, u), onde λ é um escalar (o autovalor) e u é uma função não trivial (o autovetor ou autofunção), que satisfazem uma equação diferencial ou integral envolvendo um operador.

Nos problemas lineares, o operador envolvido é linear, ou seja, satisfaz as propriedades de *aditividade*[1] e *homogeneidade*[2]. Aqui o objetivo é encontrar os valores de λ para os quais existe uma solução não trivial u.

Nos problemas semilineares, por sua vez, a equação envolve uma parte linear e uma parte não linear. Esses problemas são mais desafiadores, pois a presença de uma função não linear pode alterar significativamente o espectro do operador e a natureza das soluções.

Vamos investigar a existência e propriedades de autofunções do problema linear

$$\Delta u + \lambda f(x)u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n; \; u(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty; \tag{3.1}$$

[1]o operador L é *aditivo* se $L(u+v) = L(u) + L(v)$

[2]o operador L é *homogêneo* se $L(\lambda u) = \lambda L(u)$

em que $\lambda \geq 0$, e o problema semilinear correspondente

$$\Delta u + \lambda f(x)g(u) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

em que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com $g(0) = 0$, e $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função positiva e $C^{0,\alpha}$ para algum $0 < \alpha < 1$, que satisfaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} f(x)\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Mais precisamente, assumimos, como em [8], que existem funções positivas p e P[3], com

$$0 < p(|x|) \leq f(x) \leq P(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(|x|)\ \mathrm{d}x < \infty.$$

A equação em (3.1) surge naturalmente no estudo de autovalores associados a operadores diferenciais elípticos, especialmente no contexto de EDP em domínios limitados. Essa equação pode ser vista como uma generalização do problema de autovalor de Dirichlet clássico

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n;\ u(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty.$$

O problema linear em questão é provida de propriedades espectrais interessantes que serão abordadas no decorrer do capítulo.

3.1 Problema linear de autovalor

Começamos definindo um espaço L^2 ponderado e provando alguns resultados de imersão. Suponha que $P \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é uma função positiva radialmente simétrica satis-

[3]As funções p e P podem ser definidas assim

$$p(r) = \inf_{|x|=r} f(r),\ P(r) = \sup_{|x|=r} f(r).$$

fazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty. \tag{3.2}$$

Denote por $L^2(\mathbb{R}^n; P)$ a classe de funções reais u, mensuráveis à Lebesgue, que satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Afirmamos que $L^2(\mathbb{R}^n; P)$ é um espaço vetorial. De fato, como $0 \in L^2(\mathbb{R}^n; P)$, temos

$$L^2(\mathbb{R}^n; P) \neq \varnothing.$$

Dados $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n; P)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos pela **Desigualdade de Minkowski**

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} P(x)|(u+\lambda v)(x)|^2\ \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|(P^{\frac{1}{2}}u + \lambda P^{\frac{1}{2}}v)(x)\right|^2\ \mathrm{d}x \\
&= \left\|P^{\frac{1}{2}}u + \lambda P^{\frac{1}{2}}v\right\|_2^2 \\
&\leq \left(\left\|P^{\frac{1}{2}}u\right\|_2 + |\lambda|\left\|P^{\frac{1}{2}}v\right\|_2\right)^2 \\
&= \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} P(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + |\lambda|\left(\int_{\mathbb{R}^n} P(x)|v(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Assim,

$$u + \lambda v \in L^2(\mathbb{R}^n; P).$$

Logo, $L^2(\mathbb{R}^n; P)$ é uma espaço vetorial. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_P \colon L^2(\mathbb{R}^n, P) \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\langle u, v \rangle_P = \int_{\mathbb{R}^n} P(x)u(x)v(x)\ \mathrm{d}x,$$

para $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n; P)$. Primeiramente, precisamos mostrar que $\langle u, v \rangle_P$ está bem definida.

De fato, aplicando a **Desigualdade de Hölder**, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x)u(x)v(x)\ \mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} P(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} P(x)|v(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ está bem definida.

Agora, afirmamos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ é um produto interno.

De fato, dados $u, v, w \in L^2(\mathbb{R}^n, P)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle u + \lambda v, w \rangle_P &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)(u + \lambda v)(x) w(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x) u(x) w(x) \, \mathrm{d}x + \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x) v(x) w(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \langle u, w \rangle_P + \lambda \langle v, w \rangle_P.
\end{aligned}$$

Além disso,

(i) $\langle u, v \rangle_P = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x) u(x) v(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x) v(x) u(x) \, \mathrm{d}x = \langle v, u \rangle_P$;

(ii) $\langle u, u \rangle_P = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x) u(x) u(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x) u(x)^2 \, \mathrm{d}x \geq 0.$

Por fim,

$$\langle u, u \rangle_P = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x) u(x) u(x) \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x) u(x)^2 \mathrm{d}x = 0,$$

isto é,

$$P u^2 = 0 \text{ q.t.p.}$$

Como $P(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, conclui-se que

$$u = 0 \text{ q.t.p.}$$

Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ é um produto interno. Finalmente, afirmamos que $(L^2(\mathbb{R}^n, P), \langle \cdot, \cdot \rangle_P)$ é um espaço de Hilbert. De fato, considere a norma $\|\cdot\|_P$ induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$. Dada uma sequência de Cauchy (u_n) em $(L^2(\mathbb{R}^n, P), \langle \cdot, \cdot \rangle_P)$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| P^{\frac{1}{2}} u_n - P^{\frac{1}{2}} u_m \right\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| (P^{\frac{1}{2}} u_n - P^{\frac{1}{2}} u_m)(x) \right|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} P(x) |(u_n - u_m)(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u_n - u_m\|_P,
\end{aligned}$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Logo, $(P^{\frac{1}{2}} u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $L^2(\mathbb{R}^n)$

é completo, existe $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$P^{\frac{1}{2}}u_n \to v \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Como P é positivo, podemos definir

$$u = \frac{v}{P^{\frac{1}{2}}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)|u(x)|^2 \, \mathrm{d}x &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)\left|\frac{v(x)}{(P(x))^{\frac{1}{2}}}\right|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Logo,

$$u \in L^2(\mathbb{R}^n; P).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_P &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} P(x)|(u_n - u)(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|(P^{\frac{1}{2}}u_n - v)(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\|P^{\frac{1}{2}}u_n - v\right\|_2,
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando ao limite de $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_P = 0.$$

Logo,

$$u_n \to u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n, P).$$

Portanto, $(L^2(\mathbb{R}^n, P), \langle \cdot, \cdot \rangle_P)$ constitui um espaço de Hilbert real.

A seguir, mostraremos um resultado fundamental na Análise Funcional e na teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDP), que estabelece uma relação entre a norma de uma função e a norma de seu gradiente, sendo especialmente útil no estudo de espaços de Sobolev e na formulação variacional de problemas elípticos.

Lema 3.1 (Desigualdade de Poincaré)**.** Sejam $P \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ uma função radialmente simétrica que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty$$

e $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ de modo que $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, e $|\boldsymbol{\nabla} u| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Para $n > 2$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2\ \mathrm{d}x,$$

onde

$$C = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n-2} \int_0^\infty rP(r)\ \mathrm{d}r.$$

Demonstração. Dado $(r, \omega) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, temos pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**

$$\int_r^s t^{\frac{1-n}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t\omega)\ \mathrm{d}t = \int_r^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t\omega)\ \mathrm{d}t = u(s\omega) - u(r\omega),$$

para todo $s \geq r$. Passando ao limite quando $s \to \infty$, temos, por hipótese,

$$\int_r^\infty t^{\frac{1-n}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t\omega)\ \mathrm{d}t = -u(r\omega).$$

Pela **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**,

$$\begin{aligned}
|u(r\omega)|^2 &= \left| - \int_r^\infty t^{\frac{1-n}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t\omega)\ \mathrm{d}t \right|^2 \\
&\leq \left(\int_r^\infty \left| t^{\frac{1-n}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t\omega) \right|\ \mathrm{d}t \right)^2 \\
&\leq \left(\left(\int_r^\infty \left| t^{\frac{1-n}{2}} \right|^2\ \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^\infty \left| t^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t\omega) \right|^2\ \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= \int_r^\infty t^{1-n}\ \mathrm{d}t \int_r^\infty t^{n-1} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t\omega) \right|^2\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{r^{2-n}}{n-2} \int_r^\infty t^{n-1} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t\omega) \right|^2\ \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{r^{2-n}}{n-2} \int_r^\infty t^{n-1} |\boldsymbol{\nabla} u(t\omega)|^2\ \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{r^{2-n}}{n-2} \int_0^\infty t^{n-1} |\boldsymbol{\nabla} u(t\omega)|^2\ \mathrm{d}t. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Como P é radialmente simétrica, temos por (3.3)

$$
\begin{aligned}
r^{n-1} \int\limits_{|\omega|=1} P(r)|u(r\omega)|^2 \, \mathrm{d}\sigma_\omega &\leq r^{n-1} \int\limits_{|\omega|=1} P(r) \left(\frac{r^{2-n}}{n-2} \int_0^\infty t^{n-1} |\boldsymbol{\nabla} u(t\omega)|^2 \, \mathrm{d}t \right) \, \mathrm{d}\sigma_\omega \\
&= \frac{rP(r)}{n-2} \int\limits_{|\omega|=1} \int_0^\infty t^{n-1} |\boldsymbol{\nabla} u(t\omega)|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\sigma_\omega \\
&= \frac{rP(r)}{n-2} \int_0^\infty \int\limits_{|\omega|=1} t^{n-1} |\boldsymbol{\nabla} u(t\omega)|^2 \, \mathrm{d}\sigma_\omega \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{rP(r)}{n-2} \int_0^\infty \int\limits_{|y|=t} |\boldsymbol{\nabla} u(y)|^2 \, \mathrm{d}\sigma_y \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{rP(r)}{n-2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2 \, \mathrm{d}x. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)|u(x)|^2 \, \mathrm{d}x &= \int_0^\infty \int\limits_{|y|=r} P(ry)|u(ry)|^2 \, \mathrm{d}\sigma_y \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \int\limits_{|y|=r} P(y)|u(y)|^2 \, \mathrm{d}\sigma_y \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty r^{n-1} \int\limits_{|\omega|=1} P(r\omega)|u(r\omega)|^2 \, \mathrm{d}\sigma_y \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty r^{n-1} \int\limits_{|\omega|=1} P(r)|u(r\omega)|^2 \, \mathrm{d}\sigma_\omega \, \mathrm{d}r \\
&\leq \int_0^\infty \frac{rP(r)}{n-2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \frac{rP(r)}{n-2} \, \mathrm{d}r \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^\infty rP(r) \, \mathrm{d}r \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \qquad (3.5) \\
&= C \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2 \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

e o resultado segue. □

Em resumo, se P satisfaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x) \, \mathrm{d}x < \infty$$

então toda função de classe C^1 com o quadrado do gradiente integrável e que se anula no infinito deve estar em $L^2(\mathbb{R}^n; P)$.

Observação 3.1. Seja $\tilde{u}$ a *média esférica* de u dada por

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{|\omega|=1} u(|x|\omega) \, \mathrm{d}\sigma_\omega, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Vamos mostrar que

$$|\tilde{u}(x)| \leq \frac{|x|^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n(n-2)\omega_n}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.6}$$

De fato, usando (3.3), temos

$$|u(r\omega)| \leq \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n-2}} \left(\int_0^\infty t^{n-1} |\nabla u(t\omega)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Integrando em ambos os lados sobre a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, em seguida, aplicando a **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**, obtemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|\omega|=1} |u(r\omega)| \, \mathrm{d}\sigma_\omega &\leq \int\limits_{|\omega|=1} \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n-2}} \left(\int_0^\infty t^{n-1} |\nabla u(t\omega)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\sigma_\omega \\
&= \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n-2}} \int\limits_{|\omega|=1} \left(\int_0^\infty t^{n-1} |\nabla u(t\omega)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\sigma_\omega \\
&\leq \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n-2}} \left(\int_{|\omega|=1} 1^2 \, \mathrm{d}\sigma_\omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\omega|=1} \left[\left(\int_0^\infty t^{n-1} |\nabla u(t\omega)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \, \mathrm{d}\sigma_\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n-2}} \sqrt{n\omega_n} \left(\int_{|\omega|=1} \int_0^\infty t^{n-1} |\nabla u(t\omega)|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\sigma_\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n-2}} \sqrt{n\omega_n} \left(\int_0^\infty \int_{|\omega|=1} t^{n-1} |\nabla u(t\omega)|^2 \, \mathrm{d}\sigma_\omega \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n-2}} \sqrt{n\omega_n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n-2}} \sqrt{n\omega_n} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Agora, dividindo por $n\omega_n$,

$$\frac{1}{n\omega_n}\int\limits_{|\omega|=1} |u(r\omega)|\ \mathrm{d}\sigma_\omega \le \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n(n-2)\omega_n}}\|\boldsymbol{\nabla} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim, se u é uma função de classe C^1 que se anula no infinito e se $|\boldsymbol{\nabla} u| \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(x)| &= \left|\frac{1}{n\omega_n}\int_{|\omega|=1} u(|x|\omega)\ \mathrm{d}\sigma_\omega\right| \\
&\le \frac{1}{n\omega_n}\int_{|\omega|=1} |u(|x|\omega)|\ \mathrm{d}\sigma_\omega \\
&\le \frac{|x|^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n(n-2)\omega_n}}\|\boldsymbol{\nabla} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Lema 3.2. Seja $P \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, onde $n > 2$, uma função radialmente simétrica que satisfaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Seja $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de modo que $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, e $|\boldsymbol{\nabla} u| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então, existe uma função positiva $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que satisfaz $\sigma(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, tal que, para algum $R > 0$,

$$\int_{|x|\ge R} P(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x \le \sigma(R)\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2\ \mathrm{d}x;$$

a saber,

$$\sigma(R) = \frac{1}{n-2}\int_R^\infty rP(r)\ \mathrm{d}r,\ \forall R \ge 0.$$

Demonstração. Defina a função $\sigma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ como no enunciado. Claramente,

$$\sigma(t) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Usando **coordenadas polares** e **Teorema de Fubini, temos**, para todo $R > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\ge R} P(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x &= \int_R^\infty r^{n-1}\int\limits_{|\omega|=1} P(r\omega)|u(r\omega)|^2\ \mathrm{d}\sigma_\omega\ \mathrm{d}r \\
&= \int_R^\infty r^{n-1}\int\limits_{|\omega|=1} P(r)|u(r\omega)|^2\ \mathrm{d}\sigma_\omega\ \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Finalmente, por (3.4), temos, para todo $R > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq R} P(x)|u(x)|^2 \, \mathrm{d}x &\leq \int_R^\infty \frac{rP(r)}{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{n-2} \int_R^\infty rP(r) \, \mathrm{d}r \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \sigma(R) \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2 \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

o que conclui o resultado. □

Para cada $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, considere

$$\|u\|_1^2 = \|\boldsymbol{\nabla} u\|_{L^2}^2.$$

Isso define uma norma em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, considere

$$\langle u, v\rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u(x) \cdot \boldsymbol{\nabla} v(x) \, \mathrm{d}x,$$

para quaisquer $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dados $u, v, w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle u + \lambda v, w\rangle_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla}(u + \lambda v)(x) \cdot \boldsymbol{\nabla} w(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u(x) \cdot \boldsymbol{\nabla} w(x) \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} v(x) \cdot \boldsymbol{\nabla} w(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \langle u, w\rangle_1 + \lambda \langle v, w\rangle_1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u(x) \cdot \boldsymbol{\nabla} v(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} v(x) \cdot \boldsymbol{\nabla} u(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \langle v, u\rangle_1.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\langle u, u\rangle_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u(x) \cdot \boldsymbol{\nabla} u(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

Se $\langle u, u\rangle_1 = 0$, então

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u(x)|^2\ \mathrm{d}x &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u(x) \cdot \boldsymbol{\nabla} u(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \langle u, u\rangle_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\boldsymbol{\nabla} u = 0.$$

Daí, u é constante. Como o suporte de u é compacto, conclui-se que

$$u = 0.$$

Logo, $\langle \cdot, \cdot\rangle_1$ é um produto interno real de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\|u\|_1 = \sqrt{\langle u, u\rangle_1},\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ou seja, $\|\cdot\|_1$ é uma norma proveniente de $\langle \cdot, \cdot\rangle_1$. Assim, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ munido da norma $\|\cdot\|_1$ define um espaço real com produto interno. Denote por $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ a completação deste espaço com respeito a norma $\|\cdot\|_1$. Então, $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert real.

A **Desigualdade de Poincaré (Lema 3.1)** mostra que, para $n > 2$, se $P \in C(\mathbb{R}^n.\mathbb{R}^+)$ satisfaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty, \tag{3.7}$$

então $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ está imerso em $L^2(\mathbb{R}^n; P)$. Vamos usar o **Lema 3.2** para mostrar que se P satisfaz (3.7), então $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ está compactamente imerso em $L^2(\mathbb{R}^n; P)$.

Proposição 3.1. Se $P \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ satisfaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty,$$

então a imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n; P)$ é completamente contínuo.

A prova deste resultado é baseada em um resultado análogo em domínios limitados, o **Teorema de Rellich-Kondrachov**, que diz que se Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suficientemente suave $\partial\Omega$, então $H^1(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$. Em particular, suponha que $\{u_m\}_1^\infty$ é uma sequência limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Desde que $P \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e que

$$P(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

existe $c > 0$, por compacidade de $\overline{\Omega}$, tal que

$$P(x) \geq c > 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Pela **Desigualdade de Poincaré (Lema 3.1)**, para P que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{n-2} P(x) \ \mathrm{d}x < \infty,$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_m(x)|^2 \ \mathrm{d}x + \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} u_m(x)|^2 \ \mathrm{d}x &= \frac{1}{c} \int_\Omega c|u_m(x)|^2 \ \mathrm{d}x + \sup_m \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} u_m(x)|^2 \ \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{c} \int_\Omega P(x)|u_m(x)|^2 \ \mathrm{d}x + \sup_m \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} u_m(x)|^2 \ \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{c} \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} u_m(x)|^2 \ \mathrm{d}x + \sup_m \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} u_m(x)|^2 \ \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1+c}{c} \sup_m \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} u_m(x)|^2 \ \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Logo, (u_m) é uma sequência de $H^1(\Omega)$ e é limitado em $H^1(\Omega)$. Pelo **Teorema de Rellich-Kondrachov**, existe uma subsequência de (u_m) que é de Cauchy em $L^2(\Omega)$.

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_k\|_1 \leq C, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\sigma(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, existe $R_m > 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sigma(R_m) < \frac{1}{mC},$$

uma vez que pelo **Lema 3.2** temos, para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \geq R_m} P(x)|u_k(x)|^2 \, \mathrm{d}x &\leq \sigma(R_m) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} u_k(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \sigma(R_m)\|u_k\|_1^2 \\
&\leq \sigma(R_m)C \\
&< \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Pelo comentário anterior, existe uma subsequência $\left(u_k^{(1)}\right)$ de (u_k) tal que $\left(u_k^{(1)}|_{B_{R_1}}\right)$ é de Cauchy em $L^2(B_{R_1})$. Similarmente, existe uma subsequência $\left(u_k^{(2)}\right)$ de $\left(u_k^{(1)}\right)$ tal que $\left(u_k^{(2)}|_{B_{R_2}}\right)$ é de Cauchy em $L^2(B_{R_2})$. Continuando, obtemos uma subsequência $\left(u_k^{(p+1)}|_{B_{R_{p+1}}}\right)$ de $\left(u_k^{(p)}\right)$ tal que $\left(u_k^{(p+1)}\right)$ é de Cauchy em $L^2(B_{R_{p+1}})$. Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = u_k^k.$$

Mostraremos que (v_k) é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n; P)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{p_1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)|v_m - v_k|^2 &= \int_{B_{R_{p_1}}} P(x)|v_m - v_k|^2 + \int\limits_{|x| \geq R_{p_1}} P(x)|v_m - v_k|^2 \\
&< \int_{B_{R_{p_1}}} P(x)|v_m - v_k|^2 + \frac{1}{p_1} \\
&< \int_{B_{R_{p_1}}} P(x)|v_m - v_k|^2 + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Como $\left(u_k^{(p)}|_{B_{R_{p_1}}}\right)$ é de Cauchy em $L^2(B_{R_{p_1}})$, para todo $p \geq p_1$, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_{R_{p_1}}} P(x)\left|u_m^{(p_1)} - u_k^{(p_1)}\right|^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

para quaisquer $m, k \geq p_2$. Assim, podemos considerar

$$p_0 = \max\{p_1, p_2\}.$$

Dados $m,k \geq p_0$, existem $m' \geq m$ e $k' \geq k$ tais que

$$\begin{cases} u_{m'}^{(p_1)} = u_m^{(m)} \\ u_{k'}^{(p_1)} = u_k^{(k)}. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_{p_1}}} P(x)|v_m - v_k|^2 &= \int_{B_{R_{p_1}}} P(x)\left|u_m^{(m)} - u_k^{(k)}\right|^2 \\ &= \int_{B_{R_{p_1}}} P(x)\left|u_{m'}^{(p_0)} - u_{k'}^{(p_0)}\right|^2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo, para quaisquer $m,k \geq p_0$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)|v_m - v_k|^2 < \varepsilon.$$

O resultado segue da completude de $L^2(\mathbb{R}^n; P)$. $\square$

Agora, seja $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $0 < f(x) \leq P(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $P \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é radialmente simétrica e satisfaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Definiremos $L^2(\mathbb{R}^n; f)$ como definimos $L^2(\mathbb{R}^n; P)$ no começo da seção. A condição $f(x) \leq P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, implica que $L^2(\mathbb{R}^n; P)$ está continuamente imerso em $L^2(\mathbb{R}^n; f)$. De fato, considere para cada $u \in L^2(\mathbb{R}^n; P)$

$$\|u\|_f = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Conseguimos provar, de maneira análoga ao caso envolvendo $\|\cdot\|_P$, que $\|\cdot\|_f$ define uma norma proveniente de um produto interno em $L^2(\mathbb{R}^n; f)$. Além disso,

$$\|u\|_f = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} P(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_P.$$

Logo, $L^2(\mathbb{R}^n; P)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^n; f)$. Assim, temos a sequência de imersões contínuas

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n; P) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n; f).$$

Sendo a primeira compacto. Portanto, obtemos o seguinte:

Teorema 3.1. Suponha que $n \geq 3$, e seja $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tal que $0 < f(x) \leq P(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $P \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é radialmente simétrica e satisfaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Então $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ está compactamente imerso em $L^2(\mathbb{R}^n; f)$.

Este resultado permite aplicar técnicas do espaço de Hilbert ao problema do autovalor linear

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(x) u = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \\ u(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty \\ |\boldsymbol{\nabla} u| \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{3.8}$$

onde $n > 2$, e $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é tal que $0 < f(x) \leq P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, para $P \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ radialmente simétrica satisfazendo

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Agora, considere para cada $v \in L^2(\mathbb{R}^n, f)$ a aplicação $\psi_v \colon \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi_v(w) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) v w \, \mathrm{d}x, \ \forall w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Fixado $v \in L^2(\mathbb{R}^n, f)$, temos, por **Hölder**,

$$\begin{aligned} |\psi_v(w)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) v w| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) v^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) w^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|v\|_f \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) w^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

para todo $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Agora, pela **Desigualdade de Poincaré**,

$$
\begin{aligned}
|\psi_v(w)| &\leq \|v\|_f \left(C \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} w|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\|v\|_f \|w\|_1,
\end{aligned}
$$

para todo $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Logo,

$$
\psi_v \in \left(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\right)'.
$$

Pelo **Teorema da Representação de Riesz**, existe $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$
\langle u, w \rangle_1 = \psi_v(w), \ \forall w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n),
$$

isto é,

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} w \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) v w \,\mathrm{d}x, \ \forall w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n),
$$

ou seja,

$$
-\Delta u = f(x)v \text{ em } \mathbb{R}^n \text{ no sentido fraco.}
$$

Fica definida a aplicação $S\colon L^2(\mathbb{R}^n, f) \to \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$
Sv = u \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u = f(x)v \text{ em } \mathbb{R}^n \\ \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n). \end{cases}
$$

Como $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, f)$ são imersões compactas, conclui-se que $S\colon L^2(\mathbb{R}^n, f) \to L^2(\mathbb{R}^n, f)$ é um operador compacto. Mais ainda, dados $v_1, v_2 \in L^2(\mathbb{R}^n, f)$, podemos denotar $u_1 = Sv_1$ e $u_2 = Sv_2$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\langle v_1, Sv_2 \rangle_f &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) v_1 S v_2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) v_1 u_2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Usando a definição de S, prosseguimos

$$
\langle v_1, Sv_2 \rangle_f = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u_1 \cdot \boldsymbol{\nabla} u_2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u_2 \cdot \boldsymbol{\nabla} u_1 \,\mathrm{d}x.
$$

Usando novamente a definição de S, temos

$$\begin{aligned}
\langle v_1, Sv_2\rangle_f &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) v_2 u_1 \ \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) v_2 S v_1 \ \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) S v_1 v_2 \ \mathrm{d}x \\
&= \langle Sv_1, v_2\rangle_f .
\end{aligned}$$

Logo, S é um **operador auto-adjunto**. Por outro lado,

$$\langle Su, u\rangle_f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) u S u \ \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla}(Su)|^2 \ \mathrm{d}x > 0, \ \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n, f).$$

Assim, podemos considerar sequências (u_k) em $L^2(\mathbb{R}^n, f)$ e (μ_k) de termos positivos tais que $\mu_k \to 0$ e

$$Su_k = \mu_k u_k.$$

Daí, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Delta u_k + \frac{1}{\mu_k} f(x) u_k &= -\frac{1}{\mu_k}\left(-\Delta\left(\mu_k u_k\right) - f(x) u_k\right) \\
&= -\frac{1}{\mu_k}\left(-\Delta S u_k - f(x) u_k\right) \\
&= -\frac{1}{\mu_k}\left(f(x) u_k - f(x) u_k\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

isto é, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u_k(x) \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi(x) \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\mu_k} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) u_k(x) \varphi(x) \ \mathrm{d}x, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Pelo **Teorema 9.15** do **[10]**, temos,

$$u_k \in W^{2, \frac{n}{1-\alpha}}(B_1), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por **Imersões de Sobolev [9, pp. 266; 270]**, deduzimos que

$$u_k \in C^{1,\alpha}(\overline{B_1}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Combinando **Imersões de Sobolev** com o **Corolário 6.9** do **[10, p. 101]**, conclui-se que

$$u_k \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\overline{B_1}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$u_k \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Além disso, para cada $k, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_m}\right)\langle u_k, u_m\rangle_f &= \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_m}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)u_k u_m \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mu_k}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)u_k u_m \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\mu_m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)u_k u_m \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mu_k}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} S u_k \cdot \boldsymbol{\nabla} u_m \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\mu_m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u_k \cdot \boldsymbol{\nabla} S u_m \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mu_k}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla}\left(\mu_k u_k\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} u_m \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\mu_m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u_k \cdot \boldsymbol{\nabla}\left(\mu_m u_m\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u_k \cdot \boldsymbol{\nabla} u_m \, \mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla} u_k \cdot \boldsymbol{\nabla} u_m \, \mathrm{d}x \\
&= 0,
\end{aligned}$$

isto é, para cada $k, m \in \mathbb{N}$,

$$\langle u_k, u_m\rangle_f = 0.$$

Logo, $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é ortogonal. Portanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. Suponha que $f \in C^{\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ de modo que, para algum $P \in C(\mathbb{R}^n)$ radialmente simétrica satisfazendo

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x) \, \mathrm{d}x < \infty,$$

tenhamos $0 < f(x) \leq P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então, existe uma base ortonormal completa $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(\mathbb{R}^n, f)$ e uma sequência de reais positivos (λ_k) tais que

$$\lambda_k \to \infty \text{ e } \lambda_k \leq \lambda_{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

e

$$\begin{cases} \Delta u_k + \lambda_k f(x) u_k = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \\ u_k \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \cap C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

O completamento do conjunto ortonormal $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ pode ser usado para mostrar que

$$\lambda_1 = \min_{v \neq 0} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} v(x)|^2 \, \mathrm{d}x}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)|v(x)|^2 \, \mathrm{d}x}. \tag{3.9}$$

Este fato, por sua vez, pode ser usado para mostrar que λ_1 é um autovalor simples, e que uma autofunção correspondente u_1 pode ser escolhido de modo que

$$u_1(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Na verdade, as autofunções correspondentes a λ_1 nunca se anulam em $\mathbb{R}^n$.

Observe que (3.9) junto com a **Desigualdade de Poincaré** (vide (3.5)) gera a seguinte limitação para λ_1: para algum $v \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} v(x)|^2 \mathrm{d}x}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)|v(x)|^2 \, \mathrm{d}x} \\ &\geq \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\nabla} v(x)|^2 \mathrm{d}x}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)|v(x)|^2 \, \mathrm{d}x} \\ &\geq \frac{1}{\dfrac{1}{n-2} \displaystyle\int_0^{\infty} P(\rho)\rho \, \mathrm{d}\rho} \\ &= \frac{n-2}{\displaystyle\int_0^{\infty} \rho P(\rho) \, \mathrm{d}\rho}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Até agora, tivemos êxito em mostrar que para $\lambda = \lambda_1$ a equação

$$\Delta u + \lambda f(x) u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n$$

tem uma solução positiva limitada, a saber u_1, que nunca se anula em $\mathbb{R}^n$ e tal que

$u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Em seguida abordaremos a questão de avaliar o decaimento de tal solução quando $|x| \to \infty$.

Para estudar o padrão assintótico de u_1, vamos primeiramente usar

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty$$

e o fato de que u_1 satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_1 + \lambda_1 f(x) u_1 = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \\ u_1(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty \\ |\boldsymbol{\nabla} u_1| \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

para obter a representação integral bem conhecida para u_1 como um potencial Newtoniano. Essa representação vai também ser válido para autofunções superiores. Ao longo do restante desta seção, também será assumido que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} u_1(x) \leq 1. \tag{3.11}$$

Da desigualdade (3.6) vemos que, se $\tilde{u}_1$ denota o média esférica de u_1, então

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(r) &= \tilde{u}_1(x) \\ &\leq \frac{|x|^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n(n-2)\omega_n}} \|\boldsymbol{\nabla} u_1\|_{L^2} \\ &= \frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{n(n-2)\omega_n}} \|\boldsymbol{\nabla} u_1\|_{L^2} \\ &= \frac{c}{r^{\frac{n-2}{2}}}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

para algum r suficientemente grande e algum $c > 0$ de modo que, se $n > 2$, então

$$\tilde{u}_1(r) \to 0 \text{ quando } r \to \infty.$$

Isso também segue do fato de que $u_1(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Para cada $r > 0$, considere o problema de contorno

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_1 f(x) u_1 \text{ em } B_r \\ \\ \quad v = u_1 \text{ sobre } \partial B_r. \end{cases} \tag{3.13}$$

Esse problema tem uma única solução v_r dada por

$$v_r(x) = -\lambda_1 \int_{B_r} G_r(x,y) f(y) u_1(y)\ \mathrm{d}y + \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \int_{|y|=r} \frac{u_1(y)}{|x-y|^n}\ \mathrm{d}\sigma_y, \tag{3.14}$$

onde

$$G_r(x,y) = \begin{cases} \Phi(|x-y|) - \Phi\left(\frac{|y|}{r}|x - \overline{y}|\right) \text{ se } y \neq 0 \\ \\ \Phi(|x|) - \Phi(r) \text{ se } y = 0 \end{cases}$$

e

$$\overline{y} = \frac{r^2}{|y|^2} y \text{ se } y \neq 0.$$

Pela unicidade da solução do problema de Dirichlet (3.13), temos

$$v_r(x) = u_1(x),\ \forall x \in B_r,\ \forall r > 0.$$

Fixe $x \in \mathbb{R}^n$ e escolha $r > 0$ tão grande que $r > 2|x|$, então

$$\begin{aligned} \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \int_{|y|=r} \frac{u_1(y)}{|x-y|^n}\ \mathrm{d}\sigma_y &= \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \left(\frac{1}{r^n} \int_{|y|=r} \frac{u_1(y)}{\left|\frac{x}{r} - \frac{y}{r}\right|^n}\ \mathrm{d}\sigma_y \right) \\ &= \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \left(\frac{1}{r} \int_{|\omega|=1} \frac{u_1(r\omega)}{\left|\frac{x}{r} - \omega\right|^n}\ \mathrm{d}\sigma_\omega \right) \\ &< \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \left(\frac{2^n}{r} \int_{|\omega|=1} u_1(r\omega)\ \mathrm{d}\sigma_\omega \right) \\ &= 2^n \left(1 - \frac{|x|^2}{r^2}\right) \left(\frac{1}{n\omega_n} \int_{|\omega|=1} u_1(r\omega)\ \mathrm{d}\sigma_\omega \right) \\ &= 2^n \left(1 - \frac{|x|^2}{r^2}\right) \tilde{u}_1(r), \end{aligned}$$

Assim, por (3.12),

$$\frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \int_{|y|=r} \frac{u_1(y)}{|x-y|^n}\ \mathrm{d}\sigma_y \to 0 \text{ quando } r \to \infty. \tag{3.15}$$

Agora, para cada $x \neq y$ e $r > 0$,

$$\begin{aligned}
|G_r(x,y) - \Phi(x-y)| &= \left| \left(\Phi(x-y) - \Phi\left(\frac{|y|}{r} |x - \overline{y}| \right) \right) - \Phi(x-y) \right| \\
&= \left| \Phi\left(\frac{|y|}{r} |x - \overline{y}| \right) \right| \\
&= \frac{\left| \frac{|y|}{r} |x - \overline{y}| \right|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n} \\
&= \frac{1}{n(n-2)\omega_n \left| \frac{|y|}{r} x - \frac{r}{|y|} y \right|^{n-2}}
\end{aligned}$$

Passando ao limite de $r \to \infty$,

$$\lim_{r \to \infty} |G_r(x,y) - \Phi(x-y)| = 0.$$

Daí,

$$G_r(x,y) \to \Phi(x-y) \text{ quando } r \to \infty.$$

Assim,

$$G_r(x,y) = |\Phi(x-y)| - \left| \Phi\left(\frac{|y|}{r} |x - \overline{y}| \right) \right| \leq |\Phi(x-y)|.$$

Observe que

$$\int\limits_{B_r} |\Phi(x-y)| f(y) u_1(y) \, \mathrm{d}y \leq \int\limits_{B_r} |\Phi(x-y)| P(|y|) \, \mathrm{d}y,$$

para cada $r > 0$. Usando **mudança de variável**, temos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_r} |\Phi(x-y)| f(y) u_1(y) \, \mathrm{d}y &\leq \int\limits_{B_r} |\Phi(y)| P(|x-y|) \, \mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{B_r} \frac{|y|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n} P(|x-y|) \, \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

para cada $r > 0$. Aplicando **coordenadas polares** e **Fubini**,

$$\int\limits_{B_r} |\Phi(x-y)| f(y) u_1(y) \, \mathrm{d}y \leq \frac{1}{n-2} \int_0^r \rho^{2-n} \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{B_\rho} P(|x-y|) \, \mathrm{d}\sigma_y \, \mathrm{d}\rho,$$

para cada $r > 0$. Fazendo novamente **mudança de variável**,

$$\int\limits_{B_r} |\Phi(x-y)| f(y) u_1(y) \, \mathrm{d}y \leq \frac{1}{n-2} \int_0^r \rho^{2-n} \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{B_\rho(x)} P(|y|) \, \mathrm{d}\sigma_y \, \mathrm{d}\rho,$$

para cada $r > 0$. Por propriedades de função radial,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_r} |\Phi(x-y)| f(y) u_1(y) \, \mathrm{d}y &\leq \frac{1}{n-2} \int_0^r \rho^{2-n} P(\rho) \rho^{n-1} \, \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^r \rho P(\rho) \, \mathrm{d}\rho \\
&\leq \frac{1}{n-2} \int_0^\infty \rho P(\rho) \, \mathrm{d}\rho \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

para cada $r > 0$. Portanto, pelo **Teorema da Convergência Dominada**,

$$-\int\limits_{B_r} G_r(x,y) f(y) u_1(y) \, \mathrm{d}y \to -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) u_1(y) \, \mathrm{d}y \tag{3.16}$$

quando $r \to \infty$, e de (3.14), usando (3.15) e (3.16), obtemos

$$u_1(x) = -\lambda_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) u_1(y) \, \mathrm{d}y. \tag{3.17}$$

Desde que a derivação só dependa do fato de

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x) \, \mathrm{d}x < \infty$$

e de u_1 ser uma solução limitada da equação em (3.13) que é assintótica a 0, podemos obter a mesma representação para autofunções superiores do problema (3.13), bem como outras soluções u da equação em (3.13) que satisfaz $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Vamos agora usar (3.17) juntamente com a seguinte asserção sobre P:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x) \, \mathrm{d}x < \infty, \tag{3.18}$$

para mostrar que u_1 decai da mesma forma que $|x|^{2-n}$ quando $|x| \to \infty$. Em coordenadas radiais, a condição (3.18) significa:

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} P(\rho)\ \mathrm{d}\rho < \infty.$$

Se não, vejamos. Usando (3.18), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \rho^{n-1} P(\rho)\ \mathrm{d}\rho &= \int_0^\infty \rho^{n-1} P(\rho) \left(\frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{\partial B_\rho} \mathrm{d}\sigma_x \right)\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_0^\infty P(\rho) \int\limits_{\partial B_\rho} \mathrm{d}\sigma_x\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_0^\infty \int\limits_{\partial B_\rho} P(x)\ \mathrm{d}\sigma_x\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)\ \mathrm{d}x \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Observe que esta condição resulta em

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty. \tag{3.19}$$

De fato, da mesma forma que a desigualdade anterior,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x &= \int_0^\infty \int\limits_{\partial B_\rho} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}\sigma_x\ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{2-n} P(\rho) \int\limits_{\partial B_\rho} \mathrm{d}\sigma_x\ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{2-n} P(\rho) \cdot n\omega_n \rho^{n-1}\ \mathrm{d}\rho \\
&= n\omega_n \int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&= n\omega_n \int_0^1 \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + n\omega_n \int_1^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&\leq n\omega_n \int_0^1 \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + n\omega_n \int_1^\infty \rho^{n-1} P(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Proposição 3.2. Suponha que $f, P \in C^{\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ de modo que

$$0 < f(x) \leq P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e P seja radialmente simétrico. Então, para $\lambda = \lambda_1$ a equação

$$\Delta u + \lambda f(x) u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n$$

tem uma solução u_1 limitada, positiva e $C^{2,\alpha}$ que satisfaz

$$|x|^{n-2} u_1(x) \leq C,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

para algum $C > 0$ que depende de λ_1, P e n.

Demonstração. Defina

$$\phi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y)| P(|y|)\ \mathrm{d}y,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

No capítulo anterior, definimos para cada $\rho > 0$ a função $I\colon \mathbb{R}^n \backslash \partial B_r \to \mathbb{R}$ como sendo

$$I(x) = \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}} = \begin{cases} n\omega_n \rho \left(\dfrac{\rho}{|x|}\right)^{n-2}, & \text{se } |x| > \rho \\ n\omega_n \rho, & \text{se } |x| < \rho. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y)| P(|y|)\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^\infty \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}}\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}}\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}}\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \cdot I(x)\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \cdot I(x)\ \mathrm{d}\rho \\
&\leq \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \cdot n\omega_n \rho\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \cdot n\omega_n \rho\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho,
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y)| P(|y|) \ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^\infty \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \int_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}} \ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \int_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}} \ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \int_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}} \ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \cdot I(x) \ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \cdot I(x) \ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \cdot n\omega_n \rho \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^{n-2} \ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty \frac{P(\rho)}{n\omega_n} \cdot n\omega_n \rho \ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} |x|^{2-n} \rho^{n-1} P(\rho) \ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho,
\end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, de modo que

$$\begin{aligned}
|x|^{n-2}\phi(x) &\leq \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} \rho^{n-1} P(\rho) \ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty |x|^{n-2} \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho \\
&\leq \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} \rho^{n-1} P(\rho) \ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty \rho^{n-2} \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^{|x|} \rho^{n-1} P(\rho) \ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_{|x|}^\infty \rho^{n-1} P(\rho) \ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^\infty \rho^{n-1} P(\rho) \ \mathrm{d}\rho, \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, usando (3.11) e (3.17)

$$\begin{aligned}
|x|^{n-2} u_1(x) &= |x|^{n-2} \left(-\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) u_1(y) \ \mathrm{d}y \right) \\
&\leq |x|^{n-2} \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y)| P(|y|) \sup_{\mathbb{R}^n} u_1(x) \ \mathrm{d}y \\
&\leq |x|^{n-2} \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y)| P(|y|) \ \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

e, agora, por (3.20)

$$\begin{aligned}
|x|^{n-2} u_1(x) &\leq \lambda_1 |x|^{n-2} \phi(x) \\
&\leq \frac{\lambda_1}{n-2} \int_0^\infty \rho^{n-1} P(\rho) \ \mathrm{d}\rho,
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e a desigualdade está estabelecida. $\square$

Agora é possível mostrar que $|x|^{n-2}u_1(x) \to c$ quando $x \to \infty$ para algum $c > 0$. De fato, pela **Proposição 3.2**,

$$\frac{|x|^{n-2}}{|x-y|^{n-2}} f(y)u_1(y) \leq C|x-y|^{2-n} f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{3.21}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{2-n} f(y) \ \mathrm{d}y &= \int_{|x-y|\geq 1} |x-y|^{2-n} f(y) \ \mathrm{d}y + \int_{|x-y|\leq 1} |x-y|^{2-n} f(y) \ \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{|x-y|\geq 1} P(y) \ \mathrm{d}y + \int_{|x-y|\leq 1} |x-y|^{2-n} P(y) \ \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} P(y) \ \mathrm{d}y + \int_{|x-y|\leq 1} |x-y|^{2-n} P(y) \ \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} P(y) \ \mathrm{d}y + \int_{|y|\leq 1+|x|} |x-y|^{2-n} P(y) \ \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P(y) \ \mathrm{d}y + \int_0^{1+|x|} P(r) I(x) \ \mathrm{d}r \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} P(y) \ \mathrm{d}y + \int_0^{1+|x|} P(r) n\omega_n r \ \mathrm{d}r \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} P(y) \ \mathrm{d}y + n\omega_n \int_0^{\infty} rP(r) \ \mathrm{d}r.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Multiplicando (3.17) por $|x|^{n-2}$,

$$|x|^{n-2}u_1(x) = -\frac{\lambda_1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{n-2}}{|x-y|^{n-2}} f(y)u_1(y) \ \mathrm{d}y. \tag{3.23}$$

Passando (3.23) ao limite quando $|x| \to \infty$, temos, pelo **Teorema da Convergência Dominada** devido a (3.21) e (3.22),

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{n-2}u_1(x) = c_n\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} f(y)u_1(y) \ \mathrm{d}y,$$

onde

$$c_n = \frac{1}{n(2-n)\omega_n}.$$

Combinando este fato com a **Proposição 3.2**, temos

Teorema 3.3. Suponha que $n \geq 3$ e que $f, P \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ de tal modo que

$$0 < f(x) \leq P(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e que P seja radialmente simétrica. Então, existe λ, a saber λ_1, para que a equação

$$\Delta u + \lambda f(x) u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \tag{λ}$$

tenha uma solução limitada positiva u que satisfaz

$$|x|^{n-2} u(x) \to c \text{ quando } |x| \to \infty,$$

para algum $c > 0$.

Observação 3.2. Podemos obter o mesmo resultado do teorema anterior se supusermos que

$$\limsup_{\rho \to \infty} \rho^2 P(\rho) < \infty.$$

De fato, seja $\sigma\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{1}{t^{n-2}}, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

Vamos denotar, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

(i) $m(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{2-n} P(y) \sigma(|y|) \, \mathrm{d}y;$

(ii) $I(x) = \displaystyle\int_{B_{\frac{|x|}{2}}(x)} |x - y|^{2-n} P(y) \sigma(|y|) \, \mathrm{d}y;$

(iii) $J(x) = \displaystyle\int_{|y-x| \geq \frac{|x|}{2}} |x - y|^{2-n} P(y) \sigma(|y|) \, \mathrm{d}y.$

É claro que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$m(x) = I(x) + J(x).$$

Por um lado, se $|x - y| \geq \dfrac{|x|}{2}$, então

$$|x - y|^{2-n} \leq |x|^{2-n} 2^{n-2}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|x|^{n-2}J(x) &\leq |x|^{n-2}|x|^{2-n}2^{n-2}\int_{|y-x|\geq\frac{|x|}{2}} P(y)|y|^{2-n}\ \mathrm{d}y \\
&\leq 2^{n-2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(y)|y|^{2-n}\ \mathrm{d}y \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, suponha que $\dfrac{|x|}{2} \leq |y| \leq \dfrac{3|x|}{2}$. O fato de

$$
\limsup_{\rho\to\infty} \rho^2 P(\rho) < \infty
$$

diz que existem $c > 0$ e $r_0 \geq 1$ tais que

$$
P(r) \leq \frac{c}{r^2},\ \forall r \geq r_0.
$$

Assim, se $|x| \geq 2r_0$, então

$$
|y| \geq r_0 \text{ e } P(y) \leq \frac{c}{|y|^2}.
$$

Daí,

$$
P(y)\sigma(|y|) \leq \frac{c}{|y|^2}\cdot\frac{1}{|y|^{n-2}} = \frac{c}{|y|^n} \leq \frac{c2^n}{|x|^n}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
|x|^{n-2}I(x) &\leq |x|^{n-2}\left(\frac{c2^{n-1}}{|x|^{n-1}}\int_{|x-y|\leq\frac{|x|}{2}} |x-y|^{2-n}\ \mathrm{d}y\right) \\
&= |x|^{n-2}\left(\frac{c2^n}{|x|^n} n\omega_n \frac{|x|^2}{4}\right) \\
&= |x|^{n-2}\left(\frac{2^{n-2}c}{|x|^{n-2}} n\omega_n\right) \\
&= 2^{n-1}cn\omega_n.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
|x|^{n-2}m(x) \leq 2^{n-1}n\omega_n c + 2^{n-2}\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho,\ \forall |x| \geq 2r_0. \tag{3.24}
$$

Observação 3.3. O **Teorema 3.3** mostra que a condição

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty, \tag{3.25}
$$

onde $P \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, é suficiente para a existência de uma solução positiva limitada u da equação (λ) decaindo como $|x|^{2-n}$ quando $|x| \to \infty$. Mas isso certamente não é uma condição necessária. Uma prova do **Teorema 3.1.3.** para f não simétrica baseada só na condição

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty, \tag{3.26}$$

no lugar de (3.25), ainda intriga os autores. Observe que no caso

$$0 < p(|x|) \leq f(x) \leq P(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $p(t) = cP(t)$ para todo $t \geq 0$ e alguma constante c com $0 < c < 1$, a condição (3.26) é necessária para a existência de uma solução positiva limitada u de (λ) decaindo como $|x|^{2-n}$. De fato, como para algum $c > 0$ temos

$$|x|^{n-2} u(x) \to c,\ \text{quando}\ |x| \to \infty,$$

existe $N > 0$ tal que, para algum $\delta > 0$, temos

$$\frac{|x|^{2-n}}{u(x)} \geq N,\ \forall |x| \geq \delta.$$

Como u é limitada, podemos definir

$$C = \frac{1}{c} \cdot \sup_{\mathbb{R}^n} u.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{|x|<\delta} |x|^{2-n} P(|x|)\ \mathrm{d}x + \int_{|x|\geq\delta} |x|^{2-n} P(|x|)\ \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^\delta \rho^{2-n} P(\rho) \int_{|x|=\rho} \mathrm{d}\sigma_x\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{c} \int_{|x|\geq\delta} |x|^{2-n} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= n\omega_n \int_0^\delta \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho - \frac{1}{c\lambda} \int_{|x|\geq\delta} \frac{|x|^{2-n}}{u(x)} \Delta u(x)\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x &\leq n\omega_n \int_0^\delta \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho - \frac{N}{c\lambda} \int_{|x|\geq\delta} \Delta u(x)\ \mathrm{d}x \\
&\leq n\omega_n \int_0^\delta \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + \frac{N}{c} \int_{|x|\geq\delta} f(x) u(x)\ \mathrm{d}x \\
&\leq n\omega_n \int_0^\delta \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + C \int_{\mathbb{R}^n} P(|x|)\ \mathrm{d}x \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

onde
$$C = \frac{N}{c}.$$
De maneira análoga, isso é também verdadeiro se assumirmos que
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{P(t)}{p(t)} < \infty.$$
Basta definir
$$L = \limsup_{t\to\infty} \frac{P(t)}{p(t)}$$
e considerar $\delta > 0$ de modo que
$$\frac{P(t)}{p(t)} < L + 1, \ \forall |x| \geq \delta.$$
Na verdade, suponha que existam constantes positivas c_1, c_2 e r tais que
$$c_1 \leq |x|^{n-2} u(x) \leq c_2, \ \forall |x| > r.$$
Usando a representação integral (3.17) para u, obtemos
$$\begin{aligned}
c_2 &\geq |x|^{n-2} u(x) \\
&= |x|^{n-2} \left(-\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) u(y) \ \mathrm{d}y \right) \\
&= \frac{\lambda}{n(n-2)\omega_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{n-2}}{|x-y|^{n-2}} f(y) u(y) \ \mathrm{d}y \\
&> \frac{\lambda}{n(n-2)\omega_n} \int_{r<|y|<|x|} \frac{|x|^{n-2}}{|x-y|^{n-2}} p(|y|) u(y) \ \mathrm{d}y \\
&\geq \frac{c_1\lambda}{n(n-2)\omega_n} \int_{r<|y|<|x|} \frac{|x|^{n-2}}{|x-y|^{n-2}} p(|y|) |y|^{2-n} \ \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{c_1\lambda}{n(n-2)\omega_n}\int_r^{|x|}\int\limits_{B_\rho}\frac{|x|^{n-2}}{|x-y|^{n-2}}p(|y|)|y|^{2-n}\,\mathrm{d}\sigma_y\,\mathrm{d}\rho\\
&= \frac{c_1\lambda}{n(n-2)\omega_n}\int_r^{|x|}\int\limits_{B_\rho}\frac{|x|^{n-2}}{|x-y|^{n-2}}\,\mathrm{d}\sigma_y\;p(\rho)\rho^{2-n}\,\mathrm{d}\rho\\
&\geq \frac{c_1\lambda}{n(n-2)\omega_n}\int_r^{|x|}\int\limits_{B_\rho}\frac{|x|^{n-2}}{(|x|+|y|)^{n-2}}\,\mathrm{d}\sigma_y\;p(\rho)\rho^{2-n}\,\mathrm{d}\rho\\
&\geq \frac{c_1\lambda}{n(n-2)\omega_n}\int_r^{|x|}\int\limits_{B_\rho}\frac{|x|^{n-2}}{2^{n-2}|x|^{n-2}}\,\mathrm{d}\sigma_y\;p(\rho)\rho^{2-n}\,\mathrm{d}\rho\\
&= \frac{c_1\lambda}{2^{n-2}(n-2)}\int_r^{|x|}\rho p(\rho)\,\mathrm{d}\rho,
\end{aligned}$$

para todo $|x|>r$. Logo,

$$\int_r^{\infty}\rho p(\rho)\,\mathrm{d}\rho \text{ é finito,}$$

e isso implica

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x|^{2-n}P(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty}\rho^{2-n}P(\rho)\;n\omega_n\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\\
&= n\omega_n\int_0^{\infty}\rho P(\rho)\,\mathrm{d}\rho\\
&= n\omega_n\int_0^{r}\rho P(\rho)\,\mathrm{d}\rho + n\omega_n\int_r^{\infty}\rho P(\rho)\,\mathrm{d}\rho\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Observação 3.4. Observe que λ para o qual (λ) tenha uma solução positiva limitada u que decai como $|x|^{2-n}$ é único. De fato, suponha que existam funções limitadas u e v em $C^2(\mathbb{R}^n)$, ambas estritamente positivas que satisfazem

$$\Delta u + \lambda f(x)u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e

$$\Delta v + \mu f(x)v = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

para algum λ e μ em $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Suponha também que

$$u(x)\to 0 \text{ e } v(x)\to 0 \text{ quando } |x|\to\infty$$

e que

$$|x|^{n-1}|\boldsymbol{\nabla} u(x)| = O(1) = |x|^{n-1}|\boldsymbol{\nabla} v(x)| \text{ quando } |x|\approx\infty.$$

Então,
$$|x|^{n-2}u(x) = O(1) = |x| \text{ quando } |x| \approx \infty.$$
Considere, para cada $r > 0$,

(i) $u(a_r) = \max\limits_{\partial B_r} u$;

(ii) $u(b_r) = \max\limits_{\partial B_r} \boldsymbol{\nabla} v$;

(iii) $u(c_r) = \max\limits_{\partial B_r} v$;

(iv) $u(d_r) = \max\limits_{\partial B_r} \boldsymbol{\nabla} u$.

Usando as **Identidades de Green**, temos
$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu)\int\limits_{B_r} f(x)uv \, \mathrm{d}x &= \int\limits_{B_r} (u(-\mu f(x)v) - v(-\lambda f(x)u)) \, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{B_r} (u\Delta v - v\Delta u) \, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\partial B_r} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta_x} - v\frac{\partial u}{\partial \eta_x} \right) \, \mathrm{d}\sigma_x.
\end{aligned}$$
Agora, usando a definição de derivada direcional na direção do vetor normal unitário exterior, inferimos que
$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu)\int\limits_{B_r} f(x)uv \, \mathrm{d}x &= \int\limits_{\partial B_r} \left(u\left(\boldsymbol{\nabla} v \cdot \eta_x\right) - v\left(\boldsymbol{\nabla} u \cdot \eta_x\right)\right) \, \mathrm{d}\sigma_x \\
&= \int\limits_{\partial B_r} (u\boldsymbol{\nabla} v - v\boldsymbol{\nabla} u) \cdot \eta_x \, \mathrm{d}\sigma_x.
\end{aligned}$$
Finalmente, usando a definição de máximo, concluímos
$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu)\int\limits_{B_r} f(x)uv \, \mathrm{d}x &\leq \int\limits_{\partial B_r} (|u||\boldsymbol{\nabla} v| + |v||\boldsymbol{\nabla} u|) \, \mathrm{d}\sigma_x \\
&\leq \int\limits_{\partial B_r} (|u(a_r)||\boldsymbol{\nabla} v(b_r)| + |v(c_r)||\boldsymbol{\nabla} u(d_r)|) \, \mathrm{d}\sigma_x \\
&= n\omega_n r^{n-1}(|u(a_r)||\boldsymbol{\nabla} v(b_r)| + |v(c_r)||\boldsymbol{\nabla} u(d_r)|) \\
&= n\omega_n(|u(a_r)||b_r|^{n-1}|\boldsymbol{\nabla} v(b_r)| + |v(c_r)||d_r|^{n-1}|\boldsymbol{\nabla} u(d_r)|),
\end{aligned}$$
para todo $r > 0$. Passando ao limite quando $r \to \infty$,
$$(\lambda - \mu)\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)v(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

de modo que $\lambda = \mu$, uma vez que f, u e v são positivos. O fato de que

$$|x|^{n-1}|\boldsymbol{\nabla} u(x)| = O(1) \text{ quando } |x| \to \infty$$

segue da representação integral de u que gera a estimativa

$$|x|^{n-1}|\boldsymbol{\nabla} u(x)| \leq \frac{\lambda}{\omega_n\sqrt{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{n-1}}{|x-y|^{n-1}} P(|y|)u(y) \; \mathrm{d}y. \tag{3.27}$$

Para demonstrar (3.27), fixamos $x \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= -\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x-y) f(y)u(y) \; \mathrm{d}y \\
&= -\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(x_i - y_i)|x-y|^{-n}}{n\omega_n} f(y)u(y) \; \mathrm{d}y \\
&= -\frac{\lambda}{n\omega_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (x_i - y_i)|x-y|^{-n} f(y)u(y) \; \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|x|^{n-1}|\boldsymbol{\nabla} u(x)| &\leq |x|^{n-1} \left(\frac{\lambda}{n\omega_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n+1} f(y)u(y) \; \mathrm{d}y \right) \\
&\leq \frac{\lambda}{\omega_n\sqrt{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{n-1}}{|x-y|^{n-1}} P(y)u(y) \; \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Por outro lado, podemos considerar para cada $r > 0$ a função $I_1 \colon \mathbb{R}^n \backslash S_r \to \mathbb{R}$ dada por

$$I_1(x) = \int_{|y|=r} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-1}} = \begin{cases} n\omega_n, \text{ se } |x| < r \\ n\omega_n \left(\dfrac{r}{|x|}\right)^{n-1}, \text{ se } |x| > r. \end{cases}$$

Como u é limitado, temos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{n-1}}{|x-y|^{n-1}} P(y)u(y) \; \mathrm{d}y &= \int\limits_{|y| \leq |x|} \frac{|x|^{n-1}}{|x-y|^{n-1}} P(y)u(y) \; \mathrm{d}y + \int\limits_{|y| \geq |x|} \frac{|x|^{n-1}}{|x-y|^{n-1}} P(y)u(y) \; \mathrm{d}y \\
&\leq \int_0^{|x|} |x|^{n-1} P(r) \|u\|_\infty I_1(x) \; \mathrm{d}r + \int_{|x|}^{\infty} |x|^{n-1} P(r) \|u\|_\infty I_1(x) \; \mathrm{d}y \\
&= \|u\|_\infty n\omega_n \int_0^{|x|} r^{n-1} P(r) \; \mathrm{d}r + \|u\|_\infty n\omega_n \int_{|x|}^{\infty} |x|^{n-1} P(r) \; \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{n-1}}{|x-y|^{n-1}} P(y)u(y)\ \mathrm{d}y \leq \|u\|_\infty n\omega_n \int_0^{|x|} r^{n-1}P(r)\ \mathrm{d}r + \|u\|_\infty n\omega_n \int_{|x|}^\infty r^{n-1}P(r)\ \mathrm{d}r$$

$$= \|u\|_\infty n\omega_n \int_0^\infty r^{n-1}P(r)\ \mathrm{d}r. \tag{3.28}$$

Combinando (3.27) com (3.28), concluímos que

$$|x|^{n-1}|\boldsymbol{\nabla} u(x)| \leq \lambda \|u\|_\infty \sqrt{n} \int_0^\infty r^{n-1}P(r)\ \mathrm{d}r.$$

3.2 Problema semilinear de autovalor

Esta seção trata da perturbação não linear do problema linear estudado na seção anterior. Vamos primeiramente provar um resultado que se aplica a perturbações não lineares limitadas.

Lema 3.3. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $P \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |y-x|^{1-n} P(y)\sigma(|y|)\ \mathrm{d}y \leq 2\|P\|_\infty n\omega_n + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^{2-n}P(y)\ \mathrm{d}y.$$

Demonstração. Vamos denotar por

$$m(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y-x|^{1-n}P(y)\sigma(|y|)\ \mathrm{d}y$$

e por

$$I = \int_{B_1(x)} |y-x|^{1-n}P(y)\sigma(|y|)\ \mathrm{d}y$$

$$J = \int_{B_1 \cap B_1(x)^c} |y-x|^{1-n}P(y)\sigma(|y|)\ \mathrm{d}y$$

$$K = \int_{B_1^c \cap B_1(x)^c} |y-x|^{1-n}P(y)\sigma(|y|)\ \mathrm{d}y.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{B_1(x)} |y-x|^{1-n} P(y)\sigma(|y|) \ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_{\partial B_\rho(x)} |y-x|^{1-n} P(y)\sigma(|y|) \ \mathrm{d}\sigma_y \ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^1 P(\rho)\sigma(\rho) \int_{\partial B_\rho(x)} |y-x|^{1-n} \ \mathrm{d}\sigma_y \ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^1 P(\rho)\sigma(\rho) \int_{\partial B_\rho(x)} \rho^{1-n} \ \mathrm{d}\sigma_y \ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^1 P(\rho)\sigma(\rho)\rho^{1-n} \cdot n\omega_n \rho^{n-1} \ \mathrm{d}\rho \\
&= n\omega_n \int_0^1 P(\rho)\sigma(\rho) \ \mathrm{d}\rho \\
&\leq n\omega_n \int_0^1 \|P\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \ \mathrm{d}\rho \\
&= n\omega_n \|P\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$
y \in B_1(x)^c \cap B_1 \Longrightarrow |y-x| \leq 1.
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{B_1 \cap B_1(x)^c} |y-x|^{1-n} P(y)\sigma(|y|) \ \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{B_1 \cap B_1(x)^c} \|P\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \ \mathrm{d}y \\
&= n\omega_n \|P\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Finalmente, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$
y \in B_1(x)^c \cap B_1^c \Longrightarrow |y-x|^{1-n} \text{ e } \sigma(|y|) = |y|^{2-n}.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
K &= \int_{B_1^c \cap B_1(x)^c} |y-x|^{1-n} P(y)\sigma(|y|) \ \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{B_1^c \cap B_1(x)^c} P(y)|y|^{2-n} \ \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} P(y)|y|^{2-n} \ \mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo,

$$m(x) \leq 2\|P\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} P(y)|y|^{2-n} \, \mathrm{d}y, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Teorema 3.4. Assuma que $f \in C^\alpha_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, para algum $0 < \alpha < 1$, que $p, P \in C(\mathbb{R}^+)$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(|x|) \, \mathrm{d}x < \infty \tag{3.29}$$

e que

$$0 < p(|x|) \leq f(x) \leq P(|x|), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $g \in C(\mathbb{R})$ uma função não decrescente de modo que $\frac{g(\cdot)}{\cdot}$ seja limitada em $[0, \infty)$ e que satisfaz

$$\limsup_{\xi \to \infty} \frac{g(\xi)}{\xi} < \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho) \, \mathrm{d}\rho} \tag{3.30}$$

e

$$\liminf_{\xi \to 0^+} \frac{g(\xi)}{\xi} > \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1} P(\rho) \, \mathrm{d}\rho}. \tag{3.31}$$

Então, existe uma solução positiva u de

$$-\Delta u = f(x) g(u) \text{ em } \mathbb{R}^n$$

que satisfaz $|x|^{n-2} u(x) \to c$ quando $|x| \to \infty$, para alguma constante positiva c.

Demonstração. Seja, para cada $k > 0$,

$$\mathcal{C}_k = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \frac{1}{k}\sigma(|x|) \leq u(x) \leq k\sigma(|x|), \ \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Considere a função $T\colon C(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) g(u(y)) \, \mathrm{d}y, \tag{3.32}$$

para todo $u \in C(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

A existência seguirá do **Teorema do ponto fixo de Schauder** se pudermos mostrar que $T\colon \mathcal{C}_k \hookrightarrow \mathcal{C}_k$ para algum k positivo e que T é completamente contínuo em $\mathcal{C}_k$.

Fixado $k > 0$, considere $u \in \mathcal{C}_k$. Desde que $f \leq P$ e g seja não decrescente

$$Tu(x) \leq \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g(k\sigma(|y|)) \, \mathrm{d}y,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Se $x \in \mathcal{C}_k$, com $|x| < 1$, então

$$\begin{aligned}
Tu(x) &\leq \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g(k\sigma(|y|)) \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^\infty \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g(k\sigma(|y|)) \,\mathrm{d}\sigma_y \,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^\infty P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \int\limits_{\partial B_\rho} |y-x|^{2-n} \,\mathrm{d}\sigma_y \,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^\infty P(\rho) g(k\sigma(\rho)) I(x) \,\mathrm{d}\rho \\
&\leq \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^\infty P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \rho^{2-n} \cdot n\omega_n \rho^{n-1} \,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^\infty \rho P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \,\mathrm{d}\rho \\
&\leq \frac{1}{n-2} \int_0^\infty \rho P(\rho) g(k) \,\mathrm{d}\rho \\
&= k \frac{g(k)}{k} \frac{1}{n-2} \int_0^\infty \rho P(\rho) \,\mathrm{d}\rho. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Denote

$$L = \lim_{\xi \to \infty} \frac{g(\xi)}{\xi},$$

o que nos permite denotar também

$$\varepsilon = \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho) \,\mathrm{d}\rho} - L > 0.$$

Por (3.30), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{g(k)}{k} \leq L + \varepsilon = \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho) \,\mathrm{d}\rho}, \ \forall k \geq k_0. \qquad (3.34)$$

Assim, por (3.33) e (3.34),

$$Tu(x) \leq k \left(\frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho) \,\mathrm{d}\rho} \right) \frac{1}{n-2} \int_0^\infty \rho P(\rho) \,\mathrm{d}\rho = k, \qquad (3.35)$$

para todo $k \geq k_0$. Agora, usaremos novamente a função $I \colon \mathbb{R}^n \backslash S_\rho \to \mathbb{R}$, do capítulo anterior, definida por

$$I(x) = \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}} = \begin{cases} n\omega_n \rho \left(\dfrac{\rho}{|x|} \right)^{n-2}, \text{ se } |x| > \rho \\ n\omega_n \rho, \text{ se } |x| < \rho, \end{cases}$$

para cada $\rho > 0$. Assim, se $x \in \mathcal{C}_k$, com $|x| \geq 1$, então

$$
\begin{aligned}
Tu(x) &\leq c_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g(k\sigma(|y|))\ \mathrm{d}y \\
&= c_n \int_0^\infty \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g(k\sigma(|y|))\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho \\
&= c_n \int_0^1 P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|y-x|^{n-2}}\ \mathrm{d}\rho + c_n \int_1^\infty P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|y-x|^{n-2}}\ \mathrm{d}\rho \\
&= c_n \int_0^1 P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \cdot I(x)\ \mathrm{d}\rho + c_n \int_1^\infty P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \cdot I(x)\ \mathrm{d}\rho \\
&= c_n \int_0^1 P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \cdot n\omega_n \rho \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^{n-2} \mathrm{d}\rho + c_n \int_1^\infty P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \cdot n\omega_n \rho \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^{n-2} \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^1 |x|^{2-n} \rho^{n-1} P(\rho) g(k\sigma(\rho))\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_1^\infty |x|^{2-n} \rho^{n-1} P(\rho) g(k\sigma(\rho))\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^1 |x|^{2-n} \rho^{n-1} P(\rho) g(k)\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_1^\infty |x|^{2-n} \rho^{n-1} P(\rho) g(k\rho^{2-n})\ \mathrm{d}\rho \\
&= k \frac{|x|^{2-n}}{n-2} \left(\frac{g(k)}{k} \int_0^1 \rho^{n-1} P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_1^\infty \rho P(\rho) \frac{g(k\rho^{2-n})}{k\rho^{2-n}}\ \mathrm{d}\rho \right), \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

onde

$$c_n = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}.$$

Seja, para cada $\rho \geq 1$ e $k \geq 1$,

$$q_k(\rho) = \rho P(\rho) \frac{g(k\rho^{2-n})}{k\rho^{2-n}}.$$

Desde que $\frac{g(\cdot)}{\cdot}$ seja limitado em $[0, \infty)$ por uma constante C positiva, digamos, temos

$$0 \leq q_k(\rho) < C_\rho P(\rho),\ \forall \rho \geq 1,$$

onde

$$C_\rho = \rho C.$$

Por isso, desde que $\rho P(\rho) \in L^1([0, \infty))$ por (3.29), temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty q_k(\rho)\ \mathrm{d}\rho &< \int_0^\infty \rho P(\rho) \frac{g\left(k\rho^{2-n}\right)}{k\rho^{2-n}}\ \mathrm{d}\rho \\
&\leq \sup_{\xi \in [0,\infty)} \frac{g(\xi)}{\xi} \int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

para cada $k \geq 1$. Logo,

$$q_k \in L^1([0,\infty)),\ \forall k \geq 1.$$

Agora, seja, para cada $k \geq 1$, a função $h_k\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h_k(\rho) = \sup_{j \geq k} q_j(\rho),\ \forall \rho \in [0,\infty).$$

Então, para cada $k \geq 1$ e $\rho \geq 1$,

$$0 \leq q_j(\rho) < C_\rho P(\rho),\ \forall j \geq k,$$

ou seja, para cada $k \geq 1$ e $\rho \geq 1$, podemos afirmar que $\rho P(\rho)$ é uma cota superior de $\{q_j(\rho)\}_{j \geq k}$. Assim,

$$0 \leq h_k(\rho) \leq C_\rho P(\rho),\ \forall \rho \geq 1.$$

Portanto,

$$h_k \in L^1([0,\infty)),\ \forall k \geq 1.$$

Por outro lado, para cada $k \geq 1$,

$$\int\limits_{[1,\infty)} h_k \geq \int\limits_{[1,\infty)} q_j,\ \forall j \geq k.$$

Logo, para cada $k \geq 1$,

$$\int\limits_{[1,\infty)} h_k \geq \sup_{j \geq k} \int\limits_{[1,\infty)} q_j.$$

Esta desigualdade juntamente com o **Teorema da Convergência Dominada** implica que

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \int_1^\infty q_k(\rho) &\leq \int_1^\infty \limsup_{k\to\infty} h_k(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^\infty \limsup_{k\to\infty} \left(\sup_{j\geq k} \rho P(\rho) \frac{g(j\rho^{2-n})}{j\rho^{2-n}} \right)\ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^\infty \rho P(\rho) \limsup_{k\to\infty} \left(\sup_{j\geq k} \frac{g(j\rho^{2-n})}{j\rho^{2-n}} \right)\ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^\infty \rho P(\rho) \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{j\geq k} \frac{g(j\rho^{2-n})}{j\rho^{2-n}} \right)\ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^\infty \rho P(\rho) \limsup_{k\to\infty} \frac{g(k\rho^{2-n})}{k\rho^{2-n}}\ \mathrm{d}\rho \\
&\leq \int_1^\infty \rho P(\rho) \limsup_{k\to\infty} \frac{g(k)}{k}\ \mathrm{d}\rho \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{g(k)}{k} \int_1^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Por (3.36), temos para cada $|x| \geq 1$ e $u \in \mathcal{C}_k$

$$
\begin{aligned}
Tu(x) &\leq k\frac{|x|^{2-n}}{n-2}\left(\frac{g(k)}{k}\int_0^1 \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + \int_1^\infty \rho P(\rho)\frac{g\left(k\rho^{2-n}\right)}{k\rho^{2-n}}\ \mathrm{d}\rho\right)\\
&\leq k\frac{|x|^{2-n}}{n-2}\left(\frac{g(k)}{k}\int_0^1 \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + \limsup_{k\to\infty}\frac{g(k)}{k}\int_1^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho\right)\\
&\leq k\frac{|x|^{2-n}}{n-2}\left(\frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho}\int_0^1 \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho}\int_1^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho\right)\\
&= \frac{k}{|x|^{n-2}},\ \forall k \geq k_0. \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Combinando (3.35) e (3.37), temos, para todo $k \geq k_0$,

$$Tu(x) \leq k\sigma(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathcal{C}_k$$

Por outro lado, desde que

$$f(x) \geq p(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e g seja não decrescente, temos, se $u \in \mathcal{C}_k$, então, para todo $k > 0$,

$$
\begin{aligned}
Tu(x) &\geq \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{p(|y|)}{|y-x|^{n-2}}g\left(\frac{\sigma(|y|)}{k}\right)\ \mathrm{d}y\\
&\geq \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_{|y|<1} \frac{p(|y|)}{|y-x|^{n-2}}g\left(\frac{\sigma(|y|)}{k}\right)\ \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
Tu(x) &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n}g\left(\frac{1}{k}\right)\int_{|y|<1}\frac{p(|y|)}{|y-x|^{n-2}}\ \mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{n(n-2)\omega_n}g\left(\frac{1}{k}\right)\int_0^1\int\limits_{\partial B_\rho}\frac{p(|y|)}{|y-x|^{n-2}}\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
Tu(x) &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n}g\left(\frac{1}{k}\right)\int_0^1 p(\rho)\int\limits_{\partial B_\rho}|y-x|^{2-n}\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho\\
&= \frac{1}{n(n-2)\omega_n}g\left(\frac{1}{k}\right)\int_0^1 p(\rho)\int\limits_{\partial B_\rho(-x)}|y|^{2-n}\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho\\
&= \frac{1}{n(n-2)\omega_n}g\left(\frac{1}{k}\right)\int_0^1 p(\rho)\rho^{2-n}\cdot n\omega_n\rho^{n-1}\ \mathrm{d}\rho.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&= g\left(\frac{1}{k}\right)\frac{1}{n-2}\int_0^1 \rho p(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&\geq g\left(\frac{1}{k}\right)\frac{\sigma(|x|)}{n-2}\int_0^1 \rho p(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{k}\frac{g\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\frac{\sigma(|x|)}{n-2}\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\ \mathrm{d}\rho.
\end{aligned}
$$

Por (3.31), temos para todo $k \geq k_0$

$$
Tu(x) \geq \frac{\sigma(|x|)}{k},\ \forall x \in \mathbb{R}^n.
$$

Portanto, para k suficientemente grande, $\mathcal{C}_k$ é invariante sob T.

Para completar a parte da existência, precisamos verificar (i) e (ii) como segue

(i) T é contínua com respeito a topologia da convergência uniforme em $\mathcal{C}_k$.

(ii) $\overline{T(\mathcal{C}_k)}$ é compacto com respeito a topologia mencionada anteriormente.

Demonstração de (i). De fato, considere uma sequência (u_m) em $\mathcal{C}_k$ que converge para algum $u \in \mathcal{C}_k$ com respeito a topologia da convergência uniforme. Como

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(x)\ \mathrm{d}x < \infty,
$$

concluímos, pelo **Teorema 1.4**, que P cumpre a propriedade (H). Pelo **Lema 1.3**,

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P(y)}{|x-y|^{n-2}}\ \mathrm{d}y < \infty.
$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$
g(k\sigma(y)) < \frac{\varepsilon}{\dfrac{4}{n-2}\displaystyle\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho},\ \forall |y| > \delta.
$$

Como g é contínua, conclui-se que g é uniformemente contínua em $[-k,k]$. Assim, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$
z, w \in [-k,k],\ |z-w| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - g(w)| < \frac{\varepsilon}{2\displaystyle\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho}.
$$

Como $u_m \to u$ uniformemente em $\mathbb{R}^n$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$
m \geq m_0 \Rightarrow |u_m(z) - u(z)| < \delta_2,\ \forall z \in \mathbb{R}^n.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|Tu_m(x) - Tu(x)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y-x)f(y)|g(u_m) - g(u)| \ \mathrm{d}y \\
&= c_n \int\limits_{|y|\leq\delta} \Phi(y-x)f(y)|g(u_m) - g(u)| \ \mathrm{d}y + \int\limits_{|y|>\delta} \Phi(y-x)f(y)|g(u_m) - g(u)| \ \mathrm{d}y \\
&\leq \int\limits_{|y|\leq\delta} \Phi(y-x)f(y)|g(u_m) - g(u)| \ \mathrm{d}y + 2\int\limits_{|y|>\delta} \Phi(y-x)f(y)|g(k\sigma(y))| \ \mathrm{d}y \\
&< \varepsilon \cdot \frac{\displaystyle\int\limits_{|y|\leq\delta} \Phi(y-x)f(y) \ \mathrm{d}y}{\displaystyle\frac{2}{n-2}\int_0^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho} + 2\varepsilon \cdot \frac{\displaystyle\int\limits_{|y|\leq\delta} \Phi(y-x)f(y) \ \mathrm{d}y}{\displaystyle\frac{4}{n-2}\int_0^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho} \\
&\leq \varepsilon \cdot \frac{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y-x)f(y) \ \mathrm{d}y}{\displaystyle\frac{2}{n-2}\int_0^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho} + 2\varepsilon \cdot \frac{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y-x)f(y) \ \mathrm{d}y}{\displaystyle\frac{4}{n-2}\int_0^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

para todo $m \geq m_0$. $\square$

Demonstração de (ii). Dada uma sequência (u_m) em $\mathcal{C}_k$, denotemos, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$v_m = Tu_m.$$

Assim,

$$Tu_m(x) \leq k\sigma(|x|) \leq k,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $m \in \mathbb{N}$. Logo, (v_m) é equilimitada. Observe que, para cada $x, z \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
\Phi(y-x) - \Phi(y-z) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y-x+t(x-z)) \ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \boldsymbol{\nabla}\Phi(y-x+t(x-z)) \cdot (x-z) \ \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

para todo $y \notin \{(1-t)x + tz \colon t \in [0,1]\}$, e assim,

$$
\begin{aligned}
|\Phi(y-x) - \Phi(y-z)| &\leq |x-z| \int_0^1 |\boldsymbol{\nabla}\Phi(y-x+t(x-z))| \ \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{|x-z|}{n\omega_n} \int_0^1 |y-(1-t)x-tz|^{1-n} \ \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Daí, pelo **lema anterior**,

$$
\begin{aligned}
|v_m(x) - v_m(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Phi(y-x) - \Phi(y-z)\right) P(y) g(u)\, \mathrm{d}y \right| \\
&\leq Mk \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(y-z) - \Phi(y-x)| P(y)\sigma(|y|)\, \mathrm{d}y \\
&\leq Mk \frac{|x-z|}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 |y - (1-t)x - tz|^{1-n} \right) P(y)\sigma(|y|)\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{Mk}{n\omega_n} |x-z| \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |y-(1-t)x - tz|^{1-n} P(y)\sigma(|y|)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{Mk}{n\omega_n} |x-y| \int_0^1 m((1-t)x + ty)\, \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{MkN_0}{n\omega_n} |x-y|,
\end{aligned}
$$

Logo, (v_m) é equicontínua em $\mathbb{R}^n$. Pelo **Teorema de Arzelá-Ascoli**, existe uma subsequência convergente (v_{1j}) de (v_m). Usando recursivamente o **Teorema de Arzelá-Ascoli**, podemos considerar, para cada $i \in \mathbb{N}$, uma subsequência convergente $(v_{(i+1)j})$ de (v_{ij}). Denote, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$v_{m_i} = v_{ii}.$$

Dados $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta^{2-n} < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Por outro lado, existe $i_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$i, j \geq i_\delta \Rightarrow \left| v_{m_i}(x) - v_{m_j}(x) \right| < \varepsilon, \ \forall x \in \overline{B_\delta}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left| v_{m_i}(x) - v_{m_j}(x) \right| &\leq |v_{m_i}(x)| + \left| v_{m_j}(x) \right| \\
&\leq 2k\sigma(|x|) \\
&\leq 2k|x|^{2-n} \\
&\leq 2k\delta^{2-n} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_\delta}$. Logo,

$$i, j \geq i_\delta \Rightarrow \left| v_{m_i}(x) - v_{m_j}(x) \right| < \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

isto é, a sequência (v_{m_i}) converge em $\mathcal{C}_k$. Portanto, $\overline{T(\mathcal{C}_k)}$ é compacto. □

Os itens (i) e (ii), pelo **Teorema do ponto de fixo de Schauder**, completam o resultado. $\square$

Observação 3.5. Se $g(\xi) = \lambda\xi$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, então

$$\lambda = \limsup_{\xi\to\infty} \frac{g(\xi)}{\xi} = \liminf_{\xi\to 0^+} \frac{g(\xi)}{\xi}.$$

Assim, o resultado no **Teorema 3.4** não se aplica para este caso uma vez que

$$\frac{n-2}{\displaystyle\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\, \mathrm{d}\rho} > \frac{n-2}{\displaystyle\int_0^1 \rho p(\rho)\, \mathrm{d}\rho}.$$

Exemplo 3.1. Seja $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(\xi) = \lambda \arctan(\xi),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Como

$$|\arctan(\xi)| \leq \pi,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

temos

$$\begin{aligned}\limsup_{\xi\to\infty} \frac{g(\xi)}{\xi} &\leq \lambda \limsup_{\xi\to\infty} \frac{\pi}{\xi}\\ &= 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\limsup_{\xi\to\infty} \frac{g(\xi)}{\xi} = 0 < \frac{n-2}{\int_0^1 \rho p(\rho)\, \mathrm{d}\rho}.$$

Além disso, por **L'Hospital**,

$$\begin{aligned}\liminf_{\xi\to 0^+} \frac{g(\xi)}{\xi} &= \liminf_{\xi\to 0^+} \frac{\lambda\arctan(\xi)}{\xi}\\ &= \lambda \liminf_{\xi\to 0^+} \frac{\arctan(\xi)}{\xi}\\ &= \lambda \lim_{\xi\to 0^+} \frac{\arctan(\xi)}{\xi}\\ &= \lambda \lim_{\xi\to 0^+} \frac{1}{1+\xi^2}\\ &= \lambda\\ &> \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\, \mathrm{d}\rho}.\end{aligned}$$

Assim, existe uma função $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$-\Delta u = \lambda f(x) \arctan(u) \text{ em } \mathbb{R}^n \tag{3.38}$$

e também $|x|^{n-2}u(x) \to c$ quando $|x| \to \infty$, para algum $c > 0$. Na verdade, o resultado mais geral que se segue é verdadeiro.

Corolário 3.1. Assuma que $f \in C^{\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, para algum $0 < \alpha < 1$, que $p, P \in C(\mathbb{R}^+)$, de modo que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(|x|)\ \mathrm{d}x < \infty. \tag{3.39}$$

e que

$$0 < p(|x|) \leq f(x) \leq P(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Suponha que g seja uma função real limitada diferenciável em $\mathbb{R}$ que satisfaz

(i) $g(0) = 0$;

(ii) $g'(0) > 0$;

(iii) $g'(\xi) \geq 0,\ \forall \xi \in [0, \infty)$.

Se, para algum $\lambda > 0$,

$$\lambda g'(0) > \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\ \mathrm{d}\rho},$$

então existe uma função $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$-\Delta u = \lambda f(x) g(u) \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e também $|x|^{n-2}u(x) \to c$ quando $|x| \to \infty$, para alguma constante positiva c.

Demonstração. Considere $h = \lambda g$. Como $g'(\xi) \geq 0$, para todo $\xi \in [0, \infty)$, concluímos que h é monótona não decrescente. Agora, resta-nos mostrar que

$$\limsup_{\xi \to \infty} \frac{h(\xi)}{\xi} < \frac{n-2}{\int_0^1 \rho p(\rho)\ \mathrm{d}\rho}$$
$$\liminf_{\xi \to 0^+} \frac{h(\xi)}{\xi} > \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\ \mathrm{d}\rho}.$$

Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe $k_\xi \in (0, \xi)$, para cada $\xi \in [0, \infty)$, tal que

$$g(\xi) = g(\xi) - g(0) = g'(k_\xi)(\xi - 0) = g'(k_\xi)\xi.$$

Assim,

$$\frac{h(\xi)}{\xi} = \frac{\lambda g(\xi)}{\xi} = \frac{\lambda g'(k_\xi)\xi}{\xi} = \lambda g'(k_\xi)$$

Passando ao limite inferior quando $\xi \to 0^+$, temos, por hipótese,

$$\liminf_{\xi \to 0^+} \frac{h(\xi)}{\xi} = \lambda g'(0) > \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\ \mathrm{d}\rho}.$$

Por outro lado, como g é limitado, temos

$$\frac{h(\xi)}{\xi} = \frac{\lambda g(\xi)}{\xi} \leq \lambda \frac{\sup g}{\xi}, \ \forall \xi \in [0, \infty).$$

Passando ao limite superior quando $\xi \to \infty$,

$$\limsup_{\xi \to \infty} \frac{h(\xi)}{\xi} = 0 < \frac{n-2}{\int_0^1 \rho p(\rho) \, \mathrm{d}\rho},$$

o que conclui o resultado. $\square$

Para lidar com o caso de perturbações sublineares do problema linear, devemos impor restrições adicionais à não linearidade g, bem como ao coeficiente f. Estas são precisamente declaradas no seguinte resultado.

Teorema 3.5. Assuma que $f \in C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, para algum $0 < \alpha < 1$, que $p, P \in C(\mathbb{R}^+)$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(|x|) \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{3.40}$$

e que

$$0 < p(|x|) \leq f(x) \leq P(|x|), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $g \in C(\mathbb{R})$ uma função não decrescente. Assuma que $\frac{g(\xi)}{\xi}$ seja não crescente em $(0, \infty)$ e que

$$\int_1^{\infty} \rho^{n-1} g(\rho^{2-n}) P(\rho) \, \mathrm{d}\rho < \infty \tag{3.41}$$

Se

$$\limsup_{\xi \to \infty} \frac{g(\xi)}{\xi} < \frac{n-2}{\int_0^{\infty} \rho P(\rho) \, \mathrm{d}\rho} \tag{3.42}$$

e

$$\liminf_{\xi \to 0^+} \frac{g(\xi)}{\xi} > \frac{n-2}{\int_0^{\infty} \rho^{n-1} p(\rho) \, \mathrm{d}\rho}, \tag{3.43}$$

então existe uma função $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$-\Delta u = f(x) g(u) \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e também

$$|x|^{n-2} u(x) \to c \text{ quando } |x| \to \infty,$$

para algum $c > 0$.

Demonstração. Seja $\sigma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{1}{t^{n-2}}, \text{ se } t \geq 1 \end{cases}$$

e, para cada $k > 0$,

$$\mathcal{C}_k = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \frac{1}{k}\sigma(|x|) \leq u(x) \leq k\sigma(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Considere a função $T\colon C(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$T(u)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)g(u(y))\ \mathrm{d}y, \tag{3.44}$$

para todo $u \in C(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

A existência seguirá do **Teorema do ponto fixo de Schauder** se pudermos mostrar que $T\colon \mathcal{C}_k \hookrightarrow \mathcal{C}_k$ para algum k positivo e que T é completamente contínuo em $\mathcal{C}_k$.

Fixado $k > 0$, considere $u \in \mathcal{C}_k$. Desde que $f \leq P$ e g seja não decrescente

$$T(u)(x) \leq \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g(k\sigma(|y|))\ \mathrm{d}y,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Se $|x| < 1$, então

$$\begin{aligned} T(u)(x) &\leq \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g(k\sigma(|y|))\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^\infty \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g(k\sigma(|y|))\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^\infty P(\rho)g(k\sigma(\rho)) \int\limits_{\partial B_\rho} |y-x|^{2-n}\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^\infty P(\rho)g(k\sigma(\rho)) \int\limits_{\partial B_\rho(-x)} |y|^{2-n}\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^\infty P(\rho)g(k\sigma(\rho))\rho^{2-n} \int\limits_{\partial B_\rho(-x)} \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^\infty P(\rho)g(k\sigma(\rho))\rho^{2-n} \cdot n\omega_n\rho^{n-1}\ \mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T(u)(x) &= \frac{1}{n-2}\int_0^\infty \rho P(\rho) g(k\sigma(\rho))\ \mathrm{d}\rho \\
&\leq \frac{1}{n-2}\int_0^\infty \rho P(\rho) g(k)\ \mathrm{d}\rho \\
&= k\frac{g(k)}{k}\frac{1}{n-2}\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho. \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Denote

$$L = \lim_{\xi\to\infty}\frac{g(\xi)}{\xi},$$

o que nos permite denotar também

$$\varepsilon = \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho} - L > 0.$$

Por (3.41), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{g(k)}{k} \leq L + \varepsilon = \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho},\ \forall k \geq k_0. \qquad (3.46)$$

Assim, por (3.45) e (3.46),

$$T(u)(x) \leq k\left(\frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho}\right)\frac{1}{n-2}\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho = k, \qquad (3.47)$$

para todo $k \geq k_0$. Agora, usaremos novamente a função $I\colon \mathbb{R}^n\backslash S_\rho \to \mathbb{R}$, do capítulo anterior, definida por

$$I(x) = \int\limits_{\partial B_\rho}\frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x-y|^{n-2}} = \begin{cases} n\omega_n\rho\left(\dfrac{\rho}{|x|}\right)^{n-2}, & \text{se } |x| > \rho \\ n\omega_n\rho, & \text{se } |x| < \rho, \end{cases}$$

para cada $\rho > 0$. Assim, se $|x| \geq 1$, então

$$\begin{aligned}
T(u)(x) &\leq c_n\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}}g(k\sigma(|y|))\ \mathrm{d}y \\
&= c_n\int_0^\infty\int\limits_{\partial B_\rho}\frac{P(|y|)}{|y-x|^{n-2}}g(k\sigma(|y|))\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho \\
&= c_n\int_0^1 P(\rho)g(k\sigma(\rho))\int\limits_{\partial B_\rho}\frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|y-x|^{n-2}}\ \mathrm{d}\rho + c_n\int_1^\infty P(\rho)g(k\sigma(\rho))\int\limits_{\partial B_\rho}\frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|y-x|^{n-2}}\ \mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
T(u)(x) &= c_n \int_0^1 P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \cdot I(x)\ \mathrm{d}\rho + c_n \int_1^\infty P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \cdot I(x)\ \mathrm{d}\rho \\
&= c_n \int_0^1 P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \cdot n\omega_n \rho \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^{n-2} \mathrm{d}\rho + c_n \int_1^\infty P(\rho) g(k\sigma(\rho)) \cdot n\omega_n \rho \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^{n-2} \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^1 |x|^{2-n} \rho^{n-1} P(\rho) g(k\sigma(\rho))\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_1^\infty |x|^{2-n} \rho^{n-1} P(\rho) g(k\sigma(\rho))\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{n-2} \int_0^1 |x|^{2-n} \rho^{n-1} P(\rho) g(k)\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_1^\infty |x|^{2-n} \rho^{n-1} P(\rho) g(k\rho^{2-n})\ \mathrm{d}\rho \\
&= k \frac{|x|^{2-n}}{n-2} \left(\frac{g(k)}{k} \int_0^1 \rho^{n-1} P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + \frac{1}{n-2} \int_1^\infty \rho P(\rho) \frac{g(k\rho^{2-n})}{k\rho^{2-n}}\ \mathrm{d}\rho \right). \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

Seja, para cada $\rho \geq 1$ e $k \geq 1$,

$$
q_k(\rho) = \rho P(\rho) \frac{g(k\rho^{2-n})}{k\rho^{2-n}}.
$$

Desde que $\frac{g(\cdot)}{\cdot}$ seja monótona não crescente em $(0, \infty)$, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq q_k(\rho) &= \rho P(\rho) \frac{g(k\rho^{2-n})}{k\rho^{2-n}} \\
&= \rho^{n-1} \frac{g(k\rho^{2-n})}{k} P(\rho) \\
&< \rho^{n-1} g(\rho^{2-n}) P(\rho),
\end{aligned}
$$

para cada $\rho \geq 1$ e $k \geq 1$. Por isso, desde que $\rho P(\rho) \in L^1([0, \infty))$ por (3.40), temos

$$
\int_0^\infty q_k(\rho)\ \mathrm{d}\rho < \int_0^\infty \rho^{n-1} g(\rho^{2-n}) P(\rho)\ \mathrm{d}\rho < \infty,
$$

para cada $k \geq 1$. Logo,

$$
q_k \in L^1([0, \infty)),\ \forall k \geq 1.
$$

Agora, seja, para cada $k \geq 1$, a função $h_k \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$
h_k(\rho) = \sup_{j \geq k} q_j(\rho),\ \forall \rho \in [0, \infty).
$$

Então, para cada $k \geq 1$ e $\rho \geq 1$,

$$
0 \leq q_j(\rho) < C_\rho P(\rho),\ \forall j \geq k,
$$

ou seja, para cada $k \geq 1$ e $\rho \geq 1$, podemos afirmar que $\rho P(\rho)$ é uma cota superior de

$\{q_j(\rho)\}_{j\geq k}$. Assim,

$$0 \leq h_k(\rho) \leq C_\rho P(\rho), \ \forall \rho \geq 1.$$

Portanto,

$$h_k \in L^1([0,\infty)), \ \forall k \geq 1.$$

Por outro lado, para cada $k \geq 1$,

$$\int_{[1,\infty)} h_k \geq \int_{[1,\infty)} q_j, \ \forall j \geq k.$$

Logo, para cada $k \geq 1$,

$$\int_{[1,\infty)} h_k \geq \sup_{j\geq k} \int_{[1,\infty)} q_j.$$

Esta desigualdade juntamente com o **Teorema da Convergência Dominada** implica que

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \int_1^\infty q_k(\rho) &\leq \int_1^\infty \limsup_{k\to\infty} h_k(\rho) \ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^\infty \limsup_{k\to\infty} \left(\sup_{j\geq k} \rho P(\rho) \frac{g(j\rho^{2-n})}{j\rho^{2-n}} \right) \ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^\infty \rho P(\rho) \limsup_{k\to\infty} \left(\sup_{j\geq k} \frac{g(j\rho^{2-n})}{j\rho^{2-n}} \right) \ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^\infty \rho P(\rho) \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{j\geq k} \frac{g(j\rho^{2-n})}{j\rho^{2-n}} \right) \ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^\infty \rho P(\rho) \limsup_{k\to\infty} \frac{g(k\rho^{2-n})}{k\rho^{2-n}} \ \mathrm{d}\rho \\
&\leq \int_1^\infty \rho P(\rho) \limsup_{k\to\infty} \frac{g(k)}{k} \ \mathrm{d}\rho \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{g(k)}{k} \int_1^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Por (3.48), temos, para cada $|x| \geq 1$ e $u \in \mathcal{C}_k$,

$$\begin{aligned}
T(u)(x) &\leq k \frac{|x|^{2-n}}{n-2} \left(\frac{g(k)}{k} \int_0^1 \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho + \int_1^\infty \rho P(\rho) \frac{g\left(k\rho^{2-n}\right)}{k\rho^{2-n}} \ \mathrm{d}\rho \right) \\
&\leq k \frac{|x|^{2-n}}{n-2} \left(\frac{g(k)}{k} \int_0^1 \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho + \limsup_{k\to\infty} \frac{g(k)}{k} \int_1^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho \right) \\
&\leq k \frac{|x|^{2-n}}{n-2} \left(\frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho} \int_0^1 \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho + \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho} \int_1^\infty \rho P(\rho) \ \mathrm{d}\rho \right) \\
&= \frac{k}{|x|^{n-2}}, \ \forall k \geq k_0.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Combinando (3.47) e (3.49), temos, para todo $k \geq k_0$,

$$T(u)(x) \leq k\sigma(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathcal{C}_k$$

Por outro lado, desde que

$$f(x) \geq p(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e g seja não decrescente, temos, se $u \in \mathcal{C}_k$, então, para todo $k > 0$

$$\begin{aligned}
T(u)(x) &= c_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|y-x|^{n-2}} g(u(y))\ \mathrm{d}y \\
&\geq c_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{p(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g\left(\frac{\sigma(|y|)}{k}\right)\ \mathrm{d}y \\
&\geq c_n \int_{|y|<1} \frac{p(|y|)}{|y-x|^{n-2}} g\left(\frac{\sigma(|y|)}{k}\right)\ \mathrm{d}y \\
&= c_n g\left(\frac{1}{k}\right) \int_{|y|<1} \frac{p(|y|)}{|y-x|^{n-2}}\ \mathrm{d}y \\
&= c_n g\left(\frac{1}{k}\right) \int_0^1 \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{p(|y|)}{|y-x|^{n-2}}\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho \\
&= c_n g\left(\frac{1}{k}\right) \int_0^1 p(\rho) \int\limits_{\partial B_\rho} |y-x|^{2-n}\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho \\
&= c_n g\left(\frac{1}{k}\right) \int_0^1 p(\rho) \int\limits_{\partial B_\rho(-x)} |y|^{2-n}\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\rho \\
&= c_n g\left(\frac{1}{k}\right) \int_0^1 p(\rho)\rho^{2-n} \cdot n\omega_n \rho^{n-1}\ \mathrm{d}\rho \\
&= g\left(\frac{1}{k}\right) \frac{1}{n-2} \int_0^1 \rho p(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&\geq g\left(\frac{1}{k}\right) \frac{\sigma(|x|)}{n-2} \int_0^1 \rho p(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{k} \frac{g\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} \frac{\sigma(|x|)}{n-2} \int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\ \mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Por (3.43), temos, para todo $k \geq k_0$,

$$T(u)(x) \geq \frac{\sigma(|x|)}{k},\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, para k suficientemente grande, $\mathcal{C}_k$ é invariante sob T.

Para completar a parte da existência, precisamos verificar que

(i) T é contínua com respeito a topologia da convergência uniforme em subconjuntos compactos;

(ii) $\overline{T(\mathcal{C}_k)}$ é compacto com respeito a topologia mencionada anteriormente.

As provas de (i) e (ii) são análogas a aquelas dadas feitas no **Teorema 3.4**. Os detalhes vão portanto ser omitidos.

O problema anterior pode ser visto como um estudo analítico da solução obtida no **Teorema 2.1** $\square$

Corolário 3.2. Sejam $f \in C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, para algum $0 < \alpha < 1$, e $p, P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $[0, \infty)$ que satisfazem

$$0 < p(|x|) \leq f(x) \leq P(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assuma que, para algum $0 < \gamma < 1$, (veja o **Teorema 2.1**)

$$\left(\int_1^{\infty} \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho \leq\right) \int_1^{\infty} \rho^{n-1+\gamma(2-n)} P(\rho)\ \mathrm{d}\rho < \infty. \tag{3.50}$$

Então, existe uma função $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$-\Delta u = f(x) u^{\gamma} \text{ em } \mathbb{R}^n \tag{3.51}$$

e

$$|x|^{n-2} u(x) \to c \text{ quando } |x| \to \infty,$$

para alguma constante $c > 0$.

Demonstração. Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(\xi) = \xi^{\gamma},\ \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

É claro que g é não decrescente. Desde que $0 < \gamma < 1$, temos

$$\frac{g(\mu)}{\mu} = \frac{\mu^{\gamma}}{\mu} = \mu^{\gamma-1} < \xi^{\gamma-1} = \frac{\xi^{\gamma}}{\xi} = \frac{g(\xi)}{\xi},$$

para todo $\xi, \mu \in (0, \infty)$, com $\xi < \mu$, isto é, $\dfrac{g(\cdot)}{\cdot}$ é decrescente. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(|x|)\ \mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \int\limits_{\partial B_\rho} |x|^{2-n} P(|x|)\ \mathrm{d}\sigma_x\ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^{\infty} \rho^{2-n} P(\rho) \int\limits_{\partial B_\rho} \mathrm{d}\sigma_x\ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^{\infty} \rho^{2-n} P(\rho) \cdot n\omega_n \rho^{n-1}\ \mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&= n\omega_n \int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho \\
&= n\omega_n \left(\int_0^1 \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + \int_1^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho \right) \\
&< n\omega_n \left(\int_0^1 \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho + \int_1^\infty \rho^{n-1+\gamma(2-n)} P(\rho)\ \mathrm{d}\rho \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{\xi\to\infty} \frac{g(\xi)}{\xi} &= \limsup_{\xi\to\infty} \frac{\xi^\gamma}{\xi} \\
&= \limsup_{\xi\to\infty} \xi^{\gamma-1} \\
&= 0 \\
&< \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\liminf_{\xi\to 0^+} \frac{g(\xi)}{\xi} &= \liminf_{\xi\to 0^+} \frac{\xi^\gamma}{\xi} \\
&= \liminf_{\xi\to 0^+} \xi^{\gamma-1} \\
&= \infty \\
&> \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\ \mathrm{d}\rho}.
\end{aligned}
$$

Pelo **Teorema 3.5**, segue o resultado. □

Exemplo 3.2. Este exemplo trata das perturbações lineares da equação

$$\Delta u + \lambda f(x) u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

onde $0 < p(|x|) \leq f(x) \leq P(|x|)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja h uma função real positiva, não decrescente, contínua e que satisfaz $h(0) = 0$. Assim, podemos considerar, para quaisquer $\mu > 0$, a função real g dada por

$$g(\xi) = \lambda\xi + \mu h(\xi),\ \forall \xi \in (0, \infty).$$

(i) Suponha que h seja limitado, que $\frac{h(\xi)}{\xi}$ seja limitado e que

$$\liminf_{\xi\to 0^+} \frac{h(\xi)}{\xi} \equiv a > 0.$$

Se f, p e P são como o estabelecido no **Teorema 3.4**, então para todo λ e μ que satisfaz

$$\lambda < \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho};$$
$$\lambda + a\mu > \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\ \mathrm{d}\rho},$$

existe uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, positiva e limitada, que satisfaz

$$\Delta u + \lambda f(x) u = -\mu f(x) h(u) \text{ em } \mathbb{R}^n \tag{λ, μ}$$

e $|x|^{n-2} u(x) \to c$ quando $|x| \to \infty$, para algum $c > 0$. Com efeito, note que g é monótona não decrescente. Além disso,

$$\begin{aligned}
\limsup_{\xi\to\infty} \frac{g(\xi)}{\xi} &= \limsup_{\xi\to\infty} \left(\frac{\lambda\xi + \mu h(\xi)}{\xi}\right) \\
&= \limsup_{\xi\to\infty} \left(\lambda + \mu\frac{h(\xi)}{\xi}\right) \\
&\leq \lambda + \mu \limsup_{\xi\to\infty} \frac{h(\xi)}{\xi} \\
&\leq \lambda + \mu \limsup_{\xi\to\infty} \frac{\sup h}{\xi} \\
&= \lambda \\
&< \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\liminf_{\xi\to 0^+} \frac{g(\xi)}{\xi} &= \liminf_{\xi\to 0^+} \left(\frac{\lambda\xi + \mu h(\xi)}{\xi}\right) \\
&= \liminf_{\xi\to 0^+} \left(\lambda + \mu\frac{h(\xi)}{\xi}\right) \\
&\geq \lambda + \mu \liminf_{\xi\to 0^+} \frac{h(\xi)}{\xi} \\
&= \lambda + \mu a \\
&> \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\ \mathrm{d}\rho}.
\end{aligned}$$

Pelo **Teorema 3.4**, segue-se a afirmação. Note que

$$\int_0^1 \rho^{n-1} p(\rho)\ \mathrm{d}\rho \leq \int_0^1 \rho p(\rho)\ \mathrm{d}\rho = \int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho.$$

Assim, podemos escolher μ de modo que

$$\mu > \frac{1}{a}\left(\frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1}p(\rho)\,\mathrm{d}\rho} - \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\,\mathrm{d}\rho}\right).$$

Logo, existe na verdade um intervalo para o qual a equação (λ, μ) tem uma solução positiva limitada decaindo como $|x|^{2-n}$ quando $|x| \to \infty$. Mais ainda, se

$$l_1 = \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\,\mathrm{d}\rho}$$
$$l_0 = \frac{1}{a+1}\left(\frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1}p(\rho)\,\mathrm{d}\rho}\right)$$

e se a é tão grande que

$$\frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\,\mathrm{d}\rho} > \frac{1}{a+1}\left(\frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1}p(\rho)\,\mathrm{d}\rho}\right),$$

então, para todo $\lambda \in (l_0, l_1)$,

$$\lambda < l_1 = \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\,\mathrm{d}\rho}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda + a\lambda &> l_0 + al_0\\ &= \frac{1}{a+1}\left(\frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1}p(\rho)\,\mathrm{d}\rho}\right) + a\cdot\frac{1}{a+1}\left(\frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1}p(\rho)\,\mathrm{d}\rho}\right)\\ &= \frac{1+a}{a+1}\left(\frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1}p(\rho)\,\mathrm{d}\rho}\right)\\ &= \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1}p(\rho)\,\mathrm{d}\rho}.\end{aligned}$$

Logo, existe, pelo que foi feito anteriormente, uma função positiva limitada $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que decai da mesma forma que $|x|^{2-n}$ quando $|x| \to \infty$, e que satisfaz

$$\Delta u + \lambda f(x)(u + h(u)) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{λ}$$

Isso está em forte contraste com a unicidade de $\lambda_1(f)$, para uma função radialmente simétrica f, para o problema linear demonstrado na seção anterior.

(ii) Suponha que a função $h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja definida por

$$h(\xi) = \xi^\gamma,\ \forall \xi > 0,$$

para algum $0 < \gamma < 1$, e que P satisfaz

$$\int_1^\infty \rho^{n-1+\gamma(2-n)} P(\rho)\ \mathrm{d}\rho < \infty. \tag{3.52}$$

Então, P também satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} P(|x|)\ \mathrm{d}x < \infty$$

Pelo **Teorema 3.5**, para todo $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ de modo que

$$\lambda < \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho},$$

existe uma função positiva limitada $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que cumpre

$$\Delta u + \lambda f(x) u = -\mu f(x) h(u) \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e que decai como $|x|^{2-n}$. Desde que este caso possa ser visualizado como o caso limite $a \to +\infty$ do item anterior, podemos concluir que, para todo $\lambda \in (0, l_1)$, existe uma função positiva limitada $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\Delta u + \lambda f(x)(u + u^\gamma) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e que decai como $|x|^{2-k}$ quando $|x| \to \infty$. De fato, note que, neste caso,

$$g(\xi) = \lambda\xi + \lambda\xi^\gamma,\ \forall \xi > 0.$$

Claramente, g é monótona não decrescente. Além disso,

$$\begin{aligned}
\limsup_{\xi\to\infty} \frac{g(\xi)}{\xi} &= \limsup_{\xi\to\infty} \left(\frac{\lambda\xi + \lambda\xi^\gamma}{\xi}\right) \\
&= \limsup_{\xi\to\infty} \left(\lambda + \lambda\xi^{\gamma-1}\right) \\
&\le \lambda + \lambda \limsup_{\xi\to\infty} \xi^{\gamma-1} \\
&= \lambda \\
&< \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho}.
\end{aligned}$$

e

$$\liminf_{\xi\to 0^+} \frac{g(\xi)}{\xi} = \liminf_{\xi\to 0^+} \left(\lambda + \lambda\xi^{\gamma-1}\right) = \infty > \frac{n-2}{\int_0^1 \rho^{n-1} P(\rho)\ \mathrm{d}\rho}.$$

Portanto, pelo **Teorema 3.4**, concluímos o que queríamos demonstrar.

Para o caso em que

$$\lambda_1 > \frac{n-2}{\int_0^\infty \rho P(\rho)\ \mathrm{d}\rho},$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema linear

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(x) u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \\ u(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty \\ |\boldsymbol{\nabla} u| \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

deve ser possível estender a faixa de valores de λ para que (λ, μ) tenha uma solução limitada positiva que decai como $|x|^{2-n}$. Não sabemos se isso pode ser feito ou não, mas parece ser uma pergunta interessante. Observe, contudo, que se P satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\ \mathrm{d}x > \infty,$$

para todo $\lambda \geq \lambda_1$, não se pode esperar a existência de soluções positivas limitadas de (λ) que decaia como $|x|^{2-n}$ quando $|x| \to \infty$, pois se u é tal solução que corresponde a λ, o mesmo argumento que leva a representação integral (3.17) para u_1, a saber,

$$u_1(x) = -\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) u_1(y)\ \mathrm{d}y,$$

gera a representação integral

$$u = \lambda T(u),$$

em que T é o operador integral definido em (3.44). Isto, por sua vez, implique que

$$|x|^{n-1} |\boldsymbol{\nabla} u(x)| = O(1) \text{ quando } |x| \to \infty,$$

visto na **Observação 3.4**. Pelo **Teorema 3.3**, a autofunção positiva u_1 correspondente a λ_1 satisfaz a mesma estimativa. Portanto, o mesmo argumento usado na **Observação 3.4** gera

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(x) u_1(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h(u(x)) u_1(x)\ \mathrm{d}x > 0,$$

que é impossível para $\lambda \geq \lambda_1$.

Considerações finais

A investigação da equação $\Delta u + f(x)u^\gamma = 0$ em $\mathbb{R}^n$, sob hipóteses de regularidade Hölder para u e f e com $0 < \gamma \leq 1$, permitiu estabelecer um quadro coerente de resultados qualitativos que distinguem de forma clara os regimes sublinear ($0 < \gamma < 1$) e linear ($\gamma = 1$). Demonstrou-se que a combinação das estimativas de Schauder e do Princípio do Máximo Forte fornece controle regular suficiente para formular e provar teoremas de existência e unicidade em classes adequadas de soluções, enquanto os métodos de sub e supersolução e a redução radial oferecem ferramentas construtivas e comparativas eficazes para obter soluções positivas e localizadas.

Foram desenvolvidos critérios suficientes que relacionam propriedades de sinal e integrabilidade de f com a existência de *ground states* e com o comportamento assintótico das soluções quando $|x| \to \infty$. No regime sublinear, a conexão com a equação de Poisson $-\Delta U = f$ e a existência de uma solução limitada U revelam uma interpretação potencial que facilita a construção de soluções e a compreensão do decaimento; no regime linear, as técnicas adaptadas permitem caracterizar limites e taxas de decaimento mais rígidas. Além disso, enunciados de não-existência foram obtidos sob hipóteses naturais sobre o sinal e a integrabilidade de f, evidenciando barreiras para a presença de soluções não-triviais em certos cenários.

Os resultados reforçam a ideia de que a heterogeneidade espacial introduzida por $f(x)$ altera qualitativamente o espaço de soluções em comparação com problemas homogêneos, tanto na existência quanto na estabilidade assintótica. A identificação de condições explícitas sobre f e γ fornece critérios verificáveis que podem ser aplicados em modelos físicos e geométricos onde o meio varia espacialmente, contribuindo para a compreensão de fenômenos como concentração, decaimento e ausência de soluções em meios com propriedades críticas.

Algumas hipóteses técnicas, em particular a regularidade Hölder e certas condições de integrabilidade, foram essenciais para aplicar as estimativas clássicas e garantir regularidade $C^{2,\alpha}$. Essas hipóteses restringem a aplicabilidade direta dos resultados a coeficientes mais singulares ou a não linearidades com comportamento crítico além do intervalo $0 < \gamma \leq 1$. Além disso, a análise variacional foi possível apenas em subcasos onde a estrutura funcional permite formulação energética, deixando fora abordagens puramente variacionais para classes mais gerais de f.

Abrem-se várias direções naturais para trabalhos subsequentes: relaxar hipóteses de regularidade em f e estudar coeficientes com singularidades ou decaimentos mais lentos; investigar estabilidade e propriedades espectrais das soluções localizadas; analisar bifurcações e multiplicidade de soluções em dependência de parâmetros; e estender as técnicas a sistemas acoplados semilineares e a problemas com termos de reação mais gerais. A metodologia desenvolvida aqui oferece uma base técnica que pode ser refinada para tratar esses problemas e para conectar resultados teóricos a aplicações concretas em física e biologia matemática.

Em suma, a dissertação fornece um conjunto consistente de resultados teóricos, provas detalhadas e exemplos ilustrativos que clarificam como a interação entre a heterogeneidade $f(x)$ e a não linearidade u^γ determina a existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções em $\mathbb{R}^n$, ao mesmo tempo em que aponta caminhos promissores para investigações futuras.

Apêndice A

Funções harmônicas

A.1 Potencial Newtoniano

Durante todo este texto, fixaremos uma função $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y < \infty.$$

Toda função em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaz a propriedade acima. Com efeito, ao separarmos as integrais, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y &= \int_{B_1} |y|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |y|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_1} |y|^{2-n} \, \mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |f(y)| \, \mathrm{d}y \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Lema A.1. Existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y - z|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y < \infty$$

se, e somente se,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y - x|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja z um ponto de $\mathbb{R}^n$ para o qual

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y-z|^{2-n} \, \mathrm{d}y < \infty.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, considere

$$r = |x-z|.$$

e

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} |y-z|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y < \infty.$$

Se $2|y-x| > |y-z|$, para algum $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, então

$$J = \int_{2|y-x|>|y-z|} |y-x|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y \leq 2^{n-2}A.$$

Por outro lado, se $2|y-x| \leq |y-z|$, então

$$\begin{aligned} |y-x| &= 2|y-x| - |y-x| \\ &\leq |(y-x)+(x-z)| - |y-x| \\ &\leq (|y-x| + |x-z|) - |y-x| \\ &= (|y-x| + r) - |y-x| \\ &= r. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= \int_{2|y-x|\leq|x-z|} |y-x|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y \\ &\leq \int_{|y-x|\leq r} |y-x|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y \\ &\leq \frac{\|f\|_{L^\infty(B_r(x))}}{2} r^2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y-x|^{2-n}|f(y)| \, \mathrm{d}y < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

□

O **Lema A.1** mostra que fica bem definido o *potencial newtoniano* de f por

$$u_\infty(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Observação A.1. Observe que não temos necessariamente $u_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

O que vamos fazer agora é mostrar que o problema

$$-\Delta u = f(x) \text{ em } \mathbb{R}^n$$

possui uma solução se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} f(x)\ \mathrm{d}x < \infty,$$

mesmo que $u_\infty \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como no **Lema A.1** em **[10]**, u é limite uniforme em compactos da sequência

$$u_k(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\sigma(k|x-y|)f(y)\ \mathrm{d}y,$$

onde $\sigma \in C^\infty([0,+\infty))$, com

(i) $\sigma(r) = 0,\ \forall r \leq 1;$

(ii) $\sigma(r) = 1,\ \forall r \geq 2;$

(iii) $0 \leq \sigma(r) \leq 1,\ \forall r \geq 0.$

Com efeito,

$$u(x) - u_k(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\left(1 - \sigma(k|x-y|)\right) f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Desta forma, se $r > 2$ e $|x| \leq r-2$, então

$$\begin{aligned}
|u_k(x) - u(x)| &\leq \int_{B_{\frac{2}{k}}(x)} |\Phi(x-y)||f(y)|\ \mathrm{d}y \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(B_r)} \int_{B_{\frac{2}{k}}(x)} |\Phi(x-y)|\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{\|f\|_{L^\infty(B_r)}}{n(n-2)\omega_n} \int_0^{\frac{2}{k}} \rho^{2-n} \cdot n\omega_n \rho^{n-1}\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\|f\|_{L^\infty(B_r)}}{n-2} \int_0^{\frac{2}{k}} \rho\ \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{4\|f\|_{L^\infty(B_r)}}{(n-2)k^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$u_k \to u \text{ uniformemente em } B_{r-2}.$$

Por outro lado, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$D_j u_k(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} D_j\Phi(x-y)\sigma(k|x-y|)f(y)\ \mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)D_j\sigma(k|x-y|)f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Fixado $j = 1, \ldots, n$, considere, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} D_j\Phi(x-y)\sigma(k|x-y|)f(y)\ \mathrm{d}y.$$

e

$$w_k(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)D_j\sigma(k|x-y|)f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Fazendo

$$v(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} D_j\Phi(x-y)f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Assim, se $r > 2$ e $|x| \leq r-2$, então

$$\begin{aligned}
|v_k(x) - v(x)| &\leq \int_{B_{\frac{2}{k}}(x)} |D_j\Phi(x-y)||f(y)|\ \mathrm{d}y \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(B_r)} \int_{B_{\frac{2}{k}}(x)} |D_j\Phi(x-y)|\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{2\|f\|_{L^\infty(B_r)}}{Nk}
\end{aligned}$$

e v_k converge uniformemente para v em $|x| \leq r-2$. Da mesma forma, w_k converge uniformemente para 0, como se segue

$$\begin{aligned}
|w_k(x)| &\leq 2k \int_{B_{\frac{2}{k}}(x)} |\Phi(x-y)||f(y)|\ \mathrm{d}y \\
&\leq 2k\|f\|_{L^\infty(B_r)} \int_{B_{\frac{2}{k}}(x)} |\Phi(x-y)|\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{8\|f\|_{L^\infty(B_r)}}{(n-2)k}.
\end{aligned}$$

Assim, $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$D_j u_\infty(x) = v(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_j\Phi(x-y) f(y)\ \mathrm{d}y.$$

De fato, o potencial newtoniano u_∞ é de classe $C^{1,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$. Na verdade, $D_j u_\infty$ é localmente lipschitziana em compactos, para cada $j = 1, \ldots, n$.

Sabemos que a sequência

$$u_k(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_j\Phi(x-y)\sigma(k|x-y|) f(y)\ \mathrm{d}y$$

converge uniformemente para $D_j u_\infty$ em $|x| + 1 \leq r$. Fixe $x, z \in B_{r-1}$ e k suficientemente grande tal que $|x - z| \geq \dfrac{4}{k}$. Então

$$B_{\frac{2}{k}}(x) \cap B_{\frac{2}{k}}(z) = \varnothing.$$

Daí,

$$\begin{aligned} v_k(z) - v_k(x) = &\int_{B_{\frac{2}{k}}(x)} D_j\Phi(x-y)(\sigma(k|x-y|) - 1) f(y)\ \mathrm{d}y \\ &- \int_{B_{\frac{2}{k}}(z)} D_j\Phi(z-y)(1 - \sigma(k|z-y|)) f(y)\ \mathrm{d}y \end{aligned}$$

que resulta em

$$|v_k(z) - v_k(x)| \leq \frac{4\|f\|_{L^\infty(B_r)}}{Nk} \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(B_r)}}{N}|x - z|.$$

Passando ao limite, concluímos que $D_j u_\infty$ é lipschitziana em compactos.

Para finalizar vamos mostrar que

$$-\Delta u_\infty = f(x) \text{ em } \mathbb{R}^n \text{ no sentido fraco.}$$

Para isto, fixe $\phi \in C_0^\infty(B_r)$ e veja que

$$\boldsymbol{\nabla} u_\infty(x) \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\nabla}\Phi(x-y) \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi(x) f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Para cada $y \in B_r$, temos

$$I = \int_{B_\varepsilon(y)\cap B_r} \boldsymbol{\nabla}\Phi(x-y)\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(x)\ \mathrm{d}x$$
$$J = \int_{B_r\setminus B_\varepsilon(y)} \boldsymbol{\nabla}\Phi(x-y)\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(x)\ \mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$J = \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y)\phi(x)\ \mathrm{d}\sigma_x,$$

pois Φ é harmônica, e

$$|I| \le \|\boldsymbol{\nabla}\phi\|_\infty \frac{\varepsilon}{N}.$$

Como no cálculo da *fórmula da representação de Green* (2.16) em [10], o limite de J é $-\phi(y)$. Portanto,

$$\int\limits_{B_r} \boldsymbol{\nabla}\Phi(x-y)\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(x)\ \mathrm{d}x = -\phi(y),\ \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

Multiplicando por $f(y)$ esta última igualdade, integrando na variável $y\in\mathbb{R}^n$ e por último usando Fubini,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(y)f(y)\ \mathrm{d}y = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{B_r}\boldsymbol{\nabla}\Phi(x-y)\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(x)f(y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\boldsymbol{\nabla}u_\infty(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(x)\ \mathrm{d}x.$$

Mostramos então o seguinte teorema:

Teorema A.1. Seja $f\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|y|^{2-n}|f(y)|\ \mathrm{d}y < \infty.$$

Então, o potencial newtoniano de f

$$u_\infty = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\ \mathrm{d}y$$

é de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$, suas derivadas de primeira ordem são localmente lipschitzianas e

$$-\Delta u_\infty = f(x) \text{ em } \mathbb{R}^n \text{ no sentido fraco.}$$

A *Teoria de Schauder*, vide Silva e Ricarte [5], nos garante que

Corolário A.1. Se f satisfaz (BK) e f está em $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, então o potencial $u_\infty \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $-\Delta u_\infty = f(x)$ em $\mathbb{R}^n$ no sentido clássico.

A.2 Princípio do Máximo

Seja $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Fixado $y \in \Omega$, definimos a *média esférica* de u por

$$m(r) := \fint_{\partial B_r(y)} u(x)\ \mathrm{d}\sigma_x = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(x)\ \mathrm{d}\sigma_x,\ \forall r \in (0, \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)).$$

Fazendo as **Mudanças de Variáveis** $x = y + z$, com $z \in \partial B_r$, e em seguida $z = r\eta$, com $\eta \in \partial B_1$, tem-se

$$\begin{aligned} m(r) &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(y+z)\ \mathrm{d}\sigma_z \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1} u(y+r\eta) r\ \mathrm{d}\sigma_\eta \\ &= \fint_{\partial B_1} u(y+r\eta)\ \mathrm{d}\sigma_\eta. \end{aligned}$$

Pelo **Teorema de Taylor**, temos

$$u(y+(r+h)\eta) = u(y+r\eta) + \boldsymbol{\nabla} u(y+r\eta)\cdot h\eta + o(|h|). \tag{A.1}$$

Aplicando a integral curvilínea sobre ∂B_1 com relação a variável η em ambos os membros da igualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} \frac{m(r+h)-m(r)}{h} &= \frac{\displaystyle\fint_{\partial B_1} u(y+(r+h)\eta)\ \mathrm{d}\sigma_\eta - \fint_{\partial B_1} u(y+r\eta)\ \mathrm{d}\sigma_\eta}{h} \\ &= \fint_{\partial B_1} \frac{\boldsymbol{\nabla} u(y+r\eta)\cdot h\eta + o(|h|)}{h}\ \mathrm{d}\sigma_\eta \\ &= \fint_{\partial B_1} \boldsymbol{\nabla} u(y+r\eta)\cdot \eta\ \mathrm{d}\sigma_\eta + \frac{o(|h|)}{h} \fint_{\partial B_1} \mathrm{d}\sigma_\eta \\ &= \fint_{\partial B_1} \boldsymbol{\nabla} u(y+r\eta)\cdot \eta\ \mathrm{d}\sigma_\eta + \frac{o(|h|)}{h}. \end{aligned}$$

Passando ao limite de $h \to 0^+$, concluímos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}m(r) = \fint_{\partial B_1} \boldsymbol{\nabla} u(y + r\eta) \cdot \eta \, \mathrm{d}\sigma_\eta.$$

Como $\boldsymbol{\nabla} u(y + r\eta) \cdot \eta = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(y + r\eta)$, pode-se escrever

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}m(r) = \fint_{\partial B_1} \frac{\partial u}{\partial \eta}(y + r\eta) \, \mathrm{d}\sigma_\eta = \fint_{\partial B_r(y)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \, \mathrm{d}\sigma_\eta = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \, \mathrm{d}\sigma_\eta.$$

Aplicando o **Identidades de Green**, segue que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}m(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(y)} \Delta u(x) \, \mathrm{d}x. \tag{A.2}$$

Daí, o sinal do Laplaciano de u determina a monotonicidade da média esférica. Em particular, se $\Delta u = 0$ em Ω, então a média esférica é constante igual a $u(y)$, uma vez que, pela **Propriedade do valor médio**,

$$\lim_{r \to 0^+} m(r) = u(y).$$

Convém observar que o cálculo acima ainda é justificado quando se assume apenas que u é de classe $C^{1,1}$, caso no qual Δu está definido em q.t.p. pelo **Teorema de Rademacher**[1]

Teorema A.2 (Propriedade do Valor Médio)**.** Seja $u \in C^2(\Omega)$. Suponha que $\Delta u \geq 0$ (respectivamente, $= 0$ ou ≤ 0) em Ω. Então, para cada $y \in \Omega$,

$$u(y) \leq (\text{resp.} =, \ \geq) \fint_{\partial B_r(y)} u \, \mathrm{d}\sigma_x, \ \forall r \in (0, \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)).$$

Em particular, a mesma desigualdade vale para a média sólida, i.e., para cada $y \in \Omega$,

$$u(y) \leq (\text{resp.} =, \ \geq) \fint_{B_r(y)} u(x) \, \mathrm{d}x, \ \forall r \in (0, \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)).$$

Demonstração. A desigualdade esférica segue do cálculo feito anteriormente nesta seção.

[1]Seja $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana. Então, f é derivável em q.t.p. de Ω.

Para concluir a desigualdade sólida, escreve-se

$$n\omega_n t^{n-1}\ u(y) \leq (\text{resp.} =,\ \geq) \int\limits_{\partial B_t(y)} u\ \mathrm{d}\sigma_x,\ \forall t \in (0, \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)).$$

Integrando de 0 a r com relação a variável t, obtemos, por coordenadas polares,

$$\omega_n r^n u(y) \leq (\text{resp.} =,\ \geq) \int\limits_{B_t(y)} u\ \mathrm{d}x,$$

ou seja,

$$u(y) \leq (\text{resp.} =,\ \geq) ⨍_{B_t(y)} u\ \mathrm{d}x,$$

mostrando a outra desigualdade. □

A **Propriedade do Valor Médio** impõe uma estrutura bastante rígida para tal classe de funções. De fato, as propriedades a seguir serão consequências das desigualdades referentes às médias.

Teorema A.3 (Princípio do Máximo Forte)**.** Seja Ω um aberto conexo e $u \in C^2(\Omega)$ com $\Delta u \geq 0$ (resp. ≤ 0) em Ω. Suponha que existe $y_0 \in \Omega$ tal que $u(y_0) = \sup\limits_{\Omega} u$ (resp. $\inf\limits_{\Omega} u$). Então u é constante em Ω.

Demonstração. Se $\Delta u \geq 0$, seja

$$\omega := \left\{ x \in \Omega : u(x) = \sup_{\Omega} u \right\}. \tag{A.3}$$

Por continuidade, ω é um conjunto fechado e por hipótese é não vazio. Será mostrado que ω é aberto. Seja $x \in \omega$. Pela **Propriedade do Valor Médio (Teorema A.2)** e o fato de que $u(x) = \sup\limits_{\Omega} u$, tem-se, para qualquer $r \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega))$,

$$u(x) \leq ⨍_{B_r(x)} u(y)\ \mathrm{d}y \leq u(x).$$

Daí, fixado $r \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega))$, temos

$$u(x) = ⨍_{B_r(x)} u(y)\ \mathrm{d}y.$$

Como u é contínua em Ω, tem-se $u(y) = u(x)$, para todo $y \in B_r(x)$. De fato, caso contrário, existiria $y_0 \in B_r(x)$ tal que $u(y_0) < u(x)$ (pois $u(x) = \sup\limits_{\Omega} u$). Então, pela continuidade de u, existe uma vizinhança $V \subset B_r(x)$ de y_0 tal que $u(y) < u(x)$, para todo $y \in V$. Logo,

$$\begin{aligned} u(x) &= \fint_{B_r(x)} u(y)\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n}\left(\int_{B_r(x)\setminus V} u(y)\ \mathrm{d}y + \int_V u(y)\ \mathrm{d}y\right) \\ &< \frac{u(x)}{\omega_n r^n}\left(\int_{B_r(x)\setminus V} \mathrm{d}y + \int_V \mathrm{d}y\right) \\ &= u(x), \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Consequentemente,

$$B_r(x) \subset \omega.$$

Como Ω é conexo, segue do fato de ω ser aberto e fechado que $\omega = \Omega$. Por (A.3), concluímos que

$$u(x) = \sup_{\Omega} u, \forall x \in \Omega,$$

donde u é constante. O caso $\Delta u \leq 0$ é análogo. $\square$

Uma consequência imediata do **Teorema A.3** refere-se ao controle pontual de uma função u em termos de seus valores de fronteira, baseado no sinal do seu Laplaciano.

Teorema A.4 (Princípio do Máximo Fraco)**.** Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ com $\Delta u \geq 0$ (resp. ≤ 0) em Ω. Então, se Ω for limitado, temos

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \ \left(\text{resp. } \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right).$$

Em particular, se u é harmônica, $\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$, para todo $x \in \Omega$.

Demonstração. Se u é constante, não há o que fazer. Se não for, segue como consequência do **Teorema A.3** que o máximo (resp. mínimo) de u é atingido em $\partial\Omega$. $\square$

Observação A.2. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma função harmônica em Ω, então, pelo **Princípio do Máximo Fraco (Teorema A.4)**,

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u,\ \forall x \in \Omega.$$

Neste caso, para todo $x \in \Omega$,

$$u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Por outro lado,

$$-u(x) \leq -\inf_{\partial\Omega} u = \sup_{\partial\Omega}(-u) \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Logo,

$$|u(x)| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

e consequentemente

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| \leq \sup_{\overline{\Omega}} |u| = \sup_{\Omega} |u|.$$

Deste fato,

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Observação A.3. Note que se o domínio não for limitado, este resultado pode não ocorrer. Por exemplo, a função

$$\begin{aligned} u\colon\ \Omega &\to \ \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x) = |x|^{-2} \end{aligned}$$

é harmônica em $\Omega := \mathbb{R}^4 \backslash \overline{B_1}$. De fato, pois

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} |x|^{-2} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_i} \left((-2) \frac{x_i}{|x|^4} \right) = \sum_{i=1}^{4} \frac{|x|^4 - 4|x|^2 x_i^2}{|x|^8} = 0.$$

Todavia, u não satisfaz a limitação por supremo garantida pelo **Teorema A.4**. Outro exemplo é a função $u(x) = x_1$ em $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$.

Corolário A.2. Sejam Ω um domínio limitado e $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tais que $\Delta u = \Delta v$ em Ω e $u = v$ em $\partial\Omega$. Então, $u \equiv v$ em Ω.

Demonstração. A função $w = u - v$ é harmônica e identicamente nula em $\partial\Omega$. O resultado segue do **Teorema A.4**. □

O **Corolário A.2** revela que o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ \quad u = g \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{A.4}$$

possui no máximo uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, quando Ω é limitado. A unicidade não é garantida quando Ω é ilimitado. Por exemplo, as funções $u_1, u_2\colon \mathbb{R}^4 \backslash B_1 \to \mathbb{R}$ definidas por $u_1(x) = 0$ e $u_2(x) = |x|^{-2}$, para todo $x \in \mathbb{R}^4 \backslash B_1$, são soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^4 \backslash B_1, \\ \quad u = 0 \text{ em } \partial(\mathbb{R}^4 \backslash B_1). \end{cases}$$

Teorema A.5. Seja $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função **não-negativa** e **não identicamente nula** que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 \text{ em } \Omega \\ \quad u \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

$$u(x) > 0, \ \forall x \in \Omega.$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) = 0. \tag{A.5}$$

Considere

$$\omega = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}.$$

Assim,

$$x_0 \in \omega,$$

ou seja,

$$\omega \neq \varnothing.$$

Dado $x \in \omega$, podemos definir

$$r = \frac{\text{dist}(x, \partial\omega)}{2}.$$

Daí,

$$B_r(x) \subset \Omega.$$

Devido a não negatividade de u em Ω,

$$u(x) = \min_{\overline{\Omega}} u. \tag{A.6}$$

Por outro lado,

$$-\Delta u(y) \geq 0, \ \forall y \in B_r(x), \tag{A.7}$$

isto é, u é subarmônica. Pelo **Princípio do Máximo Forte**, segue de (A.5), (A.6) e (A.7)

$$u(y) = 0, \ \forall y \in B_r(x).$$

Assim,

$$B_r(y) \subset \omega.$$

Logo, ω é aberto. Como $\omega = u^{-1}(\{0\})$, conclui-se que ω também é fechado. Via conexidade de Ω,

$$\omega = \Omega.$$

Logo,

$$u \equiv 0,$$

o que é uma contradição. $\square$

Apêndice B

Harmonicidade e expressões da Média Esférica

Aqui, vamos definir e estudar uma função que será de muita importância no decorrer do trabalho.

Considere, para cada $r > 0$, a função $I\colon \mathbb{R}^n \backslash S_r \to \mathbb{R}$ definida por

$$I(x) = \int\limits_{S_r} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^{n-2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash S_r.$$

Fixado $r > 0$, vamos provar o seguinte:

Afirmação B.1. I é radialmente simétrica.

Demonstração. De fato, fixado $r > 0$, podemos considerar uma parametrização arbitrária $\psi\colon U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to S_r$. Por outro lado, considere uma aplicação linear $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz

(i) A é um isomorfismo;

(ii) $Ax_1 = x_2$;

(iii) $\langle Ax, Az \rangle = \langle x, z \rangle, \ \forall x, z \in \mathbb{R}^n$ (aplicação inteira).

Assim,

$$\begin{aligned}
\det J(\phi)(y) &= \det J(A \circ \psi)(y) \\
&= \det[J(A)(\psi(y)) \cdot J(\psi)(y)] \\
&= \det J(A)(\psi(y)) \cdot \det J(\psi)(y) \\
&= \det A \cdot \det J(\psi)(y) \\
&= J(\psi)(y) \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|x_1 - \psi(y)| &= \sqrt{|x_1 - \psi(y)|^2} \\
&= \sqrt{\langle x_1 - \psi(y), x_1 - \psi(y)\rangle} \\
&= \sqrt{\langle A(x_1 - \psi(y)), A(x_1 - \psi(y))\rangle} \\
&= \sqrt{|A(x_1 - \psi(y))|^2} \\
&= |A(x_1 - \psi(y))|, \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}$$

para todo $y \in U$. Além disso,

$$|\phi(y)| = |(A \circ \psi)(y)| = |\psi(y)| = r, \qquad \text{(B.3)}$$

para todo $y \in U$. Logo,

$$\operatorname{Im} \phi \subset S_r.$$

Por (B.1), (B.2) e (B.3),

$$\begin{aligned}
I(x_1) &= \int\limits_{S_r} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x_1 - y|^{n-2}} \\
&= \int\limits_{U} \frac{|\det J(\psi)(y)|}{|x_1 - \psi(y)|^{n-2}} \,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{U} \frac{|\det J(A \circ \psi)(y)|}{|A(x_1 - \psi(y))|^{n-2}} \,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{U} \frac{|\det J(\phi)(y)|}{|A(x_1) - (A \circ \psi)(y)|^{n-2}} \,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{U} \frac{|\det J(\phi)(y)|}{|x_2 - \phi(y)|^{n-2}} \,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{S_r} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x_2 - y|^{n-2}} \\
&= I(x_2),
\end{aligned}$$

para quaisquer $|x_1| = |x_2| = r$, o que conclui a afirmação. $\square$

Afirmação B.2. Para cada $r > 0$, temos

$$I(x) = \begin{cases} n\alpha(n)r\left(\dfrac{r}{|x|}\right)^{n-2}, & \text{se } |x| > r \\ I(0), & \text{se } |x| < r. \end{cases}$$

Demonstração. De fato, fixado $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, considere, para cada $r > 0$ e $|x| > r$, a função $\varphi\colon \mathbb{R}^n \backslash \{x\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(y) = \frac{1}{|x - y|^{n-2}}, \ \forall y \neq x.$$

Note que, para cada $r > 0$ e $|x| > r$,

$$\Delta\varphi(y) = 0, \ \forall y \neq x,$$

isto é, φ é harmônica. Pela **Propriedade da Média Radial**, temos, para cada $r > 0$ e $|x| > r$,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{S_r} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|x - y|^{n-2}} \\ &= nr^{n-1}\alpha(n) ⨍_{S_r} \varphi(y) \ \mathrm{d}\sigma_y \\ &= nr^{n-1}\alpha(n)\varphi(0) \\ &= nr^{n-1}\alpha(n)\frac{1}{|x|^{n-2}} \\ &= n\alpha(n)r\left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como I é radialmente simétrica, para cada $r > 0$, podemos afirmar que 0 é ponto de extremo de I. Pelo **Princípio do Máximo Forte**, temos, para todo $|x| < r$,

$$\begin{aligned}
I(x) &= I(0) \\
&= \int\limits_{|y|=r} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|y|^{n-2}} \\
&= \int\limits_{|y|=r} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{r^{n-2}} \\
&= \frac{1}{r^{n-2}} \int\limits_{|y|=r} \mathrm{d}\sigma_y \\
&= \frac{1}{r^{n-2}} \cdot nr^{n-1}\alpha(n) \\
&= n\alpha(n)r.
\end{aligned}$$

$\square$

Observação B.1. Podemos concluir asserções análogas deste apêndice para a função $I_1 \colon \mathbb{R}^n \backslash S_r \to \mathbb{R}$ definida por

$$I_1(x) = \int\limits_{S_r} \frac{\mathrm{d}\sigma_r}{|x-y|^{n-1}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash S_r.$$

Apêndice C

Subsolução do Problema Elíptico Sublinear

No segundo capítulo, precisamos utilizar uma subsolução do problema (BK-Ω) para extrair uma solução entre esta subsolução e a supersolução. Entretanto, não provamos a existência desta subsolução no decorrer do texto até agora. Deste modo, provaremos o seguinte

Lema C.1. Seja $\overline{u}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ uma função que satisfaz

$$-\Delta \overline{u} \geq f(x)\overline{u}^\gamma \text{ em } \Omega.$$

Então, existe uma função $\underline{u}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f(x)\underline{u}^\gamma \text{ em } \Omega \\ \quad \underline{u} \leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

e

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Demonstração. Seja $u_1\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ a autofunção do capítulo 3, ou seja, uma função não identicamente nula que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda_1 f(x) u_1 \text{ em } \Omega \\ \quad u_1 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se existisse $x_0 \in \Omega$ tal que $u_1(x_0) = 0$, então

$$u_1(x_0) = 0 \leq \inf_{\Omega} u_1 \leq u_1(x_0),$$

isto é,

$$u_1(x_0) = \inf_{\Omega} u_1.$$

Pelo **Princípio do Máximo Forte**, conclui-se que u_1 é constante em Ω. Como $u_1(x_0) = 0$, temos

$$u_1(x) = 0, \ \forall x \in \overline{\Omega},$$

o que é uma contradição. Logo,

$$u_1(x) > 0, \ \forall x \in \Omega.$$

Por continuidade e compacidade, podemos considerar

$$\begin{cases} c_1 = \max\limits_{\overline{\Omega}} u_1 \\ c_2 = \min\limits_{\overline{\Omega}} \overline{u} \end{cases} \tag{C.1}$$

Como $u_1(x) > 0$ e $\overline{u}(x) > 0$, para todo $\overline{\Omega}$, temos

$$c_1, c_2 > 0.$$

Assim, podemos definir

$$\varepsilon = \min\left\{ c_1^{-1} c_2, \ c_1^{-1} \lambda_1^{-\frac{1}{1-\gamma}} \right\}.$$

Denote

$$\underline{u} = \varepsilon u_1.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
-\Delta \underline{u} &= -\Delta(\varepsilon u_1)\\
&= \varepsilon(-\Delta u_1)\\
&= \varepsilon(\lambda_1 f(x) u_1)\\
&= \left(\varepsilon^{1-\gamma} u_1^{1-\gamma} \lambda_1\right) f(x) \varepsilon^{\gamma} u_1^{\gamma}\\
&\leq \left(\left(c_1^{-1} \lambda_1^{-\frac{1}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma} u_1^{1-\gamma} \lambda_1\right) f(x) \left(\varepsilon u_1\right)^{\gamma}\\
&= \left(\left(c_1^{\gamma-1} \lambda_1^{-1}\right) u_1^{1-\gamma} \lambda_1\right) f(x) (\varepsilon u_1)^{\gamma}\\
&= \left(c_1^{\gamma-1} u_1^{1-\gamma}\right) f(x) (\varepsilon u_1)^{\gamma}\\
&\leq \left(u_1^{\gamma-1} u_1^{1-\gamma}\right) f(x) \left(\varepsilon u_1\right)^{\gamma}\\
&= f(x) \left(\varepsilon u_1\right)^{\gamma}\\
&= f(x) \underline{u}^{\gamma},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\underline{u}(x) &= \varepsilon u_1(x)\\
&\leq \left(c_1^{-1} c_2\right) u_1(x)\\
&\leq \left(u_1^{-1}(x) \overline{u}(x)\right) u_1(x)\\
&= \overline{u}(x)\\
&= \overline{u}(x),
\end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$. Além disso,

$$\underline{u}(x) = \varepsilon u_1(x) = 0,$$

para todo $x \in \partial\Omega$, o que conclui o resultado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] D. G. Aronson and H. F. Weinberger. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation. *Partial Differential Equations and Related Topics*, 1978. 4

[2] H. Brezis and S. Kamin. Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$. *Manuscripta mathematica*, 74(1):87–106, 1992. 6, 7, 8, 10

[3] H. Brezis and L. Oswald. Remark on sublinear elliptic equations, nonlinear analysis. *Partial Differential Equations and Related Topics*, 10:55–64, 1986. 5

[4] T. Cazenave and P.-L. Lions. Orbital stability of standing waves for some nonlinear schrödinger equations. *Communications in Mathematical Physics*, 1982. 4

[5] J. V. da Silva and G. Ricarte. Regularidade elíptica e problemas de fronteira livre. *34º Colóquio Brasileiro de Matemática*, 1, 2023. 136

[6] D. G. de Figueiredo. Lectures on boundary value problema of the ambrosetti-prodi type. *12º Seminário Brasileiro de Análise*, 1(1):5–6, 1980. 5, 10, 12

[7] E. DiBenedetto. Continuity of weak solutions to a general porous medium equation. *Indiana University Mathematics Journal*, 32(1):83–118, 1983. 51

[8] A. Edelson and A. Rumbos. Linear and semilinear eigenvalue problems in $\mathbb{R}^n$. *Communications in Partial Differential Equations*, 1(1):215–240, 1993. 7, 8, 10, 72

[9] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American mathematical society, 2022. 15, 17, 29, 88

[10] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. Springer, 2015. 15, 18, 21, 26, 41, 54, 69, 87, 88, 133, 136

[11] M. Naito. Radial entire solutions of the linear equation $\triangle u+\lambda p(|x|)u = 0$. *Hiroshima Math*, 19(2):431–439, 1989. 7

[12] M. Renardy and R. C. Rogers. *Introduction to Partial Differential Equations (Texts in applied mathematics; 13)*. Springer, 2004. 24