Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Pedro Vítor dos Santos Barbosa [†]

Ações Parciais de Álgebras de Hopf

Campina Grande - PB

2025

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Pedro Vítor dos Santos Barbosa

Ações Parciais de Álgebras de Hopf

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa Álgebra e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Josefa Itailma da Rocha

Campina Grande - PB

2025

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

B238a Barbosa, Pedro Vítor dos Santos.

Ações parciais de álgebras de Hopf / Pedro Vítor dos Santos Barbosa. – 2025.

84 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação: Profa. Dra. Josefa Itailma da Rocha".

Referências.

1. Álgebras de Hopf. 2. Ações Parciais. 3. Ações Envolventes. 4. Contexto de Morita. 5. Representações Parciais. I. Rocha, Josefa Itailma da. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Ações Parciais de Álgebras de Hopf

por

Pedro Vítor dos Santos Barbosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em:

Prof. Dr. Mikhailo Dokuchaev - USP

Prof. Dr. David Levi da Silva Macedo - UFCG

Profª. Dra. Josefa Itailma da Rocha - UFCG

Orientadora

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Novembro - 2025

USPAssina - Autenticação digital de documentos da USP

Registro de assinatura(s) eletrônica(s)

Este documento foi assinado de forma eletrônica pelos seguintes participantes e sua autenticidade pode ser verificada através do código 7RE7-AGJS-NVWZ-N5EU no seguinte link: https://portalservicos.usp.br/iddigital/7RE7-AGJS-NVWZ-N5EU

Mikhailo Dokuchaev

Nº USP: 2177568

Data: 01/12/2025 21:23

Dedicatória

Aos meus pais.

Resumo

Esta dissertação aborda o estudo das ações parciais de álgebras de Hopf e suas ações envolventes, generalizando resultados de Dokuchaev e Exel (2005) acerca das ações parciais de grupos. Inicialmente, são apresentados os conceitos fundamentais de álgebras, coálgebras e biálgebras, culminando na definição das álgebras de Hopf. Em seguida, estudam-se as ações parciais de grupos, suas representações e o contexto de Morita, estabelecendo as bases para o tratamento análogo no caso das álgebras Hopf. O trabalho desenvolve a noção de ação envolvente para ações parciais de álgebras Hopf, como feito em Alves e Batista (2010), bem como os produtos smash e smash parcial, mostrando o isomorfismo entre estes e o produto cruzado para álgebras de grupo. Além disso, são discutidos o contexto de Morita e as representações parciais nesse novo cenário, evidenciando suas inter-relações e propriedades estruturais.

Palavras-chave: Álgebras de Hopf; Ações parciais; Ações envolventes; Contexto de Morita; Representações parciais.

Abstract

This dissertation addresses the study of partial actions of Hopf algebras and their enveloping actions, generalizing the results of Dokuchaev and Exel (2005) concerning partial group actions. Initially, it presents the fundamental concepts of algebras, coalgebras, and bialgebras, culminating in the definition of Hopf algebras. Next, partial group actions, their representations, and the Morita context are examined, establishing the groundwork for an analogous treatment in the setting of Hopf algebras. The work develops the notion of an enveloping action for partial actions of Hopf algebras, as done by Alves and Batista (2010), as well as the smash and partial smash products, showing the isomorphism between these and the crossed product for group algebras. Furthermore, the Morita context and partial representations are discussed in this new setting, highlighting their interrelations and structural properties.

Key Words: Hopf algebras; Partial actions; Enveloping actions; Morita context; Partial representations.

Sumário

Introdução **1**

1 Álgebras de Hopf **3**

1.1 Álgebras e Coálgebras 3

1.2 Biálgebras e Álgebras de Hopf 12

1.3 Módulos e Módulos Álgebra 20

2 Ações parciais de grupos **27**

2.1 Ação envolvente de uma ação parcial 27

2.2 Contexto de Morita 36

2.3 Representações Parciais 39

3 Ações Parciais de Álgebra Hopf **48**

3.1 Ações Parciais de Álgebras de Hopf 48

3.2 Ações Envolventes de Álgebras de Hopf 54

3.3 Contexto de Morita 62

3.4 Representações Parciais 70

A Produto tensorial **74**

Introdução

As Álgebras de Hopf, embora surjam no contexto de topologia algébrica em 1941 com H. Hopf em [1], só vem a serem formalmente definidas em 1956 por Pierre Cartier em [2] sobre a denominação de hiper-álgebras. Apesar de abordar diversas ramificações como topologia, geometria, combinatória e física, as Álgebras de Hopf surgem numa abordagem puramente algébrica em 1969 com M.Sweedler em [3]. Devido suas inúmeras áreas relacionadas, as Álgebras de Hopf tornaram-se objetos de estudo em conjunto de outras áreas como as ações parciais de grupo, como será estudado nesse trabalho.

Por sua vez, o conceito de ações parciais de grupo surge gradualmente em [4], [5], [6] e [7], no contexto de álgebra dos operadores, como uma forte ferramenta para o estudo de C^*-álgebras. As ações parciais foram inicialmente associadas ao estudo do produto cruzado. O estudo puramente algébrico das ações parciais iniciou-se em 2005 com Exel e Dokuchaev em [8]. Nesse trabalho os autores determinam uma condição para que o anel de grupo skew definido, a partir de uma ação parcial, seja associativo, discutem a questão da globalização de ações parciais e apresentação uma relação entre ações parciais e representações parciais de grupos.

As ações parciais de Álgebras de Hopf surgiram na tentativa de generalizar as extensões de Galois parciais de anéis comutativos. Os primeiros resultados foram introduzidos por Caenepeel e Janssen em [9] onde foram introduzidas e estudadas ações e coações parciais de álgebras de Hopf sobre álgebras, os produtos smash parciais, e obtidos diversos resultados de dualidade, bem como alguns fatos da Teoria de Galois correspondente. Foi com essas estruturas que Muniz e Batista em 2010 desenvolveram em [10] os conceitos de ações e co-ações envolventes para ações parciais de Hopf.

O objetivo principal desse trabalho é apresentar uma extensão dos resultados obtidos por R. Exel e M. Dokuchaev em [8] para o contexto de ações parciais de álgebras de Hopf como feito por Muniz e Batista em [10].

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo são apresentados conceitos e resultados básicos sobre Álgebras de Hopf. São destacadas as definições de álgebra e coálgebra e, posteriormente, a definição de biálgebras e, por fim, Álgebras de Hopf. Além disso, são apresentados resultados sobre as antípodas de uma Álgebra de Hopf e exemplos dessas estruturas como a álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ que é abordada recorrentemente nesse trabalho.

No segundo Capítulo apresentamos os conceitos de ações parciais de um grupo G sobre uma álgebra A. Discutimos sobre a existências de uma ação envolvente, ou seja, quando um ação parcial pode ser obtida através da restrição de uma ação global. Para uma ação parcial α de um grupo G sobre uma álgebra A que admite uma ação envolvente β, é construído um contexto de Morita sobrejetor entre os anéis $A \rtimes_\alpha G$ e $B \rtimes_\beta G$. Por fim, vemos o conceito de representação parcial de grupos e como este se relaciona com as ações parciais de grupo.

Quanto ao Capítulo 3, apresentamos o conceito de ações parciais de Álgebras de Hopf e estendemos os resultados apresentados no Capítulo 2 para o contexto de álgebras de Hopf. Iniciamos mostrando como as ações parciais de um grupo G estão relacionadas com as ações parciais da Álgebra de Hopf $\mathbb{K}G$ e a existência do isomorfismo entre o anel de grupo skew parcial e o produto smash parcial relacionados a essas ações. Definimos a noção de ações envolventes para ações parciais de Álgebras de Hopf e mostramos que, diferente do caso das ações de grupos, toda ação parcial de Álgebra de Hopf admite uma ação envolvente. Também é construído um contexto de Morita entre o produto smash parcial e o produto smash associado a ação envolvente. Por fim, apresentamos alguns resultados sobre representações parciais.

Capítulo 1

Álgebras de Hopf

Neste Capítulo serão apresentados os conceitos de coálgebra, biálgebra e álgebra de Hopf. Apresentaremos também as ações de álgebras de Hopf e o produto smash que serão generalizados no Capítulo 3 para o contexto parcial. Os resultados apresentados foram desenvolvidos com base em [11], que serve como referência principal para esse capítulo. Outras resultados sobre o tema pode ser encontrados em [12] e [13].

1.1 Álgebras e Coálgebras

Ao tratar das definições e proposições nessa seção, todos os produtos tensoriais, espaços vetoriais e aplicações lineares serão tomados sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Definição 1.1 *Uma Álgebra é uma terna ordenada (A, m, μ) em que A é um espaço vetorial e $m : A \otimes A \to A$, $\mu : \mathbb{K} \to A$ são aplicações lineares tais que, dados $a, b, c \in A$ e $k \in \mathbb{K}$ os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id_A"] \arrow[d, "id_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\mathbb{K} \otimes A \arrow[ur, "\mu \otimes id_A"] \arrow[dr, "\cong"'] & & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "id_A \otimes \mu"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

onde $\cong$ denota o isomorfismo canônico como definido em A.4. As aplicações m e μ denominam a multiplicação e aplicação unidade em A respectivamente.

Note que o primeiro diagrama garante que a multiplicação é associativa, enquanto o segundo diagrama mostra que $1_A = \mu(1_{\mathbb{K}})$ é o elemento unidade. O conceito de Álgebra apresentado pode ser dualizado, criando assim a noção de coálgebras.

Definição 1.2 *Uma Coálgebra é uma terna ordenada (C, Δ, ε) em que C é um espaço vetorial e $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ são aplicações lineares tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes id_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id_C\otimes\Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ \mathbb{K}\otimes C & & C \otimes \mathbb{K} \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

onde $\cong$ refere-se aos isomorfismos canônicos de seus respectivos domínios. A aplicação Δ é chamada de comultiplicação de C e o primeiro diagrama garante sua coassociatividade, já ε denomina-se counidade de C.

Exemplo 1.3 *Seja G um grupo e $\mathbb{K}G$ o espaço vetorial de base G. Então, $\mathbb{K}G$ tem uma estrutura de coalgébra com $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$. De fato, para todo $g \in G$, temos*

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)(\Delta(g)) &= (id \otimes \Delta)(g \otimes g) \\ &= g \otimes g \otimes g \\ &= (\Delta \otimes id)(g \otimes g) \\ &= (\Delta \otimes id)(\Delta(g)). \end{aligned}$$

Sendo G uma base de $\mathbb{K}G$ e como as transformações lineares $(\Delta \otimes id) \circ \Delta$ e $(id \otimes \Delta) \circ \Delta$ coincidem em G, segue que, de fato, $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$, satisfazendo a comutatividade do primeiro diagrama da definição 1.2. Agora, para todo $g \in G$, temos

$$(id \otimes \varepsilon)(\Delta(g)) = (id \otimes \varepsilon)(g \otimes g) = g \otimes 1.$$

Dessa forma, $(id \otimes \varepsilon)(\Delta(g))$ coincide, em uma base de $\mathbb{K}G$, com o isomorfismo canônico. Isto também ocorre de forma semelhante com $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta$, assim fica satisfeita a comutatividade do segundo diagrama.

Exemplo 1.4 *Seja n um inteiro positivo. O espaço vetorial (de dimensão n^2) com base $\{x_{ij} : i, j = 1, \ldots, n\}$ tem uma estrutura de coalgébra determinada por*

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj} \quad e \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{i,j},$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Essa coalgébra chama-se coalgébra matricial *e será denotada por $C_n(\mathbb{K})$. De fato,*

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta(x_{ik}) \otimes x_{kj} = \sum_{k,l=1}^{n} x_{il} \otimes x_{lk} \otimes x_{kj} \tag{1.1}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes \Delta(x_{kj}) = \sum_{k,l=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kl} \otimes x_{lj} \tag{1.2}$$

Perceba que os termos à direita das igualdades em (1.1) e (1.2) correspondem aos mesmos elementos, assim satisfazendo a coassociatividade de Δ. Além disso,

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(x_{ik}) \otimes x_{kj} = 1_{\mathbb{K}} \otimes x_{ij}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes \varepsilon(x_{kj}) = x_{ij} \otimes 1_{\mathbb{K}}$$

o que assegura a comutatividade do segundo diagrama da definição 1.2.

A notação que utilizaremos no restante da dissertação para representar a comultiplicação é chamada de notação sigma. Nela, dado $c \in C$, denotaremos o elemento $\Delta(c) \in C \otimes C$ por

$$\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

Aplicar o primeiro diagrama da Definição 1.2 em um elemento, na notação sigma, resulta na seguinte igualdade:

$$\sum_{(c)(c_1)} c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = \sum_{(c)(c_2)} c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}. \tag{1.3}$$

Esse elemento é denotado por $\Delta_2(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$. De forma semelhante define-se $\Delta_n(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)}$.

O segundo diagrama da Definição 1.2 fornece as seguintes relações para todo $c \in C$:

$$c = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)}) c_{(2)} = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(2)}) c_{(1)}. \tag{1.4}$$

Dados espaços vetoriais V e W, pode-se definir a aplicação *twist* $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$. Note que τ é claramente um isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. A aplicação twist é usada para definição de álgebras opostas e coálgebras co-opostas.

Observação 1.5 *Sejam $\mathrm{A} = (A, m, \mu)$ uma álgebra e $\mathrm{C} = (C, \Delta, \varepsilon)$ uma coálgebra, chamamos de álgebra oposta a terna $A^{op} = (A, m^{op}, \mu)$ tal que $m^{op} = m \circ \tau$ e de coálgebra co-oposta a terna $C^{cop} = (C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ tal que $\Delta^{cop} = \tau \circ \Delta$. É válido citar ainda que $(A^{op})^{op} = A$, uma vez que $(m^{op})^{op} = m \circ \tau \circ \tau = m$. Analogamente, $(C^{cop})^{cop} = C$, já que $(\Delta^{cop})^{cop} = \tau \circ \tau \circ \Delta = \Delta$.*

Nos próximos resultados veremos que é possível definir uma álgebra a partir de uma coálgebra e vice-versa. Para isso, usaremos o espaço vetorial dual.

Dado um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V, denotamos por V^* o espaço vetorial formado por todas a transformações lineares de V em $\mathbb{K}$, chamado de espaço dual de V. Além disso, seja U também um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : U \to V$ uma tranformação linear, chamamos de transposta de T a aplicação $T^* : V^* \to U^*$ que satisfaz $\langle T^*(f), u\rangle = \langle f, T(u)\rangle$ para todos $f \in V^*$ e $u \in U$.

Para demonstrar a proposição a seguir, usaremos o fato de $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}^*$, como espaços vetoriais, serem isomorfos via o isomorfismo $\Phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*$ dado por

$$\Phi(\alpha)(\beta) = \langle \Phi(\alpha), \beta\rangle = \alpha\beta,$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Sua inversa $\Phi^{-1} : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}$ é dada por $\Phi^{-1}(f) = \langle f, 1\rangle$. Além disso, na proposição a seguir a aplicação ι_C é tal qual a definida na Proposição $A.2$.

Proposição 1.6 *Se (C, Δ, ε) é uma coálgebra, então (C^*, m, μ) é uma álgebra, com $m = \Delta^* \circ \iota_C$ e $\mu = \varepsilon^* \circ \Phi$.*

Demonstração: Sejam $f, g \in C^*$ e denote $m(f \otimes g)$ por $f * g$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle f * g, c\rangle &= \langle \iota_C(f \otimes g), \Delta(c)\rangle \\
&= \langle \iota_C(f \otimes g), \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}\rangle \\
&= \sum_{(c)} \langle f, c_{(1)}\rangle\langle g, c_{(2)}\rangle.
\end{aligned}$$

para todo $c \in C$. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle (f * g) * h, c\rangle &= \sum_{(c)} \langle f * g, c_{(1)}\rangle\langle h, c_{(2)}\rangle \\
&= \sum_{(c)} \langle f, c_{(1)}\rangle\langle g, c_{(2)}\rangle\langle h, c_{(3)}\rangle \\
&= \langle f * (g * h), c\rangle,
\end{aligned}$$

para $f, g, h \in C^*$ e $c \in C$, o que verifica a associatividade da multiplicação. Agora, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo $c \in C$, temos

$$\langle \mu(\alpha), c\rangle = \langle \varepsilon^*(\Phi(\alpha)), c\rangle = \langle \Phi(\alpha), \varepsilon(c)\rangle = \alpha\varepsilon(c).$$

Em particular, $\langle \mu(1), c\rangle = \varepsilon(c)$, para todo $c \in C$, isto é, $\mu(1) = \varepsilon$. Portanto, dados $f \in C^*$ e $c \in C$, temos

$$\langle \mu(1) * f, c\rangle = \sum_{(c)} \langle \mu(1), c_{(1)}\rangle \langle f, c_{(2)}\rangle = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})\langle f, c_{(2)}\rangle = \sum_{(c)} \langle f, \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}\rangle \overset{(1.4)}{=} f(c).$$

Analogamente, $f * \mu(1) = f$. Portanto, μ é a aplicação unidade de C^* e $1_{C^*} = \mu(1) = \varepsilon$.

■

Sendo ι bijetora quando os espaços são de dimensão finita, podemos nesse caso definir uma estrutura de coálgebra no espaço dual de uma álgebra de dimensão finita.

Proposição 1.7 *Se (A, m, μ) é uma álgebra de dimensão finita, então $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra, com $\Delta = \iota_A^{-1} \circ m^*$ e $\varepsilon = \Phi^{-1} \circ \mu^*$.*

Demonstração: Para a coassociatividade, vamos mostrar a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, "m^*"] \arrow[d, "m^*"'] & (A\otimes A)^* \arrow[r, "\iota_A^{-1}"] \arrow[d, "(m\otimes \mathrm{id}_A)^*"] & A^*\otimes A^* \arrow[d, "m^*\otimes \mathrm{id}_A"] \\
(A\otimes A)^* \arrow[r, "(\mathrm{id}_A\otimes m)^*"] \arrow[d, "\iota_A^{-1}"'] & (A\otimes A\otimes A)^* \arrow[r, "\iota^{-1}"] \arrow[d, "\iota^{-1}"] & (A\otimes A)^*\otimes A^* \arrow[d, "\iota_A^{-1}\otimes \mathrm{id}_{A^*}"] \\
A^*\otimes A^* \arrow[r, "\mathrm{id}_{A^*}\otimes m^*"] & A^*\otimes (A\otimes A)^* \arrow[r, "\mathrm{id}_{A^*}\otimes \iota_A^{-1}"] & A^*\otimes A^*\otimes A^*
\end{tikzcd}$$

em que as aplicações ι não rotuladas representam os isomorfismos da Proposição A.2 entre os respectivos espaços vetoriais.

Analisando o diagrama superior esquerdo, dados $f \in A^*$ e $a\otimes b\otimes c \in A\otimes A\otimes A$ temos por um lado

$$\begin{aligned}
\langle (m\otimes \mathrm{id}_A)^*(m^*(f)), a\otimes b\otimes c\rangle &= \langle m^*(f), (m\otimes \mathrm{id}_A)(a\otimes b\otimes c)\rangle \\
&= \langle f, (m\circ (m\otimes \mathrm{id}_A))(a\otimes b\otimes c)\rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle (\mathrm{id}_A\otimes m)^*(m^*(f)), a\otimes b\otimes c\rangle &= \langle m^*(f), (\mathrm{id}_A\otimes m)(a\otimes b\otimes c)\rangle \\
&= \langle f, (m\circ (\mathrm{id}_A\otimes m))(a\otimes b\otimes c)\rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez que (A, m, μ) é uma álgebra, a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes id_A"] \arrow[d, "id_A\otimes m"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

garante a comutatividade do diagrama superior esquerdo.

Vamos analisar agora o diagrama superior direito. Uma vez que A tem dimensão finita, por A.2, ι_A é um isomorfismo, então dado $f \in (A \otimes A)^*$, existem $f_1, f_2 \in A^*$ tais que

$$\iota_A^{-1}(f) = f_1 \otimes f_2.$$

Dessa forma, por um lado temos

$$\begin{aligned}
\langle \iota \circ (m^* \otimes \mathrm{id}_{A^*}) \circ (\iota_A^{-1}(f)), (a \otimes b) \otimes c\rangle &= \langle \iota \circ (m^* \otimes \mathrm{id}_{A^*}) \circ (f_1 \otimes f_2), (a \otimes b) \otimes c\rangle \\
&= \langle \iota(f_1 \circ m \otimes f_2), (a \otimes b) \otimes c\rangle \\
&= \langle f_1, ab\rangle\langle f_2, c\rangle \\
&= \langle \iota_A(f_1 \otimes f_2), ab \otimes c\rangle \\
&= f(ab \otimes c)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\langle (m \otimes \mathrm{id}_A)^*(f), (a \otimes b) \otimes c\rangle = f(m(a \otimes b) \otimes c) = f(ab \otimes c)$$

para todo $a \otimes b \in A \otimes A$ e $c \in A$. Assim, temos que

$$\iota \circ (m^* \otimes \mathrm{id}_A) \circ \iota_A^{-1} = (m \otimes \mathrm{id}_A)^*.$$

Aplicando ι^{-1} de ambos os lados, temos

$$(m^* \otimes \mathrm{id}_A) \circ \iota_A^{-1} = \iota^{-1}(m \otimes \mathrm{id}_A)^*,$$

o que garante a comutatividade do diagrama. De forma análoga, mostra-se a comutatividade do diagrama inferior esquerdo.

Por fim, para o diagrama inferior direito, vamos analisar o diagrama formado por suas inversas, ou seja,

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A \otimes A)^* & (A \otimes A)^* \otimes A^* \arrow[l, "\iota"'] \\
A^* \otimes (A \otimes A)^* \arrow[u, "\iota"] & A * \otimes A * \otimes A* \arrow[l, "\mathrm{id}_{A^*} \otimes \iota_A"] \arrow[u, "\iota_A \otimes \mathrm{id}_{A^*}"']
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Note que, dados $f, g, h \in A^*$ e $a, b, c \in A$, temos

$$\langle \iota \circ (\iota_A \otimes \mathrm{id}_{A^*})(f \otimes g \otimes h), a \otimes b \otimes c\rangle = \langle f, a\rangle\langle g, b\rangle\langle h, c\rangle = \langle \iota \circ (\mathrm{id}_{A^*} \otimes \iota_A)(f \otimes g \otimes h), a \otimes b \otimes c\rangle$$

Então o diagrama (1.5) comuta e, consequentemente, fica provada a coassociatividade de Δ.

Para a counidade, precisamos mostrar a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}\otimes A^* & A^*\otimes A^* \arrow[dl, "\mu^*\otimes \mathrm{id}_{A^*}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{A^*}\otimes\mu^*"] & A^*\otimes\mathbb{K} \\
\mathbb{K}^*\otimes A* \arrow[u, "\Phi^{-1}\otimes \mathrm{id}_{A^*}"] & (A\otimes A)^* \arrow[u, "\iota_A^{-1}"'] \arrow[dl, "(\mu\otimes \mathrm{id}_A)^*"'] \arrow[dr, "(\mathrm{id}_A\otimes\mu)^*"] & A^*\otimes\mathbb{K}^* \arrow[u, "\mathrm{id}_{A^*}\otimes\Phi^{-1}"'] \\
(\mathbb{K}\otimes A)^* \arrow[u, "\iota^{-1}"] & & (A\otimes\mathbb{K})^* \arrow[u, "\iota^{-1}"'] \\
& A^* \arrow[ul, "\cong"] \arrow[uu, "m^*"'] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Analogamente ao que foi feito com a comultiplicação, a associatividade de

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\mathbb{K}\otimes C & & C\otimes\mathbb{K} \\
& C\otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

garante que os dois triângulos inferiores do diagrama comutam. Por fim, note que os diagramas superiores apresentam composição análoga ao que foi feito nos diagramas superior direito e inferior esquerdo da coassociatividade, o que mostra a comutatividade do diagrama da counidade e, consequentemente, que $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

$\blacksquare$

Exemplo 1.8 *Seja n um inteiro positivo e seja $C = C_n(\mathbb{K})$ a coálgebra matricial do Exemplo 1.4. Então, a álgebra dual C^* é isomorfa, como álgebra, à álgebra matricial $M_n(k)$. Para ver isso, denotemos por $\{e_{ij} : i, j = 1, \ldots, n\}$ a base de C^* que é dual da base $\{x_{ij} : i, j = 1, \ldots, n\}$ de $C_n(k)$. Ou seja,*

$$\langle e_{ij}, x_{kl}\rangle = \begin{cases} 1, & \textit{se } (i,j) = (k,l); \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Vejamos como se multiplicam os elementos e_{ij}. Pela Proposição 1.7, a multiplicação em

C^* é dada por $m = \Delta^* \circ \iota_C$, então

$$
\begin{aligned}
\langle e_{ij}e_{kl}, x_{pq}\rangle &= \langle m(e_{ij} \otimes e_{kl}), x_{pq}\rangle \\
&= \langle \Delta^* \circ \iota_C(e_{ij} \otimes e_{kl}), x_{pq}\rangle \\
&= \langle \iota_C(e_{ij} \otimes e_{kl}), \Delta(x_{pq})\rangle \\
&= \langle \iota_C(e_{ij} \otimes e_{kl}), \sum_{m=1}^{n} x_{pm} \otimes x_{mq}\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{n} \langle e_{ij}, x_{pm}\rangle \langle e_{kl}, x_{mq}\rangle.
\end{aligned}
$$

Em particular, $\langle e_{ij}e_{kl}, x_{pq}\rangle = 0$ sempre que $p \neq i$ e $q \neq l$. Agora,

$$
\begin{aligned}
\langle e_{ij}e_{kl}, x_{il}\rangle &= \sum_{m=1}^{n} \langle e_{ij}, x_{im}\rangle \langle e_{kl}, x_{ml}\rangle \\
&= \langle e_{ij}, x_{ij}\rangle \langle e_{kl}, x_{jl}\rangle \\
&= \delta_{kj}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\langle e_{ij}e_{kl}, x_{pq}\rangle = \delta_{kj}\delta_{(i,l),(p,q)} = \delta_{kj}\langle e_{il}, x_{pq}\rangle$. Assim, as relações $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, que definem a álgebra de matrizes $M_n(k)$, estão satisfeitas.

Assim como as Álgebras, as Coálgebras também têm uma definição de morfismo. Além disso, essas definições se comportam bem com respeito à construção dos espaços duais, como veremos a seguir.

Definição 1.9 *Sejam C e D coálgebras, com comultiplicações Δ_C e Δ_D e counidades ε_C e ε_D, respectivamente. Uma aplicação linear $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se*

$$\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C \text{ e } \varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f.$$

Observe que na notação sigma uma aplicação $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se

$$\sum_{(f(c))} f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} = \sum_{(c)} f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) \quad \text{e} \quad \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c),$$

para todo $c \in C$.

Um isomorfismo de coálgebras é um morfismo de coálgebras bijetor.

Proposição 1.10 *Sejam C e D coálgebras e seja $f : C \to D$ uma transformação linear. Então, f é um morfismo de coálgebras se, e somente se, a aplicação transposta $f^* : D^* \to C^*$ é um morfismo de álgebras.*

Demonstração: Suponha que f é um morfismo de coálgebras e sejam $\alpha, \beta \in D^*$ e $c \in C$. Por um lado,

$$\langle f^*(\alpha\beta), c\rangle = \langle \alpha\beta, f(c)\rangle = \sum_{(f(c))} \langle \alpha, f(c)_{(1)}\rangle\langle \beta, f(c)_{(2)}\rangle.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle f^*(\alpha)f^*(\beta), c\rangle &= \sum_{(c)} \langle f^*(\alpha), c_{(1)}\rangle\langle f^*(\beta), c_{(2)}\rangle \\ &= \sum_{(c)} \langle \alpha, f(c_{(1)})\rangle\langle \beta, f(c_{(2)})\rangle,\end{aligned}$$

logo, $f^*(\alpha\beta) = f^*(\alpha)f^*(\beta)$. Além disso, sendo $(\varepsilon_D^* \circ \Phi)(1)$ a unidade de D^*, para todo $c \in C$ temos

$$\begin{aligned}\langle f^*((\varepsilon_D^* \circ \Phi)(1)), c\rangle &= \langle f^*, ((\varepsilon_D^* \circ \Phi)(1))(c)\rangle \\ &= \langle ((\varepsilon_D^* \circ \Phi)(1)), f(c)\rangle \\ &= \langle \Phi(1), \varepsilon_D(f(c))\rangle \\ &= \varepsilon_D(f(c)) \\ &= \varepsilon_C(c) \\ &= (\varepsilon_C^* \circ \Phi)(1).\end{aligned}$$

Reciprocamente, seja f^* um morfismo de álgebras, e $f : C \to D$ uma aplicação linear, então para todo $\theta, \varphi \in D^*$ e $c \in C$ temos

$$\begin{aligned}f^*(\theta\varphi) &= f^*(\theta)f^*(\varphi) \\ \Rightarrow \langle f^*(\Delta_D^* \circ \iota_D(\theta \otimes \varphi)), c\rangle &= \langle \Delta_C^* \circ \iota_C(f^*(\theta) \otimes f^*(\varphi)), c\rangle \\ \Rightarrow \langle (\Delta_D^* \circ \iota_D(\theta \otimes \varphi)), f(c)\rangle &= \langle \Delta_C^* \circ \iota_C(\theta \circ f \otimes \varphi \circ f), c\rangle \\ \Rightarrow \langle \iota_D(\theta \otimes \varphi), \Delta_D(f(c)) &= \langle \iota_C(\theta \circ f \otimes \varphi \circ f), \Delta_C(c)\rangle \\ \Rightarrow \langle \iota_D(\theta \otimes \varphi), \sum_{(f(c))} f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)}\rangle &= \langle \iota_C(\theta \circ f \otimes \varphi \circ f), \sum_{c} c_{(1)} \otimes c_{(2)}\rangle \\ &= \sum_{(c)} \langle \theta \circ f, c_{(1)}\rangle\langle \varphi \circ f, c_{(2)}\rangle \\ &= \langle \theta, f((c_{(1)}))\rangle\langle \varphi, f((c_{(2)}))\rangle \\ &= \langle \iota_D(\theta \otimes \varphi), \sum_{(c)} f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)})\rangle\end{aligned}$$

o que, pela Proposição A.3, garante que $f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) = f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)}$.

Além disso, temos

$$
\begin{aligned}
f^*\left(\left(\varepsilon_D^* \circ \Phi\right)(1)\right) = \left(\varepsilon_C^* \circ \Phi\right)(1) = \varepsilon_C \\
\Rightarrow f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_C \\
\Rightarrow \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C
\end{aligned}
$$

■

1.2 Biálgebras e Álgebras de Hopf

A seguir, olharemos para espaços que têm estruturas de álgebra e coálgebra simultaneamente, de modo que haja uma compatibilidade entre elas, tais objetos serão denominados biálgebras.

Se C e D são coálgebras, o espaço vetorial $C \otimes D$ tem estrutura de coálgebra, em que $\Delta_{C\otimes D}$ é a composta

$$C \otimes D \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_D} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_C \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_D} C \otimes D \otimes C \otimes D$$

e $\varepsilon_{C\otimes D}(c \otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d)$, para todos $c \in C$ e $d \in D$. Na notação sigma,

$$\Delta_{C\otimes D}(c \otimes d) = \sum_{(c),(d)} c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)},$$

para todos $c \in C$ e $d \in D$.

O corpo $\mathbb{K}$ tem uma estrutura natural de coálgebra com comultiplicação dada pelo isomorfismo canônico $\mathbb{K} \xrightarrow{\cong} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ e counidade dada pela aplicação identidade.

Por outro lado, se A e B são álgebras, então $A \otimes B$ tem uma estrutura de álgebra tal que $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$, para todos $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$, com $1_{A\otimes B} = 1_A \otimes 1_B$.

Proposição 1.11 *Seja H um espaço vetorial com aplicações lineares $m : H \otimes H \to H$, $\mu : k \to H$, $\Delta : H \to H \otimes H$ e $\varepsilon : H \to k$ tais que (H, m, μ) seja uma álgebra e (H, Δ, ε) seja uma coálgebra. São equivalentes:*

(i) m e μ são morfismos de coálgebras;

(ii) Δ e ε são morfismos de álgebras.

Demonstração: Temos que Δ é um morfismo de álgebras se, e somente se, é multiplicativo e preserva unidades. Ou seja, dados $a, b \in H$ temos

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \tag{1.6}$$

$$\Delta(1_H) = 1_{H\otimes H} \tag{1.7}$$

Por sua vez, ε é um morfismo de álgebras se, e somente se, valem

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) \tag{1.8}$$

$$\varepsilon(1_H) = 1_{H\otimes H}. \tag{1.9}$$

Utilizando a notação sigma na equação (1.6), temos

$$\sum_{ab}(ab)_{(1)} \otimes (ab)_{(2)} = (\sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)})(\sum_b b_{(1)} \otimes b_{(2)}) = \sum_{a,b} a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}$$

Dessa forma, vemos que

$$\begin{aligned} \Delta \circ m &= (m \otimes m) \circ (id_H \otimes \tau \otimes ih_H) \circ (\Delta \otimes \Delta) && (1.10)\\ &= (m \otimes m) \circ \Delta_{H\otimes H} && (1.11) \end{aligned}$$

Isso satisfaz a primeira igualdade da Definição 1.9 para que m seja um morfismo de coálgebras. Ademais, da equação (1.8), para todo $a \otimes b \in H \otimes H$, obtemos

$$\varepsilon \circ m(a \otimes b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \varepsilon_{H\otimes H}(a \otimes b) \tag{1.12}$$

Assim, podemos concluir que m é morfismo de coálgebras se, e somente se, valem (1.6) e (1.8). De forma análoga, de (1.7) obtemos

$$\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ \Psi, \tag{1.13}$$

já de (1.9), temos

$$\varepsilon(\mu(1)) = \mu(1) \otimes \mu(1) \tag{1.14}$$

em que Ψ é o isomorfismo canônico de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$. Observe que m é morfismo de coálgebras se, e somente se, o (1.6) e (1.8) valem, enquanto μ é morfismo de coálgebras se, e somente se, (1.7) e (1.9) valem. Temos, portanto, a equivalência entre (a) e (b). ■

Definição 1.12 *Qualquer sistema $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ que satisfaz as condições da Proposição 1.11 chama-se biálgebra.*

Usando a notação sigma, o sistema $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra, se (H, m, μ) é uma álgebra, (H, Δ, ε) é uma coálgebra, e, para todos $a, b \in H$,

$$\sum_{(ab)}(ab)_{(1)} \otimes (ab)_{(2)} = \sum_{(a),(b)} a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)} \quad e \quad \varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b).$$

Uma transformação linear $f : H \to H'$ entre biálgebras é chamada de morfismo de biálgebras se f é morfismo de álgebras e de coálgebras. Um morfismo de biálgebras será dito ser um isomorfismo se for bijetor, e duas biálgebras serão dita isomorfas se houver um isomorfismo entre elas.

Exemplo 1.13 *Seja G um grupo e seja $\mathbb{K}G$ sua álgebra de grupo. Então, $\mathbb{K}G$ tem uma estrutura de biálgebra, em que*

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1,$$

para todo $g \in G$.

De fato, a função $\delta : G \to \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G$, dada por $\delta(g) = g \otimes g$, para todo $g \in G$, é multiplicativa: $\delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \delta(g)\delta(h)$, para todos $g, h \in G$. Pela propriedade universal da álgebra de grupo, existe um morfismo de álgebras $\Delta : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G$ que satisfaz $\Delta(g) = g \otimes g$, para todo $g \in G$. Similarmente, a função constante $\rho : G \to \mathbb{K}$, dada por $\rho(g) = 1$, para todo $g \in G$, também é multiplicativa e, portanto, induz um morfismo de álgebras $\varepsilon : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}$ tal que $\varepsilon(g) = 1$, para todo $g \in G$. Já vimos, no Exemplo 1.3, que Δ e ε definem uma estrutura de coálgebra em $\mathbb{K}G$. Logo, a álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ é uma biálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε.

Sejam C uma coálgebra e A uma álgebra. Então, o espaço vetorial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ tem estrutura de álgebra com multiplicação dada pelo produto

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta,$$

para todos $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$, chamado produto de convolução. Usando a notação sigma, podemos escrever

$$(f * g)(c) = \sum_{(c)} f(c_{(1)})g(c_{(2)}), \tag{1.15}$$

para todo $c \in C$. A unidade da álgebra $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ é, assim, $\mu \circ \varepsilon$, já que

$$(f * (\mu \circ \varepsilon))(c) = \sum_{(c)} f(c_{(1)})\mu(\varepsilon(c_{(2)})) = \sum_{(c)} f(c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}))\mu(1) = f(c)$$

e, analogamente, $((\mu \circ \varepsilon) * f)(c) = f(c)$.

Note que se C é uma coálgebra, então a multiplicação na álgebra dual C^*, como definida na Proposição 1.7, coincide com o produto de convolução em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, \mathbb{K})$.

Definição 1.14 *Seja $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Dizemos que H é uma álgebra de Hopf se a aplicação identidade $\mathrm{id}_H \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H, H)$ é inversível com relação ao produto de convolução $*$. O inverso de id_H é chamado de antípoda para H e, usualmente, denotado por S.*

Assim, a biálgebra $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ é uma álgebra de Hopf se existe um operador linear $S : H \to H$ que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[dd, "\mathrm{id}_H \otimes S"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & H \otimes H \arrow[dd, "S \otimes \mathrm{id}_H"] \\
& \mathbb{K} \arrow[d, "\mu"'] & \\
H \otimes H \arrow[r, "m"] & H & H \otimes H \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

Na notação sigma, se S é a antípoda da álgebra de Hopf H, então

$$\sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H = \sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)}), \tag{1.16}$$

para todo $h \in H$.

Como a antípoda de uma álgebra de Hopf é o inverso de um elemento em uma álgebra, se existir, ela é única.

Exemplo 1.15 *Seja G um grupo e considere a biálgebra $H = \mathbb{K}G$ do Exemplo 1.13. Mostremos que H é uma álgebra de Hopf com antípoda S satisfazendo*

$$S(g) = g^{-1} \quad (g \in G).$$

De fato, seja $S : H \to H$ o operador linear definido por $S(g) = g^{-1}$, para $g \in G$. Para cada $g \in G$, temos $(S * \mathrm{id}_H)(g) = S(g)g$, uma vez que $\Delta(g) = g \otimes g$. Assim, pela definição de S, segue $(S * \mathrm{id}_H)(g) = g^{-1}g = 1_H$. Por outro lado, $(\mu \circ \varepsilon)(g) = \mu(1) = 1_H$. Logo, $S * \mathrm{id}_H = \mu \circ \varepsilon$, uma vez que essas duas transformações lineares coincidem na base G de H. De maneira similar, mostra-se que $\mathrm{id}_H * S = \mu \circ \varepsilon$.

Em vista desse exemplo, costuma-se dizer que a antípoda de uma álgebra de Hopf faz o papel de aplicação inversa em um grupo.

Observação 1.16 *Se H é uma álgebra de Hopf com antípoda S e g é tal que $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1$, então $1_H = \mu(\varepsilon(g)) = S(g)g$ e $1_H = \mu(\varepsilon(g)) = gS(g)$. Logo, g é invertível em H e $S(g) = g^{-1}$.*

Definição 1.17 *Uma transformação linear $f : A \to B$ de uma álgebra A em uma álgebra B é um antimorfismo de álgebras se $f(1_A) = 1_B$ e $f(xy) = f(y)f(x)$, para todos $x, y \in A$. Em outras palavras, a transformação linear $f : A \to B$ é um antimorfismo de álgebras se a função*

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow B^{\mathrm{op}} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

é um morfismo de álgebras.

Proposição 1.18 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então,*

(i) S é um antimorfismo de álgebras, e

(ii) S é um antimorfismo de coálgebras, isto é, $\Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$ e $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.

Usando a notação sigma, a condição $\Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$ expressa-se da seguinte maneira:

$$\sum_{(S(h))} S(h)_{(1)} \otimes S(h)_{(2)} = \sum_{(h)} S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}),$$

para todo $h \in H$.

Demonstração: *Para mostrar que S é um antimorfismo de álgebras, comecemos por observar que, como $\varepsilon(1_H) = 1_{\mathbb{K}}$ e $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, temos $1_H = \varepsilon(1_H)1_H = \mu(\varepsilon(1_H)) = (\mathrm{id}_H * S)(1_H) = 1_H S(1_H) = S(1_H)$. Considere agora as transformações lineares $N, P \in \mathrm{Hom}_k(H \otimes H, H)$, definidas por*

$$N = m \circ (S \otimes S) \circ \tau$$
$$P = S \circ m.$$

Essas transformações satisfazem

$$N(g \otimes h) = S(h)S(g) \quad e \quad P(g \otimes h) = S(gh)$$

para todos $g, h \in H$. Denote por $\star$ o produto de convolução da álgebra $\mathrm{Hom}_k(H \otimes H, H)$. Lembre que o elemento unidade de $\mathrm{Hom}_k(H \otimes H, H)$ é dado por $\mu \circ \tilde{\varepsilon}$, em que $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{H \otimes H}$, e que $\tilde{\varepsilon}(g \otimes h) = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$, para todos $g, h \in H$.

Será suficiente mostrar que $P \star m = \mu \circ \tilde{\varepsilon} = m \star N$, pois, nesse caso, $P = P \star (m \star N) = (P \star m) \star N = N$, o que é equivalente a termos $S(gh) = S(h)S(g)$, para todos $g, h \in H$. Dados $g, h \in H$, temos, por um lado,

$$\begin{aligned}
(m \star N)(g \otimes h) &= \sum_{(g \otimes h)} m((g \otimes h)_{(1)}) N((g \otimes h)_{(2)}) \\
&= \sum_{(g),(h)} m(g_{(1)} \otimes h_{(1)}) N(g_{(2)} \otimes h_{(2)}) \\
&= \sum_{(g),(h)} g_{(1)} h_{(1)} S(h_{(2)}) S(g_{(2)}) \\
&= \sum_{(g)} g_{(1)} S(g_{(2)}) \varepsilon(h) \\
&= \varepsilon(g)\varepsilon(h) 1_H \\
&= \tilde{\varepsilon}(g \otimes h) 1_H \\
&= (\mu \circ \tilde{\varepsilon})(g \otimes h),
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}(P\star m)(g\otimes h) &= \sum_{(g\otimes h)} P((g\otimes h)_{(1)})m((g\otimes h)_{(2)})\\ &= \sum_{(g),(h)} P(g_{(1)}\otimes h_{(1)})m(g_{(2)}\otimes h_{(2)})\\ &= \sum_{(g),(h)} S(g_{(1)}h_{(1)})g_{(2)}h_{(2)}\\ &= \sum_{(gh)} S((gh)_{(1)})(gh)_{(2)}\\ &= (S*\mathrm{id}_H)(gh)\\ &= \varepsilon(g)\varepsilon(h)1_H\\ &= \tilde{\varepsilon}(g\otimes h)1_H\\ &= (\mu\circ\tilde{\varepsilon})(g\otimes h).\end{aligned}$$

Portanto, $P\star m=\mu\circ\tilde{\varepsilon}=m\star N$ *e, assim,* S *é um antimorfismo de álgebras.*

Vejamos agora que S *é também um antimorfismo de coálgebras. Dado* $h\in H$*, vale*

$$\begin{aligned}\varepsilon(S(h)) &= \varepsilon\left(S\left(\sum_{(h)}\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\right)\right)\\ &= \sum_{(h)}\varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(S(h_{(2)}))\\ &= \sum_{(h)}\varepsilon(h_{(1)}S(h_{(2)})\\ &= \varepsilon\left(\sum_{(h)}h_{(1)}S(h_{(2)})\right)\\ &= \varepsilon(h).\end{aligned}$$

Para mostrar que $\Delta\circ S=\tau\circ(S\otimes S)\circ\Delta$*, considere a estrutura de álgebra em* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H,H\otimes H)$ *com multiplicação dada pelo produto de convolução* $\star$*. Lembre que a aplicação unidade* $\tilde{\mu}$ *da álgebra* $H\otimes H$ *é dada por* $\tilde{\mu}(\lambda)=\lambda 1_H\otimes 1_H$*, para todo* $\lambda\in\mathbb{K}$*. Sejam* $R,T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H,H\otimes H)$ *dadas por*

$$\begin{aligned}R &= \Delta\circ S\\ T &= \tau\circ(S\otimes S)\circ\Delta,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}R(h) &= \sum_{(S(h))} S(h)_{(1)}\otimes S(h)_{(2)}\\ T(h) &= \sum_{(h)} S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)}),\end{aligned}$$

para todo $h \in H$. Basta, portanto, como no item anterior, mostrar que $R \star \Delta = \tilde{\mu} \circ \varepsilon = \Delta \star T$.

Dado $h \in H$, temos, por um lado,

$$\begin{aligned}
(R \star \Delta)(h) &= \sum_{(h)} R(h_{(1)})\Delta(h_{(2)}) \\
&= \sum_{(h),(S(h_{(1)})} (S(h_{(1)})_{(1)} \otimes S(h_{(1)})_{(2)})\Delta(h_2) \\
&= \sum_{(h)} \Delta(S(h_{(1)}))\Delta(h_{(2)}) \\
&= \Delta\left(\sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)}\right) \\
&= \Delta(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)1_H \otimes 1_H \\
&= (\tilde{\mu} \circ \varepsilon)(h)
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta \star T)(h) &= \sum_{(h)} \Delta(h_{(1)})T(h_{(2)}) \\
&= \sum_{(h)} (h_{(1)} \otimes h_{(2)})(S(h_{(4)}) \otimes S(h_{(3)})) \\
&= \sum_{(h)} (h_{(1)}S(h_{(4)})) \otimes (h_{(2)}S(h_{(3)})) \\
&= \sum_{(h)} (h_{(1)}S(h_{(3)})) \otimes (\varepsilon(h_{(2)})1_H) \\
&= \left(\sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)})\right) \otimes 1_H \\
&= \varepsilon(h)1_H \otimes 1_H \\
&= (\tilde{\mu} \circ \varepsilon)(h)
\end{aligned}$$

Logo, $R \star \Delta = \tilde{\mu} \circ \varepsilon = \Delta \star T$, donde segue $R = T$. ■

Lema 1.19 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então $(H^{\mathrm{op}})^{\mathrm{cop}}$ é uma álgebra de Hopf com antípoda S.*

Demonstração: *Sabemos que $(H^{\mathrm{op}})^{\mathrm{cop}}$ é uma biálgebra. Para mostrar que S é uma antípoda para $(H^{\mathrm{op}})^{\mathrm{cop}}$, observe que $\tau \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) = (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \tau$, o que implica*

$$\begin{aligned}
m^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} &= m \circ \tau \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau \circ \Delta \\
&= m \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta \\
&= \mu \circ \varepsilon.
\end{aligned}$$

Similarmente, $m^{\mathrm{op}} \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} = \mu \circ \varepsilon$. ■

Proposição 1.20 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. São equivalentes:*

(i) H^{op} *é uma álgebra de Hopf.*

(ii) H^{cop} *é uma álgebra de Hopf.*

(iii) S *é bijetora.*

Neste caso, a função inversa de S é a antípoda de H^{op} e de H^{cop}.

Demonstração: Se H^{op} é uma álgebra de Hopf, segue, do Lema 1.19, que $H^{\mathrm{cop}} = (H^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op\ cop}}$ também o é, e tem a mesma antípoda de H^{cop}. Analogamente, se H^{cop} for uma álgebra se Hopf, então $H^{\mathrm{op}} = (H^{\mathrm{cop}})^{\mathrm{cop\ op}} = (H^{\mathrm{cop}})^{\mathrm{op\ cop}}$ também será e terá a mesma antípoda de H^{cop}. Portanto, (a) e (b) são equivalentes, e quando um deles vale, H^{op} e H^{cop} têm a mesma antípoda.

Mostremos, agora, que (iii) implica (ii). Suponha que S seja uma função bijetora e denote sua função inversa (com respeito à composição de funções) por $\bar{S}$. Como S é um antimorfismo de álgebras, $\bar{S}$ também é, e, portanto, para todo $h \in H$, vale

$$\begin{aligned}\sum_{(h)} \bar{S}(h_{(2)})h_{(1)} &= \sum_{(h)} \bar{S}(h_{(2)})(S\bar{S}(h_{(1)})) \\ &= \bar{S}\left(\sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)}\right) \\ &= \bar{S}(\varepsilon(h)1_H) = \varepsilon(h)1_H.\end{aligned}$$

Ou seja, $\mu \circ \varepsilon = m \circ (\bar{S} \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau \circ \Delta = m \circ (\bar{S} \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta^{\mathrm{cop}}$. Analogamente, $\mu \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id}_H \otimes \bar{S}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}}$. Logo, H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda $\bar{S}$.

Finalmente, mostremos que (ii) implica (iii). Suponha que H^{cop} seja uma álgebra de Hopf com antípoda T. Mostremos que $T \circ S = S \circ T = \mathrm{id}_H$. De fato, dado $h \in H$,

$$\begin{aligned}T(S(h)) &= \sum_{(h)} T(\varepsilon(h_{(2)})h_{(1)}) = \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(2)})1_H T(S(h_{(1)})) \\ &= \sum_{(h)} h_{(3)}T(h_{(2)})T(S(h_{(1)})) = \sum_{(h)} h_{(3)}T(S(h_{(1)})h_{(2)}) \\ &= \sum_{(h)} h_{(2)}T(\varepsilon(h_{(1)})1_H) = \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = h,\end{aligned}$$

Logo, $T \circ S = \mathrm{id}_H$. De modo análogo, prova-se que $S \circ T = \mathrm{id}_H$. Portanto, S é bijetora.

■

Observação 1.21 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S inversível. Pela Proposição 1.20, temos que S^{-1} é antípoda de H^{op} e pela comutatividade do diagrama na Definição 1.14 obtemos*

$$S^{-1}(h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h)1_H = h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)})$$

Definição 1.22 *Sejam H_1 e H_2 álgebras de Hopf. Dizemos que uma aplicação $f : H_1 \to H_2$ é um morfismo de álgebras de Hopf se f é um morfismo de biálgebras.*

1.3 Módulos e Módulos Álgebra

Definição 1.23 *Para uma álgebra (A, m, μ), um A-módulo à esquerda é um par ordenado (M, ψ), em que M é um espaço vetorial e $\psi : A \otimes M \to M$ é uma aplicação linear tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "m \otimes id_M"] \arrow[d, "id_A \otimes \psi"'] & A \otimes M \arrow[d, "\psi"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\psi"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu \otimes id_M"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes M \arrow[d, "\psi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Dados $a \in A$ e $x \in M$, é comum escrever $a \cdot x$ para denotar o elemento $\psi(a \otimes x)$ de M.

Se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra, denotamos por $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ o conjunto de todos os automorfismos de A. Com respeito à composição de funções, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ é um grupo com identidade id_A. Se G é um grupo e $\phi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ é um morfismo de grupos, podemos definir o anel de grupo skew de A pela ação de G por

$$A * G = \left\{ \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma : a_\sigma \in A \right\}$$

em que em todas as somas apenas um número finito de elementos a_σ é não nulo. O conjunto $A * G$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com soma dada por

$$\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma + \sum_{\sigma \in G} b_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in G} (a_\sigma + b_\sigma)\sigma$$

e multiplicação satisfazendo, além da distributividade em relação à soma, a condição

$$\sigma a = \phi(\sigma)(a)\sigma,$$

com $a \in A, \sigma \in G$.

Assim, em $A * G$, tem-se

$$\left(\sum_{\sigma\in G} a_\sigma \sigma\right)\left(\sum_{\sigma\in G} b_\sigma \sigma\right) = \sum_{\sigma\in G}\left(\sum_{\rho\tau=\sigma} a_\rho \phi(\rho)(b_\tau)\right)\sigma.$$

O elemento unidade da álgebra $A * G$ é dado por $1_A 1$, em que 1 designa o elemento identidade do grupo G. As funções

$$\begin{array}{ccc} A & \to & A * G \\ a & \mapsto & a1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} G & \to & A * G \\ \sigma & \mapsto & 1_A\sigma \end{array}$$

são injetoras e permitem, assim, considerar A uma subálgebra de $A*G$ e G um subgrupo do grupo dos elementos invertíveis em $A * G$. O conjunto

$$A^G = \{a \in A : \phi(\sigma)(a) = a, \text{ para todo } \sigma \in G\}$$

é uma subálgebra de A, chamada subálgebra de invariantes de A pela ação de G. Temos assim, uma cadeia de subálgebras,

$$A^G \subset A \subset A * G.$$

Se o morfismo ϕ é trivial (isto é, é dado por $\phi(\sigma) = \mathrm{id}_A$, para todo $\sigma \in G$), então $A * G$ coincide com o anel de grupo usual AG.

Essas ideias se generalizam para o contexto de biálgebras da seguinte forma:

Definição 1.24 *Seja H uma biálgebra e seja A uma álgebra. Dizemos que A é uma H-módulo álgebra à esquerda, ou que H age em A à esquerda, se as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) A é um H-módulo à esquerda (com ação de $h \in H$ em $a \in A$ denotada por $h \triangleright a$),

(ii) $h \triangleright (ab) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b)$, para todo $h \in H$ e todos $a, b \in A$,

(iii) $h \triangleright 1_A = \varepsilon(h)1_A$, para todo $h \in H$.

Ações à direita são definidas de forma simétrica.

Seja H uma biálgebra e seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. Dados $h \in H$ e $a \in A$, dizemos que h age trivialmente em a se $h \triangleright a = \varepsilon(h)a$. O conjunto A^H formado pelos elementos de A nos quais todos os elementos de H agem trivialmente forma uma subálgebra chamada subálgebra de invariantes de A sob a ação de H:

$$A^H = \{a \in A \mid h \triangleright a = \varepsilon(h)a, \text{ para todo } h \in H\}.$$

Podemos associar ao par (A, H) uma álgebra que generaliza a construção do anel de grupo $A*G$ da seguinte maneira. O produto smash $A\#H$ é definido como sendo a álgebra que coincide com $A \otimes H$ como espaço vetorial e que tem multiplicação satisfazendo

$$(a\#h)(b\#g) = \sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}g,$$

para todos $a, b \in A$ e $h, g \in H$, em que $a\#h$ denota o elemento $a \otimes h$ de $A\#H$ e analogamente para $b\#g$.

Mais precisamente, se $\psi : H \otimes A \to A$ é a aplicação linear que define em A uma estrutura de H-módulo à esquerda, a aplicação linear $(A \otimes H) \otimes (A \otimes H) \to A \otimes H$ que define a multiplicação no produto smash $A\#H$ é dada pela composição:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}_A \otimes \Delta_H \otimes \mathrm{id}_{A\otimes H}"] & & A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[d, "\mathrm{id}_{A\otimes H} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_H"] \\
& & A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \psi \otimes m_H"] \\
A \otimes H & & A \otimes A \otimes H \arrow[ll, "m_A \otimes \mathrm{id}_H"]
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.25 *O produto smash é associativo e possui unidade.*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que a multiplicação em $A\#H$ é associativa. De fato, dados $a\#h, b\#k, c\#j \in A\#H$ temos

$$\begin{aligned}
((a\#h)(b\#k))(c\#j) &= (\sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}k)(c\#j) \\
&= \sum_{(h),(k)} a(h_{(1)} \triangleright b)(h_{(2)}k_{(1)} \triangleright c) \otimes h_{(3)}k_{(2)}j
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(a \otimes h)\left((b \otimes k)(c \otimes j)\right) &= (a \otimes h)\left(\sum_{(k)} b(k_{(1)} \triangleright c) \otimes k_{(2)}j\right)\\
&= \sum_{(k)} (a \otimes h)\left(b(k_{(1)} \triangleright c) \otimes k_{(2)}j\right)\\
&= \sum_{(k)}\sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright (b(k_{(1)} \triangleright c))) \otimes h_{(2)}(k_{(2)}j)\\
&= \sum_{(k)}\sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b)(h_{(2)} \triangleright (k_{(1)} \triangleright c)) \otimes h_{(3)}k_{(2)}j\\
&= \sum_{(k)}\sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b)(h_{(2)} \triangleright 1_A)(h_{(3)}k_{(1)} \triangleright c) \otimes h_{(4)}k_{(2)}j\\
&= \sum_{(k)}\sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b)(h_{(2)}k_{(1)} \triangleright c) \otimes h_{(3)}k_{(2)}j
\end{aligned}
$$

o que prova a associatividade. Além disso, é fácil ver que $1_A\#1_H$ é unidade para $A\#H$, uma vez que

$$(1_A\#1_H)(a\#h) = 1_A(1_H \triangleright a)\#1_H h = a\#h.$$

Similarmente, temos

$$(a\#h)(1_A\#1_h) = \sum_{(h)} a(h_{(1)}\triangleright 1_A)\#h_{(2)}1_H = \sum_{(h)} a\varepsilon(h_{(1)})1_A\#h_{(2)} = \sum_{(h)} a\#\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = a\#h.$$

■

Exemplo 1.26 *Dizemos que um grupo G age em uma álgebra A por automorfismos se existe um morfismo de grupos $\phi : G \to Aut_{\mathbb{K}}(A)$. Seja $H = \mathbb{K}G$ a álgebra de grupo do grupo G sobre $\mathbb{K}$ com a estrutura usual de biálgebra (isto é, todo elemento de G é grouplike). Então, uma álgebra A é uma H-módulo álgebra se, e somente se, G age em A por automorfismos.*

De fato, suponha que $\phi : G \to Aut_{\mathbb{K}}(A)$ seja um morfismo de grupos. Pela propriedade universal da álgebra de grupo, ϕ se estende a um morfismo de álgebras $H \to End_{\mathbb{K}}(A)$, que, por sua vez, define em A uma estrutura de H-módulo à esquerda satisfazendo

$$\sigma \triangleright a = \phi(\sigma)(a),$$

para todo $\sigma \in G, a \in A$.

Mostremos que A é uma H-módulo álgebra. Em primeiro lugar, observe que para todo $\sigma \in G$, vale $\sigma \triangleright 1_A = \phi(\sigma)(1_A) = 1_A = \varepsilon(\sigma)1_A$. Assim, dado $h = \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma \sigma \in H$, *com $\lambda_\sigma \in \mathbb{K}$, temos*

$$\begin{aligned} h \triangleright 1_A &= \left(\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \sigma\right) \triangleright 1_A = \sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma (\sigma \triangleright 1_A) \\ &= \sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \varepsilon(\sigma) 1_A = \varepsilon \left(\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \sigma\right) 1_A = \varepsilon(h) 1_A. \end{aligned}$$

Agora, dados $\sigma \in G$ e $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} \sigma \triangleright (ab) &= \phi(\sigma)(ab) = \phi(\sigma(a)\phi(\sigma)(b) \\ &= (\sigma \triangleright a)(\sigma \triangleright b) = \sum_{(\sigma)} (\sigma_{(1)} \triangleright a)(\sigma_{(2)} \triangleright b) \end{aligned}$$

pois σ é um elemento grouplike. Segue, assim, que para todo $h \in H$, também se tem $h \triangleright (ab) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b)$.

Reciprocamente, suponha que A seja uma H-módulo álgebra e seja $\phi : G \to End_{\mathbb{K}}(A)$ a restrição a G do morfismo de álgebras $H \to End_{\mathbb{K}}(A)$ que define a estrutura de H-módulo à esquerda em A. Então, $\phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau)$, para todos $\sigma, \tau \in G$, e ϕ satisfaz

$$\phi(\sigma)(a) = \sigma \triangleright a \quad (\sigma \in G, a \in A).$$

Observe que, para todo $\sigma \in G$, $\phi(\sigma)$ é, na realidade, um morfismo de álgebras, pois, como σ é um elemento grouplike, $\phi(\sigma)(ab) = \sigma \triangleright (ab) = (\sigma \triangleright a)(\sigma \triangleright b) = \phi(\sigma)(a)\phi(\sigma)(b)$, para todo $a, b \in A$. Além disso, $\phi(\sigma)(1_A) = \sigma \triangleright 1_A = \varepsilon(\sigma)1_A = 1_A$. Como todo elemento de G é invertível, temos $\phi(G) \subset Aut_{\mathbb{K}}(A)$. Portanto, temos um morfismo de grupos $\phi : A \to Aut_{\mathbb{K}}(A)$.

Finalmente, observe que A^H coincide com a subálgebra de invariantes da ação do grupo G por automorfismos de A (como o leitor pode facilmente verificar), e o produto smash $A \# H$ nada mais é do que o anel de grupo skew $A * G$, uma vez que a multiplicação em $A \# H$ satisfaz

$$(a\#\sigma)(b\#\tau) = a\phi(\sigma)(b)\#\sigma\tau,$$

para todos $a, b \in A$ e $\sigma, \tau \in G$.

Exemplo 1.27 *Toda álgebra de Hopf H age sobre si mesma via a ação adjunta à esquerda, definida por*

$$h \triangleright a = \sum_{(h)} h_{(1)} a S(h_{(2)}),$$

para todos $h, a \in H$. No caso $H = \mathbb{K}G$ e $\sigma \in G$, então $\sigma \triangleright h = \sigma h \sigma^{-1}$, para todo $h \in H$.

Se H age em si mesma pela ação adjunta e se $Z(H)$ denota o centro de H, isto é, $Z(H)$ é a subálgebra (comutativa) de H definida por

$$Z(H) = \{z \in H : zh = hz, \text{ para todo } h \in H\},$$

então, é claro que $Z(H) \subseteq H^H$*. E, reciprocamente, se* $z \in H^H$*, então, para todo* $h \in H$*,*

$$\begin{aligned} hz &= \sum_{(h)} h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})z \\ &= \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright 1_{\mathbb{K}} \triangleright z\varepsilon(h_{(2)}) \\ &= \sum_{(h)} h_{(1)}z\varepsilon(h_{(2)}) \\ &= \sum_{(h)} h_{(1)}zS(h_{(2)})h_{(3)} \\ &= \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright z)h_{(2)} \\ &= \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)})zh_{(2)} \\ &= zh. \end{aligned}$$

Logo, $H^H = Z(H)$*.*

Proposição 1.28 *Seja* H *uma biálgebra e seja* A *uma* H*-módulo álgebra. Então as funções*

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & A & \to & A\#H \\ & a & \mapsto & a\#1_H \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \beta: & H & \to & A\#H \\ & h & \mapsto & 1_A\#h \end{array}$$

são morfismos injetores de álgebras.

Demonstração: Claramente as aplicações são injetoras, então basta mostrar que são morfismos de álgebra. Note que

$$\alpha(1_A) = 1_A\#1_H = 1_{A\#H}$$

$$\beta(1_H) = 1_A\#1_H = 1_{A\#H}$$

Além disso,

$$\alpha(a)\alpha(b) = (a\#1_H)(b\#1_H) = a(1_H \triangleright b)\#1_H = ab\#1_H = \alpha(ab)$$

e

$$\begin{aligned} \beta(g)\beta(h) &= (1_A\#g)(1_A\#h) \\ &= 1_A(g_{(1)} \triangleright 1_A)\#g_{(2)}h \\ &= 1_A\varepsilon(g_{(1)})1_A\#g_{(2)}h \\ &= 1_A\#\varepsilon(g_{(1)})g_{(2)}h \\ &= 1_A\#gh \\ &= \beta(ab) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Em vista da proposição acima, passaremos, quando for conveniente, a olhar A e H como subálgebras de $A\#H$ via a identificação de A e H com suas imagens pelos morfismos injetores $a \mapsto a\#1_H$ e $h \mapsto 1_A\#h$, respectivamente. Assim, como para $a \in A$ e $h \in H$, temos $a\#h = (a\#1_H)(1_A\#h)$, $A\#H$ pode ser vista como a álgebra gerada pelas subálgebras A e H, na qual as relações

$$ha = \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright a)h_{(2)}, \tag{1.17}$$

para todos $h \in H$, $a \in A$, estão satisfeitas.

Quando H é uma álgebra de Hopf e sua antípoda S é bijetora, as regras de comutação entre elementos de A e de H em $A\#H$ podem ser apresentadas de modo simétrico. Denotaremos a aplicação inversa de S por $\bar{S}$. Pela Proposição 1.20, H^{cop} é uma álgebra de Hopf com antípoda $\bar{S}$; portanto,

$$\sum_{(h)} h_{(2)}\bar{S}(h_{(1)}) = \sum_{(h)} \bar{S}(h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h)1_H, \tag{1.18}$$

para todo $h \in H$.

Proposição 1.29 *Seja H uma álgebra de Hopf cuja antípoda S tenha uma inversa $\bar{S}$. Seja A uma H-módulo álgebra. Então, em $A\#H$ temos,*

$$ah = \sum_{(h)} h_{(2)}(\bar{S}(h_{(1)}) \triangleright a), \tag{1.19}$$

para todos $a \in A$ e $h \in H$.

Demonstração: Sejam $a \in A$ e $h \in H$. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{(h)} h_{(2)}(\bar{S}(h_{(1)}) \triangleright a) &\overset{(1.17)}{=} \sum_{(h)} (h_{(2)} \triangleright (\bar{S}(h_{(1)}) \triangleright a))(h_{(3)}) \\
&= \sum_{(h)} ((h_{(2)}\bar{S}(h_{(1)})) \triangleright a)h_{(3)} \\
&\overset{(1.18)}{=} (1_H \triangleright a)(\sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}) \\
&= ah.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Assim, uma vez que A pode ser visto como uma subálgebra de $A\#H$, a álgebra $A\#H$ tem uma estrutura natural de A-módulo à esquerda e à direita induzidas pela multiplicação em $A\#H$.

Capítulo 2

Ações parciais de grupos

Neste capítulo serão apresentados os conceitos de ações parciais de um grupo G em uma álgebra associativa A e o seu respectivo anel de grupo skew parcial, conforme apresentado em [8]. Serão discutidas questão de globalização, ou seja, quando que uma ação parcial pode ser obtida através de uma restrição admissível de uma ação global, a construção de um contexto de Morita envolvendo o anel de grupo skew parcial e global e, por fim, apresentado o conceito de representações parciais e sua relação com as ações parciais.

2.1 Ação envolvente de uma ação parcial

Ações parciais de grupos apareceram de forma independente em várias áreas da matemática, em particular, na teoria de álgebras de operadores como uma poderosa ferramenta em seu estudo. No cenário mais geral de ações parciais sobre conjuntos abstratos, temos a seguinte definição:

Definição 2.1 *Seja G um grupo com elemento identidade 1 e $\mathcal{X}$ um conjunto. Uma ação parcial α de G sobre $\mathcal{X}$ é uma coleção de subconjuntos $D_g \subseteq \mathcal{X}$ $(g \in G)$ e bijeções $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ tais que*

(i) $D_1 = \mathcal{X}$ *e* α_1 *é a aplicação identidade de* $\mathcal{X}$*;*

(ii) $D_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$*;*

(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ *para cada* $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$.

Note que as condições (ii) e (iii) significam que a função α_{gh} é uma extensão da função $\alpha_g \circ \alpha_h$. Além disso, é facilmente visto que (ii) pode ser substituída pela seguinte condição: $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$. De fato, por definição, temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}}$, daí de (ii) temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$. Substituindo h por h^{-1} e g por gh, temos $\alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}) \subseteq D_h \cap D_{g^{-1}}$. Por (iii) $\alpha_{h^{-1}}^{-1} = \alpha_h$, e obtemos a desejada igualdade. Assim, as condições (i)-(iii) são equivalentes ao seguinte:

(i) $D_1 = \mathcal{X}$ e α_1 é a aplicação identidade de $\mathcal{X}$;

(ii') $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$;

(iii') $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Definição 2.2 *Dada uma ação parcial α de um grupo G sobre uma álgebra A, o anel de grupo skew $A \rtimes_\alpha G$ correspondente a α é o conjunto de todas as somas formais finitas $\{\sum_{g \in G} a_g \delta_g : a_g \in D_g\}$, onde δ_g são símbolos. A adição é definida da maneira óbvia, e a multiplicação é determinada por*

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}.$$

Observação 2.3 *Obviamente, $A \ni a \mapsto a\delta_1 \in A \rtimes_\alpha G$ é uma imersão que nos permite identificar A com $A\delta_1$. Além disso, é fácil ver que o anel de grupo skew é unitário com unidade $1_A\delta_1$, entretanto não é certo que seja sempre associativo, como visto no Exemplo 3.5 em [8].*

Exemplos naturais de ações parciais podem ser obtidos restringindo ações (globais) a subconjuntos não necessariamente invariantes (ideais no nosso caso).

Exemplo 2.4 *Sejam G um grupo e B uma $\mathbb{K}$-álgebra. Suponha que existe uma ação global de G sobre B, ou seja, existe um homomorfismo de grupos $\beta : G \to Aut(B)$, e assim para cada $g \in G$, existe $\beta_g : B \to B$ isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Considere A um ideal de B. Defina*

$$D_g = A \cap \beta_g(A).$$

Como A é um ideal de B e β_g é um isomorfismo, então $\beta_g(A)$ também é um ideal de B, logo $D_g = A \cap \beta_g(A)$ é também ideal de B.

Defina agora

$$\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$$

Vamos provar que $\beta_g(D_{g^{-1}}) = D_g$

Seja $x \in D_{g^{-1}} = A \cap \beta_g(A)$, então $x \in A$ e $x = \beta_{g^{-1}}(x')$, onde $x' \in A$. Logo,

$$\beta_g(x) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(x')) = x' \in A \cap \beta_g(A) = D_g.$$

Assim, $\beta_g(D_{g^{-1}}) \subseteq D_g$.

Agora seja $x \in D_g = A \cap \beta_g(A)$, *então* $x \in A$ *e* $x = \beta_g(x')$, *onde* $x' \in A$. *Assim,*

$$\beta_{g^{-1}}(x) = \beta_{g^{-1}}(\beta_g(x')) = x' \in A \cap \beta_{g^{-1}}(A) = D_{g^{-1}}.$$

Logo, $x' \in D_{g^{-1}}$ *e então*

$$x = \beta_g(x') \in \beta_g(D_{g^{-1}}).$$

Assim, $D_g \subseteq \beta_g(D_{g^{-1}})$ *e portanto vale a igualdade.*

Desta forma, as aplicações

$$\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}} : D_{g^{-1}} \to D_g$$

são isomorfismos de álgebras.

Vamos agora mostrar que $\alpha = (\alpha_g, D_g)_{g\in G}$ *é uma ação parcial de* G *sobre* A.

(i)

$$D_1 = A \cap \beta_1(A) = A \cap Id(A) = A \cap A = A.$$

$$\alpha_1 = \beta_1|_A = Id_A.$$

(ii) *Seja* $y \in \alpha_g(D_h \cap D_{g^{-1}})$ *então existe* $x \in D_h \cap D_{g^{-1}}$ *tal que* $y = \alpha_g(x)$.

Como $x \in D_h$ *e* $\alpha_h : D_{h^{-1}} \to D_h$ *é um isomorfismo, então existe* $z \in D_{h^{-1}}$ *tal que* $x = \alpha_h(z)$.

Assim,

$$y = \alpha_g(x) = \alpha_g(\alpha_h(z)) = \beta_g(\beta_h(z)) = \beta_{gh}(z) \in \beta_{gh}(A).$$

Dessa forma,

$$y \in \beta_{gh}(A) \cap A = D_{gh}$$

Logo $y \in D_{gh} \cap D_g$ *e portanto*

$$\alpha_g(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_g \cap D_{gh}.$$

(iii) *Primeiramente vamos mostrar que se* $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{gh^{-1}}$, *então* $\alpha_h(x) \in D_{g^{-1}}$.

Seja $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{gh^{-1}}$, *então* $x \in D_{gh^{-1}}$. *Como* $\alpha_{(gh)^{-1}} : D_{gh} \to D_{(gh)^{-1}}$ *é um isomorfismo, então existe* $z \in D_{gh}$ *tal que*

$$x = \alpha_{(gh)^{-1}}(z)$$

Assim,

$$x = \alpha_{(gh)^{-1}}(z) = \beta_{(gh)^{-1}}(z) = \beta_{h^{-1}}(\beta_{g^{-1}}(z))$$

$$\Rightarrow \beta_h(x) = \beta_h(\beta_{h^{-1}}(\beta_{g^{-1}}(z))) = \beta_{g^{-1}}(z) \in \beta_{g^{-1}}(A).$$

Como $x \in D_{h^{-1}}$, *temos*

$$\alpha_h(x) = \beta_h(x) = \beta_{g^{-1}}(z) \in \beta_{g^{-1}}(A) \cap A = D_{g^{-1}}.$$

Assim, para todo $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{gh^{-1}}$, *temos*

$$\alpha_{gh}(x) = \beta_{gh}(x) = \beta_g(\beta_h(x)) = \beta_g(\alpha_h(x)) = \alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_g \circ \alpha_h(x).$$

Portanto, α é uma ação parcial de G sobre A.

No exemplo acima, dizemos que α é uma restrição da ação global β a A. Queremos encontrar circunstâncias sob as quais uma dada ação parcial pode ser obtida a menos de equivalência como a restrição de uma ação (global). A noção de equivalência de ações parciais é definida como segue:

Definição 2.5 *Dizemos que uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g : g \in G\}$ de um grupo G em uma álgebra A é equivalente à ação parcial $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \to D'_g : g \in G\}$ de G em uma álgebra A' se existir um isomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A'$ tal que para cada $g \in G$ as duas seguintes condições valem:*

(i) $\varphi(D_g) = D'_g$;

(ii) $\alpha'_g \circ \varphi(x) = \varphi \circ \alpha_g(x)$, *para todo* $x \in D_{g^{-1}}$.

Considere um homomorfismo de grupos $\beta : G \to \mathrm{Aut}(B)$, onde G é um grupo e B uma álgebra. Assim, para cada $g \in G$, existe $\beta_g : B \to B$ isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Considerando A um ideal de B, tome $D_g = A \cap \beta_g(A)$ e adote $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$ tal como no Exemplo 2.4. Se B_1 é a subálgebra de B gerada por $\bigcup_{g\in G} \beta_g(A)$, pode acontecer que $B \neq B_1$ e, uma vez que B_1 é invariante em relação a β, podemos ver que α pode ser obtida como a restrição de uma ação de G em B_1 que é uma subálgebra própria de B. Assim, é razoável exigir que $B = B_1$, e neste caso diremos que α é uma restrição admissível de β.

Definição 2.6 *Uma ação β de um grupo G em uma álgebra B é dita uma* ***ação envolvente*** *para a ação parcial α de G em uma álgebra A se α é equivalente a uma restrição admissível de β a um ideal de B.*

Em outras palavras, β é uma ação envolvente para α se existe um isomorfismo de álgebras φ de A sobre um ideal de B tal que para todo $g \in G$ as três seguintes propriedades são satisfeitas:

(i') $\varphi(D_{g^{-1}}) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$;

(ii') $\varphi \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \varphi(x)$ para cada $x \in D_{g^{-1}}$;

(iii') B é gerado por $\bigcup_{g\in G} \beta_g(\varphi(A))$.

Um problema geral é decidir se uma dada ação parcial possui uma ação envolvente. O resultado a seguir, mostra que isso nem sempre é verdade.

Proposição 2.7 *Se β é uma ação de um grupo G sobre uma álgebra B que é uma ação envolvente para a ação parcial α de G sobre uma álgebra A, então o anel de grupo skew $A \rtimes_\alpha G$ está contido em $B \rtimes_\beta G$. Em particular, $A \rtimes_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração: Seja A' o ideal de B tal que existe um isomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A'$. Considere

$$\begin{aligned} \theta : A \rtimes_\alpha G &\longrightarrow B \rtimes_\beta G \\ a_g\delta_g &\longmapsto \varphi(a_g)\delta_g \end{aligned}$$

Basta mostrar que θ é um homomorfismo de álgebras injetor.

- θ é um homomorfismo de álgebras.

  Por um lado,

$$\theta(a_g\delta_g)\theta(b_h\delta_h) = \varphi(a_g)\delta_g\varphi(b_h)\delta_h = \varphi(a_g)\beta_g(\varphi(b_h))\delta_{gh}$$

  Por outro lado,

$$\begin{aligned} \theta(a_g\delta_g b_h\delta_h) &= \theta(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}) \\ &= \varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh} \\ &= \beta_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh} \\ &= \beta_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\varphi(b_h)))\delta_{gh} \\ &= \beta_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g)))\beta_g(\varphi(b_h))\delta_{gh} \\ &= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(\varphi(a_g)))\beta_g(\varphi(b_h))\delta_{gh} \\ &= \varphi(a_g)\beta_g(\varphi(b_h))\delta_{gh} \end{aligned}$$

  Logo, $\theta(a_g\delta_g b_h\delta_h) = \theta(a_g\delta_g)\theta(b_h\delta_h)$.

- θ é injetor. Seja $x = \sum_{g\in G} a_g\delta_g \in \mathrm{Ker}(\theta)$, então

$$\begin{aligned} & \theta(x) = \textstyle\sum_{g\in G} \varphi(a_g)\delta_g = 0 \\ \Rightarrow\ & \varphi(a_g) = 0, \quad \forall g \in G \\ \Rightarrow\ & a_g = 0, \quad \forall g \in G \\ \Rightarrow\ & x = \textstyle\sum_{g\in G} a_g\delta_g = 0. \end{aligned}$$

  Por fim, uma vez que $B \rtimes_\beta G$ é associativo, segue que $A \rtimes_\alpha G$ também é.

■

Observação 2.8 *Note que, como mencionado na Observação 2.3, nem todo anel de grupo skew parcial é associativo, então nem toda ação parcial admite uma envolvente.*

Veremos a seguir uma condição para que uma ação parcial possua uma ação envolvente, para isso vamos precisar do seguinte resultado:

Lema 2.9 *Suponha que A é uma álgebra que é uma soma (não necessariamente direta) de um número finito de ideais, cada um dos quais é uma álgebra unitária. Então A é uma álgebra unitária.*

Demonstração: Por indução sobre o número de somandos, é suficiente considerar o caso com dois ideais: $A = \mathcal{I} + \mathcal{J}$. Sejam $1_{\mathcal{I}}$ e $1_{\mathcal{J}}$ os elementos de unidade de $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ respectivamente. Então $1_{\mathcal{I}}$ e $1_{\mathcal{J}}$ são idempotentes centrais de A e $1_{\mathcal{I}} + 1_{\mathcal{J}} - 1_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{J}}$ é a unidade de A. De fato, dado $a \in A$ devemos ter $a = a_{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{J}}$ com $a_{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}$ e $a_{\mathcal{J}} \in \mathcal{I}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
a(1_{\mathcal{I}} + 1_{\mathcal{J}} - 1_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{J}}) &= (a_{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{J}})(1_{\mathcal{I}} + 1_{\mathcal{J}} - 1_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{J}}) \\
&= a_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{J}} - a_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{J}} + a_{\mathcal{J}}1_{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{J}}1_{\mathcal{J}} - a_{\mathcal{J}}1_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{J}} \\
&= a_{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{J}} - a_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{J}} + a_{\mathcal{J}}1_{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{J}} - a_{\mathcal{J}}1_{\mathcal{J}}1_{\mathcal{I}} \\
&= a_{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{J}}1_{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{J}} - a_{\mathcal{J}}1_{\mathcal{I}} \\
&= a_{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{J}} \\
&= a.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $(1_{\mathcal{I}} + 1_{\mathcal{J}} - 1_{\mathcal{I}}1_{\mathcal{J}})a = a$ e temos o resultado.

■

Teorema 2.10 *Seja A uma álgebra unitária. Então uma ação parcial α de um grupo G em uma álgebra A admite uma ação envolvente se e somente se cada ideal D_g $(g \in G)$ é uma álgebra unitária. Além disso, β, se existe, é única a menos de equivalência.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se β existe e $\varphi : A \to B$ é o monomorfismo que dá a equivalência, então $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$ é claramente uma álgebra unitária (interseção de álgebras unitárias) para cada $g \in G$ e, consequentemente, D_g também será.

$(\Leftarrow)$ Suponha que cada ideal D_g $(g \in G)$ é uma álgebra unitária. Isso significa que para cada $g \in G$ existe um idempotente central 1_g de A tal que $D_g = 1_g A$.

Seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G, A)$ o produto cartesiano de A indexado pelos elementos de G, isto é, a álgebra de todas as funções de G em A. Por conveniência de notação $f(g)$ também será escrito como $f|_g$ $(f \in \mathcal{F}, g \in G)$. Para $g \in G$ e $f \in \mathcal{F}$ defina $\beta_g(f) \in \mathcal{F}$ pela fórmula:

$$\beta_g(f)|_h = f(g^{-1}h), \quad h \in G.$$

Vamos mostrar que para todo $g \in G$, β_g é um automorfismo de $\mathcal{F}$. Dados $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ e $g \in G$, temos

$$\beta_g(f_1 + f_2)|_h = (f_1 + f_2)(g^{-1}h) = f_1(g^{-1}h) + f_2(g^{-1}h) = \beta_g(f_1)|_h + \beta_g(f_2)|_h$$

. Para a injetividade, vê-se que dado $f \in \mathcal{F}$ tal que $\beta_g(f) = 0$ temos

$$\begin{aligned}\beta_g(f) = 0 &\Rightarrow \beta_g(f)|_h = 0, \quad \forall h \in G\\ &\Rightarrow f(g^{-1}h) = 0, \quad \forall h \in G.\end{aligned}$$

Note que $g^{-1}h$ percorre todo o G, uma vez que dado $g' \in G$ podemos escrever $g' = g^{-1}gg'$, assim $f = 0$ e então $Ker\beta_g = \{0\}$. Por fim, para cada $f \in \mathcal{F}$, tome $f' \in \mathcal{F}$ tal que $f'|_h = f|gh$. Assim, para todo $h \in G$ temos

$$\beta_g(f')|_h = f'(g^{-1}h) = f(gg^{-1}h) = f|_h,$$

mostrando que $f \mapsto \beta_g(f)$ define um automorfismo β_g de $\mathcal{F}$, e assim $\beta = \{\beta_g : \mathcal{F} \to \mathcal{F} : g \in G\}$ é uma ação de G em $\mathcal{F}$. É fácil ver que para cada $g, h \in G$ o idempotente $1_g 1_h$ é o elemento unidade da álgebra $D_g \cap D_h$, o que significa que $D_g \cap D_h = 1_g 1_h A$. Uma vez que α é uma ação parcial, a igualdade $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$ obviamente implica

$$\alpha_g(1_{g^{-1}} 1_h) = 1_g 1_{gh}. \tag{2.1}$$

Para qualquer $a \in A$ o elemento $a1_g$ pertence a D_g, e a fórmula

$$\varphi(a)|_g = \alpha_{g^{-1}}(a1_g), \quad g \in G,$$

Note que dados $a, b \in A$ e $g \in G$ temos

$$\varphi(ab)|_g = \alpha_{g^{-1}}(ab1_g) = \alpha_{g^{-1}}(a1_g b1_g) = \alpha_{g^{-1}}(a1_g)\alpha_{g^{-1}}(b1_g) = \varphi(a)|_g \varphi(b)|_g.$$

Além disso, suponha que $\varphi(a) = 0$, então para todo $g \in G$ temos

$$\alpha_{g^{-1}}(a1_g) = 0 \Rightarrow a = 0,$$

o que mostra que φ é um monomorfismo.

Seja B a subálgebra de $\mathcal{F}$ gerada por $\bigcup_{g\in G}\beta_g(\varphi(A))$ $(g \in G)$. Nosso propósito é mostrar que a restrição de β a B é uma ação envolvente para α. Denotamos a restrição com o mesmo símbolo β. Começamos verificando a propriedade (ii') da Definição 2.6. Para $g, h \in G$ e $a \in D_{g^{-1}}$, temos $\beta_g(\varphi(a))|_h = \varphi(a)|_{g^{-1}h} = \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})$ e $\varphi(\alpha_g(a))|_h = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h)$. Assim, (ii') é satisfeita se e somente se a seguinte igualdade valer para todos $g, h \in G$ e todo $a \in D_{g^{-1}}$:

$$\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h). \tag{2.2}$$

Observando que $a \cdot 1_{g^{-1}h} \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h^{-1}}$, podemos dividir $\alpha_{h^{-1}g}$ no lado esquerdo, e usando (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}h})) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_g1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h)
\end{aligned}$$

uma vez que 1_g é a unidade de D_g. Em seguida, mostramos que

$$\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A)), \tag{2.3}$$

para todo $g \in G$. Um elemento do lado direito pode ser escrito como $\varphi(a) = \beta_g(\varphi(b))$ para quaisquer $a, b \in A$. Então para cada $h \in G$ a igualdade $\varphi(a)|_h = \beta_g(\varphi(b))|_h$ significa que

$$\alpha_{h^{-1}}(a1_h) = \varphi(b)|_{g^{-1}h} = \alpha_{h^{-1}g}(b1_{g^{-1}h}). \tag{2.4}$$

Tomando $h = 1$, isso nos dá $a = \alpha_g(b1_{g^{-1}}) \in D_g$ e, consequentemente, $\varphi(D_g) \supseteq \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$. Para a inclusão inversa, dado um elemento $a \in D_g$, precisamos encontrar $b \in A$ tal que (2.4) valha. Para $b = \alpha_g^{-1}(a)$, o lado direito de (2.4) é $\alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h})$, que é igual ao lado esquerdo de (2.4) quando vemos por (2.2). Portanto (2.3) segue e a condição (i') também é satisfeita.

Para mostrar que β é uma ação envolvente para α, resta provar que $\varphi(A)$ é um ideal de B. Para ver isso, é suficiente verificar que $\beta_g(\varphi(a))\cdot\varphi(b) \in \varphi(A)$ e $\varphi(b)\cdot\beta_g(\varphi(a)) \in \varphi(A)$

para todos $g \in G$ e $a, b \in A$. Para $h \in G$, usando (6), temos

$$\begin{aligned}\beta_g(\varphi(a))|_h \cdot \varphi(b)|_h &= \varphi(a)|_{g^{-1}h} \cdot \varphi(b)|_h = \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \cdot \alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\ &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h) \cdot \alpha_{h^{-1}}(b1_h) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b1_h) = \varphi(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b)|_h.\end{aligned}$$

Assim $\beta_g(\varphi(a))\cdot\varphi(b) = \varphi(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b) \in \varphi(A)$ e similarmente $\varphi(b)\cdot\beta_g(\varphi(a)) = \varphi(b\alpha_g(a1_{g^{-1}})) \in \varphi(A)$, como desejado.

Agora, vamos provar a unicidade da ação envolvente. Suponha que β' é outra ação de G em uma álgebra B', que é envolvente para α. Seja φ' a aplicação correspondente de A em B'. A admissibilidade incorporada na Definição 3.7 significa que B' é a soma dos ideais $\beta'_g(\varphi'(A))$, $g \in G$. Assim, um elemento de B' pode ser escrito como uma soma finita $\sum_{i=1}^{s} \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))$, com $g_i \in G$ e $a_i \in A$. Defina uma aplicação $\phi : B' \to B$ por $\phi(\sum_{i=1}^{s} \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))) = \sum_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$. Queremos mostrar que ϕ está bem definido. Suponha que $\sum_{i=1}^{s} \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i)) = 0$. Temos que ter certeza de que $\sum_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = 0$. Para todo $h \in G$ e $a \in A$ temos $\sum_{i=1}^{s} \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))\beta'_h(\varphi'(a)) = 0$, e aplicando $\beta'_{h^{-1}}$ obtemos $\sum_{i=1}^{s} \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) = 0$. Como $\varphi'(a)$ é um ideal, o elemento $\sum_{i=1}^{s} \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a_i)$ está na álgebra $\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(A)) \cap \varphi'(A) = \varphi'(D_{h^{-1}g_i})$, cuja unidade é o elemento $\varphi'(1_{h^{-1}g_i})$. Portanto, usando (ii'),

$$\begin{aligned}\beta'_{h-1g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) &= \beta'_{h-1g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(1_{h^{-1}g_i})\varphi'(a) \\ &= \beta'_{h-1g_i}(\varphi'(a_i))\varphi' \circ \alpha_{h^{-1}g_i}(1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\ &= \beta'_{h-1g_i}(\varphi'(a_i))\beta'_{h-1g_i} \circ \varphi'(1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\ &= \beta'_{h-1g_i} \circ \varphi'(a_i 1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\ &= \varphi' \circ \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\ &= \varphi'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a).\end{aligned}$$

De forma similar, vemos que $\beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\varphi(a) = \varphi(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}}h)a)$. Assim,

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) = \sum_{i=1}^{s} \varphi'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a),$$

o que implica $\sum_{i=1}^{s} \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h}) = 0$. Portanto

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \varphi(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) = \sum_{i=1}^{s} \beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\varphi(a),$$

e aplicando β_h obtemos

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))\beta_h(\varphi(a)) = 0,$$

para todo $a \in A$. Portanto, o elemento $\sum_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ anula cada $\beta_h(\varphi(a))$. Seja B_1 a álgebra gerada por $\bigcup_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(A))$. Então $\sum_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) \in B_1$, e pelo Lema 2.9 B_1 possui um elemento unidade, digamos 1_{B_1}. Então

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = \sum_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) \cdot 1_{B_1} = 0,$$

de modo que $\sum_{i=1}^{s} \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i)) = 0$ implica $\sum_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = 0$ e $\varphi : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ é um homomorfismo bem definido de álgebras. Por simetria, $\beta_{g_i}(\varphi(a_i)) \mapsto \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))$, $g \in G$, $a \in A$, também determina uma aplicação bem definida $\phi' : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$. Obviamente, $\phi \circ \phi' = \phi' \circ \phi = 1$ e, consequentemente, ϕ é um isomorfismo de álgebras. É facilmente visto que para todo $g \in G$ se tem $\beta_g \circ \phi = \phi \circ \beta'_g$, e isso resulta que β' é equivalente a β. ■

2.2 Contexto de Morita

Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre uma álgebra unitária A e suponha que (β, B) é uma ação envolvente para (α, A) tal que B também tenha unidade. Pela Proposição 2.7, o anel de grupo skew é associativo. Nosso objetivo nesta seção é exibir um contexto de Morita estrito para os anéis $R = A \rtimes_\alpha G$ e $R' = B \rtimes_\beta G$.

Recordamos de [14], Seção 4.1 que um contexto de Morita é uma sêxtupla $(R, S, M, N, \tau, \tau')$, onde:

(a) R e S são anéis,

(b) M é um R-S-bimódulo,

(c) N é um S-R-bimódulo,

(d) $\tau : M \otimes_S N \to R$ é um morfismo de bimódulo,

(e) $\tau' : N \otimes_R M \to S$ é um morfismo de bimódulo,

tal que

$$\tau(m_1 \otimes n)m_2 = m_1\tau'(n \otimes m_2), \quad \forall m_1, m_2 \in M, n \in N,$$

e

$$\tau'(n_1 \otimes m)n_2 = n_1\tau(m \otimes n_2), \quad \forall n_1, n_2 \in N, m \in M.$$

Dado um contexto de Morita com τ e τ' sobrejetoras, seguindo nomenclatura de [14], R e S são ditos Morita equivalentes.

Considere os subespaços lineares $M, N \subset B \rtimes_\beta G$ dados por

$$M = \left\{ \sum_{g \in G} c\delta_g : c \in A \text{ para todo } g \in G \right\}$$

e

$$N = \left\{ \sum_{g \in G} c\delta_g : c \in \beta_g(A) \text{ para todo } g \in G \right\}.$$

Proposição 2.11 *M é um ideal à direita e N é um ideal à esquerda de $B \rtimes_\beta G$.*

Demonstração: Seja $c\delta_g$ em M, onde $g \in G$ e $c \in A$. Se $h \in G$ e $b \in B$, temos

$$c\delta_g \cdot b\delta_h = c\beta_g(b)\delta_{gh} \in M,$$

pois $c\beta_g(b) \in A$ uma vez que A é um ideal em B. Logo M é um ideal à direita em $B \rtimes_\beta G$.

Agora seja $c\delta_g$ em N, onde $g \in G$ e $c = \beta_g(c')$ com $c' \in A$. Se $h \in G$ e $b \in B$, temos

$$b\delta_h \cdot c\delta_g = b\beta_h(c)\delta_{hg} = b\beta_{hg}(c')\delta_{hg} \in N,$$

porque $\beta_{hg}(A)$ é um ideal em B. Então N é um ideal à esquerda. ∎

No próximo resultado, veremos $A \rtimes_\alpha G$ como uma subálgebra de $B \rtimes_\beta G$, como na Proposição 2.7.

Proposição 2.12 *$(A \rtimes_\alpha G)M \subseteq M$ e $N(A \rtimes_\alpha G) \subseteq N$, de forma que M pode ser visto como um $A \rtimes_\alpha G$-módulo à esquerda e N pode ser visto como um $A \rtimes_\alpha G$-módulo à direita.*

Demonstração: Seja $c\delta_g$ em M, onde $g \in G$ e $c \in A$, e seja $a_h\delta_h \in A \rtimes_\alpha G$, onde $h \in G$ e $a_h \in D_h$. Então

$$a_h\delta_h \cdot c\delta_g = a_h\beta_h(c)\delta_{hg} \in M,$$

porque $a_h\beta_h(c) \in A$ uma vez que A é um ideal em M. Então M é um $A \rtimes_\alpha G$-módulo à esquerda.

Agora seja $c\delta_g$ em N, onde $g \in G$ e $c = \beta_g(c')$ com $c' \in A$, e seja $a_h\delta_h \in A \rtimes_\alpha G$, onde $h \in G$ e $a_h \in D_h$. Então

$$c\delta_g \cdot a_h\delta_h = c\beta_g(a_h)\delta_{gh} = \beta_g(c')\beta_g(a_h)\delta_{gh} = \beta_g(c'a_h)\delta_{gh} \in N. \tag{2.5}$$

Uma vez que D_h é um ideal em A, temos que $c'a_h \in D_h$ e, portanto, $c'a_h = \alpha_h(x)$ para algum $x \in D_{h^{-1}}$. Então da equação (2.5), segue que

$$c\delta_g a_h\delta_h = \beta_g(\alpha_h(x))\delta_{gh} = \beta_g(\beta_h(x))\delta_{gh} = \beta_{gh}(x)\delta_{gh} \in N.$$

Portanto N é um $A \rtimes_\alpha G$-módulo à direita. ■

Até agora, vimos que M é um $(A \rtimes_\alpha G)$-$(B \rtimes_\beta G)$-bimódulo e N é um $(B \rtimes_\beta G)$-$(A \rtimes_\alpha G)$-bimódulo. Estes fornecem o terceiro e quarto componentes do contexto de Morita. A seguir, precisamos definir τ e τ'.

Dados subespaços lineares X e Y de uma álgebra, denotamos por XY o espaço linear gerado pelo conjunto de produtos xy com $x \in X$ e $y \in Y$.

No próximo resultado mostraremos que $(A \rtimes_\alpha G, B \rtimes_\beta G, M, N, \tau, \tau')$ onde τ e τ' são definidos por

$$\tau : m \otimes n \in M \otimes_{B \rtimes_\beta G} N \longmapsto mn \in A \rtimes_\alpha G \tag{2.6}$$

e

$$\tau' : n \otimes m \in N \otimes_{A \rtimes_\alpha G} M \longmapsto nm \in B \rtimes_\beta G. \tag{2.7}$$

formam um contexto de Morita sobrejetor.

Proposição 2.13 *Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre uma álgebra unitária A e suponha que (β, B) seja uma ação envolvente para (α, A) tal que B também seja unitária. Então $A \rtimes_\alpha G$ e $B \rtimes_\beta G$ são Morita equivalentes.*

Demonstração: A Proposição 2.11 e a Proposição 2.12 já mostram que M é um $(A \rtimes_\alpha G) - (B \rtimes_\beta G)$ bimódulo e N é um $(B \rtimes_\beta G) - (A \rtimes_\alpha G)$ bimódulo, em que M e N são como definidos anteriormente.

Para provar que τ e τ' são bem definidas e sobrejetoras, mostraremos que $MN = A \rtimes_\alpha G$ e $NM = B \rtimes_\beta G$.

Seja $c_1\delta_g \in M$ e $c_2\delta_h \in N$, onde $g, h \in G$, $c_1 \in A$, e $c_2 = \beta_h(c_2')$ com $c_2' \in A$. Então

$$c_1\delta_g \cdot c_2\delta_h = c_1\beta_g(c_2)\delta_{gh} = c_1\beta_g(\beta_h(c_2'))\delta_{gh} \in A \rtimes_\alpha G,$$

porque $c_1\beta_{gh}(c_2') \in A \cap \beta_{gh}(A) = D_{gh}$. Isso mostra que $MN \subseteq A \rtimes_\alpha G$.

Dado $c \in D_h$, observe que $c \in \alpha_h(D_{h^{-1}}) \subseteq \beta_h(A)$, de forma que $c\delta_h \in N$. Seja 1_A a unidade de A, temos que $1_A\delta_e \in M$ e

$$1_A\delta_e \cdot c\delta_h = 1_A c\delta_h = c\delta_h.$$

Então $c\delta_h \in MN$. Como c é arbitrário, concluímos que $A \rtimes_\alpha G \subseteq MN$.

Sejam $g, h \in G$ e seja $c \in A$. Então $\beta_g(c)\delta_g \in N$ e $1_A\delta_{g^{-1}h} \in M$. Além disso,

$$\beta_g(c)\delta_g \cdot 1_A\delta_{g^{-1}h} = \beta_g(c)\beta_g(1_A)\delta_{gh} = \beta_g(c)\delta_{gh}.$$

Como $\bigcup_{g\in G}\beta_g(A)$ gera B, concluímos que $B\delta_{gh} \subseteq NM$, e, portanto, $NM = B \rtimes_\beta G$.

Desta forma, as aplicações τ e τ' definidas em (2.6) e (2.7) estão bem definidas e são sobrejetoras. Além disso, $A \rtimes_\alpha G$ e $B \rtimes_\beta G$ são associativos, então temos

$$\tau(m_1 \otimes n)m_2 = (m_1 n)m_2 = m_1(nm_2) = m_1\tau'(n \otimes m_2), \quad \forall m_1, m_2 \in M, n \in N,$$

e

$$\tau'(n_1 \otimes m)n_2 = (n_1 m)n_2 = n_1(mn_2) = n_1\tau(m \otimes n_2), \quad \forall n_1, n_2 \in N, m \in M.$$

O que conclui que sêxtupla $(A \rtimes_\alpha G, B \rtimes_\beta G, M, N, \tau, \tau')$ é um contexto de Morita.

Além disso, uma vez que τe τ' são sobrejetoras, temos que $A \rtimes_\alpha G$ e $B \rtimes_\beta G$ são morita equivalentes. ■

2.3 Representações Parciais

Nesta seção, usamos produtos cruzados para relacionar ações parciais com representações parciais de grupos.

Definição 2.14 *Uma representação parcial de um grupo G em uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária B é uma aplicação*

$$\pi : G \to B$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\pi(1) = 1_B$

(ii) $\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1})$

(iii) $\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \pi(g^{-1})\pi(gh)$

Com isso, uma igualdade importante para demais resultados dessa seção é

$$\pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) = \pi(g)\pi(g^{-1}g) = \pi(g)\pi(e) = \pi(g)1_B = \pi(g). \tag{2.8}$$

A partir de agora, consideraremos todas as ações parciais $\alpha = (\alpha_g, D_g)$ sobre uma álgebra A unitária. Além disso, tomaremos cada D_g com uma álgebra unitária gerada por um idempotente central 1_g, ou seja, $D_g = 1_g A$. Neste caso, pelo Teorema 2.10 e pela Proposição 2.7, o anel de grupo skew $A \rtimes_\alpha G$ é associativo e, além disso, sua multiplicação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh} \\
&= \alpha_g(1_{g^{-1}}\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh} \\
&= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h1_{g^{-1}})\delta_{gh} \\
&= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\alpha_g(b_h1_{g^{-1}})\delta_{gh} \\
&= a_g\alpha_g(b_h1_{g^{-1}})\delta_{gh}. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Um outro resultado que será usado na sessão vem do fato que, sendo $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$ e $1_{g^{-1}}1_h$ a unidade de $D_{g^{-1}} \cap D_h$, então

$$
\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g1_{gh}. \qquad (2.10)
$$

Lema 2.15 *Seja $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g : g \in G\}$ uma ação parcial de G em uma álgebra A tal que cada D_g $(g \in G)$ é uma álgebra unitária com unidade 1_g. Então a aplicação*

$$
\begin{aligned}
\pi_\alpha : G &\longrightarrow A \rtimes_\alpha G \\
g &\longmapsto 1_g\delta_g
\end{aligned}
$$

é uma representação parcial.

Demonstração: Obviamente, $1 \mapsto 1_1\delta_1$, o elemento identidade de $A \rtimes_\alpha G$. Vemos que

$$
\begin{aligned}
(1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) \cdot (1_g\delta_g) \cdot (1_h\delta_h) &= (1_{g^{-1}}\alpha_{g^{-1}}(1_g)\delta_1)(1_h\delta_h) \\
&= 1_{g^{-1}}1_{g^{-1}}\alpha_1(1_h)\delta_h \\
&= 1_{g^{-1}}1_h\delta_h
\end{aligned}
$$

Por outro lado, usando (2.10), temos

$$
\begin{aligned}
(1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) \cdot (1_{gh}\delta_{gh}) &= 1_{g^{-1}}\alpha_{g^{-1}}(1_{gh}1_g)\delta_{g^{-1}gh} \\
&= 1_{g^{-1}}1_{g^{-1}}1_{g^{-1}gh}\delta_h \\
&= 1_{g^{-1}}1_h\delta_h
\end{aligned}
$$

Assim, $1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} \cdot 1_g\delta_g \cdot 1_h\delta_h = 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} \cdot 1_{gh}\delta_{gh}$ e, de forma similar, verifica-se que $1_g\delta_g \cdot 1_h\delta_h \cdot 1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} = 1_{gh}\delta_{gh}1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}}$ $(g, h \in G)$, o que mostra que $\pi_\alpha : G \to A \rtimes_\alpha G$ é uma representação parcial. ∎

Definição 2.16 *Duas representações parciais $\pi : G \to B$ e $\pi' : G \to B'$ são equivalentes se existe um isomorfismo $\varphi : B' \to B$ tal que o seguinte diagrama comute:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & B \\ & B' \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Proposição 2.17 *A aplicação $\alpha \mapsto \pi_\alpha$ leva ações parciais equivalentes em representações parciais equivalentes.*

Demonstração: Seja $\alpha = \{\alpha_g : D_g^{-1} \to D_g, g \in G\}$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma álgebra A e $\alpha' = \{\alpha'_g : D_g'^{-1} \to D'_g, g \in G\}$ uma ação parcial de G em uma álgebra A' tal que α e α' são equivalentes e seja $\varphi : A \to A'$ o isomorfismo tal que

(i) $\varphi(D_g) = D'_g$

(ii) $\alpha'_g \circ \varphi = \varphi \circ \alpha_g$

Considere as representações parciais

$$\begin{array}{rccc} \pi_\alpha : & G & \longrightarrow & A \rtimes_\alpha G \\ & g & \longmapsto & 1_g\delta_g \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \pi_{\alpha'} : & G & \longrightarrow & A' \rtimes_{\alpha'} G \\ & g & \longmapsto & 1'_g\delta'_g \end{array}$$

Queremos mostrar que existe um isomorfismo $\psi : A \rtimes_\alpha G \to A' \rtimes_{\alpha'} G$ tal que

$$\pi_{\alpha'}(g) = \psi(\pi_\alpha(g)).$$

Tome $\psi(a_g\delta_g) = \varphi(a_g)\delta'_g$. Note que ψ é um homomorfismo, uma vez que

$$\begin{aligned} \psi((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) &= \psi(a_g\alpha_g(b_h1_{g^{-1}})\delta_{gh}) \\ &= \varphi(a_g\alpha_g(b_h1_{g^{-1}}))\delta'_{gh} \\ &= \varphi(a_g)\varphi(\alpha_g(b_h1_{g^{-1}}))\delta'_{gh} \\ &= \varphi(a_g)\alpha'_g(\varphi(b_h1_{g^{-1}}))\delta'_{gh} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\psi(a_g\delta_g)\psi(b_h\delta_h) = (\varphi(a_g)\delta'_g)(\varphi(b_h)\delta'_h) = \varphi(a_g)\alpha'_g(\varphi(b_h)1'_{g^{-1}})\delta'_{gh}.$$

Além disso, perceba que, sendo $\psi^{-1}(a'_g\delta'_g) = \varphi^{-1}(a'_g)\delta_g$, temos

$$\psi^{-1} \circ \psi = \mathrm{Id}_{A \rtimes_\alpha G} \quad \text{e} \quad \psi \circ \psi^{-1} = \mathrm{Id}_{A' \rtimes_{\alpha'} G}.$$

Portanto ψ é um isomorfismo. Como

$$\pi_{\alpha'}(g) = 1'_g\delta'_g = \psi(1_g\delta_g) = \psi(\pi_\alpha(g)),$$

temos que π_α e $\pi_{\alpha'}$ são equivalentes.

∎

Lema 2.18 *Seja $\pi : G \to B$ uma representação parcial sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária B. Definimos*

$$\varepsilon_g = \pi(g)\pi(g^{-1}).$$

Com respeito a esses elementos, dados $g, h \in G$, valem as seguintes propriedades:

(i) ε_g *é idempotente.*

(ii) $\pi(g)\varepsilon_h = \varepsilon_{gh}\pi(g)$.

(iii) $\varepsilon_h\pi(g) = \pi(g)\varepsilon_{g^{-1}h}$.

(iv) $\varepsilon_g\varepsilon_h = \varepsilon_h\varepsilon_g$.

Demonstração:

(i) $\varepsilon_g^2 = \varepsilon_g\varepsilon_g = \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(g^{-1}) \overset{(2.8)}{=} \pi(g)\pi(g^{-1}) = \varepsilon_g$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\pi(g)\varepsilon_h &= \pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) \\
&= \pi(gh)\pi(h^{-1}) \\
&\overset{(2.8)}{=} \pi(gh)\pi(h^{-1}g^{-1})\pi(gh)\pi(h^{-1}) \\
&= \pi(gh)\pi(h^{-1}g^{-1})\pi(ghh^{-1}) \\
&= \pi(gh)\pi(h^{-1}g^{-1})\pi(g) \\
&= \varepsilon_{gh}\pi(g)
\end{aligned}$$

(iii) Basta substituir h por $g^{-1}h$ no item (ii) e obtemos $\varepsilon_h\pi(g) = \pi(g)\varepsilon_{g^{-1}h}$.

(iv) Utilizando o item (ii) já mostrado, temos

$$\varepsilon_g\varepsilon_h = \pi(g)\pi(g^{-1})\varepsilon_h = \pi(g)\varepsilon_{g^{-1}h}\pi(g^{-1}) = \varepsilon_{gg^{-1}h}\pi(g)\pi(g^{-1}) = \varepsilon_h\varepsilon_g.$$

$\blacksquare$

Seja A a subálgebra de B gerada por todos os ε_g $(g \in G)$, e para um $g \in G$ fixo, seja $D_g = \varepsilon_g A$.

Lema 2.19 *As aplicações $\alpha_g^\pi : D_{g^{-1}} \to D_g$ $(g \in G)$ definidas por $\alpha_g^\pi(a) = \pi(g)a\pi(g^{-1})$ $(a \in D_{g^{-1}})$ são isomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras que determinam uma ação parcial α^π de G em A.*

Demonstração: Para simplificar a notação, adotemos $\alpha = \alpha^\pi$. Observe primeiro que A é invariante em relação à aplicação $a \mapsto \pi(g)a\pi(g^{-1})$. Obviamente, A é gerado por elementos $a = \varepsilon_{h_1} \dots \varepsilon_{h_s}$ com $h_1, \dots, h_s \in G$. Vemos que

$$\pi(g)a\pi(g^{-1}) = \pi(g)\varepsilon_{h_1} \dots \varepsilon_{h_s}\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1})\varepsilon_{gh_1} \dots \varepsilon_{gh_s} = \varepsilon_g\varepsilon_{gh_1} \dots \varepsilon_{gh_s} \in A.$$

Assim, $\pi(g)A\pi(g^{-1}) \subseteq A$. Ademais, essa aplicação nos elementos $\varepsilon_{g^{-1}}$ resulta em

$$\pi(g)\varepsilon_{g^{-1}}\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(g^{-1}) = \varepsilon_g\varepsilon_g = \varepsilon_g.$$

Dessa forma, uma vez que D_g é gerado em A pelo idempotente ε_g, obtemos uma aplicação $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$. Além disso, esta aplicação é um homomorfismo de álgebras. De fato, tomando $a, b \in D_{g^{-1}}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_g(a)\alpha_g(b) &= \pi(g)a\pi(g^{-1})\pi(g)b\pi(g^{-1}) \\
&= \pi(g)a\varepsilon_{g^{-1}}b\pi(g^{-1}) \\
&= \pi(g)ab\pi(g^{-1}) = \alpha_g(ab),
\end{aligned}$$

visto que $\varepsilon_{g^{-1}}$ é o elemento identidade de $D_{g^{-1}}$. Além disso, dados $a \in D_{g^{-1}}$ e $b \in D_g$ temos

$$\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}}(b) = \pi(g)\pi(g^{-1})b\pi(g)\pi(g^{-1}) = \varepsilon_g b\varepsilon_g = b.$$

$$\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g(a) = \pi(g^{-1})\pi(g)a\pi(g^{-1})\pi(g) = \varepsilon_{g^{-1}}a\varepsilon_{g^{-1}} = a.$$

Logo, $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$.

Vejamos agora que (α_g, D_g) é uma ação parcial. Note que a condição (i) é imediata nesse caso, já que $D_e = \varepsilon_e A = \pi(e)^2 A = A$ e $\alpha_e(a) = \pi(e)a\pi(e) = a$ para todo $a \in A$. Ademais, tomando $g, h \in G$, escreva um elemento $a \in D_h \cap D_{g^{-1}}$ como $a = \varepsilon_h\varepsilon_{g^{-1}}b$ com

$b \in A$. Então

$$\begin{aligned}
\alpha_h^{-1}(a) &= \pi(h^{-1})(\varepsilon_h \varepsilon_{g^{-1}} b)\pi(h) \\
&= \pi(h^{-1})\varepsilon_h \pi(h)\varepsilon_{h^{-1}g^{-1}} b' \\
&= \pi(h^{-1})\pi(h)\varepsilon_1 \varepsilon_{h^{-1}g^{-1}} b' \\
&= \varepsilon_{h^{-1}} \varepsilon_{h^{-1}g^{-1}} b' \in D_{(gh)^{-1}},
\end{aligned}$$

com $b' \in A$. Portanto $D_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$. Finalmente, para $a \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$, uma vez que $a \in D_{h^{-1}}$, temos $\varepsilon_{h^{-1}} a = a\varepsilon_{h^{-1}} = a$ e assim,

$$\begin{aligned}
\alpha_g \circ \alpha_h(a) &= \pi(g)\pi(h)a\pi(h^{-1})\pi(g^{-1}) \\
&= \pi(g)\pi(h)a\varepsilon_{h^{-1}}\pi(h^{-1})\pi(g^{-1}) \\
&= \pi(g)\pi(h)a\pi(h^{-1})\pi(h)\pi(h^{-1})\pi(g^{-1}) \\
&= \pi(g)\pi(h)a\varepsilon_{h^{-1}}\pi(h^{-1}g^{-1}) \\
&= \pi(g)\pi(h)\varepsilon_{h^{-1}}a\pi(h^{-1}g^{-1}) \\
&= \pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1})\pi(h)a\pi(h^{-1}g^{-1}) \\
&= \pi(gh)\varepsilon_{h^{-1}}a\pi(h^{-1}g^{-1}) \\
&= \pi(gh)a\pi(h^{-1}g^{-1}) \\
&= \alpha_{gh}(a),
\end{aligned}$$

Portanto (α_g, D_g) é uma ação parcial.

■

Veremos a seguir que, como no caso anterior, a aplicação $\pi \mapsto \alpha^\pi$ também preserva as relações de equivalência.

Proposição 2.20 *Se π e π' são representações parciais equivalentes, então as ações parciais α^π e $\alpha^{\pi'}$ também são equivalentes.*

Demonstração: Sejam π e π' representações parciais de G sobre $\mathbb{K}$-álgebras B e B' respectivamente. Temos assim $\varepsilon_g = \pi(g)\pi(g^{-1})$ e $\varepsilon'_g = \pi'(g)\pi'(g^{-1})$.

Sejam A e A' subálgebras de B e B' respectivamente, tais que A é gerado pelos elementos da forma ε_g e A' pelos elementos ε'_g. Similarmente definem-se $D_g = \varepsilon_g A$ e $D'_g = \varepsilon'_g A'$.

Dessa forma, as aplicações

$$\begin{array}{rccc}
\alpha_g^\pi : & D_{g^{-1}} & \longrightarrow & D_g \\
& a & \longmapsto & \pi(g)a\pi(g^{-1})
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \alpha_g^{\pi'}: & D'_{g^{-1}} & \longrightarrow & D'_g \\ & a & \longmapsto & \pi'(g)a\pi'(g^{-1}) \end{array}$$

são isomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras que definem as ações parciais:

$$\alpha = \alpha^{\pi} = \{\alpha_g^{\pi} : D_{g^{-1}} \to D_g, g \in G\} \text{ sobre } A$$

$$\alpha' = \alpha^{\pi'} = \{\alpha_g^{\pi'} : D'_{g^{-1}} \to D'_g, g \in G\} \text{ sobre } A'.$$

Sendo $\pi : G \longrightarrow B$ e $\pi' : G \longrightarrow B'$ equivalentes, deve existir um isomorfismo $\psi : B \longrightarrow B'$ tal que, para todo $g \in G$,

$$\pi'(g) = \psi(\pi(g))$$

Tomemos $\varphi = \psi|_A$. Perceba que

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon_g) &= \varepsilon(\pi(g)\pi(g^{-1})) \\ &= \psi(\pi(g)\pi(g^{-1})) \\ &= \psi(\pi(g))\psi(\pi(g^{-1})) \\ &= \pi'(g)\pi'(g^{-1}) \\ &= \varepsilon'_g. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para que φ seja um isomorfismo, temos que assegurar de que $\varphi(a) \in A'$. Seja $a = \varepsilon_{h_1}\varepsilon_{h_2}\ldots\varepsilon_{h_n}$ com $h_1, h_2, \ldots, h_n \in G$, utilizando (2.11) temos

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi(\varepsilon_{h_1}\varepsilon_{h_2}\ldots\varepsilon_{h_n}) \\ &= \psi(\varepsilon_{h_1}\varepsilon_{h_2}\ldots\varepsilon_{h_n}) \\ &= \psi(\varepsilon_{h_1})\psi(\varepsilon_{h_2})\cdots\psi(\varepsilon_{h_n}) \\ &= \varphi(\varepsilon_{h_1})\varphi(\varepsilon_{h_2})\cdots\varphi(\varepsilon_{h_n}) \\ &= \varepsilon'_{h_1}\varepsilon'_{h_2}\cdots\varepsilon'_{h_n} \in A'. \end{aligned}$$

Além disso, também por (2.11) temos

$$\varphi(\varepsilon_g a) = \varphi(\varepsilon_g)\varphi(a) = \varepsilon'_g\varphi(a) \in D'_g. \tag{2.12}$$

Por outro lado, seja $\varepsilon'_g a' \in D'_g$ com $a' = \varepsilon'_{h_1}\varepsilon'_{h_2}\cdots\varepsilon'_{h_n}$, note que

$$\varphi(\varepsilon_g\varepsilon_{h_1}\varepsilon_{h_2}\ldots\varepsilon_{h_n}) = \varepsilon'_g\varepsilon'_{h_1}\varepsilon'_{h_2}\ldots\varepsilon'_{h_n} = \varepsilon'_g a'.$$

Assim, temos $\varphi(D_g) = D'_g$. Por fim, veja que

$$\begin{aligned}\varphi \circ \alpha_g(a) &= \varphi(\pi(g)a\pi(g^{-1})) \\ &= \psi(\pi(g)a\pi(g^{-1})) \\ &= \psi(\pi(g))\psi(a)\psi(\pi(g^{-1})) \\ &= \pi'(g)\varphi(a)\pi'(g^{-1}) \\ &= \alpha'_g \circ \varphi(a).\end{aligned}$$

Portanto, α e α' são equivalentes. ∎

Proposição 2.21 *Seja $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g : g \in G\}$ uma ação parcial de G em uma álgebra A tal que cada D_g ($g \in G$) é uma álgebra unitária com unidade 1_g. Seja A' a subálgebra de $A \rtimes_\alpha G$ gerada por todos $1_g\delta_1$ ($g \in G$). Então a aplicação $\varphi_\alpha : A' \ni 1_g\delta_1 \to 1_g \in A$ é um monomorfismo tal que $\varphi_\alpha \circ \alpha_g^{\pi_\alpha} = \alpha_g \circ \varphi_\alpha$ para cada $g \in G$. Em particular, se A é gerada pelos elementos 1_g ($g \in G$), então as ações parciais α^{π_α} e α são equivalentes.*

Demonstração: Claramente, φ_α é a restrição do isomorfismo $A \cdot \delta_1 \ni a\delta_1 \to a \in A$ e, portanto, é um monomorfismo de A' em A.

De acordo com o Lema 2.15, temos a representação parcial $\pi_\alpha : G \ni g \mapsto 1_g\delta_g \in A \rtimes_\alpha G$, que pelo Lema 2.19 induz uma ação parcial na subálgebra de $A \rtimes_\alpha G$ gerada pelos elementos $\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(g^{-1})$. Como

$$\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(g^{-1}) = 1_g\delta_g 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)1_{g^{-1}})\delta_1 = 1_g\delta_1,$$

esta subálgebra é exatamente A'. Um elemento arbitrário de A' pode ser escrito como $a'\delta_1$, onde a' pertence à imagem de φ_α. A ação parcial α^{π_α} é dada pelos isomorfismos $\alpha_g^{\pi_\alpha} : D'_{g^{-1}} \ni a'\delta_1 \mapsto 1_g\delta_g \cdot a' \cdot 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} \in D'_g$, onde D'_g é o ideal de A' gerado por $1_g\delta_1$. Para $a'\delta_1 \in D'_{g^{-1}}$, vemos que

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\alpha_g^{\pi_\alpha}(a'\delta_1)) &= \varphi_\alpha(1_g\delta_g a' 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) \\ &= \varphi_\alpha(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)a'1_{g^{-1}})\delta_1) \\ &= \varphi_\alpha(\alpha_g(a'1_{g^{-1}})\delta_1) \\ &= \alpha_g(a') \\ &= \alpha_g(\varphi_\alpha(a'\delta_1)),\end{aligned}$$

assim $\varphi_\alpha \circ \alpha_g^{\pi_\alpha} = \alpha_g \circ \varphi_\alpha$ para todo $g \in G$. Se A é gerada pelos elementos 1_g ($g \in G$), então claramente $\varphi_\alpha : A' \to A$ é um isomorfismo que dá a equivalência das ações parciais α^{π_α} e α. ∎

Proposição 2.22 *Seja $\pi : G \to B$ uma representação parcial e suponha que a subálgebra $A \subseteq B$ e a ação parcial α^π de G em A são como no Lema 2.19. Então a aplicação $\phi_\pi : A \rtimes_{\alpha^\pi} G \to B$ definido por $\phi_\pi(\sum_{g\in G} a_g\delta_g) = \sum_{g\in G} a_g\pi(g)$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras tal que $\phi_\pi \circ \pi_{\alpha^\pi} = \pi$. Em particular, se ϕ_π é um isomorfismo, então as representações parciais π e π_{α^π} são equivalentes.*

Demonstração: Obviamente, os elementos $a_g\delta_g$ ($g \in G$, $a_g \in D_g$) geram $A \rtimes_{\alpha^\pi} G$. Como ε_g é o elemento identidade de D_g e $\varepsilon_g\pi(gh) = \varepsilon_g\pi(g)\pi(h)$, temos

$$\begin{aligned}
\phi_\pi(a_g\delta_g \cdot b_h\delta_h) &= \phi_\pi(\alpha_g^\pi(\alpha_{g^{-1}}^\pi(a_g)b_h)\delta_{gh}) \\
&= \alpha_g^\pi(\alpha_{g^{-1}}^\pi(a_g)b_h)\pi(gh) \\
&= \alpha_g^\pi(\alpha_{g^{-1}}^\pi(a_g)b_h)\varepsilon_g\pi(gh) \\
&= \alpha_g^\pi(\alpha_{g^{-1}}^\pi(a_g)b_h)\varepsilon_g\pi(g)\pi(h) \\
&= \alpha_g^\pi(\alpha_{g^{-1}}^\pi(a_g)b_h)\pi(g)\pi(h) \\
&= \pi(g)\alpha_{g^{-1}}^\pi(a_g)b_h\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) \\
&= \pi(g)\alpha_{g^{-1}}^\pi(a_g)b_h\varepsilon_{g^{-1}}\pi(h)
\end{aligned}$$

uma vez que $\alpha_{g^{-1}}^\pi(a_g)b_h \in D_{g^{-1}}$. Continuando, temos

$$\begin{aligned}
\pi(g)\alpha_{g^{-1}}^\pi(a_g)b_h\varepsilon_{g^{-1}}\pi(h) &= \pi(g)\pi(g^{-1})a_g\pi(g)b_h\varepsilon_{g^{-1}}\pi(h) \\
&= \varepsilon_g a_g\pi(g)b_h\varepsilon_{g^{-1}}\pi(h) \\
&= a_g\pi(g)b_h\varepsilon_{g^{-1}}\pi(h) \\
&= \phi_\pi(a_g\delta_g) \cdot \phi_\pi(b_h\delta_h),
\end{aligned}$$

usando mais uma vez que ε_g é a identidade de D_g. Assim, $\phi_\pi : A \rtimes_{\alpha^\pi} G \to B$ é um homomorfismo de álgebras. É fácil ver que $\phi_\pi \circ \pi_{\alpha^\pi}(g) = \phi_\pi(\varepsilon_g\delta_g) = \varepsilon_g\pi(g) = \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) = \pi(g)$, para cada $g \in G$, o que mostra que $\phi_\pi \circ \pi_{\alpha^\pi} = \pi$. Se ϕ_π é um isomorfismo, então obviamente segue que π e π_{α^π} são equivalentes. ∎

Capítulo 3

Ações Parciais de Álgebra Hopf

Neste capítulo, apresentamos a generalização dos resultados apresentados no Capítulo 2 para o contexto de ações parciais de álgebras de Hopf como visto em [10]. Exibimos também a relação entre as ações parciais de um grupo G e as ações parciais da álgebra de Hopf $\mathbb{K}G$ e o isomorfismo entre o produto smash parcial e o anel de grupo skew parcial.

Em todo o capítulo, a menos de menção contrária, $\alpha = (\alpha_g, D_g)$ denotará uma ação parcial de um grupo G sobre uma álgebra unitária A onde os ideias D_g são gerados por idempotentes centrais 1_g.

3.1 Ações Parciais de Álgebras de Hopf

Generalizando a noção de módulos álgebra apresentada na Definição 1.24, definimos as ações parciais de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A.

Definição 3.1 *Uma ação parcial da álgebra de Hopf H sobre a álgebra A é uma aplicação linear $\alpha : H \otimes A \to A$, denotado por $\alpha(h \otimes a) = h \cdot a$, tal que:*

(i) $h \cdot (ab) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$;

(ii) $1 \cdot a = a$;

(iii) $h \cdot (g \cdot a) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot 1_A)((h_{(2)}g) \cdot a)$.

Se H age sobre uma álgebra A, dizemos que A é H-módulo álgebra parcial. É fácil ver que toda ação também é uma ação parcial. De fato, basta mostrar o item (iii). Para todo $h, g \in H$ e $a \in A$, temos

$$
\begin{aligned}
h \triangleright (g \triangleright a) &= hg \triangleright a \\
&= hg \triangleright (1_A a) \\
&= \sum_{(h),(g)} (h_{(1)}g_{(1)} \triangleright 1_A)(h_{(2)}g_{(2)} \triangleright a) \\
&= \sum_{(h),(g)} \varepsilon(h_{(1)}g_{(1)})1_A(h_{(2)}g_{(2)} \triangleright a) \\
&= \sum_{(h),(g)} \varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(g_{(1)})1_A(h_{(2)}g_{(2)} \triangleright a) \\
&= \sum_{(h),(g)} \varepsilon(h_{(1)})1_A(h_{(2)}\varepsilon(g_{(1)})g_{(2)} \triangleright a) \\
&= \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)})1_A(h_{(2)}g \triangleright a) \\
&= \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright 1_A)(h_{(2)}g \triangleright a)
\end{aligned}
$$

o que prova a afirmação.

Vamos apresentar a relação entre as ações parciais de um grupo G com as ações parciais da álgebra de Hopf $\mathbb{K}G$. Considere uma ação parcial α de um grupo G sobre uma álgebra A. Então existe uma ação parcial da álgebra do grupo $\mathbb{K}G$ sobre A definida nos elementos da base por

$$g \cdot a = \alpha_g(a1_{g^{-1}}), \tag{3.1}$$

e estendida linearmente a todos os elementos de $\mathbb{K}G$.

Observe que

$$g \cdot 1_A = \alpha_g(1_A 1_{g^{-1}}) = \alpha_g(1_A 1_{g^{-1}}) = 1_g. \tag{3.2}$$

Lembrando que, pelo Exemplo 1.3, $\Delta(g) = g \otimes g$ para todo $g \in G$. Assim, temos

(i)

$$
\begin{aligned}
g \cdot (ab) &= \alpha_g(ab1_{g^{-1}}) \\
&= \alpha_g(a1_{g^{-1}}b1_{g^{-1}}) \\
&= \alpha_g(a1_{g^{-1}})\alpha_g(b1_{g^{-1}}) \\
&= (g \cdot a)(g \cdot b)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$1 \cdot a = \alpha_1(a1_{1^{-1}}) = I_A(a1_A) = a$$

(iii)

$$\begin{aligned}
h \cdot (g \cdot a) &= \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) \\
&= \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_g 1_{h^{-1}}) \\
&= \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}})\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}})) \\
&= \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}})) \\
&= \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}}) \\
&= \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}})\alpha_{hg}(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}}) \\
&= \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}})1_{hg}1_h = 1_h\alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}}) \\
&= \alpha_h(1_A 1_{h^{-1}})\alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}}) = (h \cdot 1_A)(hg \cdot a).
\end{aligned}$$

Em que a terceira e a sétima igualdade resultam de (2.10), enquanto a última igualdade resulta de (3.2). Portanto, (3.1) define uma ação parcial de álgebra de Hopf de $\mathbb{K}G$ sobre A.

Note que não é sempre válido que uma ação parcial da álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ induza uma ação parcial do grupo G. Isso se dá por não ser possível aferir que os elementos 1_g seriam idempotentes centrais. Entretanto, como visto em [9], é possível definir uma generalização do conceito de ação parcial de grupos para que essa correspondência seja de fato uma bijeção.

Definição 3.2 *Seja G um grupo e A uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária. Uma ação parcial de G em A consiste em um conjunto de idempotentes $\{e_g \mid g \in G\} \subset A$, e um conjunto de isomorfismos $\alpha_g : e_{g^{-1}}A \to e_g A$ tal que $e_1 = 1_A$, $\alpha_1 = I_A$ e*

$$e_g\alpha_{gh}(e_{h^{-1}g^{-1}}a) = \alpha_g(e_{g^{-1}}\alpha_h(e_{h^{-1}}a)); \tag{3.3}$$

$$\alpha_g(e_{g^{-1}}ab) = \alpha_g(e_{g^{-1}}a)\alpha_g(e_{g^{-1}b}); \tag{3.4}$$

$$\alpha_g(e_{g^{-1}}) = e_g, \tag{3.5}$$

para todo $g, h \in G$ e $a, b \in A$.

Observe que se para todo $g \in G$, e_g for central e α_g multiplicativa, então (3.4) e (3.5) são automaticamente satisfeitas.

Proposição 3.3 *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária, e G um grupo. Então existe uma correspondência bijetiva entre ações parciais de G e ações parciais de $\mathbb{K}G$ em A.*

Demonstração: Assuma primeiro que $\mathbb{K}G$ age parcialmente em A. Para cada $g \in G$, seja $e_g = g \cdot 1_A$. Primeiramente, veja que cada e_g é idempotente, uma vez que

$$e_g e_g = (g \cdot 1_A)(g \cdot 1_A) = (g \cdot 1_A 1_A) = (g \cdot 1_A) = e_g.$$

Vê-se também que $e_1 = 1 \cdot 1_A = 1_A$. Além disso,

$$g \cdot (h \cdot a) = (g \cdot 1_A)(gh \cdot a) = e_g(gh \cdot a). \tag{3.6}$$

para todo $g, h \in G$ e $a \in A$. Observe agora que

$$g \cdot e_{g^{-1}} = g \cdot (g^{-1} \cdot 1_A) = e_g(1 \cdot 1_A) = e_g 1_A = e_g, \tag{3.7}$$

e, consequentemente,

$$g \cdot (e_{g^{-1}} a) = (g \cdot e_{g^{-1}})(g \cdot a) = e_g(g \cdot a). \tag{3.8}$$

O que garante que a aplicação $\alpha_g : e_{g^{-1}}A \to e_g A$ tal que de $\alpha_g(a) = g \cdot a$ está bem definida. Observe que

$$\alpha_g(e_{g^{-1}}a) = g \cdot (e_{g^{-1}}a) = e_g(g \cdot a) = (g \cdot 1_A)(g \cdot a) = g \cdot a. \tag{3.9}$$

Assim, por (3.6), temos

$$\begin{aligned}
\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(e_{g^{-1}}a)) &= \alpha_{g^{-1}}(g \cdot a) \\
&= g^{-1} \cdot (g \cdot a) \\
&= e_{g^{-1}}(g^{-1}g \cdot a) \\
&= e_{g^{-1}}(1 \cdot a) \\
&= e_{g^{-1}}a.
\end{aligned}$$

Substituindo g^{-1} por g, obtemos que $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(e_g a)) = e_g a$, e segue que $\alpha_g : e_{g^{-1}}A \to e_g A$ é uma bijeção. Também é claro que $\alpha_1(a) = 1 \cdot a = a$ e, por (3.7), $\alpha_g(e_{g^{-1}}) = g \cdot (e_{g^{-1}}) = e_g$. Veja que (3.4) segue de (3.9), pois

$$\begin{aligned}
\alpha_g(e_{g^{-1}}a)\alpha_g(e_{g^{-1}}b) &= (g \cdot a)(g \cdot b) \\
&= (g \cdot ab) \\
&= \alpha_g(e_{g^{-1}}ab).
\end{aligned}$$

Por fim, por (3.6) novamente, temos

$$\alpha_g(e_{g^{-1}}\alpha_h(e_{h^{-1}}a)) = \alpha_g(e_{g^{-1}}(h \cdot a)) = g \cdot (h \cdot a) = e_g(gh \cdot a) = e_g\alpha_{gh}(e_{h^{-1}g^{-1}}a).$$

Portanto, $\alpha = (\alpha_g, e_g)$ é uma ação parcial.

Por outro lado, assuma que G age parcialmente em A, e defina uma ação de $\mathbb{K}G$ em A estendendo $g \cdot a = \alpha_g(e_{g^{-1}}a) \in e_g A$ linearmente para $\mathbb{K}G$. Observe que

$$g \cdot 1_A = \alpha_g(e_{g^{-1}}1_A) = \alpha_g(e_{g^{-1}}) = e_g.$$

Assim, isso define uma ação parcial de $\mathbb{K}G$ em A, uma vez que

$$\begin{aligned} g \cdot (ab) &= \alpha_g(e_{g^{-1}}ab) = \alpha_g(e_{g^{-1}}a)\alpha_g(e_{g^{-1}}b) = (g \cdot a)(g \cdot b); \\ g \cdot (h \cdot a) &= \alpha_g(e_{g^{-1}}\alpha_h(e_{h^{-1}}a)) = e_g\alpha_{gh}(e_{h^{-1}g^{-1}}a)) = e_g((gh) \cdot a); \\ 1 \cdot a &= \alpha_1(e_1 a) = \alpha_1(a) = a. \end{aligned}$$

É fácil checar que a condição (3.5) estabelece a bijetividade da correspondência. De fato, seja $\cdot$ uma ação parcial de $\mathbb{K}G$ em A. Considere α a ação parcial de G em A obtida através de $\cdot$. E então tome $\bar{\cdot}$ a ação de $\mathbb{K}G$ em A obtida de α.

Veja que

$$g \bar{\cdot} a = \alpha_g(e_{g^{-1}}a) = g \cdot a.$$

Por outro lado, seja α uma ação parcial de G em A. Tome $\cdot$ como ação de $\mathbb{K}G$ obtida através de α e então α' ação parcial de $\mathbb{K}G$ em A obtida através de $\cdot$. Veja que

$$e'_g = g \cdot 1_A = \alpha_g(e_{g^{-1}}1_A) = e_g$$

$$\alpha'(e'_{g^{-1}}a) = g \cdot a = \alpha_g(e_{g^{-1}}a)$$

■

Há uma importante classe de exemplos de ações parciais de Hopf induzidas por ações globais. Esta ideia é motivada pela construção de uma ação de grupo parcial induzida por uma ação de grupo global de um grupo G sobre uma álgebra B por automorfismos.

Seja $\beta : G \times B \to B$ uma ação do grupo G sobre a álgebra B por automorfismos, e seja A um ideal de B gerado por um idempotente central 1_A. Defina $D_g = A \cap \beta_g(A)$; então D_g é o ideal gerado pelo idempotente central $1_g = 1_A\beta_g(1_A)$. A ação parcial $\alpha = (\{\alpha_g\}, \{D_g\})$ induzida por β em A é

$$\alpha_g(a) = \beta_g(a) \quad \text{para } g \in G \text{ e } a \in D_{g^{-1}}.$$

Isso corresponde a uma ação parcial de $\mathbb{K}G$ em A, dada por

$$g \cdot a = \alpha_g(a1_{g^{-1}}).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\alpha_g(a1_{g^{-1}}) &= \beta_g(a1_{g^{-1}}) \\
&= \beta_g(a)\beta_g(1_{g^{-1}}) \\
&= \beta_g(a)\beta_g(\beta_{g^{-1}}(1_A)1_A) \\
&= \beta_g(a)1_A = 1_A\beta_g(a),
\end{aligned}$$

poderíamos também definir a ação parcial por $g \cdot a = 1_A\beta_g(a)$ (ou $g \cdot a = \beta_g(a)1_A$). Isso fornece a ideia para a construção de ações parciais induzidas no caso de Hopf.

Proposição 3.4 *Seja H uma álgebra de Hopf que age sobre a álgebra B, e seja A um ideal à direita de B com a unidade 1_A. Então H age parcialmente sobre A por*

$$h \cdot a = 1_A(h \triangleright a)$$

Demonstração:

Sejam $h, k \in H$ e $a \in A$, então

$$\begin{aligned}
h \cdot ab &= 1_A(h \triangleright ab) \\
&= 1_A\left(\sum_{(h)}(h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b)\right) \\
&= \sum_{(h)} 1_A(h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b) \\
&= \sum_{(h)} 1_A(h_{(1)} \triangleright a)1_A(h_{(2)} \triangleright b) \\
&= \sum_{(h)}(h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b),
\end{aligned}$$

em que a quarta igualdade vale, uma vez que $1_A(h_{(1)} \triangleright a) \in A$, então $1_A(h_{(1)} \triangleright a) = 1_A(h_{(1)} \triangleright a)1_A$. É fácil ver que

$$1 \cdot a = 1_A(1 \triangleright a) = 1_A(a) = a.$$

Por fim, temos

$$\begin{aligned}
h \cdot (k \cdot a) &= 1_A(h \triangleright (1_A(k \triangleright a))) \\
&= 1_A \left[\sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright 1_A)(h_{(2)} \triangleright (k \triangleright a)) \right] \\
&= \sum_{(h)} 1_A(h_{(1)} \triangleright 1_A)((h_{(2)} \triangleright k) \triangleright a)) \\
&= \sum_{(h)} 1_A(h_{(1)} \triangleright 1_A)1_A((h_{(2)}k) \triangleright a)) \\
&= \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot 1_A)((h_{(2)}k) \cdot a)).
\end{aligned}$$

■ Dizemos que a ação parcial $h \cdot a = 1_A(h \triangleright a)$ é a ação parcial induzida por B.

3.2 Ações Envolventes de Álgebras de Hopf

Nessa seção, baseado nas ações envolventes das ações parciais de grupo apresentadas na Seção 2.1, definimos as ações envolventes para ações parciais de álgebras de Hopf.

Como visto no Teorema 3.10, uma ação parcial de grupo sobre uma álgebra A admite uma ação envolvente se, e somente se, os ideais D_g são gerados por idempotentes centrais. Vamos mostrar que no contexto de álgebras de Hopf, toda ação parcial admite uma ação envolvente.

Definição 3.5 *Sejam A e B dois H-módulo álgebras parciais. Diremos que um morfismo de álgebras $\theta : A \to B$ é um morfismo de álgebras de H-módulo parciais se $\theta(h \cdot a) = h \cdot \theta(a)$ para todo $h \in H$ e todo $a \in A$. Se θ é um isomorfismo, dizemos que as ações parciais são equivalentes.*

Definição 3.6 *Seja B um H-módulo álgebra, e seja A um ideal à direita de B com a unidade 1_A. Diremos que a ação parcial induzida sobre A é admissível se $B = H \triangleright A$.*

Definição 3.7 *Seja A um H-módulo álgebra parcial. Uma ação envolvente para A é um par (B, θ), onde*

(i) B é um H-módulo álgebra (não necessariamente unitário);

(ii) A aplicação $\theta : A \to B$ é um monomorfismo de álgebras;

(iii) A subálgebra $\theta(A)$ é um ideal à direita em B;

(iv) A ação parcial em A é equivalente à ação parcial induzida em $\theta(A)$;

(v) A ação parcial induzida em $\theta(A)$ é admissível.

Mostraremos agora que toda ação parcial de H tem uma ação envolvente. Considere $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H, A)$ com o produto de convolução definido em (1.15). Então, H age sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H, A)$ via

$$(h \triangleright f)(k) = f(kh),$$

onde $h, k \in H$ e $f \in Hom_k(H, A)$.

Lema 3.8 *Seja $\varphi : A \to Hom_k(H, A)$ a aplicação dada por $\varphi(a)(k) = k \cdot a$.*

(i) φ é uma aplicação injetiva linear e um morfismo de álgebras.

(ii) Se $h \in H$ e $a \in A$ então $\varphi(1_A) * (h \triangleright \varphi(a)) = \varphi(h \cdot a)$.

(iii) Se $h \in H$ e $a, b \in A$ então $\varphi(b) * (h \triangleright \varphi(a)) = \varphi(b(h \cdot a))$.

Demonstração: *Uma vez que a ação parcial é bilinear, é imediato que φ é linear. Além disso, note que $\varphi(a)(1_H) = 1_H \cdot a = a$, daí tem-se que φ injetiva. Sejam $a, b \in A$ e $h \in H$, então temos*

$$\begin{aligned}
\varphi(ab)(h) = h \cdot (ab) &= \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b) \\
&= \sum_{(h)} \varphi(a)(h_{(1)})\varphi(b)(h_{(2)}) = \varphi(a) * \varphi(b)(h),
\end{aligned}$$

para todos os $h \in H$. Portanto, φ é multiplicativa e consequentemente um morfismo de Álgebra.

Perceba que a segunda afirmação pode ser obtida ao substituir $b = 1_A$ na terceira afirmação, assim basta provar (iii). Sejam $h, k \in H$ e $a, b \in A$; então

$$\begin{aligned}
\varphi(b(h \cdot a))(k) &= k \cdot (b(h \cdot a)) \\
&= \sum_{(k)} (k_{(1)} \cdot b)(k_{(2)} \cdot (h \cdot a)) \\
&= \sum_{(k)} (k_{(1)} \cdot b)(k_{(2)} \cdot 1_A)(k_{(3)}h \cdot a) \\
&= \sum_{(k)} (k_{(1)} \cdot b)(k_{(2)}h \cdot a) \\
&= \sum_{(k)} \varphi(b)(k_{(1)})\varphi(a)(k_{(2)}h) \\
&= \sum_{(k)} \varphi(b)(k_{(1)})(h \triangleright \varphi(a))(k_{(2)}) \\
&= [\varphi(b) * (h \triangleright \varphi(a))](k),
\end{aligned}$$

para todos $k \in H$. Portanto,

$$\varphi(h \cdot a) = \varphi(1_A)(h \triangleright \varphi(a)) \tag{3.10}$$

■

Este resultado sugere que a ação parcial em A é equivalente a uma ação induzida em $\varphi(A)$, mas $\varphi(A)$ deve também ser um ideal à direita de uma álgebra de H-módulo; embora isto possa não se manter em $Hom_k(H, A)$, será verdadeiro em uma certa subálgebra. O seguinte lema apresenta resultados de [15].

Lema 3.9 *Seja B um H-módulo álgebra, $x, y \in B$ e $h, k \in H$. Então:*

(i) $(h \triangleright x)y = \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (x(S(h_{(2)}) \triangleright y))$*;*

(ii) $(h \triangleright x)(k \triangleright y) = \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (x(S(h_{(2)})k \triangleright y))$*.*

Demonstração: *Para provar tais afirmações, é necessário relembrar a igualdade (1.16) e a Definição 1.24.*

$$\begin{aligned}
\sum h_1 \triangleright (a((S(h_2) \triangleright b))) &= \sum (h_1 \triangleright a)(h_2 \triangleright (S(h_3) \triangleright b)) \\
&= \sum (h_1 \triangleright a)((h_2 S(h_3)) \triangleright b) \\
&= \sum (h_1 \triangleright a)(\varepsilon(h_2) 1_H) \triangleright b) \\
&= \sum (h_1 \varepsilon(h_2) \triangleright a)(1_H \triangleright b) \\
&= (h \triangleright a)b.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.10 *Seja A uma H-módulo-álgebra parcial e seja $\varphi : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H, A)$ a aplicação dada pela ação de A, $\varphi(a)(h) = h \cdot a$, e seja $B = H \triangleright \varphi(A)$; então (B, φ) é uma ação envolvente de A.*

Demonstração: Para provar que o par (B, φ) é uma ação envolvente para A, devem ser válidos os 5 itens da Definição 3.7.

(i) Claramente, B é um H-submódulo de $Hom_k(H, A)$, já que dado $k \in H$ e $b \in B$ tal que $b = h \triangleright \varphi(a)$ com $a \in A$ e $h \in H$ temos

$$k \triangleright b = k \triangleright (h \triangleright \varphi(a)) = kh \triangleright \varphi(a) \in B.$$

Agora, dados $h \triangleright \varphi(a)$ e $k \triangleright \varphi(b) \in H \triangleright \varphi(A)$, temos

$$(h \triangleright \varphi(a))(k \triangleright \varphi(b)) = \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (\varphi(a) * (S(h_{(2)})k \triangleright \varphi(b)) \tag{3.11}$$

$$= \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (\varphi(a(S(h_{(2)})k \cdot b), \tag{3.12}$$

onde a última igualdade vale pelo Lema 3.8. Assim fica mostrado que B é um H-módulo subálgebra de $Hom_{\mathbb{K}}(H, A)$.

(ii) O item (i) do Lema 3.8 mostra que φ é um morfismo de álgebra injetor, ou seja, um monomorfismo. Entretanto, como φ tem como contradomínio $Hom_{\mathbb{K}}(H, A)$, vamos utilizar a restrição $\varphi : A \to B$. Note que essa restrição ainda é um monomorfismo, restando apenas mostrar que essa aplicação está bem definida, o que de fato ocorre, já que dado $a \in A$, temos

$$\varphi(a) = 1_H \triangleright \varphi(a) \in B.$$

(iii) Sejam $a, a' \in A$ e $b = (h \triangleright \varphi(a))$, então

$$\varphi(a') * b = \varphi(a') * (h \triangleright \varphi(a)) = \varphi(a'(h \cdot a)) \in \varphi(A)$$

em que a segunda igualdade ocorre pelo Lema 3.8.

(iv) Primeiramente, note que $\varphi(1_A)$ é unidade de $\varphi(A)$:

- $\varphi(1_A)$ é unidade à esquerda:

$$\begin{aligned}\varphi(1_A) * \varphi(a) &= \varphi(1_A) * (1_H \triangleright \varphi(a)) \\ &= \varphi(1_H \cdot a) \\ &= \varphi(a).\end{aligned}$$

- $\varphi(1_A)$ é unidade à direita:

$$\begin{aligned}\varphi(a) * \varphi(1_A) &= \varphi(a) * (1_H \triangleright \varphi(1_A)) \\ &= \varphi(a(1_H \cdot 1_A)) \\ &= \varphi(a1_A) \\ &= \varphi(a).\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 3.7, podemos considerar $\varphi(A)$ um H-módulo álgebra parcial com ação induzida

$$h \cdot \varphi(a) = \varphi(1_A)(h \triangleright \varphi(a)) \tag{3.13}$$

Ademais, pela equação (3.10), temos

$$\varphi(h \cdot a) = \varphi(1_A)(h \triangleright \varphi(a)).$$

Daí, por (3.10) e (3.13), temos que

$$\varphi(h \cdot a) = h \cdot \varphi(a), \forall a \in A, \forall h \in H.$$

Perceba também que, sendo φ injetora, $\varphi : A \to \varphi(A)$ é claramente um isomorfismo. Portanto, as ações parciais em A e em $\varphi(A)$ são equivalentes.

(v) Note que, de acordo com a Definição 3.6, não há o que mostrar, já que sabemos que B é um H-módulo álgebra, $\varphi(A)$ um ideal à direita de B com unidade $\varphi(1_A)$ e $B = H \triangleright \varphi(A)$.

■

Nós chamaremos (B, φ) de a ação de envolvente padrão de A. Um caso especial que será útil para resultados futuros é quando $\varphi(A)$ é um ideal bilateral de B.

Proposição 3.11 *Seja A uma H-módulo álgebra parcial, e seja $\varphi : A \to \mathrm{Hom}_k(H, A)$ e $B = H \triangleright A$ como no Teorema 3.10. Então $\varphi(A)$ é ideal de B se, e somente se, para todo $a \in A$ e para todo $h_1, h_2 \in H$, nós temos*

$$h \cdot (k \cdot a) = \sum_{(h)} (h_{(1)}k \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A), \forall a \in A, \forall h, k \in H.$$

Demonstração: Suponha que $\varphi(A)$ seja um ideal de B. Já sabemos que para todo $k \in H$ e para todo $a \in A$, nós temos

$$\varphi(k \cdot a) = \varphi(1_A) * (k \triangleright \varphi(a)) = (k \triangleright \varphi(a)) * \varphi(1_A) \tag{3.14}$$

Então, essas duas aplicações coincidem para todos $h \in H$. O lado esquerdo da equação (3.14) leva a

$$\begin{aligned} \varphi(k \cdot a)(h) &= (\varphi(1_A) * (k \triangleright \varphi(a)))(h) \\ &= \sum_{(h)} \varphi(1_A)(h_{(1)})(k \triangleright \varphi(a))(h_{(2)}) \\ &= \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot 1_A)(h_{(2)}k \cdot a) = h \cdot (k \cdot a) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Enquanto o lado direito dá

$$
\begin{aligned}
((k \rhd \varphi(a)) * \varphi(1_A))(h) &= \sum_{(h)} (k \rhd \varphi(a))(h_{(1)}) \varphi(1_A)(h_{(2)}) \\
&= \sum_{(h)} \varphi(a)(h_{(1)}k) \varphi(1_A)(h_{(2)}) \\
&= \sum_{(h)} ((h_{(1)})k) \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A) \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Combinando as expressões (3.15) com (3.16), nós temos o resultado.

Por outro lado, suponha que $h \cdot (k \cdot a) = \sum_{(h)} (h_{(1)} k \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A)$ seja válido para todo $a \in A$ e $h, k \in H$. As equações (3.15) e (3.16) mostram que

$$
\varphi(1_A) * (k \rhd \varphi(a)) = (k \rhd \varphi(a)) * \varphi(1_A) \qquad (3.17)
$$

para todo $a \in A$ e $k \in H$, i.e. $\varphi(1_A)$ é um idempotente central em B. Portanto, $\varphi(A) = \varphi(1_A)B$ é um ideal em B. ■

Embora o Teorema 3.10 apresente uma forma de encontrar uma ação envolvente, no contexto de álgebras de Hopf, essa envolvente não é necessariamente única. Entretanto, podemos relacionar cada ação envolvente de A com a ação envolvente padrão (B, φ) dada no Teorema 3.10. Suponha que (B', θ) seja uma ação envolvente para A. Defina a aplicação $\Phi : B' \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H, A)$ por

$$
\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \rhd \theta(a_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i \rhd \varphi(a_i),
$$

onde $\varphi : H \to A$ e a ação de H em $\mathrm{Hom}_k(H, A)$ são como no Teorema 3.10.

Teorema 3.12 *Se (B', θ) é uma ação envolvente de A, então a aplicação Φ é um morfismo de H-módulo álgebras sobre $B = H \rhd \varphi(A)$.*

Demonstração: *Primeiro temos que verificar se Φ está bem definida como uma aplicação linear. Para fazer isso, é suficiente provar que se $\sum_{i=1}^{n} h_i \rhd \theta(a_i) = 0$, então $\sum_{i=1}^{n} h_i \rhd \varphi(a_i) = 0$.*

Suponha, então, que $x = \sum_{i=1}^n h_i \triangleright \theta(a_i) = 0$*; então, para todo* $k \in H$*,*

$$\begin{aligned} 0 &= \theta(1_A)(k \triangleright x) \\ &= \theta(1_A)(k \triangleright (\sum_{i=1}^n h_i \triangleright \theta(a_i))) \\ &= \theta(1_A)(\sum_{i=1}^n kh_i \triangleright \theta(a_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n kh_i \cdot \theta(a_i) \\ &= \theta\left(\sum_{i=1}^n kh_i \cdot a_i\right) \end{aligned}$$

e, uma vez que θ *é injetora, segue que*

$$\sum_{i=1}^n kh_i \cdot a_i = 0$$

para todo $k \in H$*. Portanto*

$$\Phi(x)(k) = \sum_{i=1}^n h_i \triangleright \varphi(a_i)(k) = \sum_{i=1}^n \varphi(a_i)(kh_i) = \sum_{i=1}^n kh_i \cdot a_i = 0$$

para todo $k \in H$*, o que significa que* $\Phi(x) = 0$ *e que* Φ *está bem definido.*

Por construção, temos que Φ *é linear; temos que mostrar que é um morfismo de álgebras. Dados* $h, k \in H$ *e* $a, b \in A$*,*

$$\begin{aligned} \Phi((h \triangleright \theta(a))(k \triangleright \theta(b))) &= \Phi\left(\sum h_{(1)} \triangleright (\theta(a)(S(h_{(2)})k \triangleright \theta(b)))\right) \\ &= \Phi\left(\sum h_{(1)} \triangleright (\theta(a)\theta(1_A)(S(h_{(2)})k \triangleright \theta(b)))\right) \\ &= \Phi\left(\sum h_{(1)} \triangleright (\theta(a)(S(h_{(2)})k \cdot \theta(b))))\right) \\ &= \Phi\left(\sum h_{(1)} \triangleright (\theta(a)\theta(S(h_{(2)})k \cdot b)))\right) \\ &= \Phi\left(\sum h_{(1)} \triangleright \theta(aS(h_{(2)})k \cdot b))\right) \\ &= \sum h_{(1)} \triangleright \varphi(a(S(h_{(2)})k \cdot b)) \\ &= \sum h_{(1)} \triangleright (\varphi(a)(S(h_{(2)})k \triangleright \varphi(b))) \\ &= \sum (h_{(1)} \triangleright \varphi(a))(h_{(2)} \triangleright (S(h_{(3)})k \triangleright \varphi(b))) \\ &= \sum (h_{(1)} \triangleright \varphi(a))(h_{(2)}S(h_{(3)})k \triangleright \varphi(b)) \\ &= \sum (h_{(1)} \triangleright \varphi(a))(\varepsilon(h_{(2)})1_H k \triangleright \varphi(b)) \\ &= \sum (h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}) \triangleright \varphi(a))(k \triangleright \varphi(b)) \\ &= (h \triangleright \varphi(a))(k \triangleright \varphi(b)) \\ &= \Phi(h \triangleright \theta(a))\Phi(k \triangleright \theta(b)). \end{aligned}$$

Ademais, vamos mostrar que Φ é um morfismo de H-módulos à esquerda. Note que para todo $h \in H$ e para todo $x \in B'$ com $x = k \rhd \theta(a)$, $k \in H$,$a \in A$, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi(h \rhd x) &= \Phi(h \rhd (k \rhd \theta(a))) \\
&= \Phi(hk \rhd \theta(a)) \\
&= hk \rhd \varphi(a) \\
&= h \rhd (k \rhd \varphi(a)) \\
&= h \rhd \Phi(k \rhd \theta(a)) \\
&= h \rhd \Phi(x),
\end{aligned}$$

Por fim, uma vez que

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)\right),$$

Φ é uma aplicação sobrejetora de B' sobre $B = H \triangleright \varphi(A)$. ∎

Acerca de Φ, essa aplicação ser injetora equivale a dizer que $Ker(\Phi) = \{0\}$. Daí temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} h_i \rhd \theta(a_i) = 0 &\Longleftrightarrow \Phi(\sum_{i=1}^{n} h_i \rhd \theta(a_i)) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i \rhd \varphi(a_i) = 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, dado $k \in H$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} h_i \rhd \theta(a_i) = 0 &\Longleftrightarrow (\sum_{i=1}^{n} h_i \rhd \varphi(a_i))(k) = 0, \forall k \in H \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i = 0, \forall k \in H.
\end{aligned}$$

Isso motiva a seguinte definição.

Definição 3.13 *Seja A um H-módulo álgebra parcial. Uma ação envolvente (B, θ) de A é mínima se, para todo H-submódulo M de B, $\theta(1_A)M = 0$ implica $M = 0$.*

Lema 3.14 *Seja $\varphi : A \to Hom_k(H, A)$ como acima e considere o H-submódulo $B = H \triangleright \varphi(A)$. Então, (B, φ) é uma ação envolvente minimal de A.*

Demonstração: É suficiente verificar que a condição de minimalidade é válida para submódulos cíclicos. Seja $M = H \triangleright (\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i))$, e suponha que $\varphi(1_A) * M = 0$. Isso significa que

$$0 = \varphi(1_A) * \left(\sum_{i=1}^{n} kh_i \triangleright \varphi(a_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(kh_i \cdot a_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i\right)$$

para cada $k \in H$. Como φ é injetiva, $\sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i = 0$ para todo $k \in H$. Mas então

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)(k) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)(kh_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(kh_i \cdot a_i) = 0$$

para cada $k \in H$, e concluímos que $\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i) = 0$. ■

Pelo Teorema 3.12 e Lema 3.14, concluímos com o seguinte teorema.

Teorema 3.15 *Todo H-módulo álgebra parcial tem uma ação envolvente minimal, e quaisquer duas ações envolventes minimais de A são isomorfas como H-módulos álgebra. Além disso, se (B', θ) é uma ação envolvente, então existe um morfismo de H-módulos álgebra de B' sobre uma ação envolvente minimal.*

Demonstração: Uma vez que a ação envolvente padrão (B, φ) é uma ação minimal e $\Phi : B' \to \mathrm{Hom}_k(H, A)$ é um morfismo sobrejetor de H-módulos álgebra sobre B, nós apenas temos que provar que Φ é injetiva se (B', θ) é minimal. Dado $m = (\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) \in Ker\{\Phi\}$, considere $M = H \triangleright m = \{h \triangleright m; h \in H\}$ o submódulo cíclico gerado por m. Como $\Phi(\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) = 0$, então

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)(k) = \sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i = 0$$

para cada $k \in H$. Como θ é ação envolvente, temos

$$0 = \theta(\sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i) = \theta(1_A)[\sum_{i=1}^{n} kh_i \triangleright \theta(a_i)] = \theta(1_A)[k \triangleright (\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i))]$$

para todo $k \in H$. Assim, $\theta(1_A)M = 0$, uma vez que (B', θ) é minimal, isso implica que $M = 0$ e portanto que $m = \sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i) = 0$. ■

3.3 Contexto de Morita

Na Seção 2.2, foi mostrado que se uma ação parcial de grupos α de G em uma álgebra unitária A admite uma ação parcial envolvente β do mesmo grupo em uma álgebra B, então o anel de grupo skew parcial $A \rtimes_\alpha G$ é Morita equivalente ao produto cruzado $B \rtimes_\beta G$. Isso foi provado construindo um contexto de Morita entre esses dois anéis de grupo skew.

No caso da álgebra de Hopf, veremos que quando uma álgebra de Hopf H atua parcialmente em uma álgebra unitária A e a ação envolvente (B, θ) é tal que $\theta(A)$ é um ideal de B, então o produto parcial smash $\underline{A\#H}$ é Morita equivalente ao produto smash $B\#H$.

Dada uma álgebra (possivelmente não unitária) A, considere o conjunto $A \otimes H$ com o produto

$$(a \otimes h)(b \otimes k) = \sum a(h_{(1)} \cdot b) \otimes h_{(2)}k.$$

O produto smash parcial é a subálgebra unitária de $A \otimes H$ dada por

$$\underline{A\#H} = (1_A \otimes 1_H)(A \otimes H)(1_A \otimes 1_H) = (A \otimes H)(1_A \otimes 1_H),$$

isto é, a subálgebra gerada por elementos da forma

$$x = \sum a(h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}, \quad \forall a \in A, \quad \forall h \in H. \tag{3.18}$$

Embora a definição seja bastante diferente daquela do produto cruzado parcial $A \rtimes_\alpha G$, pode-se provar que $A \rtimes_\alpha G$ é isomorfo a $\underline{A\#\mathbb{K}G}$.

Proposição 3.16 *$A \rtimes_\alpha G$ é isomorfo a $\underline{A\#\mathbb{K}G}$.*

Demonstração: Primeiramente, note que por (3.18), os elementos de $\underline{A\#\mathbb{K}G}$ são da forma

$$x = a(g \cdot 1_A) \otimes g, \quad a \in A, \quad g \in H.$$

Assim, tomemos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi: & A \rtimes_\alpha G & \longrightarrow & \underline{A\#\mathbb{K}G} \\ & a\delta_g & \longmapsto & a(g \cdot 1_A) \otimes g \end{array}$$

A aplicação é bijetiva por construção, entretanto resta mostrar que é de fato um morfismo de álgebras.

Dessa forma, veja que

$$
\begin{aligned}
\phi((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) &= \phi(a_g\alpha_g(b_h 1_{g^{-1}})\delta_{gh}) \\
&= a_g(g\cdot b_h)(gh\cdot 1_A)\otimes gh \\
&= a_g(g\cdot 1_A b_h)(gh\cdot 1_A)\otimes gh \\
&= a_g(g\cdot 1_A)(g\cdot b_h)(gh\cdot 1_A)\otimes gh \\
&= a_g(g\cdot 1_A)(g\cdot b_h 1_A)(gh\cdot 1_A)\otimes gh \\
&= a_g(g\cdot 1_A)(g\cdot b_h)(g\cdot 1_A)(gh\cdot 1_A)\otimes gh \\
&= a_g(g\cdot 1_A)(g\cdot b_h)(g\cdot (h\cdot 1_A))\otimes gh \\
&= a_g(g\cdot 1_A)(g\cdot b_h(h\cdot 1_A))\otimes gh \\
&= (a_g(g\cdot 1_A)\otimes g)(b_h(h\cdot 1_A)\otimes h) \\
&= \phi(a_g(g\cdot b_h)\delta_{gh}) \\
&= \phi(a_g\delta_g)\phi(b_h\delta_h).
\end{aligned}
$$

■

Nosso objetivo nesta seção é construir um contexto de Morita entre o produto smash parcial $\underline{A\#H}$ e o produto smash $B\#H$, onde B é uma ação envolvente para a ação parcial à esquerda $\cdot : H\otimes A\to A$. Para este propósito, incorporaremos o produto smash parcial no produto smash.

Lema 3.17 *Se uma álgebra de Hopf H atua parcialmente em uma álgebra unitária A e (B,θ) é uma ação envolvente, então existe um monomorfismo de álgebra do produto smash parcial $\underline{A\#H}$ no produto smash $B\#H$.*

Demonstração: Primeiramente defina uma aplicação

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi}: \quad A\times H &\longrightarrow B\#H. \\
(a,h) &\longmapsto \theta(a)\#h
\end{aligned}
$$

É fácil ver que $\tilde{\Phi}$ é uma aplicação bilinear e então, pela propriedade universal do produto tensorial $A\otimes H$, $\tilde{\Phi}$ induz uma aplicação $\mathbb{K}$-linear

$$
\begin{aligned}
\Phi: \quad \underline{A\#H} &\longrightarrow B\#H. \\
\underline{a\#h} &\longmapsto \theta(a)\#h
\end{aligned}
$$

Agora, vamos verificar se Φ é um morfismo de álgebras.

$$
\begin{aligned}
\Phi((a\otimes h)(b\otimes k)) &= \Phi\left(\sum a(h_{(1)}\cdot b)\otimes h_{(2)}k\right)\\
&= \sum \theta(a(h_{(1)}\cdot b))\#h_{(2)}k\\
&= \sum \theta(a)\theta(h_{(1)}\cdot b))\#h_{(2)}k\\
&= \sum \theta(a)\theta(1_A)(h_{(1)}\rhd \theta(b))\#h_{(2)}k\\
&= \sum \theta(a)(h_{(1)}\rhd \theta(b))\#h_{(2)}k\\
&= (\theta(a)\#h)(\theta(b)\#k)\\
&= \Phi(a\otimes h)\Phi(b\otimes k).
\end{aligned}
$$

Em seguida, devemos verificar se Φ é injetiva. Para isso, considere

$$x=\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes h_i\in \mathrm{Ker}\Phi.$$

Pela bilinearidade do produto tensorial, podemos tomar, sem perda de generalidade, os elementos a_i de tal forma que sejam linearmente independentes. Além disso, como $x\in \mathrm{Ker}\Phi$, temos

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{n}\theta(a_i)\otimes h_i=0.$$

Pela injetividade de θ, os elementos $\theta(a_i)$ também são L.I., o que, pela Proposição A.2 garante que $h_1=h_2=\cdots=h_n=0$, ou seja, $x=0$. Portanto $\mathrm{Ker}\Phi=\{0\}$.

Como o produto smash parcial $\underline{A\#H}$ é uma subálgebra de $A\#H$, temos que a restrição de Φ à esse é também injetiva sobre $B\#H$. ■

Observação 3.18 *Um elemento típico da imagem do produto smash parcial é*

$$
\begin{aligned}
\Phi((a\#h)(1_A\#1_H)) &= \Phi(a\#h)\Phi(1_A\#1_H)\\
&= (\theta(a)\#h)(\theta(1_A)\#1_H)\\
&= \sum \theta(a)(h_{(1)}\rhd \theta(1_A))\#h_{(2)}
\end{aligned}
$$

Considere $M=\Phi(A\otimes H)=\{\sum_{i=1}^{n}\theta(a_i)\#h_i; a_i\in A, n\in\mathbb{N}\}$, e considere $N=(1_A\otimes H)\Phi(A\otimes 1_H)$, ou seja, o subespaço de $B\#H$ gerado pelos elementos $\sum h_{(1)}\rhd\theta(a)\#h_{(2)}$, com $h\in H$ e $a\in A$. Assumiremos que H é uma álgebra de Hopf com antípoda invertível.

Proposição 3.19 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda invertível, A um H-módulo álgebra parcial e suponha que $\theta(A)$ seja um ideal de B; então M é um $B\#H$-módulo à direita e N é um $B\#H$-módulo à esquerda.*

Demonstração: Para ver que M é um $B\#H$-módulo à direita, seja $\theta(a)\#h \in M$ e $b\#k \in B\#H$, com $a \in A, b \in B$ e $h, k \in H$. Então

$$(\theta(a)\#h)(b\#k) = \sum \theta(a)(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}k \in M = \Phi(A \otimes H),$$

pois $\theta(A)$ é um ideal de B.

Agora, para provar que N é um módulo $B\#H$ à esquerda, seja $\sum(h_{(1)} \triangleright \theta(a))\#h_{(2)}$ um gerador de N:

$$\begin{aligned}
(b\#k)\left(\sum(h_{(1)} \triangleright \theta(a))\#h_{(2)}\right) &= \sum b(k_{(1)} \triangleright (h_{(1)} \triangleright \theta(a)))\#k_{(2)}h_{(2)} \\
&= \sum b(k_{(1)}h_{(1)} \triangleright \theta(a))\#k_{(2)}h_{(2)} \\
&= \sum b(\varepsilon(k_{(1)}h_{(1)}))k_{(2)}h_{(2)} \triangleright \theta(a)\#k_{(3)}h_{(3)} \\
&= \sum(1_H \triangleright b)((\varepsilon(k_{(1)}h_{(1)})k_{(2)}h_{(2)} \triangleright \theta(a))\#k_{(3)}h_{(3)} \\
&= \sum(1_H(\varepsilon(k_{(1)}h_{(1)}) \triangleright b)(k_{(2)}h_{(2)} \triangleright \theta(a))\#k_{(3)}h_{(3)} \\
&= \sum(k_{(2)}h_{(2)}S^{-1}(k_{(1)}h_{(1)})) \triangleright b)(k_{(3)}h_{(3)} \triangleright \theta(a))\#k_{(4)}h_{(4)} \\
&= \sum(k_{(2)}h_{(2)} \triangleright (S^{-1}(k_{(1)}h_{(1)})) \triangleright b))(k_{(3)}h_{(3)} \triangleright \theta(a))\#k_{(4)}h_{(4)} \\
&= \sum(k_{(2)}h_{(2)} \triangleright ((S^{-1}(k_{(1)}h_{(1)})) \triangleright b)\theta(a))\#k_{(3)}h_{(3)},
\end{aligned}$$

onde a sexta igualdade decorre da Observação 1.21. Além disso, veja que cada termo $(S^{-1}(k_{(1)}h_{(1)}) \triangleright b)\theta(a)$ está em $\theta(A)$ já que $\theta(A)$ é um ideal de B. Segue que N é um ideal à esquerda de $B\#H$. ■

Podemos definir uma estrutura de $\underline{A\#H}$-módulo à esquerda em M e uma estrutura de $A\#H$-módulo à direita em N induzida pelo monomorfismo Φ, isto é,

$$\left(\sum a(h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}\right) \blacktriangleright (\theta(b)\#k) = (\sum \theta(a)(h_{(1)} \triangleright \theta(1_A))\#h_{(2)})(\theta(b)\#k),$$

e

$$\begin{aligned}
&\left(\sum k_{(1)} \triangleright \theta(b)\#k_{(2)}\right) \blacktriangleleft \left(\sum a(h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}\right) \\
&= \left(\sum k_{(1)} \triangleright \theta(b)\#k_{(2)}\right)\left(\sum \theta(a)(h_{(1)} \triangleright \theta(1_A))\#h_{(2)}\right).
\end{aligned}$$

Proposição 3.20 *Sob as mesmas hipóteses da proposição anterior, M é de fato um $\underline{A\#H}$-módulo à esquerda com a aplicação $\blacktriangleright$, e N é de fato um $\underline{A\#H}$-módulo à direita com a aplicação $\blacktriangleleft$.*

Demonstração: Vamos primeiro verificar que $\underline{A\#H} \blacktriangleright M \subseteq M$.

$$\begin{aligned}\left(\sum a(h_{(1)}\cdot 1_A)\otimes h_{(2)}\right) \blacktriangleright (\theta(b)\#k) &= \sum(\theta(a)(h_{(1)}\triangleright\theta(1_A))\#h_{(2)})(\theta(b)\#k)\\ &= \sum(\theta(a)\theta(1_A)(h_{(1)}\triangleright\theta(1_A))\#h_{(2)})(\theta(b)\#k)\\ &= \sum(\theta(a)(h_{(1)}\cdot\theta(1_A))\#h_{(2)})(\theta(b)\#k)\\ &= \sum\theta(a)(h_{(1)}\cdot\theta(1_A))(h_{(2)}\triangleright\theta(b))\#h_{(3)}k\\ &= \sum\theta(a)(h_{(1)}\cdot\theta(1_A))\theta(1_A)(h_{(2)}\triangleright\theta(b))\#h_{(3)}k\\ &= \sum\theta(a)(h_{(1)}\cdot\theta(1_A))(h_{(2)}\cdot\theta(b))\#h_{(3)}k\\ &= \sum\theta(a)(h_{(1)}\cdot\theta(1_A)\theta(b))\#h_{(2)}k\\ &= \sum\theta(a)(h_{(1)}\cdot\theta(b))\#h_{(2)}k\end{aligned}$$

que está em M porque $\theta(A)$ é um ideal à direita de B.

Agora, temos que verificar que $N \blacktriangleleft A\#H \subseteq N$.

$$\begin{aligned}&\left(\sum k_{(1)}\triangleright\theta(b)\#k_{(2)}\right)\blacktriangleleft\left(\sum a(h_{(1)}\cdot 1_A)\otimes h_{(2)}\right)\\ &=\left(\sum k_{(1)}\triangleright\theta(b)\#k_{(2)}\right)\left(\sum\theta(a)(h_{(1)}\triangleright\theta(1_A))\#h_{(2)}\right)\\ &=\sum(k_{(1)}\triangleright\theta(b))(k_{(2)}\triangleright(\theta(a)(h_{(1)}\triangleright\theta(1_A)))\#k_{(3)}h_{(2)}\\ &=\sum(k_{(1)}\triangleright\theta(b))(k_{(2)}\triangleright\theta(a))(k_{(3)}\triangleright(h_{(1)}\triangleright\theta(1_A)))\#k_{(4)}h_{(2)}\\ &=\sum(k_{(1)}\triangleright\theta(b)\theta(a))(k_{(2)}h_{(1)}\triangleright\theta(1_A))\#k_{(3)}h_{(2)}\\ &=\sum(k_{(1)}\triangleright\theta(ba))(k_{(2)}h_{(1)}\triangleright\theta(1_A))\#k_{(3)}h_{(2)}\\ &=\sum(k_{(1)}\triangleright\theta(ba))(k_{(2)}\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\triangleright\theta(1_A))\#k_{(3)}h_{(3)}\\ &=\sum(k_{(1)}\varepsilon(h_{(1)})\triangleright\theta(ba))(k_{(2)}h_{(2)}\triangleright\theta(1_A))\#k_{(3)}h_{(3)}\\ &=\sum(k_{(1)}h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)})\triangleright\theta(ba))(k_{(2)}h_{(3)}\triangleright\theta(1_A))\#k_{(3)}h_{(4)}\\ &=\sum(k_{(1)}h_{(2)}\triangleright(S^{-1}(h_{(1)})\triangleright\theta(ba)))(k_{(2)}h_{(3)}\triangleright\theta(1_A))\#k_{(3)}h_{(4)}\\ &=\sum k_{(1)}h_{(2)}\triangleright((S^{-1}(h_{(1)})\triangleright\theta(ba))\theta(1_A))\#k_{(2)}h_{(3)}\\ &=\sum k_{(1)}h_{(2)}\triangleright\theta(S^{-1}(h_{(1)})\cdot ba)\#k_{(2)}h_{(3)},\end{aligned}$$

onde na última linha usamos o fato de que

$$\theta(t\cdot x)=t\cdot\theta(x)=\theta(1_A)(t\triangleright\theta(x))=(t\triangleright\theta(x))\theta(1_A),$$

que vale porque $\theta(1_A)$ é um idempotente central. ∎

O último ingrediente para um contexto de Morita é a definição de dois morfismos de bimódulos

$$\tau : M \otimes_{B\#H} N \to \underline{A\#H} \cong \Phi(\underline{A\#H}) \subseteq B\#H$$

e

$$\sigma : N \otimes_{\underline{A\#H}} M \to B\#H.$$

Como M, N e $\underline{A\#H}$ são vistos como subálgebras de $B\#H$, estas duas aplicações podem ser tomadas como a multiplicação usual em $B\#H$. A associatividade do produto nos assegura que estas aplicações são morfismos de bimódulos e satisfazem as condições de associatividade (4) e (5). O seguinte teorema nos mostra M é um $\underline{A\#H}-B\#H$ bimódulo, N é um $B\#H-\underline{A\#H}$ bimódulo, e que as aplicações τ e σ são de fato bem definidas, e além disso, que eles são sobrejetivos, provando a equivalência de Morita entre estes dois produtos smash.

Teorema 3.21 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda invertível, A um H-módulo álgebra parcial, (B,θ) uma ação envolvente unitária, e suponha que $\theta(A)$ seja um ideal de B; seja M e N os bimódulos definidos acima. Então $(\underline{A\#H}, B\#H, M, N, \tau, \sigma)$ é um contexto de Morita estrito.*

Demonstração: Primeiramente vamos verificar que M é um $\underline{A\#H}-B\#H$ bimódulo, ou seja, dados $x = \sum a(h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}$ em $\underline{A\#H}$, $y = b\#k$ em $B\#H$ e $m = \theta(c)\#l$ em M temos

$$\begin{aligned}
(x \blacktriangleright m)y &= ((\sum a(h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}) \blacktriangleright \theta(c)\#l)(b\#k) \\
&= ((\sum \theta(a)(h_{(1)} \triangleright \theta(1_A))\#h_{(2)})(\theta(c)\#l))(b\#k) \\
&= (\sum \theta(a)(h_{(1)} \triangleright \theta(1_A))\#h_{(2)})((\theta(c)\#l)(b\#k)) \\
&= (\sum a(h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}) \blacktriangleright ((\theta(c)\#l)(b\#k)) \\
&= x \blacktriangleright (my).
\end{aligned}$$

Analogamente pode-se mostrar, também pela associatividade do produto em $B\#H$, que N é um $B\#H-\underline{A\#H}$ bimódulo. Vamos agora mostrar que as aplicações τ e σ estão bem definidas. Como σ apenas multiplica elementos em $B\#H$, não há dúvidas quanto à sua boa definição, já para τ, devemos verificar que $MN \subseteq \Phi(A\#H)$, note que:

$$\begin{aligned}
(\theta(a)\#h)(\sum k_{(1)} \triangleright \theta(b)\#k_{(2)}) &= \sum \theta(a)h_{(1)} \triangleright (k_{(1)} \triangleright \theta(b))\#h_{(2)}k_{(2)} \\
&= \sum \theta(a)(h_{(1)}k_{(1)} \triangleright \theta(b))\#h_{(2)}k_{(2)} \\
&= \sum \theta(a)(h_{(1)}k_{(1)} \triangleright \theta(b))(h_{(2)}k_{(2)} \triangleright \theta(1_A))\#h_{(3)}k_{(3)} \\
&= \sum \theta(a)\theta(1_A)(h_{(1)}k_{(1)} \triangleright \theta(b))(h_{(2)}k_{(2)} \triangleright \theta(1_A))\#h_{(3)}k_{(3)} \\
&= \sum \theta(a)(h_{(1)}k_{(1)} \cdot \theta(b))((h_{(2)}k_{(2)})_{(1)} \triangleright \theta(1_A))\#(h_{(2)}k_{(2)})_{(2)} \\
&= \sum \theta(a)\theta(h_{(1)}k_{(1)} \cdot b)((h_{(2)}k_{(2)})_{(1)} \triangleright \theta(1_A))\#(h_{(2)}k_{(2)})_{(2)} \\
&= \sum \theta(a(h_{(1)}k_{(1)} \cdot b))((h_{(2)}k_{(2)})_{(1)} \triangleright \theta(1_A))\#(h_{(2)}k_{(2)})_{(2)}
\end{aligned}$$

que é um elemento de $\Phi(\underline{A\#H})$.

Com isso, fica provado que $(\underline{A\#H}, B\#H, M, N, \tau, \sigma)$ é um contexto de Morita. Ainda temos que mostrar que τ e σ são sobrejetores, ou, equivalentemente, que $MN = \Phi(A\#H)$ e $NM = B\#H$.

Uma vez que

$$\sum \theta(a)(h_{(1)} \triangleright \theta(1_A))\#h_{(2)} = (\theta(a)\#h)(\theta(1_A)\#1_H)$$

e $\theta(1_A)\#1_H \in N$, segue que $MN = \Phi(A\#H)$.

Para provar que $NM = B\#H$, temos apenas que mostrar que cada elemento da forma $(h \triangleright \theta(a))\#k$ está em NM, pois este é um conjunto gerador para $B\#H$ como um espaço vetorial. Afirmamos que

$$(h \triangleright \theta(a))\#k = \sum((h_{(1)} \triangleright \theta(a))\#h_{(2)})(\theta(1_A)\#S(h_{(3)}k)).$$

Isso pode ser facilmente visto da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sum((h_{(1)} \triangleright \theta(a))\#h_{(2)})(\theta(1_A)\#S(h_{(3)}k)) &= \sum((h_{(1)} \triangleright \theta(a))\theta(1_A)\#h_{(2)}S(h_{(3)}k)) \\
&= \sum((h_{(1)} \triangleright \theta(a))\theta(1_A))\#h_{(2)}S(h_{(3)}k) \\
&= \sum((h_{(1)} \triangleright \theta(a))\theta(1_A)\#\varepsilon(h_{(2)})k \\
&= ((\sum h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})) \triangleright \theta(a))\#k \\
&= (h \triangleright \theta(a))\#k.
\end{aligned}$$

Portanto, $NM = B\#H$. ∎

3.4 Representações Parciais

Como visto no Capítulo 2, as representações de grupo são uma ferramenta importante e que apresentam uma forte relação com as ações parciais. Tendo isso em vista, alguns resultados podem ser analisado na perspectiva das álgebras de Hopf.

Proposição 3.22 *Seja α uma ação parcial de G em A tal que todo idempotente 1_g é central. Então a aplicação $\pi : G \to End_{\mathbb{K}}(A)$ dada por*

$$\pi(g)(a) = \alpha_g(a1_{g^{-1}})$$

define uma representação parcial de G.

Demonstração: Para cada $a \in A$, temos

$$\pi(1)(a) = \alpha_1(a1_A) = a.$$

Logo, $\pi(1) = I_A = 1_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)}$. Sendo 1_g idempotente central, por (2.10) e por $1_{h^{-1}}1_{h^{-1}g^{-1}} \in D_h \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$,temos

$$\begin{aligned}
\alpha_g(\alpha_h(a1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}) &= \alpha_g(\alpha_h(a1_{h^{-1}})1_h1_{g^{-1}}) \\
&= \alpha_g(\alpha_h(a1_{h^{-1}})\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{h^{-1}g^{-1}})) \\
&= \alpha_g(\alpha_h(a1_{h^{-1}}1_{h^{-1}g^{-1}})) \\
&= \alpha_{gh}(a1_{h^{-1}}1_{h^{-1}g^{-1}}) \\
&= \alpha_{gh}(a1_{h^{-1}g^{-1}})\alpha_{gh}(1_{h^{-1}}1_{h^{-1}g^{-1}}) \\
&= \alpha_{gh}(a1_{h^{-1}g^{-1}})1_{gh}1_g \\
&= \alpha_{gh}(a1_{h^{-1}g^{-1}})1_g \\
&= 1_g\alpha_{gh}(a1_{h^{-1}g^{-1}}),
\end{aligned}$$

para todo $g, h \in G$ e $a \in A$. Assim, para todo $g, h \in G$ e $a \in A$, vale

$$\pi(g^{-1})\pi(gh)(a) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{gh}(a1_{h^{-1}g^{-1}})1_g) = 1_{g^{-1}}\alpha_h(a1_{h^{-1}}).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h)(a) &= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(\alpha_h(a1_{h^{-1}})1_{g^{-1}})1_g) \\
&= \alpha_{g^{-1}}(1_g\alpha_{gh}(a1_{h^{-1}g^{-1}})) \\
&= \alpha_{g^{-1}}(1_g)\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{gh}(a1_{h^{-1}g^{-1}}) \\
&= 1_{g^{-1}}\alpha_h(a1_{h^{-1}}).
\end{aligned}$$

Logo, $\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \pi(g^{-1})\pi(gh)$. De maneira análogo, temos que $\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1})$. Portanto, π é uma representação parcial de G.

■

Inspirados neste exemplo, vamos tentar definir uma representação parcial de uma álgebra de Hopf H. No que se segue, assumimos que H é uma álgebra de Hopf com antípoda invertível.

Proposição 3.23 *Seja H uma Álgebra de Hopf, com antípoda invertível, que age parcialmente sobre uma álgebra unitária A. Então a aplicação*

$$\pi : H \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(A),$$
$$h \longmapsto \pi(h)$$

dado por $\pi(h)(a) = h \cdot a$, satisfaz:

(i) $\pi(1_H) = I$,

(ii) $\sum \pi(S^{-1}(h_{(2)}))\pi(h_{(1)})\pi(k) = \sum \pi(S^{-1}(h_{(2)}))\pi(h_{(1)}k)$.

Demonstração: A primeira identidade é imediata, já que para todo $a \in A$ temos

$$\pi(1_H)(a) = 1_H \cdot a = a \quad \Rightarrow \quad \pi(1_H) = I.$$

Para provar a segunda igualdade, tome um elemento qualquer $a \in A$, então

$$\begin{aligned}
\sum \pi(S^{-1}(h_{(2)}))\pi(h_{(1)})\pi(k)(a) &= \sum S^{-1}(h_{(2)}) \cdot (h_{(1)} \cdot (k \cdot a)) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(2)})h_{(1)} \cdot (k \cdot a)) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(2)}) \cdot 1_A)(\varepsilon(h_{(1)})1_H \cdot (k \cdot a)) \\
&= \sum (S^{-1}(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}) \cdot 1_A)(1_H \cdot (k \cdot a)) \\
&= (S^{-1}(h) \cdot 1_A)(1_H \cdot (k \cdot a)) \\
&= (S^{-1}(h) \cdot 1_A)(k \cdot a),
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\sum \pi(S^{-1}(h_{(2)}))\pi(h_{(1)}k)(a) &= \sum S^{-1}(h_{(2)}) \cdot (h_{(1)}k \cdot a) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(2)})h_{(1)}k \cdot a) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(2)}) \cdot 1_A)(\varepsilon(h_{(1)})k \cdot a) \\
&= \sum (S^{-1}(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}) \cdot 1_A)(k \cdot a) \\
&= (S^{-1}(h) \cdot 1_A)(k \cdot a).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Com este resultado podemos propor a seguinte definição.

Definição 3.24 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda invertível. Uma representação parcial de H em uma álgebra unitária B é uma aplicação linear*

$$\pi : H \to B,$$

$$h \mapsto \pi(h)$$

tal que

(i) $\pi(1_H) = 1_B$,

(ii) $\sum \pi(S^{-1}(h_{(2)}))\pi(h_{(1)})\pi(k) = \sum \pi(S^{-1}(h_{(2)}))\pi(h_{(1)}k), \forall h, k \in H.$

Diferentemente do caso de grupos, as representações parciais de álgebras de Hopf não são simétricas em relação ao lado esquerdo e direito. Isso não é totalmente inesperado, visto que estamos trabalhando com ideais à direita; mencionamos, no entanto, que a situação não melhora muito se impusermos que $\varphi(A)$ seja um ideal na ação envolvente (B, φ).

No Lema 2.15 do Capítulo 2, foi construída uma representação parcial de um grupo G sobre o anel de grupo skew parcial $A \rtimes_\alpha G$. No próximo resultado, mostraremos que o mesmo ocorre com o produto smash parcial, isto é, se H age parcialmente em A, então existe uma representação parcial de H em $\underline{A \# H}$.

Teorema 3.25 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda invertível que age parcialmente sobre uma álgebra unitária A. Então a aplicação linear*

$$\pi : H \to \underline{A \# H},$$

$$h \mapsto \sum (h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}$$

é uma representação parcial de H.

Demonstração: O primeiro item pode ser facilmente provado, uma vez que

$$\pi(1_H) = (1_H \cdot 1_A) \otimes 1_H = 1_A \otimes 1_H,$$

que é a unidade em $\underline{A \# H}$.

Para o segundo item na definição, tome $h, k \in H$, então

$$
\begin{aligned}
&\sum \pi(S^{-1}(h_{(2)}))\pi(h_{(1)})\pi(k) = \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(4)}) \cdot 1_A) \otimes S^{-1}(h_{(3)}) \left(\sum (h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}\right) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(5)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(4)}) \cdot (h_{(1)} \cdot 1_A)) \otimes S^{-1}(h_{(3)})h_{(2)}) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(4)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(3)}) \cdot (h_{(1)} \cdot 1_A)) \otimes \varepsilon(h_{(2)})1_H) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(4)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(3)}) \cdot (h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}) \cdot 1_A)) \otimes 1_H) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(2)}) \cdot (h_{(1)} \cdot 1_A)) \otimes 1_H) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(4)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(2)})h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes 1_H) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(2)}) \cdot 1_A)(\varepsilon(h_{(1)})1_H \cdot 1_A) \otimes 1_H) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}) \cdot 1_A)(1_H \cdot 1_A) \otimes 1_H) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(2)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(1)}) \cdot 1_A)(1_H \cdot 1_A) \otimes 1_H) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \left((S^{-1}(h) \cdot 1_A) \otimes 1_H\right) \left(\sum (k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h) \cdot 1_A)(k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\sum \pi(S^{-1}(h_{(2)}))\pi(h_{(1)}k) &= \sum \left(\sum (S^{-1}(h_{(4)}) \cdot 1_A) \otimes S^{-1}(h_{(3)})\right) \left(\sum (h_{(1)}k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}k_{(2)}\right) \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(5)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(4)}) \cdot (h_{(1)}k_{(1)} \cdot 1_A)) \otimes S^{-1}(h_{(3)})h_{(2)}k_{(2)} \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(4)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(3)}) \cdot (h_{(1)}k_{(1)} \cdot 1_A)) \otimes \varepsilon(h_{(2)})k_{(2)} \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(4)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(\varepsilon(h_{(2)})h_{(3)}) \cdot (h_{(1)}k_{(1)} \cdot 1_A)) \otimes k_{(2)} \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(2)}) \cdot (h_{(1)}k_{(1)} \cdot 1_A)) \otimes k_{(2)} \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(4)}) \cdot 1_A)((S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)(S^{-1}(h_{(2)})h_{(1)} \cdot 1_A))(k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)} \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)((S^{-1}(h_{(2)}) \cdot 1_A)(\varepsilon(h_{(1)})1_H \cdot 1_A))(k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)} \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(3)}) \cdot 1_A)((S^{-1}(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}) \cdot 1_A)(1_H \cdot 1_A))(k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)} \\
&= \sum (S^{-1}(h_{(2)}) \cdot 1_A)((S^{-1}(h_{(1)}) \cdot 1_A)(1_H \cdot 1_A))(k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)} \\
&= \sum (S^{-1}(h) \cdot 1_A)(k_{(1)} \cdot 1_A) \otimes k_{(2)}.
\end{aligned}
$$

■

Apêndice A

Produto tensorial

Neste apêndice serão exibidos resultados essenciais para o entendimento do artigo. Para mais detalhes, ver [11]. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e sejam U, V, W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Uma aplicação bilinear de $U \times V$ em W é uma função $\varphi : U \times V \to W$ satisfazendo

(i) $\varphi(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda\varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$ e

(ii) $\varphi(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda\varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2)$,

para todos $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Um produto tensorial de U e V é um par (W, φ), em que W é um k-espaço vetorial e $\varphi : U \times V \to W$ é uma aplicação bilinear que satisfaz a seguinte propriedade: dado qualquer par (W', ψ), em que W' é um k-espaço vetorial e $\psi : U \times V \to W'$ é uma aplicação bilinear, existe uma única transformação linear $T : W \to W'$ tal que $T \circ \varphi = \psi$.

O produto tensorial entre espaços vetoriais quando existe é único a menos de isomorfismo, ou seja, dados U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, e sejam (W_1, φ_1) e (W_2, φ_2) produtos tensoriais de U e V. Então, existe um único isomorfismo $\Phi : W_1 \to W_2$ tal que $\Phi \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

A existência do produto tensorial entre espaços vetoriais sempre ocorre. O $\mathbb{K}$-espaço vetorial W que é contra-domínio da aplicação φ será denotado por $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ ou, simplesmente, por $U \otimes V$, quando ficar claro o corpo base sobre o qual os espaços estão definidos. Esse espaço será designado o produto tensorial de U por V. Se $u \in U, v \in V$, escreveremos

$u \otimes v = \varphi(u, v)$. Assim, em $U \otimes V$, tem-se

$$(\lambda u_1 + u_2) \otimes v = \lambda(u_1 \otimes v) + u_2 \otimes v$$

e

$$u \otimes (\lambda v_1 + v_2) = \lambda(u \otimes v_1) + u \otimes v_2,$$

para todos $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$.

Embora todo elemento de $U \otimes V$ seja da forma

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i, \tag{1.1}$$

para algum $n \geq 1$, com $u_i \in U$ e $v_i \in V$, para todo $i = 1, \ldots, n$. essa forma não é única. Por exemplo,

$$0 \otimes v = u \otimes 0 = u \otimes v + (-u) \otimes v,$$

quaisquer que sejam $u \in U, v \in V$.

A seguir serão apresentadas algumas proposições que foram requeridas para alguns resultados dessa dissertação.

Proposição A.1 *Sejam U, U', V, V' $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e sejam $T : U \to V$ e $T' : U' \to V'$ transformações lineares. Então, existe uma única transformação linear $T \otimes T' : U \otimes U' \to V \otimes V'$ tal que $(T \otimes T')(u \otimes u') = T(u) \otimes T'(u')$, para todos $u \in U, u' \in U'$.*

Proposição A.2 *Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Então, existe uma transformação linear $\iota : U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^*$ tal que $\iota(f \otimes g)(u \otimes v) = \langle f, u\rangle\langle g, v\rangle$, para todos $f \in U^*, g \in V^*, u \in U, v \in V$. Além disso, ι é injetora e, consequentemente, é um isomorfismo se U e V tiverem dimensão finita.*

Proposição A.3 *Seja V um espaço vetorial e $x, y \in V \otimes V$, então $x = y$ se, e somente se, $\langle\iota(\alpha \otimes \beta), x\rangle = \langle\iota(\alpha \otimes \beta), y\rangle$ para todos $\alpha, \beta \in D^*$, em que $\iota : D^* \otimes D^* \to (D \otimes D)^*$ é a aplicação definida na Proposição A.2.*

Proposição A.4 *Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, a aplicação $\varphi : U \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \to U$ tal que $\varphi(\lambda \otimes u) = \lambda u$ é um isomorfismo. Além disso, sua aplicação inversa age de tal forma: $\varphi^{-1}(u) = u \otimes 1_{\mathbb{K}}$.*

Observação A.5 *A aplicação φ definida em A.4 em $U \otimes \mathbb{K}$ pode ser analogamente definida em $\mathbb{K} \otimes U$. Em ambos os casos essa aplicação é denominada isomorfismo canônico.*

Referências Bibliográficas

[1] H. Hopf, Uber die topologie der gruppen-mannigfaltigkeiten und ihre verallgemeinerungen, Ann. of Math 42 (2) (1941) 22–52. 1

[2] P. Cartier, Dualité de tannaka des groupes et des algebres de lie, COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L ACADEMIE DES SCIENCES 242 (3) (1956) 322–325. 1

[3] M. Sweedler, Hopf Algebras, Mathematics lecture note series, W.A. Benjamin, 1969. URL `https://books.google.com.br/books?id=0O74yAEACAAJ` 1

[4] K. McClanahan, K-theory for partial crossed products by discrete groups, Journal of Functional Analysis 130 (1) (1995) 77–117. 1

[5] R. Exel, Circle actions on c*-algebras, partial automorphisms, and a generalized pimsner-voiculescu exact sequence, Journal of functional analysis 122 (2) (1994) 361–401. 1

[6] R. Exel, Twisted partial actions: a classification of regular c*-algebraic bundles, Proceedings of the London Mathematical Society 74 (2) (1997) 417–443. 1

[7] R. Exel, Partial actions of groups and actions of inverse semigroups, Proceedings of the American Mathematical Society 126 (12) (1998) 3481–3494. 1

[8] M. Dokuchaev, R. Exel, Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations, Transactions of the American Mathematical Society 357 (5) (2005) 1931–1952. 1, 2, 27, 28

[9] S. Caenepeel, K. Janssen, Partial (co) actions of hopf algebras and partial hopf-galois theory, Communications in Algebra 36 (8) (2008) 2923–2946. 1, 50

[10] M. M. S. Alves, E. Batista, Enveloping actions for partial hopf actions, Communications in Algebra® 38 (8) (2010) 2872–2902. 1, 2, 48

[11] V. O. Ferreira, L. S. Murakami, Uma introdução às àlgebras de hopf (2020). 3, 74

[12] S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings, no. 82, American Mathematical Soc., 1993. 3

[13] S. U. Chase, M. E. Sweedler, Hopf algebras and galois theory, in: Hopf Algebras and Galois Theory, Springer, 2006, pp. 52–83. 3

[14] L. Rowen, Ring Theory, no. v. 127 in Pure and applied mathematics, Academic Press, 1988. 36

[15] S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu, Hopf algebras: an introduction. marcel decker, Inc., New York (2001). 56