

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders<sup>†</sup>

por

Aline Barbosa Tsuyuguchi

sob orientação da

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Michelli Karinne Barros da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPQ

# Testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders

por

Aline Barbosa Tsuyuguchi

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Estatística

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Raydonal Ospina Martínez - UFPE**

---

**Prof. Dr. Gustavo Henrique Esteves - UEPB**

---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Michelli Karinne Barros da Silva - UFCG**

**Orientadora**

**Universidade Federal de Campina Grande**

**Centro de Ciências e Tecnologia**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Curso de Mestrado em Matemática**

**Fevereiro/2012**

# Resumo

Neste trabalho estudamos testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders. Consideramos testes clássicos baseados em função de distribuição empírica (Anderson-Darling, Cramér-von Mises e Kolmogorov-Sminorv) e baseados em função característica empírica. Nos limitamos ao caso onde o vetor de parâmetros é desconhecido e, portanto deverá ser estimado. Apresentamos estudos de simulação para verificar o desempenho das estatísticas de teste em estudo. Além disso, propomos estudos de simulação de Monte Carlo para testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders com dados com censura tipo II.

**Palavras-chave:** Testes de bondade de ajuste, função de distribuição empírica, função característica empírica, distribuição Birnbaum-Saunders, censura tipo II.

# Abstract

In this work we study goodness-of-fit tests for Birnbaum-Saunders distribution. We consider classical tests based on empirical distribution function (Anderson-Darling, Cramér-von Mises e Kolmogorov-Sminorv) and based on empirical characteristic function. We limited this study to the case in which the vector of parameters is unknown and, therefore, must be estimated. We present the simulation studies to verify the performance of the test statistics in study. Also, we propose simulation studies of Monte Carlo for goodness-of-fit test for Birnbaum-Saunders distribution using Type-II censored data.

**Key words:** Goodness-of-fit test, empirical distribution function, empirical characteristic function, Birnbaum-Saunders distribution, Type-II censored data.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por nunca me desamparar.

Aos meus pais, Yasutoshi e Marlinda, por todas as oportunidades, pelo apoio incondicional, incentivo e dedicação. Vocês são essenciais. Amo muito vocês!

Às minhas irmãs, Ana, Bárbara e Carol por compartilharem comigo as expectativas e ansiedades. A minha sobrinha Aiko, por mesmo tão nova, ser instrumento de união. Às famílias, tanto Barbosa quanto Tsuyuguchi, por sempre estarem presentes para mim e me deixarem saber disso.

Ao Fábio, pelo apoio, carinho e tranquilidade transmitida, contribuindo de forma significativa na fase final dessa dissertação.

Aos queridos amigos desde a graduação, Daniel, Débora, Eraldo, Fabricia, Fabricio, Israel, Maria, Michel, Narrely, Raquel e Sérgio, por todos os momentos em que me acompanharam e por estarem sempre dispostos a ajudar. "Às meninas de civil", (Rah, Renatinha, Mone e Samilly) e aos amigos de longe pela torcida.

Aos amigos do mestrado, Fabiana, Tatá e Joelson, por terem compartilhado todo o drama e alegrias dessa trajetória, marcando presença constante. Vocês fizeram a diferença, mostrando que posso confiar na ajuda e amizade de vocês para o que ainda virá. Ao meu autoproclamado irmão, Igor (Tonhaunm), e ao amigo Romildo, pelas conversas sérias e as nem tão sérias assim.

A todos os professores da UAME/UFCG que contribuíram para minha formação durante a graduação e a pós-graduação. Em especial, ao professor Daniel Cordeiro pelo incentivo (e pelas quatro disciplinas em que foi meu professor), ao professor Jesualdo pela orientação concedida durante a graduação e aos professores Alexsandro e Brandão que me deram aulas durante o mestrado. Aos funcionários que fazem parte da UAME, em especial a D. Argentina (*in Memoriam*).

Ao professor Víctor Leiva e a minha irmã Bárbara pelos artigos e livros a que me permitiram ter acesso e contribuíram de forma efetiva para este trabalho. Ao professor

Horácio pela ajuda nesta dissertação. Ao professor Raydonal pelo auxílio prestado, muito útil para o desenvolvimento deste trabalho.

À professora Michelli, pelos conhecimentos transmitidos, todo o tempo disponibilizado (incluindo suas férias), dedicação, paciência e pela orientação muito além da que eu poderia desejar. Quero deixar registrado minha gratidão e admiração, tanto pela profissional quanto pela pessoa que é.

Aos professores que aceitaram participar da banca examinadora.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

A todos que me ajudaram, de forma direta ou indireta, a passar pelas diversas dificuldades durante esta trajetória, meu mais sincero obrigada.

# Dedicatória

Aos meus pais, Yasutoshi e Mar-  
linda.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	6
<b>1 Conceitos Básicos</b>	<b>9</b>
1.1 Introdução . . . . .	9
1.2 Caracterização dos dados de sobrevivência . . . . .	10
1.3 Funções importantes . . . . .	11
1.4 O método de Máxima Verossimilhança . . . . .	13
<b>2 Distribuição Birnbaum-Saunders e Birnbaum-Saunders generalizada</b>	<b>17</b>
2.1 Distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	17
2.1.1 Origem . . . . .	17
2.1.2 Função densidade, função sobrevivência e função de risco da distribuição BS. . . . .	20
2.1.3 Propriedades . . . . .	22
2.1.4 Estimação . . . . .	23
2.1.5 Estudo de Simulação . . . . .	25
2.2 Distribuição Birnbaum-Saunders generalizada . . . . .	30
<b>3 Testes de bondade de ajuste</b>	<b>33</b>
3.1 Introdução . . . . .	33
3.2 Estatísticas de função de distribuição empírica . . . . .	34
3.3 Procedimento . . . . .	38
3.4 Estatística da Função característica Empírica . . . . .	39
3.5 Estudo de Simulação . . . . .	41
3.5.1 Valores Críticos . . . . .	41



3.5.2	Poder dos testes . . . . .	41
3.6	Exemplos . . . . .	44
3.6.1	Exemplo 1 . . . . .	44
3.6.2	Exemplo 2 . . . . .	48
3.6.3	Exemplo 3 . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Testes de bondade de ajuste para distribuição BS com censura</b>	<b>58</b>
4.1	Introdução . . . . .	58
4.2	Caso I . . . . .	59
4.3	Caso II . . . . .	62
4.4	Caso III . . . . .	64
4.5	Simulação . . . . .	64
4.5.1	Valores Críticos . . . . .	64
4.5.2	Poder . . . . .	65
4.6	Exemplos . . . . .	69
4.6.1	Exemplo 1 . . . . .	69
4.6.2	Exemplo 2 . . . . .	69
4.6.3	Exemplo 3 . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>72</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo das estatísticas de função de distribuição empírica a serem implementadas</b>	<b>73</b>
A.1	Preliminares . . . . .	73
A.2	Cálculo da estatística de Cramér-von Mises . . . . .	74
A.3	Cálculo da estatística Anderson-Darling . . . . .	78
<b>B</b>	<b>Demonstração do procedimento proposto na Seção (3.3)</b>	<b>82</b>
<b>C</b>	<b>Justificativa que a estimação de <math>\alpha</math> não interfere nas estatísticas de teste</b>	<b>85</b>
<b>D</b>	<b>Cálculo da estatística de função característica empírica a ser implementada</b>	<b>87</b>
D.1	Preliminares . . . . .	87
D.2	Cálculo da estatística de função característica empírica . . . . .	88

	iii
<b>E Dados reais</b>	<b>92</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>

# Lista de Figuras

2.1	Gráfico de funções densidade da distribuição Birnbaum-Saunders para os valores de $\alpha$ indicados e $\beta = 1$ . . . . .	20
2.2	Gráfico de funções de distribuição Birnbaum-Saunders para os valores de $\alpha$ indicados e $\beta = 1$ . . . . .	21
2.3	Gráfico de funções sobrevivência da Birnbaum-Saunders para os valores de $\alpha$ indicados e $\beta = 1$ . . . . .	21
2.4	Gráfico das funções risco da Birnbaum-Saunders para os valores de $\alpha$ indicados e $\beta = 1$ . . . . .	22
2.5	gráfico das funções densidade da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada $t$ -student para $\alpha = 0,5$ , $\beta = 1,0$ , obtidas a partir da distribuição $t$ -student com $\nu = 3$ , $\nu = 5$ , $\nu = 7$ e $\nu = 30$ e da distribuição normal. . . . .	32
3.1	Gráfico de funções de distribuição empírica para amostras de tamanho $n$ indicados e curvas da distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .	37
3.2	Gráfico do Poder estimado dos testes baseados nas estatísticas de testes AD, CM, KS, $T_\gamma$ , com $\gamma \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0 \text{ e } 4,0\}$ , para as distribuições especificadas por $H_1$ . . . . .	45
3.3	Gráfico do Poder estimado dos testes baseados nas estatísticas de testes AD, CM, KS, $T_\gamma$ , com $\gamma \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0 \text{ e } 4,0\}$ , para as distribuições especificadas por $H_1$ . . . . .	46
3.4	Gráfico do Poder estimado dos testes baseados nas estatísticas de testes AD, CM, KS, $T_\gamma$ , com $\gamma \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0 \text{ e } 4,0\}$ , para as distribuições especificadas por $H_1$ . . . . .	47

3.5	Gráfico da função de distribuição empírica da amostra aleatória dada no Exemplo 1 e curva da função de distribuição $BS(0,1614;392,7623)$ . . .	56
3.6	Gráfico da função de distribuição empírica da amostra aleatória dada no Exemplo 2 e curva da função de distribuição $BS(0,1704;131,8188)$ . . .	56
3.7	Gráfico da função de distribuição empírica da amostra aleatória dada no Exemplo 3 e curva da função de distribuição $BS(0,3101;1336,377)$ . . .	57

# Lista de Tabelas

2.1	Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros $\alpha$ e $\beta$ da distribuição BS. . . . .	27
2.2	Estimativas para os parâmetros $\alpha$ e $\beta$ considerando a distribuição BS gerada com $n = 25$ e $n=50$ , $\beta = 1$ , porcentagem de censura indicada e usando no método de estimação de máxima verossimilhança que não incorpora censura. . . . .	28
2.3	Estimativas para os parâmetros $\alpha$ e $\beta$ considerando a distribuição BS gerada com $n = 25$ e $n=50$ , $\beta = 1$ , porcentagem de censura indicada e usando no método de estimação de máxima verossimilhança que incorpora censura. . . . .	29
3.1	Valores críticos para amostras de tamanho $n = 10$ com níveis de significância indicados. . . . .	41
3.2	Valores críticos para amostras de tamanho $n = 25$ com níveis de significância indicados. . . . .	42
3.3	Valores críticos para amostras de tamanho $n = 50$ com níveis de significância indicados. . . . .	42
3.4	Valores críticos para amostras de tamanho $n = 75$ com níveis de significância indicados. . . . .	42
3.5	Poder do teste para amostras de tamanho $n = 10$ com nível de significância de 0,05. . . . .	48
3.6	Poder do teste para amostras de tamanho $n = 10$ com nível de significância de 0,10. . . . .	49

3.7	Poder do teste para amostras de tamanho $n = 25$ com nível de significância de 0,05. . . . .	50
3.8	Poder do teste para amostras de tamanho $n = 25$ com nível de significância de 0,10. . . . .	51
3.9	Poder do teste para amostras de tamanho $n = 50$ com nível de significância de 0,05. . . . .	52
3.10	Poder do teste para amostras de tamanho $n = 50$ com nível de significância de 0,10. . . . .	53
3.11	Poder do teste para amostras de tamanho $n = 75$ com nível de significância de 0,05. . . . .	54
3.12	Poder do teste para amostras de tamanho $n = 75$ com nível de significância de 0,10. . . . .	55
4.1	Resultados do estudo de simulação do caso I . . . . .	61
4.2	Resultados do estudo de simulação do caso II . . . . .	63
4.3	Valores críticos das estatísticas de teste para amostras com tamanhos e porcentagens de censura indicadas. . . . .	65
4.4	Poder estimado para testes baseados nas estatísticas, tamanho $n$ , modelos e porcentagens de censura indicadas com $\rho = 0,05$ . . . . .	67
4.5	Poder estimado para testes baseados nas estatísticas, tamanho $n$ , modelos e porcentagens de censura indicadas com $\rho = 0,10$ . . . . .	68
E.1	Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 26.000 psi. (exemplo 1, Capítulo 3) . . . . .	92
E.2	Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 31.000 psi. (exemplo 2, Capítulo 3) . . . . .	93
E.3	Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 21.000 psi. (exemplo 3, Capítulo 3) . . . . .	93
E.4	Dados do exemplo 1 Capítulo 4 . . . . .	94
E.5	Dados do exemplo 2, Capítulo 4 . . . . .	94

# Introdução

Dentre as diferentes distribuições probabilísticas vale salientar a significativa atenção que a distribuição Birnbaum-Saunders vem recebendo nas últimas décadas. Trata-se de uma distribuição de vida (*life distribution*) a qual relaciona o tempo até a ocorrência de falha com algum dano cumulativo que é assumido gaussiano. Conhecida também como distribuição de vida por fadiga vem sendo amplamente aplicada nas áreas de confiabilidade e análise de dados de sobrevivência.

É de grande interesse na análise estatística averiguar e validar o modelo probabilístico a qual uma amostra aleatória pertence. Com este intuito muitos estudos de testes de bondade de ajuste vêm sendo feitos. Testes de bondade de ajuste são medições baseadas na adequação ou discrepância dos dados em relação a distribuição em teste. Estes podem ser baseados em testes do tipo qui-quadrado, em função de distribuição empírica, função característica empírica ou ainda em correlação ou regressão. Na hipótese de nulidade que determina a distribuição em teste podemos ou não supor que o vetor de parâmetros é conhecido. Mais detalhes em D'Agostino e Stephens (1986) e em Lawless (1982), Capítulo 10.

As estatísticas de teste de Anderson-Darling, Cramér-von Mises e Kolmogorov-Smirnov são casos clássicos de testes que se baseiam na comparação entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição teórica. São exemplos de estudos que trabalham com estes tipos de teste: Chen e Balakrishnan (1995), Stephens (1970) e Choulakian e Stephens (2001). Outra classe de estatísticas que vem sendo considerada é a que se baseia em função característica empírica. Reportando Jiménez-Gamero et al. (2009), desde que a função característica empírica converge para a função característica da população (Feuerverger e Mureika, 1977 e Csörgö, 1981a,b) e a função caracterís-

tica específica a distribuição da população, a função característica empírica tem sido amplamente empregada na inferência estatística. Podemos citar como estudos que têm evoluído nesta direção: Epps e Pulley (1983) que utilizaram a função característica empírica em testes de bondade de ajuste para testar a normalidade e Fan (1997) que estudou testes de bondade de ajuste para distribuições multivariadas usando função característica empírica. Meintanis (2010) sob a perspectiva de testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders compara os testes clássicos baseados em estatísticas de função de distribuição com os testes que utilizam a função característica empírica.

Castro-Kuriss et al. (2009) apontam a análise de dados censurados como um importante tópico na aplicação estatística, uma vez que dados deste tipo são usualmente encontrados em estudos de tempo de vida. Sob esta perspectiva, testes de bondade de ajuste vêm sendo modificados para incorporarem a presença de censura no processo de validação do modelo. Podemos citar como exemplos de estudos neste sentido: Pettitt e Stephens (1976), Pettitt (1976), Pettitt (1977), Castro-Kuriss et al. (2009) e Castro-Kuriss (2011).

Devido ao exposto, os objetivos principais deste trabalho são: estudar testes de bondade de ajuste, propostos na literatura, para a distribuição Birnbaum Saunders, bem como propor e investigar testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders considerando amostras censuradas.

No primeiro capítulo desta dissertação nos atemos a trabalhar os principais conceitos de análise de sobrevivência. Conceitos estes que podem ser aplicados para análise de dados de tempo de vida em diversas áreas de pesquisa. No segundo capítulo fazemos um estudo da distribuição Birnbaum-Saunders. Exploramos a construção do modelo e suas propriedades fundamentais em Birnbaum e Saunders (1969 a,b). Feito isto, apresentamos brevemente uma generalização da distribuição Birnbaum-Saunders dada por Díaz-Garcia e Leiva (2005), que foi derivada baseada em distribuições de contornos elípticos e foi denominada de distribuição Birnbaum-Saunders generalizada. No terceiro capítulo fundamentamos testes de bondade de ajuste. Norteados por Meintanis (2010) mantemos como ponto central testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders. Trabalhamos com estatísticas baseadas em função de distribuição empírica e função característica empírica e nos limitamos a hipótese onde o vetor de



parâmetro é desconhecido e, portanto deverá ser estimado. São feitos ainda os estudos de simulação para avaliar o poder dos testes e sua implementação usando o software estatístico R.

Diante do fato que pesquisas sobre testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders com dados censurados ainda não foram consideradas, surgiu o interesse de investigar testes neste sentido. Com este intuito, no quarto capítulo deste trabalho, avaliamos as estatísticas estudadas para dados com censura tipo II, bem como utilizamos as estatísticas de testes modificadas dadas por Pettitt e Stephens (1976) e fizemos extensivos estudos de simulação.

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos

### 1.1 Introdução

Análises estatísticas de dados de tempo de vida são de grande interesse em diferentes áreas do conhecimento. Podemos ilustrar este fato citando estudos na engenharia, onde produtos são colocados em teste para estimar tempo de vida, em ciências sociais, considerando pesquisas onde a resposta é o tempo entre eventos, ou na área médica, onde estudos do tempo até a cura ou recidiva de uma doença são frequentes. Definimos variável de vida como uma variável aleatória  $T$  contínua e positiva. O modelo probabilístico associado à variável de vida é conhecido como distribuição de vida. Na literatura nos deparamos com distintos modelos que podem descrever variáveis de vida, como as distribuições gama, exponencial, Weibull, gaussiana inversa ou lognormal. Veja mais detalhes em Marshall e Olkin (2007).

Apesar das técnicas de análise de dados de tempo de vida usadas nas diversas áreas serem semelhantes, o termo análise de sobrevivência é empregado especificamente para abranger estudos em situações médicas. Mais detalhes em Colosimo e Giolo (2006). Durante este capítulo serão apresentados conceitos básicos e funções importantes para estudos de dados de sobrevivência.

Ressaltamos ainda que a área que envolve estudos de dados de tempo de vida aplicados à engenharia é denominada de área de confiabilidade. Os resultados aqui apresentados podem ser facilmente estendidos para esta área. Para mais informações

veja Leiva, Barros e Paula (2009) e Meeker e Escobar (1998).

## 1.2 Caracterização dos dados de sobrevivência

Em estudos na área de análise de sobrevivência, a variável resposta é, geralmente, o tempo até a ocorrência de um evento de interesse, denominado de tempo de falha. A principal característica de dados de sobrevivência é a presença de censura. Censura é definida como informação incompleta ou parcial. A perda do acompanhamento de um paciente ou a não ocorrência do evento de interesse até o término do experimento são exemplos de causas para a presença de censura em um conjunto de dados.

É importante destacar que mesmo censurados, todos os resultados provenientes de um estudo de sobrevivência devem ser usados na análise estatística. Visto que mesmo sendo incompletas, as observações censuradas fornecem informações sobre o tempo de falha do experimento, e a omissão das censuras no cálculo das estatísticas de interesse podem gerar vícios nas conclusões do estudo.

Em Colosimo e Giolo (2006) encontra-se diferenciados os mecanismos de censura presentes em estudos clínicos. Comumente são realizados experimentos que são finalizados em um período pré-estabelecido de tempo. Quando isso acontece, denominamos como censuras do tipo I, os dados dos indivíduos que ainda não apresentaram o evento de interesse. Censura do tipo II são encontradas em pesquisas que são finalizadas quando o evento de interesse ocorre em um número pré-estabelecido de indivíduos. E por fim, censura aleatória é referente aos casos em que um paciente é retirado no decorrer do estudo sem ter ocorrido falha, como, por exemplo, se o paciente morrer por uma razão diferente da estudada. A censura aleatória é encontrada com mais frequência na prática médica. Os autores classificam ainda os mecanismos de censura como censuras à direita, à esquerda e intervalar. Censuras à direita são aquelas nas quais o tempo de ocorrência está à direita (depois) do tempo registrado. Censura à esquerda ocorre quando o tempo registrado é maior do que o tempo de falha. Censura intervalar acontece quando o evento de interesse ocorreu em um determinado intervalo de tempo.

A representação de dados de sobrevivência para o  $i$ -ésimo indivíduo em estudo ocorre através do par  $(t_i, \delta_i)$ , em que  $t_i$  é o tempo de falha e  $\delta_i$  é a variável indicadora

de falha, onde

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \text{ é tempo de falha} \\ 0 & \text{se } t_i \text{ é tempo censurado.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Quando no estudo há presença de covariáveis  $\mathbf{x}_i$ , os dados ficam representados por  $(t_i, \delta_i, \mathbf{x}_i)$ . Note que se o tipo de censura for intervalar temos,  $(l_i, u_i, \delta_i, \mathbf{x}_i)$ , onde  $l_i$  é o limite inferior e  $u_i$  é o limite superior do intervalo no qual ocorreu a falha.

### 1.3 Funções importantes

Seja  $T$  uma variável aleatória contínua não negativa representando o tempo de falha de um indivíduo de uma população homogênea. Para especificar a distribuição probabilística de  $T$ , Kalbfleisch (2002) relaciona, como particularmente úteis em aplicações de sobrevivência, as funções: densidade, sobrevivência e taxa de falha instantânea.

A *função de sobrevivência*, denotada por  $S$ , é definida como a probabilidade de uma observação não falhar até um certo tempo  $t$ , e expressa em forma matemática como,  $S(t) = P(T > t)$ . Note que,

$$F(t) = 1 - S(t) \quad (1.2)$$

e que,

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = -\frac{d}{dt}S(t),$$

em que  $F$  é a função de distribuição e será vista com mais detalhes no Capítulo 3 desta dissertação.

Em Kalbfleisch (2002) a *função taxa de falha instantânea*, também conhecida como *função de risco*, é definida como,

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T < t + h | T > t)}{h}, \quad (1.3)$$

e especifica a taxa instantânea de falha de uma observação ou o indivíduo que sobreviveu até o tempo  $t$ . Uma função risco crescente (respectivamente decrescente) indica que a taxa de falha do paciente aumenta (respectivamente diminui) com o transcorrer do tempo. Função constante indica que a taxa de falha não se altera com o passar

do tempo. A função risco não é obrigatoriamente monótona. Conforme Colosimo e Giolo (2006) a função taxa de falha é mais informativa do que a função sobrevivência. Os autores argumentam que diferentes funções de sobrevivência podem ter formas semelhantes, enquanto as respectivas funções de riscos podem ser muito distintas.

A *função taxa de falha acumulada*, como já imaginado, fornece a taxa de falha acumulada do indivíduo, e é dada por,

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du. \quad (1.4)$$

O *tempo médio* é obtido da área sob a função de sobrevivência. Ou seja,

$$tm = \int_0^{\infty} S(t)dt. \quad (1.5)$$

Já a *vida média residual* é condicional a um determinado tempo de vida  $t$ . Para indivíduos que sobreviveram até o tempo  $t$ , esta quantidade calcula em média o tempo restante de vida. Logo, trata-se da área sob a curva de sobrevivência maior do que o tempo  $t$  dividida por  $S(t)$ ,

$$vmr(t) = \frac{\int_t^{\infty} S(u)du}{S(t)}.$$

Note que  $vmr(0) = tm$ .

Dada uma variável aleatória contínua e não negativa  $T$ , em posse de sua função de sobrevivência pode-se determinar outras funções para descrever a variável  $T$ , como a função taxa de falha, a função densidade e a função de distribuição. Com efeito,

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T < t+h | T > t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T < t+h)}{P(T > t)h} \\ &= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T < t+h)}{h} = \frac{1}{S(t)} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - S(t+h)}{h} \\ &= \frac{-S'(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} \log(S(t)) = \frac{-S'(t)}{S(t)} = \frac{-(-f(t))}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

Logo,

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{d}{dt}(\log(S(t))). \quad (1.6)$$

## 1.4 O método de Máxima Verossimilhança

Durante esta dissertação trabalharemos com estimação dos parâmetros do modelo probabilístico Birnbaum-Saunders. O método de máxima verossimilhança é apontado em Colosimo e Giolo (2006) como uma opção apropriada para estimar dados de tempo de vida. Principalmente pela sua capacidade de incorporar censuras e possuir propriedades ótimas.

A função de verossimilhança expressa a plausividade em explicar os dados  $t_i$ 's; neste sentido, a mesma informa a ordem natural de preferência entre diversas possibilidades de  $\theta$ , (ver Cordeiro (1992)). Considerando a amostra  $t_1, t_2, \dots, t_n$  não censurada a função de verossimilhança é dada por,  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta)$ . Conforme Lawless (1982), apresentaremos, agora, a função verossimilhança para dados contendo diferentes mecanismos de censura. Considerando aqui a censura à direita, tomamos  $n$  como o tamanho da amostra,  $r$  o número de falhas, de modo que  $n - r$  é o número de observações censuradas.

- Censura tipo I

O experimento é realizado durante um período de tempo pré-fixado,  $C$ , que está sob o controle do pesquisador. Seja  $T_i$  o tempo até a  $i$ -ésima unidade experimental falhar. Assim se  $T_i \leq C$  então,  $T_i$  é um tempo observado (tempo de falha), de outra forma sabemos apenas que  $T_i > C$  (censura). A notação utilizada geralmente é dada por,  $Z_i = \min(T_i, C)$ ,  $\delta_i = I(T_i \leq C)$ , onde  $I$  é a função indicadora. Sejam  $(Z_1, \delta_1), (Z_2, \delta_2), \dots, (Z_n, \delta_n)$  pares independentes. A função verossimilhança para uma amostra com censura tipo I é baseada na distribuição conjunta do par  $(Z_i, \delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sejam  $t_i$  o tempo de falha ou censura para o  $i$ -ésimo indivíduo e  $k \in \{0, 1\}$ , temos

$$f_{Z_i, \delta_i}(t_i, k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(Z_i \in [t_i; t_i + h]; \delta_i = k)}{h}.$$

Se  $k = 0$  temos,

$$\begin{aligned} \delta_i = 0 &\implies I(T_i \leq C) = 0 \\ &\implies T_i > C \\ &\implies Z_i = \min(T_i, C) = C = t_i. \end{aligned}$$

E assim,

$$f_{Z_i, \delta_i}(t_i, 0) = P(\delta_i = 0) = P(T_i > C) = S(C) = S(t_i).$$

Se  $k = 1$  temos,

$$\begin{aligned} \delta_i = 1 &\implies T_i \leq C \\ &\implies Z_i = \min(T_i, C) = T_i = t_i. \end{aligned}$$

De onde segue que,

$$P(Z_i \in [t_i; t_i + h]; \delta_i = 1) = P(T_i \in [t_i; t_i + h]; T_i \leq C) = P(T_i \in [t_i; t_i + h]).$$

De modo que,

$$f_{Z_i, \delta_i}(t_i, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(Z_i \in [t_i; t_i + h])}{h} = f(t_i).$$

Portanto,

$$f_{Z_i, \delta_i}(t_i, k) = \begin{cases} S(t_i), & \text{se } \delta_i = 0, \\ f(t_i), & \text{se } \delta_i = 1, \end{cases}$$

e desta forma podemos escrever,

$$f_{Z_i, \delta_i}(t_i, k) = f(t_i)^{\delta_i} S(t_i)^{1-\delta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Da independência dos pares  $(Z_1, \delta_1), (Z_2, \delta_2), \dots, (Z_n, \delta_n)$  obtemos a seguinte função de verossimilhança,

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(t_i)^{\delta_i} S(t_i)^{1-\delta_i}. \quad (1.7)$$

- Censura Aleatória

Considerando, agora, a presença de censura aleatória foram definidas as variáveis aleatórias,  $T_i$  como o tempo de falha e  $C_i$  como tempo de censura, em que  $T_i$  e  $C_i$  são variáveis aleatórias contínuas e independentes, com funções de sobrevivência  $S$  e  $G$  respectivamente. Todos os tempos de falha e observações censuradas são consideradas mutuamente independentes e assume-se que  $G$  não depende de nenhum parâmetro de  $S$ , ou seja, temos censura não informativa. Assim como no caso da censura do tipo

I, a notação usada é,  $Z_i = \min(T_i, C_i)$  e  $\delta_i = I(T_i \leq C_i)$ . Os dados da observação de  $n$  indivíduos consistem nos pares  $(Z_i, \delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sejam  $f$  e  $g$  as funções densidade de probabilidade de  $T_i$  e  $C_i$  respectivamente.

Se,  $\delta_i = 1$  então,

$$\begin{aligned} P(Z_i \in [t_i; t_i + h]; \delta_i = 1) &= P(T_i \in [t_i; t_i + h]; C_i \geq T_i) \\ &= P(T_i \in [t_i; t_i + h])P(C_i \geq t_i). \end{aligned}$$

E tem-se,

$$f_{Z_i, \delta_i}(t_i, \delta_i = 1) = f(t_i)G(t_i).$$

Analogamente se,  $\delta_i = 0$  temos,

$$f_{Z_i, \delta_i}(t_i, \delta_i = 0) = g(t_i)S(t_i).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_{Z_i, \delta_i}(t_i, \delta_i) &= \{f(t_i)G(t_i)\}^{\delta_i} \{g(t_i)S(t_i)\}^{1-\delta_i} \\ &= f(t_i)^{\delta_i} S(t_i)^{1-\delta_i} g(t_i)^{v_i} G(t_i)^{1-v_i}. \end{aligned}$$

em que  $v_i = 1 - \delta_i$ . Sendo assim produto de densidades de dados censurados.

- Censura tipo II

Finalmente para dados com censura tipo II o valor de  $r$  é escolhido antes dos dados serem coletados e os tempos de falha consistem nos  $r$  menores tempos de vida de uma amostra aleatória  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . Para distribuições contínuas podemos ignorar a possibilidade de empates e denotar os  $r$  menores tempos de vida como  $T_{(1)} < T_{(2)} < \dots < T_{(r)}$ . Se  $T$  possui função densidade  $f$  e função de sobrevivência  $S$  dos resultados gerais de estatísticas de ordem segue que a função densidade de probabilidade conjunta de  $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(r)}$  é dada por,

$$\frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^r f(t_i) \right\} S(t_{(r)})^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \prod_{i=1}^r f(t_i) \right\} \left\{ \prod_{i=r+1}^n S(t_{(r)}) \right\}.$$

Ignorando a constante  $\frac{n!}{(n-r)!}$  podemos reescrever a forma acima da mesma forma como em (1.7).



Portanto, independente do esquema de censura considerado podemos escrever a função de verossimilhança para dados censurados à direita da seguinte forma,

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto \prod_{i=1}^n f(t_i)^{\delta_i} S(t_i)^{1-\delta_i}.$$

Note que a contribuição de uma observação não censurada para a função de verossimilhança é dada pela função densidade enquanto a de uma observação censurada é dada pela função sobrevivência.

## Capítulo 2

# Distribuição Birnbaum-Saunders e Birnbaum-Saunders generalizada

### 2.1 Distribuição Birnbaum-Saunders

A distribuição Birnbaum-Saunders (BS) trata-se de uma distribuição de vida (*life distribution*) a qual relaciona o tempo até a ocorrência de falha com algum dano cumulativo que é assumido gaussiano. Conhecida também como distribuição de vida por fadiga, vem sendo amplamente aplicada nas áreas de confiabilidade (onde teve seus estudos originados) e análise de dados de sobrevivência. A principal vantagem da pesquisa relacionada a essa distribuição é o melhor ajuste nos percentis mais baixos ou mais altos da distribuição (onde se encontra o maior interesse dos analistas) quando comparada às demais distribuições de vida geralmente utilizadas.

A construção do modelo BS, suas propriedades fundamentais e a estimação dos parâmetros que serão expostos a seguir foram explorados em Birnbaum e Saunders (1969a) e Birnbaum e Saunders (1969b).

#### 2.1.1 Origem

A fadiga é um dano estrutural que ocorre quando um material é exposto a flutuações de estresse e tensão. Birnbaum e Saunders (1969a) construíram uma nova família de distribuições de vida baseada em um determinado tipo de fadiga. Vejamos a seguir como foi obtida a construção dessa família de distribuições.

Durante um processo de fadiga um material é exposto a um padrão cíclico de tensão e força. Isto é, se  $l_1, l_2, \dots, l_m$  é a sequência de  $m$  cargas aplicadas em um ciclo, esta mesma sequência será aplicada em cada ciclo de cargas. Formalmente, para algum  $m > 1$ , para quaisquer dois ciclos  $j$  e  $k$  e para todo  $i = 1, \dots, m$ , temos

$$l_{jm+i} = l_{km+i}.$$

Observe que estas cargas geram o desgaste do material causando uma fissura. Conforme o processo acontece a fissura dominante aumenta. A falha (ruptura do material) ocorre quando a fissura ultrapassa um certo nível de resistência, que será o valor crítico e denotado por  $\omega$ . A variável de interesse é o tempo até que ocorra a falha do material.

**Definição 2.1** *Sejam as variáveis aleatórias,*

- (i)  $X_i$  que denota a extensão incremental da fissura na  $i$ -ésima oscilação de carga.
- (ii)  $Y_{j+1} = X_{jm+1} + \dots + X_{jm+m} = \sum_{i=jm+1}^{jm+m} X_i$  que corresponde a extensão da fissura durante o  $(j+1)$ -ésimo ciclo.

Birnbaum e Saunders (1969a) então fizeram as seguintes suposições,

- (I)  $X_i$  é uma variável aleatória com uma distribuição que só depende da fissura atual causada pela tensão neste ciclo.
- (II) A extensão total da fissura,  $Y_j$  devido ao  $j$ -ésimo ciclo é uma variável aleatória que segue uma distribuição com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots$ .

Logo, da suposição (I) acima segue a independência das variáveis aleatórias  $(Y_1, Y_2, \dots)$  e da suposição (II) o fato delas serem identicamente distribuídas.

Ao serem aplicados  $n$  ciclos de cargas, a extensão total da fissura será a fissura acumulada durante todos os  $n$  ciclos, e será dada pela variável aleatória,

$$W_n = \sum_{j=1}^n Y_j,$$

com função de distribuição,

$$H_n(w) = P(W_n \leq w), \text{ para } n = 1, 2, \dots.$$

Seja  $N$  o número de ciclos de cargas necessários para que ocorra a ruptura do material. Em outras palavras,  $N$  é o número de ciclos que devem ocorrer para que a extensão total da fissura ( $W_n$ ) ultrapasse o valor crítico  $\omega$  ( $W_n > \omega$ ). De modo que,

$$P(N \leq n) = P(W_n > \omega).$$

Determinamos a função de distribuição de  $N$  por,

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &= P\left(\sum_{j=1}^n Y_j > \omega\right) = 1 - P\left(\sum_{j=1}^n Y_j \leq \omega\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\omega - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\omega}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Logo, do Teorema do Limite Central para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segue que,

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &\cong 1 - \Phi\left(\frac{\omega}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left[-\left(\frac{\omega}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right)\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} - \frac{\omega}{\sigma\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que,  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição da normal padrão.

Birnbaum e Saunders (1969a) então propuseram substituir  $n$  em (2.1) por uma variável real não negativa  $t$ . Dessa forma, segundo os autores,  $T$  é a extensão contínua da variável discreta  $N$ , onde  $T$  é o tempo total até que ocorra a falha.

A função de distribuição da variável aleatória  $T$  é então dada por:

$$F(t; \beta, \alpha) = P(T \leq t) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right], \quad t > 0, \quad (2.2)$$

com,  $\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\omega\mu}} > 0$  e  $\beta = \frac{\omega}{\mu} > 0$ .

E assim dizemos que  $T$  segue uma distribuição Birnbaum-Saunders com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e denotamos por  $T \sim BS(\alpha, \beta)$ .

Podemos obter a variável aleatória  $T$  a partir da distribuição normal da seguinte forma,

$$T = \beta \left[ \frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 + 1} \right]^2, \quad (2.3)$$

em que,  $Z \sim N(0, 1)$ . Veja isto em Díaz-García e Leiva (2005).

### 2.1.2 Função densidade, função sobrevivência e função de risco da distribuição BS.

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $T \sim BS(\alpha, \beta)$  é obtida derivando (2.2) em relação a  $t$ . De modo que,

$$f_T(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{2\pi\beta}} \left[ \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right]. \quad (2.4)$$

Veja o comportamento da função densidade na Figura 2.1. Note que a medida que  $\alpha$  cresce, mais assimétrica torna-se a distribuição. E quanto mais  $\alpha$  se aproxima de zero mais simétrica em torno de  $\beta$  a f.d.p fica.

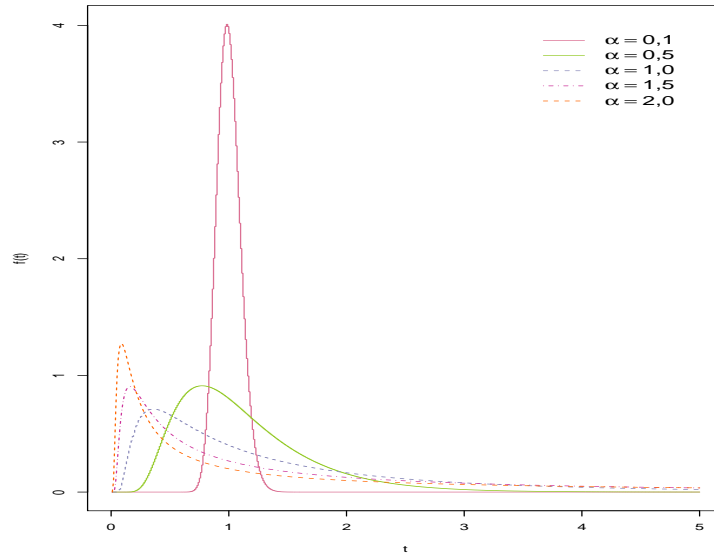


Figura 2.1: Gráfico de funções densidade da distribuição Birnbaum-Saunders para os valores de  $\alpha$  indicados e  $\beta = 1$ .

A função de sobrevivência pode ser calculada baseada na função de distribuição como visto na relação (1.2) e é dada por,

$$S(t; \alpha, \beta) = 1 - \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right]. \quad (2.5)$$

A relação entre as funções de sobrevivência e distribuição pode ser visualizada comparando as Figuras 2.2 e 2.3. Ressalta-se também o fato que  $\beta$  é a mediana da distribuição. Ou seja,  $F(\beta) = 0,5$ .

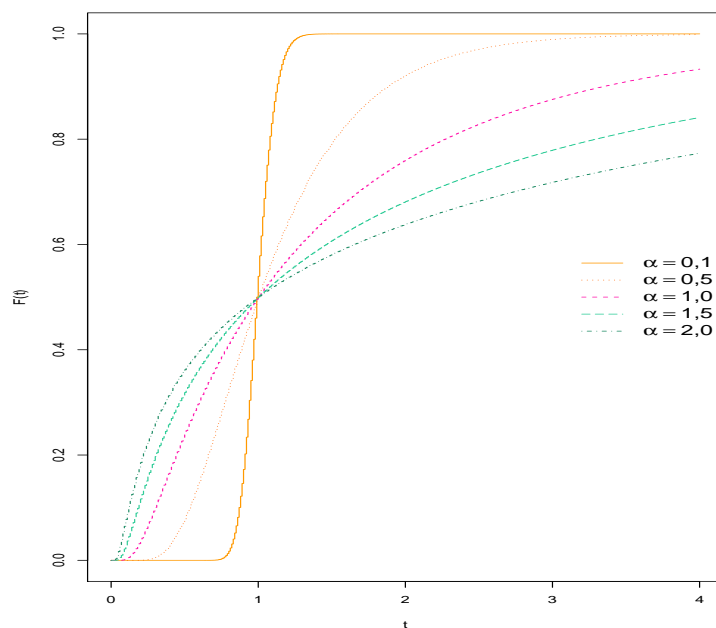


Figura 2.2: Gráfico de funções de distribuição Birnbaum-Saunders para os valores de  $\alpha$  indicados e  $\beta = 1$ .

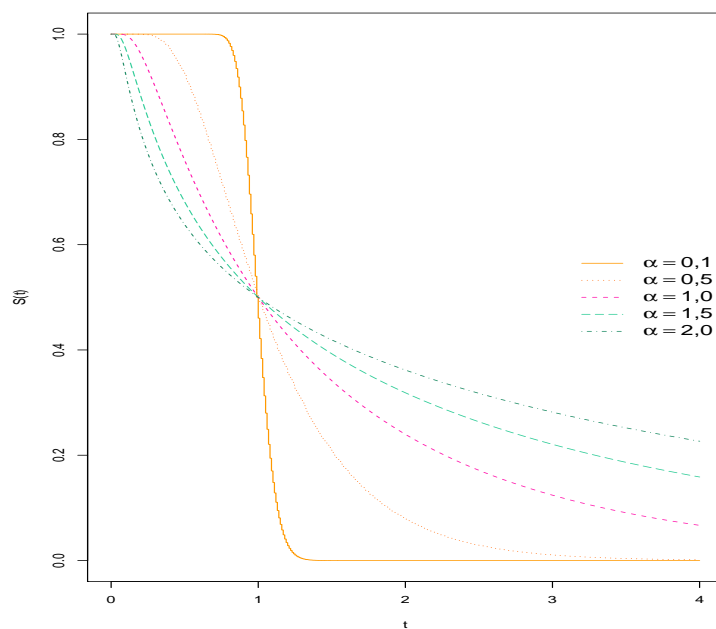


Figura 2.3: Gráfico de funções sobrevivência da Birnbaum-Saunders para os valores de  $\alpha$  indicados e  $\beta = 1$ .

Já a função risco pode ser obtida da relação (1.6) e temos,

$$\lambda(t) = \frac{\frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[ \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right]}{1 - \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right]}. \quad (2.6)$$

O comportamento da função risco da distribuição BS pode ser observada na Figura 2.4. Note que a função de risco da distribuição BS não apresenta comportamento monótono.

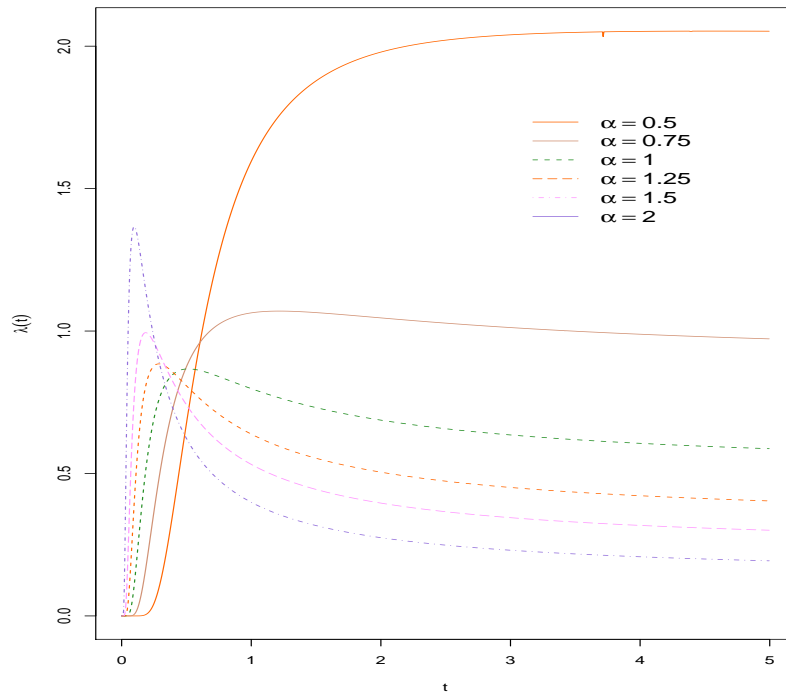


Figura 2.4: Gráfico das funções risco da Birnbaum-Saunders para os valores de  $\alpha$  indicados e  $\beta = 1$ .

### 2.1.3 Propriedades

Seja  $T \sim BS(\alpha, \beta)$ , assim  $T$  é uma variável aleatória bi-paramétrica em que,  $\alpha$  é parâmetro de forma e  $\beta$  o parâmetro de posição. A média e a variância da distribuição existem e são dadas em Birnbaum e Saunders (1969b) por,

$$E(T) = \beta \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \right), \quad (2.7)$$

$$\text{Var}(T) = (\alpha\beta)^2 \left( 1 + \frac{5}{4}\alpha^2 \right). \quad (2.8)$$

Em Birnbaum e Saunders (1969a) encontramos algumas propriedades importantes da distribuição que listamos agora,

(i) Se  $c > 0$  temos  $cT \sim BS(\alpha, c\beta)$ , ou seja, a distribuição BS é fechada sob proporcionalidade.

(ii)  $1/T \sim BS(\alpha, 1/\beta)$ , isto é, a distribuição BS é fechada sob reciprocidade.

(iii)  $U = \frac{1}{\alpha^2} \left[ \frac{T}{\beta} + \frac{\beta}{T} - 2 \right] \sim \chi^2(1)$ .

### 2.1.4 Estimação

Em Birnbaum e Saunders (1969b) foram determinados os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da distribuição Birnbaum-Saunders. Consideremos  $T_1, T_2, \dots, T_n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, tais que  $T_i \sim BS(\alpha, \beta)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . Desta forma, a função de verossimilhança para o caso não censurado é dada por,

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^n f_T(t_i; \alpha, \beta) \\ &= \left(2\alpha\sqrt{2\pi\beta}\right)^{-n} \prod_{i=1}^n \left\{ \left[ \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

em que  $f_T(t; \alpha; \beta)$  é dada em (2.4).

Aplicando o logaritmo na função acima é obtida a função de log-verossimilhança dada por,

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta) &= \log \left\{ \left(2\alpha\sqrt{2\pi\beta}\right)^{-n} \prod_{i=1}^n \left\{ \left[ \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right] \right\} \right\} \\ &= -n \log \alpha - \frac{n}{2} \log \beta - \frac{n}{2} \log(\sqrt{8\pi}) + \sum_{i=1}^n \log \left[ \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para determinar os estimadores de máxima verossimilhança de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, resolvemos as seguintes equações,

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\hat{\alpha}} + \frac{1}{\hat{\alpha}^3} \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{t_i} - 2 \right) = 0 \tag{2.10}$$



e

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= -\frac{n}{2\hat{\beta}} - \frac{1}{2\hat{\alpha}^2} \sum_{i=1}^n \left( -\frac{t_i}{\hat{\beta}^2} + \frac{1}{t_i} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(\frac{\hat{\beta}}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\hat{\beta}}{t_i}\right)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\hat{\beta} t_i}} + \frac{3}{2t_i} \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{t_i}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.10) segue que o estimador para  $\alpha$  é dado por,

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{s}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

em que,  $s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$  e  $r = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \right)^{-1}$ .

De (2.11) o estimador para  $\beta$  é obtido pela resolução da equação não linear em  $\hat{\beta}$  dada por,

$$\hat{\beta}^2 - \hat{\beta}[2r + K(\hat{\beta})] + r[s + K(\hat{\beta})] = 0,$$

em que,  $K(\beta) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-1} \right]^{-1}$ ,  $\beta > 0$ .

Observe que nem sempre os estimadores de máxima verossimilhança possuem forma fechada. Neste caso, para determinar o estimador de  $\beta$  é preciso uso de algum método iterativo.

Se nos depararmos com uma amostra censurada, a função de verossimilhança da distribuição é dada pelas funções densidade e sobrevivência como já visto. E assim,

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &\propto \prod_{i=1}^n [f(t_i; \alpha, \beta)]^{\delta_i} [S(t_i; \alpha, \beta)]^{1-\delta_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ \left( \frac{1}{2\alpha\sqrt{2\pi\beta}} \left[ \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right] \right)^{\delta_i} \right. \\ &\quad \left. \left( 1 - \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{t_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t_i}} \right) \right] \right)^{(1-\delta_i)} \right\}. \end{aligned}$$

De modo que a função de log-verossimilhança é,

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n \delta_i \left\{ \log \left( \frac{1}{2\alpha\sqrt{2\pi\beta}} \left[ \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t_i}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \right) - \frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \log \left( 1 - \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{t_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t_i}} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

### 2.1.5 Estudo de Simulação

Durante os testes de bondade de ajuste que serão estudados adiante, um passo crucial é a estimação dos parâmetros a partir dos dados. Vamos analisar o desempenho das estimativas dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders. Para esta finalidade foi feito um estudo de simulação de Monte Carlo. Os resultados a seguir foram obtidos do *software* R (<http://www.r-project.org>).

Primeiramente foram geradas 5000 réplicas da distribuição BS considerando tamanhos amostrais  $n = 10, 20, 40$  e  $100$  e parâmetros verdadeiros  $\alpha = 0,1; 0,25; 0,5; 1,0; 2,0$  e  $\beta = 1,0$  como indicado na Tabela 2.1. Foram então calculados para cada tamanho de amostra e cada  $\alpha$  e  $\beta$  fixados a média das estimativas e a estimativa do viés relativo. As estimativas dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  de cada amostra foram obtidas a partir do método de verossimilhança usando comandos já implementados computacionalmente no *software* R (<http://www.r-project.org>) por meio do pacote **bs** (veja Leiva et al. (2006)). Podemos observar que a estimativa do viés relativo de  $\beta$  é menor do que o de  $\alpha$  e que a medida que o parâmetro  $\alpha$  aumenta a estimativa do viés relativo também cresce.

Depois disso foram geradas 5000 amostras da distribuição BS, com censura do tipo II, variando o tamanho amostral  $n \in \{25, 50\}$ , os parâmetros verdadeiros  $\alpha \in \{0,1; 0,25; 0,5; 1,0; 2,0\}$  e  $\beta = 1,0$  e porcentagens de censura,  $\psi$ , em 10%, 20%, 30% e 40% como indicados na Tabela 2.2. Para isso foram gerados  $n$  dados de uma distribuição BS com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  fixados. Os dados são ordenados e identifica-se o  $r$ -ésimo indivíduo, onde  $r = n - n\psi$  é o número de falhas fixado anteriormente. De modo que  $X_{(r)}$  passa a ser a censura e todos os valores acima deste terão o mesmo valor. A estimação dos parâmetros de cada amostra são obtidas da mesma forma que que foram obtidos na Tabela 2.1, ou seja, usando o pacote **bs** já implementado computacionalmente no R. São então calculados para cada tamanho de amostra, porcentagem de censura,  $\alpha$  e  $\beta$  fixados a média das estimativas e a estimativa do viés relativo. Como o esperado a medida que a porcentagem de censura aumenta os vieses das estimativas aumentam. Note que ao aumentar o tamanho das amostras as estimativas melhoram no sentido que diminuem os vieses relativos.

Por fim, foram geradas novamente 5000 amostras da distribuição BS, com censura do tipo II, variando o tamanho amostral  $n \in \{25, 50\}$ , os parâmetros ver-

dadeiros  $\alpha \in \{0,1; 0,25; 0,5; 1,0; 2,0\}$  e  $\beta = 1,0$  e porcentagens de censura,  $\psi$ , em 10%, 20%, 30% e 40% como indicados na Tabela 2.3. Só que agora será considerado o método de máxima verossimilhança que incorpora censura estudado no primeiro capítulo para estimar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . No *software* estatístico R a função (2.12) (função log-verossimilhança da distribuição BS para amostras censuradas) é maximizada. Foram então calculados para cada tamanho de amostra e cada  $\alpha$  e  $\beta$  fixados a média das estimativas e a estimativa do viés relativo. Observamos que ao aumentar o tamanho da amostra de 25 para 50 as estimativas para ambos os parâmetros melhoraram. A medida que a porcentagem de censura aumenta a estimativa do viés de ambos os parâmetros também aumentam como o esperado. Note que ao incorporarmos a censura no processo de estimação as estimativas dos parâmetros de amostras com distribuição BS melhoram.

Tabela 2.1: Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da distribuição BS.

$n$	$\alpha$	Estimação de $\alpha$		Estimação de $\beta$	
		Estimativa	Viés	Estimativa	Viés
10	0,10	0,0914	-0,0086	1,0013	0,0013
	0,25	0,2291	-0,0209	1,0050	0,0050
	0,50	0,4578	-0,0422	1,0164	0,0164
	1,00	0,9088	-0,0912	1,0440	0,0440
	2,00	1,8073	-0,1927	1,1108	0,1108
20	0,10	0,09635	-0,00365	1,0010	0,0010
	0,25	0,2412	-0,0088	1,0021	0,0021
	0,50	0,4805	-0,0195	1,0014	0,0014
	1,00	0,9604	-0,0396	1,0045	0,0045
	2,00	1,9092	-0,0908	1,0291	0,0291
40	0,10	0,0980	-0,0020	0,9988	-0,0012
	0,25	0,2448	-0,0051	0,9985	-0,0014
	0,50	0,4897	-0,0103	1,0020	0,0020
	1,00	0,9775	-0,0225	1,0150	0,0150
	2,00	1,9525	-0,0475	1,0324	0,0324
100	0,10	0,0991	-0,0009	1,0000	0,0000
	0,25	0,2478	-0,0022	1,0003	0,0003
	0,50	0,4954	-0,0046	1,0009	0,0009
	1,00	0,9898	-0,0102	1,0018	0,0018
	2,00	1,9795	-0,0205	1,0062	0,0062

Tabela 2.2: Estimativas para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  considerando a distribuição BS gerada com  $n = 25$  e  $n=50$ ,  $\beta = 1$ , porcentagem de censura indicada e usando no método de estimação de máxima verossimilhança que não incorpora censura.

Porc. de Censura	$\alpha$	Estimação de $\alpha$				Estimação de $\beta$			
		n=25		n=50		n=25		n=50	
		Estimativa	Viés	Estimativa	Viés	Estimativa	Viés	Estimativa	Viés
10%	0,10	0,0869	-0,0131	0,0900	-0,0100	0,9934	-0,0066	0,9947	-0,0053
	0,25	0,2170	-0,0330	0,2249	-0,0251	0,9838	-0,0162	0,9868	-0,0132
	0,50	0,4334	-0,0666	0,4494	-0,0506	0,9677	-0,0323	0,9725	-0,0275
	1,00	0,8629	-0,1371	0,8964	-0,1036	0,9313	-0,0687	0,9376	-0,0624
	2,00	1,7119	-0,2881	1,7848	-0,2152	0,8641	-0,1359	0,8725	-0,1275
20%	0,10	0,0801	-0,0199	0,0817	-0,0183	0,9879	-0,0121	0,9882	-0,0118
	0,25	0,2001	-0,0499	0,2042	-0,0458	0,9704	-0,0296	0,9708	-0,0292
	0,50	0,3992	-0,1008	0,4075	-0,0925	0,9413	-0,0587	0,9407	-0,0593
	1,00	0,7918	-0,2082	0,8094	-0,1906	0,8793	-0,1207	0,8740	-0,1260
	2,00	1,5575	-0,4425	1,5965	-0,4035	0,7661	-0,2339	0,7512	-0,2488
30%	0,10	0,0700	-0,0300	0,0734	-0,0265	0,9782	-0,0218	0,9804	-0,0196
	0,25	0,1747	-0,0753	0,1834	-0,0666	0,9468	-0,0532	0,9517	-0,0483
	0,50	0,3476	-0,1524	0,3652	-0,1348	0,8963	-0,1037	0,9042	-0,0958
	1,00	0,6833	-0,3167	0,7200	-0,2800	0,7988	-0,2012	0,8083	-0,1917
	2,00	1,3139	-0,6861	1,3951	-0,6049	0,6338	-0,3662	0,6416	-0,3584
40%	0,10	0,0632	-0,0368	0,0650	-0,0350	0,9705	-0,0295	0,9710	-0,0289
	0,25	0,1576	-0,0924	0,1622	-0,0878	0,9285	-0,0715	0,9292	-0,0708
	0,50	0,3128	-0,1872	0,3220	-0,1780	0,8625	-0,1375	0,8627	-0,1373
	1,00	0,6095	-0,3905	0,6281	-0,3719	0,7426	-0,2574	0,7389	-0,2611
	2,00	1,1449	-0,8551	1,1827	-0,8173	0,5536	-0,4464	0,5414	-0,4586

Tabela 2.3: Estimativas para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  considerando a distribuição BS gerada com  $n = 25$  e  $n=50$ ,  $\beta = 1$ , porcentagem de censura indicada e usando no método de estimação de máxima verossimilhança que incorpora censura.

Porc. de Censura	$\alpha$	Estimação de $\alpha$				Estimação de $\beta$			
		n=25		n=50		n=25		n=50	
		Estimativa	Viés	Estimativa	Viés	Estimativa	Viés	Estimativa	Viés
10%	0,10	0,0965	-0,0035	0,0983	-0,0017	0,9992	-0,0008	0,9995	-0,0005
	0,25	0,2413	-0,0087	0,2457	-0,0043	0,9988	-0,0012	0,9990	-0,0010
	0,50	0,4821	-0,0179	0,4912	-0,0088	0,9998	-0,0002	0,9991	-0,0009
	1,00	0,9617	-0,0383	0,9810	-0,0190	1,0064	0,0064	1,0017	0,0017
	2,00	1,9226	-0,0774	1,9595	-0,0405	1,0421	0,0421	1,0113	0,0113
20%	0,10	0,0960	-0,0040	0,0981	-0,0019	0,9988	-0,0012	0,9993	-0,0007
	0,25	0,2399	-0,0100	0,2451	-0,0049	0,9978	-0,0022	0,9985	-0,0015
	0,50	0,4794	-0,0206	0,4900	-0,0100	0,9979	-0,0021	0,9983	-0,0017
	1,00	0,9559	-0,0441	0,9783	-0,0217	1,0028	0,0028	1,0001	0,0001
	2,00	1,9142	-0,0858	1,9538	-0,0462	1,0632	0,0632	1,0076	0,0076
30%	0,10	0,0951	-0,0049	0,0977	-0,0023	0,9980	-0,0020	0,9989	-0,0010
	0,25	0,2376	-0,0124	0,2442	-0,0058	0,9958	-0,0042	0,9978	-0,0022
	0,50	0,4747	-0,0253	0,4881	-0,0119	0,9941	-0,0059	0,9969	-0,0031
	1,00	0,9459	-0,0541	0,9743	-0,0257	0,9960	-0,0040	0,9977	-0,0023
	2,00	1,8744	-0,1256	1,9408	-0,0592	1,0071	0,0071	1,0054	0,0054
40%	0,10	0,0943	-0,0057	0,0972	-0,0028	0,9972	-0,0028	0,9985	-0,0015
	0,25	0,2357	-0,0143	0,2430	-0,0070	0,9940	-0,0060	0,9966	-0,0034
	0,50	0,4709	-0,0291	0,4856	-0,0144	0,9909	-0,0091	0,9947	-0,0053
	1,00	0,9379	-0,0621	0,9689	-0,0311	0,9911	-0,0089	0,9943	-0,0057
	2,00	1,8524	-0,1476	1,9230	-0,0770	1,0008	0,0008	0,9956	-0,0044

## 2.2 Distribuição Birnbaum-Saunders generalizada

De acordo com Díaz-Garcia e Leiva (2005), qualquer análise estatística em que uma distribuição normal é assumida pode ser generalizada para a família de distribuições elípticas. Segundo os autores, apesar de não haver argumentos nem empíricos e nem relacionados as leis da física, existem razões puramente estatísticas ou matemáticas, no sentido que: a teoria desenvolvida sob distribuição normal é um caso particular da teoria obtida sob distribuições elípticas, muitas das propriedades de uma distribuição normal são extensíveis ao caso de distribuições elípticas e algumas importantes estatísticas na teoria da inferência normal são invariantes sob toda a família de distribuições elípticas.

Diante disto, Díaz-Garcia e Leiva (2005) apresentaram uma generalização da distribuição Birnbaum-Saunders, que foi derivada baseada em distribuições de contornos elípticos e foi denominada de distribuição Birnbaum-Saunders generalizada (BSG).

**Definição 2.2** *Uma variável aleatória  $X$  ajusta uma distribuição elíptica se a função característica é dada por,*

$$\varphi_X(t) = \exp(it\mu)\phi(t^2\sigma^2), \quad (2.13)$$

com  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , ou se a fdp de  $X$  é dada por,

$$f_X(x) = cg \left[ \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right] = cg(u); \quad x \in \mathbb{R}, \quad u > 0, \quad (2.14)$$

em que  $g(u)$  é o núcleo da fdp de  $X$  e  $c$  é a constante normalizadora que faz com que  $f_X$  seja uma função densidade. A notação é dada por  $X \sim \text{EC}(\mu, \sigma^2; \phi)$ , quando é usada a forma (2.13) e  $X \sim \text{EC}(\mu, \sigma^2; g)$  se, a forma usada é (2.14).

Comumente,  $\mu$  é o parâmetro de posição, que coincide com a média,  $E(X)$ , se o primeiro momento da distribuição existe e  $\sigma^2$  é o parâmetro de escala. Para casos unidimensionais de variáveis aleatórias, distribuições elípticas correspondem a todas as distribuições simétricas em  $\mathbb{R}$  como podemos ver em Díaz-Garcia e Leiva (2005).

O modelo desenvolvido por Díaz-Garcia e Leiva (2005) foi obtido relaxando a suposição de normalidade de (2.3). De modo que os autores passam a considerar,

$$T = \beta \left[ \frac{\alpha U}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha U}{2} \right)^2 + 1} \right]^2, \quad (2.15)$$

em que  $U \sim EC(\mu, \sigma^2; g)$ . E então, dizemos que a variável aleatória  $T$  segue distribuição Birnbaum-Saunders generalizada e é denotada por,  $T \sim BSG(\alpha, \beta; g)$ , em que  $\alpha$  é o parâmetro de forma,  $\beta$  é o parâmetro de escala e  $g$  determina o núcleo da função densidade e é dada em (2.14). A motivação do uso desta nova família de distribuições reside no fato dela ser mais flexível por possuir caudas mais ou menos pesadas que a distribuição Birnbaum-Saunders já estudada.

Seja  $T \sim BSG(\alpha, \beta; g)$ , então a função densidade é dada por,

$$f_T(t) = \frac{c}{2\alpha\beta^{1/2}} t^{3/2}(t + \beta)g \left[ \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right], t > 0. \quad (2.16)$$

Díaz-García e Leiva (2005, 2006) consideraram diferentes núcleos para a fdp de  $T$ . Como por exemplo: função  $t$ -student, normal (que recai na função de distribuição BS clássica), Cauchy, Kotz, logística, entre outras.

Durante esta dissertação trabalharemos apenas com a distribuição BSG obtida a partir da distribuição  $t$ -student. A função de densidade deste caso é dada por,

$$f_T(t) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha(\nu\pi\beta)^{1/2}\Gamma(\nu/2)} \left( 1 + \frac{1}{\nu\alpha^2} \left[ \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right)^{-(\nu+1)/2}, \quad (2.17)$$

em que  $\alpha, \beta, \nu > 0$ . E diremos que  $T \sim t\text{-BS}(\alpha, \beta, \nu)$ . A Figura 2.5 apresenta o comportamento da função de distribuição de probabilidade da distribuição  $t\text{-BS}(\alpha, \beta, \nu)$  para  $\alpha=0,5, \beta=1$  e  $\nu=3, 5, 7$  e  $30$ . Observe pela Figura 2.5 a medida que o parâmetro  $\nu$  cresce a distribuição se aproxima da distribuição BS clássica.



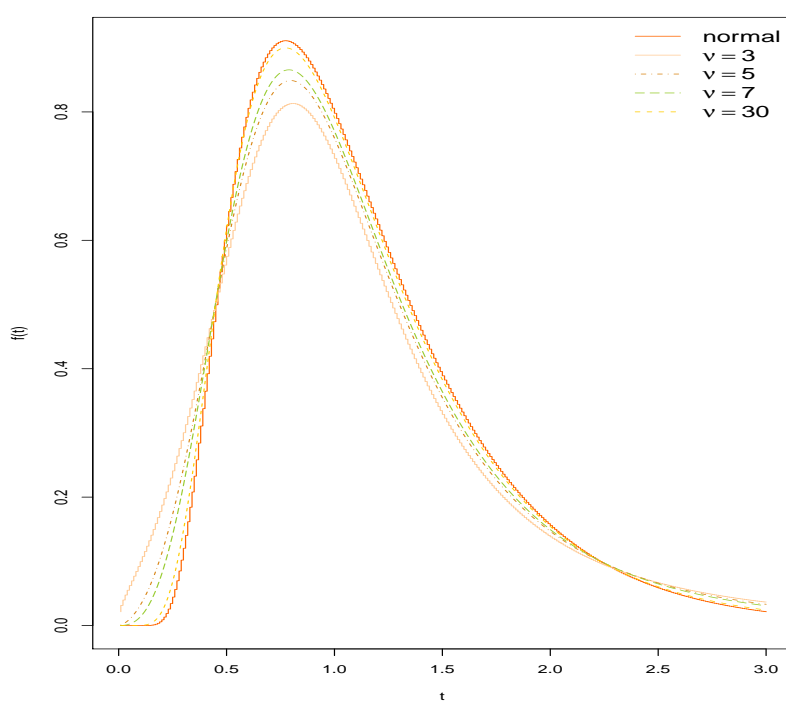


Figura 2.5: gráfico das funções densidade da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada  $t$ -student para  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 1,0$ , obtidas a partir da distribuição  $t$ -student com  $\nu = 3$ ,  $\nu = 5$ ,  $\nu = 7$  e  $\nu = 30$  e da distribuição normal.

# Capítulo 3

## Testes de bondade de ajuste

### 3.1 Introdução

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de um experimento. Frequentemente nos deparamos com a necessidade de testar se esta amostra segue uma determinada distribuição. O termo teste de bondade de ajuste é usado justamente para denotar teste de hipóteses sobre a distribuição de alguma variável  $X$ , numa população ou processo. É uma forma de verificar se uma distribuição ajusta bem ou não aos dados amostrais. Formalmente, testamos a hipótese nula dada por,  $H_0$ : A variável aleatória  $X$  tem função de distribuição acumulada  $F(x)$  versus,  $H_1$ : A variável aleatória  $X$  não segue uma função de distribuição acumulada  $F(x)$ . Veja mais detalhes em Lawless (1982), Capítulo 10.

Em D'Agostino e Stephens (1986), hipótese simples designa os casos nos quais  $H_0$  especifica a função de distribuição acumulada e supõe que o vetor de parâmetros é conhecido. Se o vetor de parâmetros é desconhecido,  $H_0$  é chamada de hipótese composta. Vamos nos ater ao caso onde os parâmetros são desconhecidos, motivados pelo fato que é o que ocorre na maioria das situações práticas. Para testar  $H_0$  usamos medições baseadas na adequação ou discrepância dos dados em relação a distribuição em teste. Testes de bondade de ajuste podem ser baseados em testes do tipo qui-quadrado, em função de distribuição empírica, função característica empírica ou ainda em correlação ou regressão. Vamos trabalhar com estatísticas baseadas em função de

distribuição empírica e função característica empírica.

É importante destacar que quando selecionamos modelos probabilísticos candidatos para ajustar dados de tempo de vida podemos nos basear em um argumento teórico (físico) para o mecanismo de falha ou nos valer de um modelo já usado previamente com êxito. Todavia, independente da justificativa para eleger a lei de probabilidade que será empregada nos dados em estudo, devem ser realizados testes de bondade de ajuste ou critérios de seleção de modelo.

## 3.2 Estatísticas de função de distribuição empírica

O conhecimento da função de distribuição, também chamada de função de distribuição acumulada, nos permite obter muita informação sobre uma variável.

**Definição 3.1** *A função de distribuição da variável aleatória  $X$ , representada por  $F_X$  ou simplesmente por  $F$ , é definida por,*

$$F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Propriedades da função de distribuição,

(i)  $F$  é não decrescente, isto é,  $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

(ii)  $F$  é contínua à direita, ou seja, se  $x_n \downarrow x$  então  $F(x_n) \downarrow F(x)$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .

**Definição 3.2** *Seja  $F$  uma função de distribuição contínua. Uma função de distribuição empírica baseada numa amostra aleatória,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (com função de distribuição  $F$ ) é definida como,*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) \quad (3.1)$$

em que,  $I(X_i \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i \leq x, \\ 0 & \text{se } X_i > x. \end{cases}$

Podemos ainda escrever a função de distribuição empírica em função das estatísticas de ordem,  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ .

**Definição 3.3** *As estatísticas de ordem de uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  se referem a valores amostrais colocados em ordem crescente, que são denotados por  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ . Ou seja, as estatísticas de ordem consistem em variáveis aleatórias que satisfazem  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ .*

E assim:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < X_{(1)}, \\ \frac{k}{n} & \text{se } X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)}, \\ 1 & \text{se } X_n \leq x. \end{cases} \quad (3.2)$$

Ou seja, função de distribuição empírica é uma função escada onde cada degrau é de magnitude  $\frac{1}{n}$ .

**Teorema 3.4** *Seja  $a \in \mathbb{R}$  fixado,  $F_n(a)$  é um estimador consistente para  $F(a)$ . E ainda,*

$$\sqrt{n}(F_n(a) - F(a)) \xrightarrow{D} N(0, F(a)(1 - F(a))).$$

**Prova.** De fato, suponha que  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) tais que para todo  $a$  fixado, tem-se  $\{I_{(X_n \leq a)}\}_{n \geq 1}$ , é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.

Observe ainda que a função indicadora dada por,  $I(X_i \leq a) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i \leq a, \\ 0 & \text{se } X_i > a \end{cases}$ , é uma variável aleatória com distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso  $F(a)$ .

De modo que,

$$E[F_n(a)] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq a)\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[I(X_i \leq a)] = \frac{1}{n} n F(a) = F(a).$$

De onde segue que  $F_n(a)$  é um estimador não viesado de  $F(a)$ . Temos ainda,

$$\begin{aligned} \text{Var}[F_n(a)] &= \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq a)\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[I(X_i \leq a)] \\ &= \frac{1}{n^2} n F(a)(1 - F(a)) = \frac{F(a)(1 - F(a))}{n} \\ &\leq \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

E assim,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[F_n(a)] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} = 0. \quad (3.3)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[F_n(a)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[(F_n(a) - E(F_n(a)))^2] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[(F_n(a) - F(a))^2] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Portanto, de (3.3) e (3.4) segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[(F_n(a) - F(a))^2] = 0$ . Ou seja,  $F_n(a)$  converge em média quadrática para  $F(a)$ . O que implica que  $F_n(a)$  converge em probabilidade para  $F(a)$  e portanto,  $F_n(a)$  é um estimador consistente para  $F(a)$ . Para maiores detalhes ver Lehmann (1999).

Note que  $F_n(a) = \sum_{i=1}^n I(X_i \leq a)$  trata-se da soma de  $n$  variáveis aleatórias i.i.d com distribuição Bernoulli de parâmetro  $F(a)$ , portanto  $F_n(a) \sim \text{Bin}(n, F(a))$ . De onde segue que  $E(F_n(a)) = nF(a)$  e  $\text{Var}(F_n(a)) = nF(a)(1 - F(a))$ . Logo, pela versão clássica do teorema central do limite temos

$$\sqrt{n}(F_n(a) - F(a)) \xrightarrow{D} N(0, F(a)(1 - F(a))).$$

■

Podemos considerar uma consistência mais forte para o resultado não fixando  $x$ , de forma que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{D} 0. \quad (3.5)$$

O resultado citado acima pode ser encontrado com sua respectiva demonstração em Serfling (1980, Seção 2.1.4) ou Billingsley (1986, Teorema 20.6) como citado em Lehmann (1999).

**Exemplo 1** *No software estatístico R geramos amostras aleatórias de tamanhos  $n = 20$ ,  $n = 30$ ,  $n = 50$ ,  $n = 100$  de uma distribuição Birnbaum-Saunders com parâmetros  $\alpha = \beta = 1$ . Veja a Figura (3.1). Os gráficos na forma escada representam a função de distribuição empírica obtida das amostras e a curva representa a função de distribuição acumulada de uma distribuição BS com os mesmos parâmetros. Podemos notar uma boa convergência da função de distribuição empírica para a função de distribuição acumulada a medida que o tamanho da amostra cresce.*

**Definição 3.5** *Definimos a estatística que mede a diferença entre  $F_n(x)$  e  $F(x)$  como estatística função de distribuição empírica (FDE).*

As estatísticas função de distribuição empírica que serão empregadas são as estatísticas de Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von Mises (CM) e a estatística de Anderson-Darling.

Definimos  $D^+$  (respectivamente  $D^-$ ) como a maior diferença vertical entre  $F_n(x)$  e  $F(x)$ , quando  $F_n(x)$  é maior (respectivamente menor) que  $F(x)$ , formalmente,  $D^+ =$

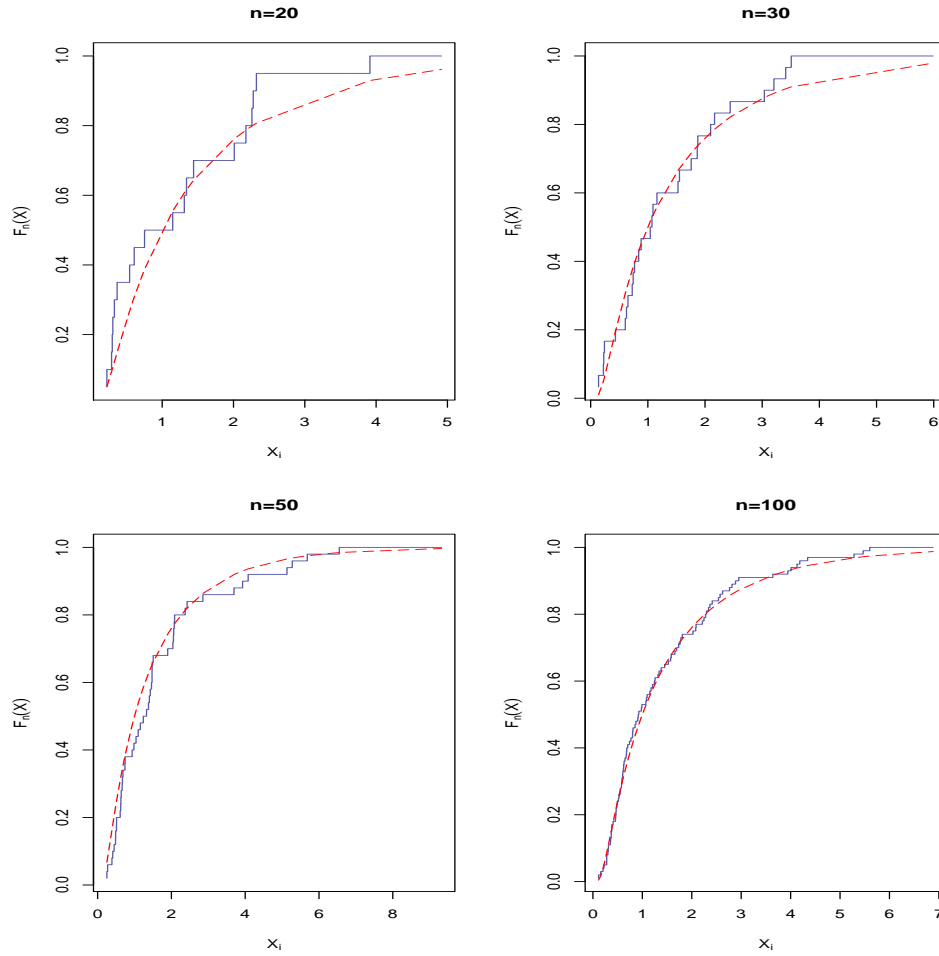


Figura 3.1: Gráfico de funções de distribuição empírica para amostras de tamanho  $n$  indicados e curvas da distribuição Birnbaum-Saunders .

$\sup_x \{F_n(x) - F(x)\}$  e  $D^- = \sup_x \{F(x) - F_n(x)\}$ . A estatística de Komogorov-Smirnov é dada por,

$$KS = \sup_x |F_n(x) - F(x)| = \max\{|D^+, D^-\}|. \quad (3.6)$$

Seja  $\hat{\theta}$  a estimativa de  $\theta$ , então a estatística de Crámer-Von Mises é dada por,

$$CM = n \int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x) - F(x; \hat{\theta})\}^2 dF(x; \hat{\theta}). \quad (3.7)$$

E a estatística de Anderson-Darling é dada por,

$$AD = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{F_n(x) - F(x; \hat{\theta})\}^2}{F(x; \hat{\theta})(1 - F(x; \hat{\theta}))} dF(x; \hat{\theta}). \quad (3.8)$$

Visando a fase de implementação e cálculos computacionais foram estudadas em D'Agostino e Stephens (1986) novas formas para as estatísticas de teste. São elas,

$$CM = \sum_{j=1}^n \left( \frac{(j-1/2)}{n} - u_j \right)^2 + \frac{1}{12n} \quad (3.9)$$

e

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [(2j-1) \log(u_j) + (2n+1-2j) \log(1-u_j)], \quad (3.10)$$

em que,  $u_j = F(X_{(j)}; \theta)$ . Os cálculos para a obtenção das fórmulas (3.9) e (3.10) podem ser encontradas no Apêndice A.

Destaca-se o fato que quando os componentes desconhecidos de um vetor de parâmetros  $\theta$  são parâmetros de locação e escala e estes são estimados por métodos apropriados as distribuições das estatísticas função de distribuição empírica não irão depender dos valores verdadeiros dos parâmetros desconhecidos. Entretanto, quando os parâmetros não são de locação e escala, sendo por exemplo parâmetros de forma, pode haver dependência dos valores verdadeiros do parâmetro. Para mais informações ver D'Agostino e Stephens (1986).

### 3.3 Procedimento

Chen e Balakrishnan (1995) constataram que diferentes distribuições probabilísticas estavam sendo utilizadas para descrever procedimentos práticos. Sob essa perspectiva observaram que para cada distribuição uma nova tabela de pontos críticos precisava ser criada. Com o intuito de estabelecer uma forma mais prática para testes de bondade de ajuste os autores propuseram um procedimento aproximado e que pode ser usado para testar a adequação dos dados em distintas famílias de distribuições.

O método primeiro transforma os dados originais em dados normais. Subsequentemente, aplica o clássico teste para a normalidade baseado na função distribuição empírica e pontos críticos do mesmo. O procedimento empregado é fundamentado na ligação entre a hipótese composta  $H_0$  e o problema de testar a normalidade quando média e variância são desconhecidos. Uma prova heurística foi apresentada pelos autores e se encontra no Apêndice B.

Em Meintanis (2010), assumindo que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  é uma amostra independente de  $X$  este método foi utilizado para testar a hipótese nula dada por,  $H_0 : X \sim BS(\alpha, \beta)$  para algum  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ .

Com este fim Meintanis (2010) ordenou os seguintes passos,

- (i) Estime  $\theta$  (eficientemente) por  $\hat{\theta}$ .
- (ii) Calcule  $\hat{U}_j = F(X_{(j)}; \hat{\theta})$  em que os  $X_j$ 's estão em ordem crescente.
- (iii) Calcule  $Y_j = \Phi^{-1}(\hat{U}_j)$ , onde  $\Phi$  é a função de distribuição acumulada normal padrão e  $\Phi^{-1}$  é a sua inversa. E sejam  $\bar{Y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$  e  $s_Y^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ .
- (iv) Calcule (3.6), (3.9) e (3.10) onde,  $u_j = \Phi(Z_j)$  com  $j = 1, 2, \dots, n$  e

$$Z_j = \frac{Y_j - \bar{Y}}{s_Y} \text{ com } j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

Meintanis (2010) descreve o processo acima, relatando que (i) é o passo de estimação. No passo (ii) é aplicada a transformação integral de probabilidade, de modo que as variáveis passam a ser uniformes. O passo (iii) torna as variáveis  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  aproximadamente normais. De modo que finalmente o passo (iv) nos traz aos testes clássicos de normalidade incorporando observações padronizadas  $Z_i$ , e a função de distribuição acumulada da normal padrão,  $\Phi$ .

É válido ressaltar aqui que a estimação do parâmetro  $\alpha$  não interfere nas estatísticas de teste, como pode ser visto no Apêndice C.

### 3.4 Estatística da Função característica Empírica

Nesta seção vamos estudar testes de bondade de ajuste baseados em funções características empíricas. Sabemos que funções características são amplamente utilizadas para caracterizarem variáveis aleatórias.

**Definição 3.6** *A função característica da variável  $X$  é definida por*

$$\varphi_X(t) = E(\exp(itX)) = \cos(tX) + i\text{sen}(tX), \quad (3.12)$$

para  $t$  real e  $i = \sqrt{-1}$ .



É válido ressaltar que a função característica sempre existe. Com efeito, pela fórmula de Euler  $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e assim a variável aleatória complexa  $e^{iX} = \cos X + i \operatorname{sen} X$  possui esperança finita para toda variável aleatória  $X$  dado que  $\cos X$  e  $\operatorname{sen} X$  são limitadas. Portanto, a função característica está bem definida.

**Definição 3.7** *Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  é uma amostra aleatória de uma distribuição  $F(x)$ , a função característica empírica é definida como*

$$\varphi_n(t) = n^{-1} \sum_{j=1}^n \exp(itX_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(tX_j) + i \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \operatorname{sen}(tX_j) \right)$$

em que  $t$  é um parâmetro real arbitrário.

Do fato que a lei de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  é completamente especificada pela função característica e que  $\varphi_n$  converge quase certamente para  $\varphi$  (Feuerverger e Mureika (1977)) estudamos uma nova classe de teste de hipóteses em que foram consideradas as funções características no lugar das funções de distribuições.

Aqui é usado  $\varphi_n(t)$  para testar a hipótese composta que a variável aleatória  $Z$ , variável transformada dada em (3.11), tem distribuição normal. Ou seja, a hipótese nula será dada por,

$H_0$ : A variável aleatória  $Z$  segue uma função de distribuição acumulada  $\Phi(z)$ , onde  $\Phi$  é a função de distribuição normal padrão.

A estatística de teste é dada por,

$$T = n \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(t) - e^{(-t^2/2)}|^2 \omega(t) dt. \quad (3.13)$$

Em Meitanis (2010) foi assumido  $\omega(t) = e^{-\gamma t^2}$ , com  $\gamma > 0$ , a estatística (3.13) para a fase de implementação foi escrita da seguinte forma,

$$T_\gamma = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n e^{-(Z_k + Z_j)^2 / 4\gamma} + n \sqrt{\frac{\pi}{1 + \gamma}} - 2 \sqrt{\frac{2\pi}{1 + 2\gamma}} \sum_{j=1}^n e^{-Z_j^2 / (2 + 4\gamma)}.$$

Para maiores detalhes de como essa estatística foi obtida ver Apêndice D.

Em Meintanis (2009) havia sido feita uma investigação do potencial do teste de bondade de ajuste utilizando estatísticas de função característica. Concluindo que as estatísticas de teste são indicadas quando as distribuições sob hipótese nula são as distribuições Weibull, inversa gaussiana e gama. Meintanis (2010) considerou duas classes de teste para verificar se uma amostra aleatória tem distribuição Birnbaum-Saunders. A primeira classe é baseada nas estatísticas de função de distribuição e a outra em estatísticas de função característica.

## 3.5 Estudo de Simulação

Depois do devido embasamento teórico para os testes exploramos seus desempenhos no modelo contemplado pela pesquisa, Birnbaum-Saunders. Com este intuito, ainda norteados por Meintanis (2010), vamos tratar agora das simulações para avaliar o poder dos testes e sua implementação usando o *software* estatístico R.

### 3.5.1 Valores Críticos

Guiados por Meintanis (2010) vamos considerar as estatísticas de teste CM, AD, KS e estatísticas da função característica  $T_\gamma$ , considerando  $\gamma = \{0, 5; 1, 0; 1, 5; 2, 0; 4, 0\}$ . Baseados em 5000 réplicas de Monte Carlo foram obtidos os pontos críticos para cada estatística com níveis de significância de  $\rho = 0,05$  e  $\rho = 0,10$  e para amostras de tamanhos  $n \in \{10, 25, 50, 75\}$ . Os passos para determinar os valores críticos foram,

- (1) Foram geradas 5000 amostras BS de tamanho  $n$  fixado.
- (2) Baseadas em cada amostra é obtido um valor para cada estatística de teste em estudo. Depois disto foram ordenadas as estatísticas de teste calculadas.
- (3) São determinados os quantis 95% e 90%, de modo que tem-se os valores críticos para nível de significância iguais a  $\rho = 0,05$  e  $\rho = 0,10$ , respectivamente.

Do processo acima foram determinados os valores críticos que podem ser encontrados nas Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.

Tabela 3.1: Valores críticos para amostras de tamanho  $n = 10$  com níveis de significância indicados.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
0,05	0,8109	0,2142	0,0821	0,0394	0,0056	0,6802	0,1174	0,2612
0,10	0,6161	0,1560	0,0587	0,0277	0,0039	0,5720	0,09790	0,2401

### 3.5.2 Poder dos testes

Para avaliar o desempenho das estatísticas de teste propostas, Meintanis (2010) levou em consideração as seguintes distribuições,

Tabela 3.2: Valores críticos para amostras de tamanho  $n = 25$  com níveis de significância indicados.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
0,05	0,9065	0,2513	0,1008	0,0487	0,0070	0,7392	0,1262	0,1720
0,10	0,6913	0,1796	0,07020	0,0334	0,0049	0,6225	0,1023	0,1584

Tabela 3.3: Valores críticos para amostras de tamanho  $n = 50$  com níveis de significância indicados.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
0,05	0,9000	0,2507	0,1009	0,0498	0,0077	0,7355	0,1231	0,1231
0,10	0,6896	0,1866	0,07428	0,0360	0,0053	0,6149	0,1011	0,1139

Tabela 3.4: Valores críticos para amostras de tamanho  $n = 75$  com níveis de significância indicados.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
0,05	0,9292	0,2653	0,1080	0,0539	0,0085	0,7285	0,1228	0,1016
0,10	0,7009	0,1914	0,0776	0,0386	0,0057	0,6156	0,1022	0,0931

- Gama (G) com função densidade  $((x^{\alpha-1})/\Gamma(\alpha)) \exp(-x)$  e função de distribuição acumulada denotada por  $F_1$ .
- Weibull (W) com função densidade  $\alpha x^{\alpha-1} \exp(-x^\alpha)$  e função de distribuição acumulada denotada por  $F_2$ .
- Log Normal (LN) com função densidade  $(\alpha x)^{-1} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp[-(\log)^2/(2\alpha^2)]$  e função de distribuição acumulada denotada por  $F_3$ .
- shifted-Pareto (P) com função densidade  $\alpha/(1+x)^{1+\alpha}$  e função de distribuição acumulada denotada por  $F_4$ .
- Half-normal (HN) com função densidade  $(2/\pi)^{\frac{1}{2}} \exp(-x^2/2)$  e função de distribuição acumulada denotada por  $F_5$ .

Além destas distribuições vamos considerar também,

- Birnbaum-Saunders  $t$ -Student ( $t$ -BS) com função densidade dada em (2.17) e função de distribuição acumulada denotada por  $F_6$ .

O poder é calculado baseado no problema de se testar,

$$H_0 : X \sim BS(\alpha, 1) \text{ para algum } \alpha > 0.$$

contra,

$$H_1 : X \sim F_i(\boldsymbol{\theta}) \text{ para algum } \boldsymbol{\theta} > 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots$$

Tomamos tamanhos amostrais,  $n = 10$ ,  $n = 25$ ,  $n = 50$  e  $n = 75$  e níveis de significância  $\rho = 0,05$  e  $\rho = 0,10$ . Para cada  $n$  e cada distribuição determinada em  $H_1$  com parâmetros variando, são geradas 5000 amostras. Logo após, supondo verdadeira a hipótese nula, seguimos o procedimento dado na Seção (3.3) para o cálculo das estatísticas de teste de cada amostra. Rejeitamos a hipótese de uma variável aleatória seguir distribuição BS com nível de significância  $\rho$ , quando o valor da estatística de teste obtida é maior do que os valores críticos dados nas Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 dependendo de  $n$  e  $\rho$  determinado. Por fim, obtemos a proporção de rejeição baseada nas 5000 amostras aleatórias simuladas. Ou seja, nas Tabelas 3.5-3.12 cada entrada é a proporção de rejeição da hipótese de nulidade baseada nas amostras aleatórias simuladas com distribuição determinada pela linha, a estatística de teste é determinada em cada coluna e  $n$  e  $\rho$  são fixados.

Em geral, para amostras pequenas o poder do teste é baixo, mesmo quando aumentamos o nível de significância  $\rho = 0,10$ . De modo que aparentemente as estatísticas de teste em estudos não são adequadas para testar amostras pequenas. É possível perceber que a medida que o tamanho amostral aumenta o poder dos testes também crescem. Observe que quanto mais a distribuição tem "comportamento parecido" com a distribuição BS menor o poder do teste. Por exemplo, quando as amostras aleatórias são geradas a partir da distribuição BS generalizada  $t$ -student o poder do teste é menor. E quanto maior o grau de liberdade mais próximo do tamanho do teste o poder fica, o que era esperado, uma vez que, a medida que aumenta o grau de liberdade a distribuição  $t$ -BS se aproxima da BS clássica.

Analisando as estatísticas de teste em estudo podemos concluir que entre as estatísticas de função distribuição empírica a de KS é a menos poderosa e que AD é

a mais poderosa. É importante salientar que as estatísticas de função característica empírica apresentam desempenho superior às clássicas (KS, AD, CM). Exceto quando consideramos na hipótese alternativa a distribuição log-normal(2,0) em que a estatística AD tem desempenho próximo a  $T_{0,5}$  e é melhor do que as outras. O poder do teste das estatísticas  $T_\gamma$  é alterado dependendo do valor de  $\gamma$  sem seguir um comportamento monótono, ou seja, aumentar (respectivamente, diminuir) conforme  $\gamma$  cresce (respectivamente, decresce). Meintanis (2010) conclui dessa forma que entre as estatísticas de função característica empírica, tomando  $\gamma = 1,0$  ou  $\gamma = 1,5$ , além de superar as estatísticas de função de distribuição empírica, é a que apresenta o comportamento mais uniforme para todas as alternativas apresentadas e para cada tamanho de amostra. As Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 confirmam as conclusões tiradas na análise das tabelas.

## 3.6 Exemplos

Aplicaremos agora os testes estudados em dados reais. Os bancos de dados que serão empregados nos exemplos foram obtidos em Birnbaum-Saunders (1969b) e já foram muito utilizados na literatura como aplicação da distribuição BS (ver por exemplo, Ng et al. (2003), Lemonte et al. (2007) e Leiva, Barros e Paula (2009)).

### 3.6.1 Exemplo 1

Birnbaum e Saunders (1969b) reportaram 102 dados de fadiga de vida correspondente aos ciclos ( $\times 10^{-3}$ ) das amostras de alumínio do tipo 6061-T6. Estes espécimes foram cortados em um ângulo paralelo ao sentido de rotação e oscilação de 18 ciclos por segundo. Eles foram expostos a uma pressão com tensão máxima de 26.000 psi (libras por polegada quadrada). Os dados estão na Tabela E.1, no Apêndice E. Queremos testar a hipótese nula dada por,  $H_0: X_1, X_2, \dots, X_{102}$  é uma amostra aleatória com distribuição BS e parâmetros desconhecidos. Obtemos pelo método de máxima verossimilhança, no *software* R,  $\hat{\alpha} = 0,1614$  e  $\hat{\beta} = 392,7623$ . De onde segue que,  $KS(X) = 0,0540$ ,  $CM(X) = 0,0497$ ,  $AD(X) = 0,4086$  e  $T_1(X) = 0,1642$ . Para  $n = 102$  e considerando nível de significância  $\rho = 0,05$ , os valores críticos para as estatísticas de teste em estudo são dadas por,  $ks = 0,0880$ ,  $cm = 0,1241$ ,  $ad = 0,7438$  e  $t_1 = 0,2587$ . Portanto, para cada teste em estudo não rejeitamos a hipótese que a amostra segue distribuição

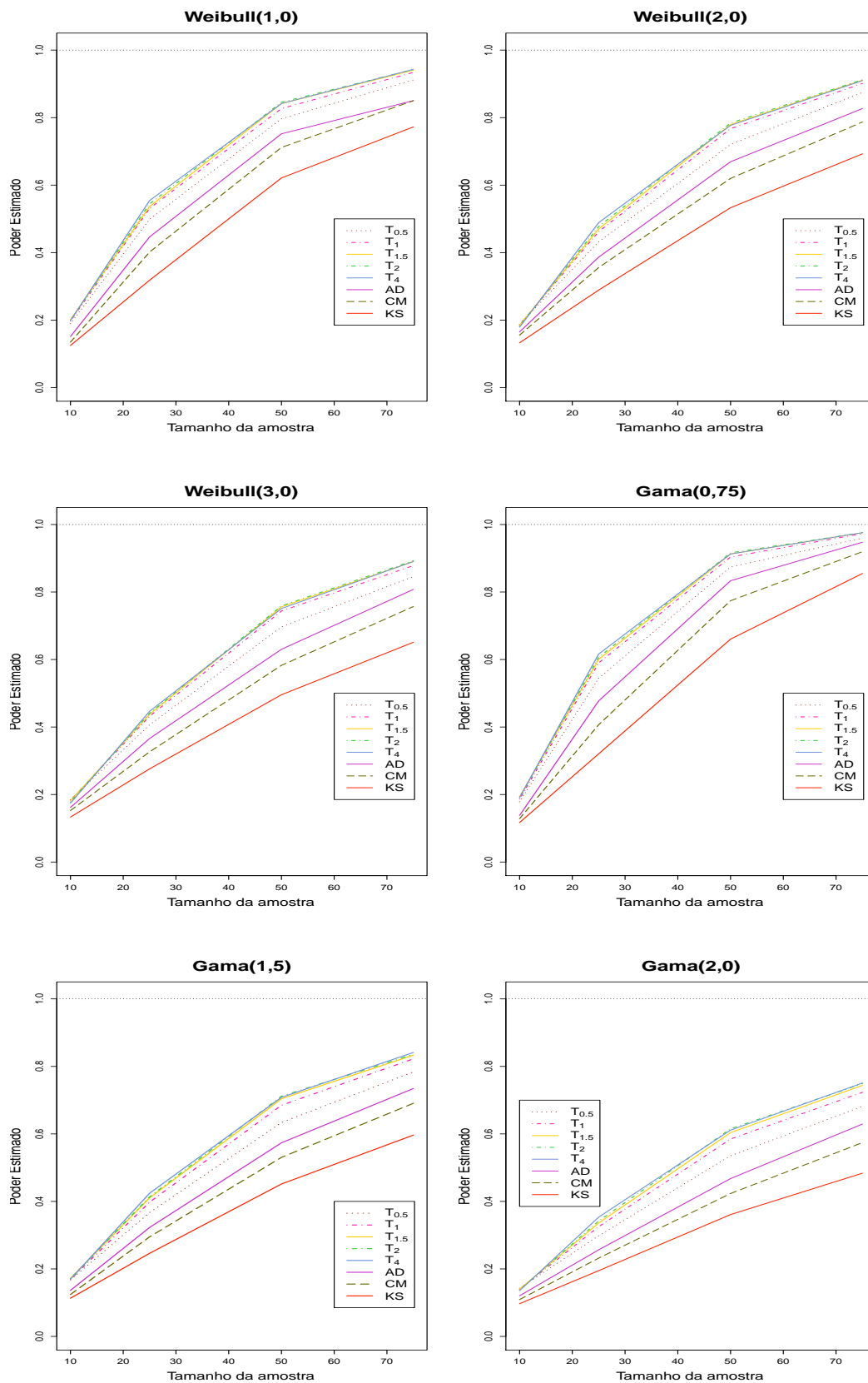


Figura 3.2: Gráfico do Poder estimado dos testes baseados nas estatísticas de testes AD, CM, KS,  $T_\gamma$ , com  $\gamma \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0 \text{ e } 4,0\}$ , para as distribuições especificadas por  $H_1$ .

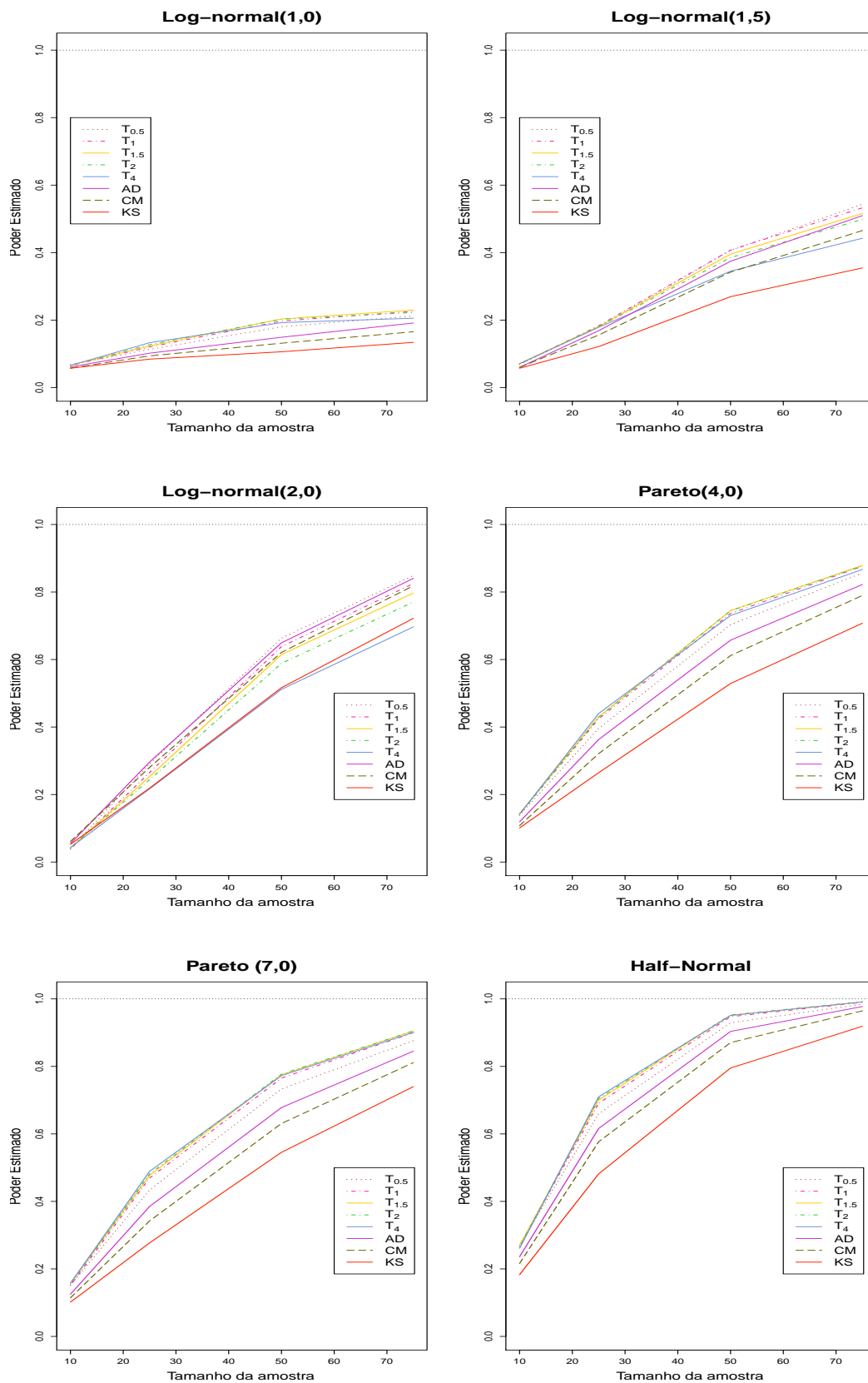


Figura 3.3: Gráfico do Poder estimado dos testes baseados nas estatísticas de testes AD, CM, KS,  $T_\gamma$ , com  $\gamma \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0 \text{ e } 4,0\}$ , para as distribuições especificadas por  $H_1$ .

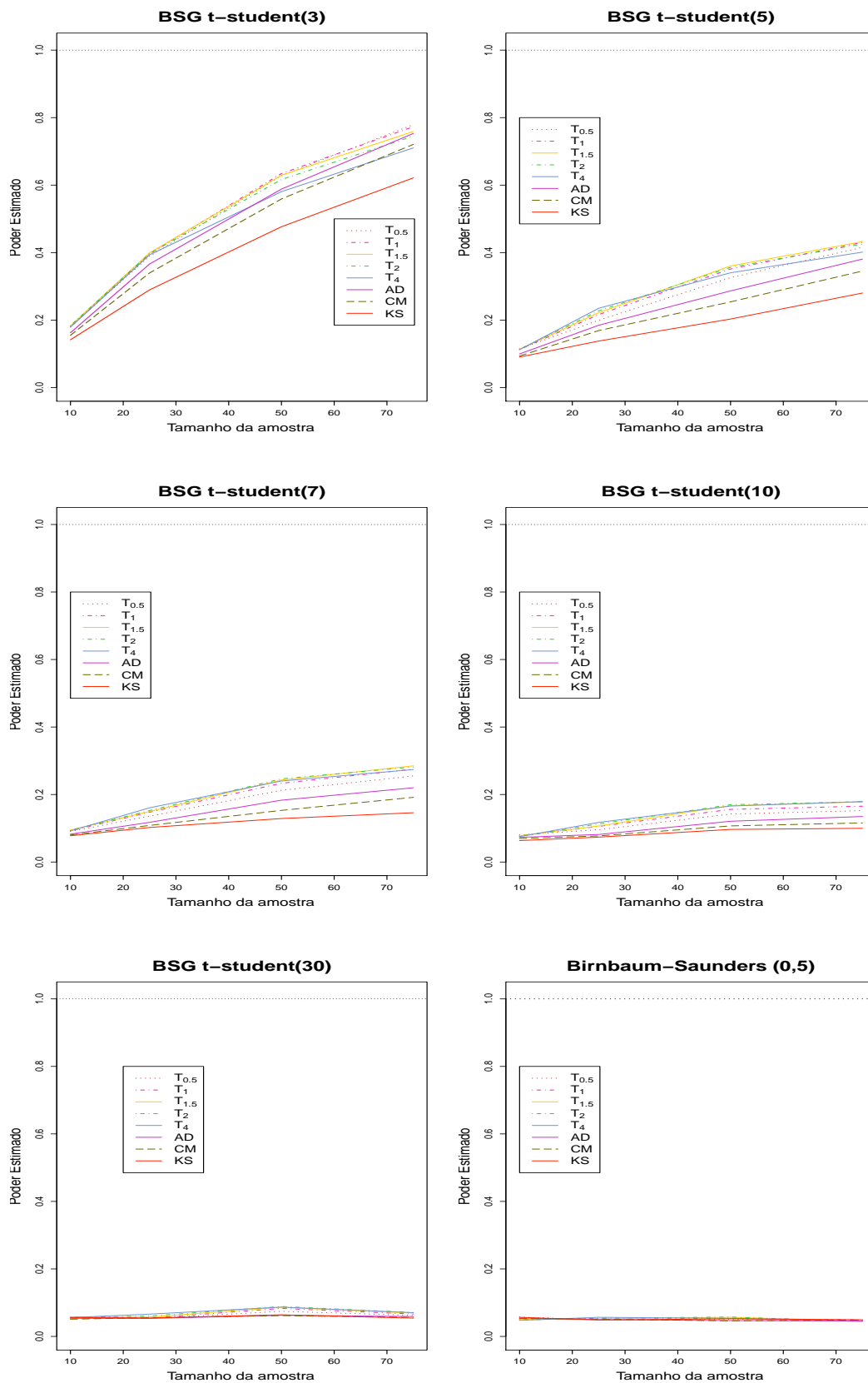


Figura 3.4: Gráfico do Poder estimado dos testes baseados nas estatísticas de testes AD, CM, KS,  $T_\gamma$ , com  $\gamma \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0 \text{ e } 4,0\}$ , para as distribuições especificadas por  $H_1$ .



Tabela 3.5: Poder do teste para amostras de tamanho  $n = 10$  com nível de significância de 0,05.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
BS(0,10)	0.0496	0.0448	0.0448	0.0444	0.0428	0.0480	0.0476	0.0516
BS(0,25)	0.0496	0.0508	0.0494	0.0474	0.0464	0.0410	0.0420	0.0460
BS(0,50)	0,0574	0,0506	0,0500	0,0486	0,0476	0,0546	0,0530	0,0566
BS(0,75)	0.0460	0.0462	0.0468	0.0442	0.0424	0.0458	0.0466	0.0500
BS(1,0)	0.0496	0.0448	0.0448	0.0444	0.0428	0.0480	0.0476	0.0516
W(1,0)	0,1894	0,1972	0,2008	0,1988	0,1988	0,1514	0,1348	0,1248
W(2,0)	0,1880	0,1862	0,1850	0,1826	0,1792	0,1652	0,1556	0,1328
W(3,0)	0,1848	0,1826	0,1818	0,1786	0,1746	0,1618	0,1526	0,1332
G(0,75)	0,1786	0,1864	0,1928	0,1910	0,1908	0,1380	0,1284	0,1170
G(1,5)	0,1676	0,1692	0,1720	0,1714	0,1696	0,1364	0,1242	0,1132
G(2,0)	0,1426	0,1398	0,1402	0,1372	0,1356	0,1204	0,1092	0,0970
LN(1,0)	0,0684	0,0654	0,0664	0,0662	0,0658	0,0614	0,0578	0,0574
LN(1,5)	0,0688	0,0698	0,0714	0,0696	0,0708	0,0600	0,0600	0,0574
LN(2,0)	0,0390	0,0384	0,0414	0,0426	0,0432	0,0548	0,0610	0,0526
P(4,0)	0,1386	0,1424	0,1428	0,1408	0,1418	0,1190	0,1080	0,1012
P(7,0)	0,1512	0,1514	0,1572	0,1554	0,1576	0,1250	0,1144	0,1016
HN	0,2704	0,2686	0,2696	0,2652	0,2612	0,2360	0,2160	0,1830
$t$ -BS(3)	0,1812	0,1796	0,1834	0,1832	0,1794	0,1626	0,1550	0,1418
$t$ -BS(5)	0,1146	0,1128	0,1140	0,1134	0,1124	0,0998	0,0936	0,0906
$t$ -BS(7)	0,0908	0,0926	0,0948	0,0940	0,0922	0,0826	0,0800	0,0778
$t$ -BS(10)	0,0802	0,0774	0,0780	0,0762	0,0752	0,0732	0,0696	0,0636
$t$ -BS(30)	0,0570	0,0584	0,0578	0,0566	0,0560	0,0536	0,0510	0,0560

BS. Note que a Figura 3.5 sugere uma aproximação da função distribuição empírica da amostra e da curva da função distribuição da BS com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  estimados.

### 3.6.2 Exemplo 2

Birnbaum e Saunders (1969b) reportaram 101 dados de fadiga de vida correspondente aos ciclos ( $\times 10^{-3}$ ) das amostras de alumínio do tipo 6061-T6. Estes espécimes foram cortados em um ângulo paralelo ao sentido de rotação e oscilação de 18 ciclos por segundo. Eles foram expostos a uma pressão com tensão máxima de 31.000 psi (libras por polegada quadrada). Os dados estão na Tabela (E.2), no Apêndice E. Quere-

Tabela 3.6: Poder do teste para amostras de tamanho  $n = 10$  com nível de significância de 0,10.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
BS(0,10)	0,0978	0,0908	0,0904	0,0896	0,0926	0,0998	0,0990	0,1002
BS(0,25)	0,0960	0,0944	0,0952	0,0972	0,1002	0,0984	0,0908	0,0988
BS(0,5)	0,1096	0,1032	0,1036	0,1010	0,1032	0,1092	0,1050	0,1076
BS(0,75)	0,0992	0,0930	0,0976	0,0978	0,1004	0,0948	0,0950	0,0960
BS(1,0)	0,0978	0,0908	0,0904	0,0896	0,0926	0,0998	0,0990	0,1002
W(1,0)	0,2830	0,2874	0,2912	0,2940	0,2994	0,2428	0,2204	0,2076
W(2,0)	0,2690	0,2646	0,2656	0,2652	0,2680	0,2464	0,2340	0,2142
W(3,0)	0,2676	0,2634	0,2616	0,2616	0,2632	0,2476	0,2308	0,2222
G(0,75)	0,2758	0,2836	0,2888	0,2892	0,2962	0,2336	0,2158	0,2088
G(1,5)	0,2446	0,2458	0,2492	0,2496	0,2552	0,2190	0,2056	0,1868
G(2,0)	0,2116	0,2100	0,2102	0,2092	0,2108	0,1964	0,1880	0,1700
LN(1,0)	0,1214	0,1226	0,1232	0,1264	0,1294	0,1112	0,1118	0,1114
LN(1,5)	0,1282	0,1276	0,1316	0,1350	0,1384	0,1244	0,1204	0,1156
LN(2,0)	0,0948	0,0828	0,0844	0,0880	0,0958	0,1130	0,1170	0,1168
P(4,0)	0,2190	0,2194	0,2284	0,2324	0,2388	0,1978	0,1886	0,1724
P(7,0)	0,2304	0,2384	0,2428	0,2464	0,2498	0,2040	0,1900	0,1844
HN	0,3686	0,3682	0,3714	0,3710	0,3706	0,3326	0,3098	0,2790
$t$ -BS(3)	0,2548	0,2530	0,2548	0,2550	0,2582	0,2356	0,2258	0,2192
$t$ -BS(5)	0,1844	0,1850	0,1864	0,1874	0,1890	0,1652	0,1606	0,1548
$t$ -BS(7)	0,1556	0,1578	0,1598	0,1596	0,1644	0,1454	0,1390	0,1384
$t$ -BS(10)	0,1292	0,1288	0,1322	0,1328	0,1356	0,1274	0,1270	0,1264
$t$ -BS(30)	0,1080	0,1028	0,1048	0,1058	0,1110	0,1084	0,1046	0,1044

mos testar a hipótese nula dada por,  $H_0: X_1, X_2, \dots, X_{101}$  é uma amostra aleatória com distribuição BS e parâmetros desconhecidos. Obtemos pelo método de máxima verossimilhança, no *software* R, pelo pacote **bs**,  $\hat{\alpha} = 0,1704$  e  $\hat{\beta} = 131,8188$ . De onde segue que,  $KS(X) = 0,0847$ ,  $CM(X) = 0,0864$ ,  $AD(X) = 0,5023$  e  $T_{1,5}(X) = 0,0782$ . Para  $n = 101$  e considerando nível de significância  $\rho = 0,05$ , os valores críticos para as estatísticas de teste em estudo são dadas por,  $ks = 0,0882$ ,  $cm = 0,1258$ ,  $ad = 0,7509$  e  $t_{1,5} = 0,1020$ . Portanto, para cada teste em estudo não rejeitamos a hipótese que a amostra segue distribuição BS. A Figura 3.6 também sugere adequação dos dados ao modelo de distribuição BS.

Tabela 3.7: Poder do teste para amostras de tamanho  $n = 25$  com nível de significância de 0,05.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
BS(0,10)	0,0434	0,0428	0,0434	0,0466	0,0502	0,0440	0,0448	0,0452
BS(0,25)	0,0494	0,0476	0,0484	0,0524	0,0542	0,0500	0,0498	0,0508
BS(0,5)	0,0496	0,0530	0,0522	0,0542	0,0566	0,0498	0,0512	0,0486
BS(0,75)	0,0450	0,0450	0,0428	0,0456	0,0502	0,0468	0,0456	0,0488
BS(1,0)	0,0434	0,0428	0,0434	0,0466	0,0502	0,0440	0,0448	0,0452
W(1,0)	0,4988	0,5310	0,5364	0,5444	0,5542	0,4464	0,4016	0,3182
W(2,0)	0,4318	0,4622	0,4702	0,4772	0,4888	0,3866	0,3558	0,2890
W(3,0)	0,4064	0,4320	0,4376	0,4406	0,4464	0,3660	0,3264	0,2760
G(0,75)	0,5448	0,5900	0,6006	0,6066	0,6162	0,4774	0,4068	0,3206
G(1,5)	0,3668	0,3978	0,4106	0,4134	0,4242	0,3228	0,2950	0,2462
G(2,0)	0,2982	0,3252	0,3360	0,3420	0,3534	0,2566	0,2320	0,1948
LN(1,0)	0,1132	0,1206	0,1234	0,1272	0,1330	0,1020	0,0940	0,0844
LN(1,5)	0,1802	0,1834	0,1812	0,1808	0,1788	0,1688	0,1558	0,1216
LN(2,0)	0,2910	0,2650	0,2530	0,2440	0,2168	0,2962	0,2804	0,2188
IG(0,25)	0,0526	0,0524	0,0516	0,0536	0,0564	0,0506	0,0508	0,0542
P(4,0)	0,3960	0,4244	0,4300	0,4294	0,4400	0,3630	0,3212	0,2646
P(7,0)	0,4340	0,4694	0,4772	0,4812	0,4890	0,3850	0,3422	0,2770
HN	0,6600	0,6910	0,7004	0,7050	0,7100	0,6162	0,5768	0,4816
$t$ -BS(3)	0,3892	0,3964	0,3992	0,3970	0,3934	0,3662	0,3398	0,2896
$t$ -BS(5)	0,1996	0,2164	0,2220	0,2274	0,2350	0,1848	0,1690	0,1380
$t$ -BS(7)	0,1358	0,1476	0,1496	0,1524	0,1606	0,1176	0,1084	0,1024
$t$ -BS(10)	0,0958	0,1056	0,1068	0,1128	0,1174	0,0816	0,0774	0,0738
$t$ -BS(30)	0,0532	0,0544	0,0574	0,0604	0,0660	0,0534	0,0554	0,0546

### 3.6.3 Exemplo 3

Birnbaum e Saunders (1969b) reportaram 101 dados de fadiga de vida correspondente aos ciclos ( $\times 10^{-3}$ ) das amostras de alumínio do tipo 6061-T6. Estes espécimes foram cortados em um ângulo paralelo ao sentido de rotação e oscilação de 18 ciclos por segundo. Eles foram expostos a uma pressão com tensão máxima de 21.000 psi (libras por polegada quadrada). Os dados estão na Tabela E.3, no Apêndice E. Queremos testar a hipótese nula dada por,  $H_0: X_1, X_2, \dots, X_{101}$  é uma amostra aleatória com distribuição BS e parâmetros desconhecidos. Obtemos pelo método

Tabela 3.8: Poder do teste para amostras de tamanho  $n = 25$  com nível de significância de 0,10.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
BS(0,10)	0,0864	0,0948	0,0944	0,0978	0,0968	0,0898	0,0908	0,0974
BS(0,25)	0,0952	0,1018	0,1062	0,1088	0,1074	0,0966	0,0982	0,0978
BS(0,5)	0,0998	0,1060	0,1098	0,1122	0,1112	0,0992	0,0996	0,0946
BS(0,75)	0,0926	0,0992	0,1034	0,1054	0,1024	0,0966	0,0968	0,1032
BS(1,0)	0,0864	0,0948	0,0944	0,0978	0,0968	0,0898	0,0908	0,0974
W(1,0)	0,5870	0,6240	0,6348	0,6420	0,6416	0,5386	0,5034	0,4392
W(2,0)	0,5346	0,5798	0,5870	0,5936	0,5888	0,4912	0,4560	0,3912
W(3,0)	0,5128	0,5500	0,5540	0,5592	0,5484	0,4652	0,4320	0,3784
G(0,75)	0,6494	0,6928	0,7038	0,7106	0,7072	0,5906	0,5312	0,4568
G(1,5)	0,4688	0,5044	0,5156	0,5220	0,5236	0,4178	0,3898	0,3444
G(2,0)	0,3926	0,4218	0,4346	0,4412	0,4414	0,3516	0,3246	0,2882
LN(1,0)	0,1848	0,2032	0,2068	0,2120	0,2108	0,1694	0,1606	0,1480
LN(1,5)	0,2736	0,2858	0,2828	0,2832	0,2708	0,2546	0,2380	0,2048
LN(2,0)	0,4008	0,3924	0,3820	0,3722	0,3426	0,3982	0,3732	0,3224
P(4,0)	0,5012	0,5228	0,5306	0,5372	0,5328	0,4626	0,4274	0,3742
P(7,0)	0,5336	0,5666	0,5774	0,5820	0,5766	0,4840	0,4474	0,3896
HN	0,7478	0,7812	0,7880	0,7914	0,7880	0,7002	0,6638	0,5970
$t$ -BS(3)	0,4800	0,4956	0,4966	0,4968	0,4842	0,4580	0,4366	0,3786
$t$ -BS(5)	0,2878	0,3104	0,3162	0,3224	0,3190	0,2684	0,2478	0,2150
$t$ -BS(7)	0,2094	0,2318	0,2392	0,2428	0,2422	0,1940	0,1818	0,1702
$t$ -BS(10)	0,1598	0,1796	0,1844	0,1898	0,1908	0,1510	0,1378	0,1324
$t$ -BS(30)	0,1076	0,1146	0,1164	0,1186	0,1182	0,1122	0,1068	0,1036

de máxima verossimilhança, no *software* R,  $\hat{\alpha} = 0,3101$  e  $\hat{\beta} = 1336,377$ . De onde segue que,  $KS(X) = 0,0743$ ,  $CM(X) = 0,1024$ ,  $AD(X) = 0,6813$ ,  $T_{0,5}(X) = 1,0541$ ,  $T_{1,0}(X) = 0,4172$ ,  $T_{1,5}(X) = 0,2117$ ,  $T_{2,0}(X) = 0,1219$  e  $T_{4,0}(X) = 0,0247$ . Para  $n = 101$  e considerando nível de significância  $\rho = 0,05$ , os valores críticos para as estatísticas de teste em estudo são dadas por,  $ks = 0,0882$ ,  $cm = 0,1258$ ,  $ad = 0,7509$ ,  $t_{0,5} = 0,9162$ ,  $t_{1,0} = 0,2482$ ,  $t_{1,5} = 0,1020$ ,  $t_{2,0} = 0,0506$  e  $t_{4,0} = 0,0078$ . Portanto, quando consideramos as estatísticas clássicas de teste não rejeitamos a hipótese que a amostra segue distribuição BS. Entretanto, se considerarmos as estatísticas de teste de função característica rejeitamos a hipótese  $H_0$ , isto era esperado uma vez que os testes

Tabela 3.9: Poder do teste para amostras de tamanho  $n = 50$  com nível de significância de 0,05.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
BS(0,10)	0,0488	0,0468	0,0492	0,0490	0,0420	0,0454	0,0440	0,0530
BS(0,25)	0,0508	0,0536	0,0556	0,0562	0,0536	0,0476	0,0504	0,0556
BS(0,5)	0,0512	0,0530	0,0566	0,0574	0,0536	0,0470	0,0462	0,0522
BS(0,75)	0,0520	0,0518	0,0524	0,0522	0,0498	0,0516	0,0534	0,0550
BS(1,0)	0,0488	0,0468	0,0492	0,0490	0,0420	0,0454	0,0440	0,0530
W(1,0)	0,7966	0,8268	0,8416	0,8456	0,8416	0,7520	0,7116	0,6212
W(2,0)	0,7204	0,7672	0,7794	0,7840	0,7770	0,6692	0,6198	0,5330
W(3,0)	0,6966	0,7436	0,7560	0,7588	0,7510	0,6302	0,5826	0,4956
G(0,75)	0,8742	0,9038	0,9126	0,9160	0,9126	0,8334	0,7742	0,6604
G(1,5)	0,6338	0,6848	0,7040	0,7116	0,7082	0,5736	0,5304	0,4516
G(2,0)	0,5354	0,5848	0,6038	0,6150	0,6112	0,4676	0,4234	0,3610
LN(1,0)	0,1804	0,1972	0,2034	0,2028	0,1926	0,1492	0,1316	0,1062
LN(1,5)	0,4062	0,4074	0,3954	0,3852	0,3450	0,3744	0,3422	0,2694
LN(2,0)	0,6634	0,6382	0,6146	0,5884	0,5114	0,6494	0,6210	0,5164
P(4,0)	0,7036	0,7362	0,7448	0,7442	0,7304	0,6572	0,6116	0,5288
P(7,0)	0,7330	0,7652	0,7752	0,7770	0,7724	0,6780	0,6308	0,5454
HN	0,9292	0,9474	0,9514	0,9526	0,9508	0,9036	0,8706	0,7952
$t$ -BS(3)	0,6284	0,6342	0,6290	0,6166	0,5806	0,5882	0,5590	0,4766
$t$ -BS(5)	0,3258	0,3514	0,3604	0,3562	0,3402	0,2866	0,2540	0,2032
$t$ -BS(7)	0,2126	0,2334	0,2430	0,2464	0,2400	0,1832	0,1530	0,1288
$t$ -BS(10)	0,1422	0,1560	0,1670	0,1698	0,1658	0,1208	0,1070	0,0966
$t$ -BS(30)	0,0744	0,0830	0,0862	0,0886	0,0868	0,0626	0,0618	0,0640

baseados na função característica se mostraram mais poderosos para detectar afastamentos da suposição de que os dados seguem uma distribuição BS. Veja a Figura (3.7) e observe maiores afastamentos nas caudas do que nos demais exemplos.

Tabela 3.10: Poder do teste para amostras de tamanho  $n = 50$  com nível de significância de 0,10.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
BS(0,10)	0,1024	0,0968	0,0946	0,0954	0,0956	0,0948	0,0954	0,0984
BS(0,25)	0,1068	0,1022	0,1022	0,1036	0,1032	0,1002	0,1030	0,1014
BS(0,5)	0,1046	0,1026	0,1074	0,1060	0,1086	0,0934	0,0904	0,0964
BS(0,75)	0,1022	0,1004	0,1022	0,1036	0,1034	0,1008	0,1004	0,1000
BS(1,0)	0,1024	0,0968	0,0946	0,0954	0,0956	0,0948	0,0954	0,0984
W(1,0)	0,8478	0,8756	0,8848	0,8886	0,8880	0,8114	0,7776	0,7074
W(2,0)	0,7984	0,8322	0,8436	0,8512	0,8532	0,7446	0,7110	0,6316
W(3,0)	0,7866	0,8200	0,8288	0,8310	0,8330	0,7346	0,6818	0,6042
G(0,75)	0,9196	0,9392	0,9442	0,9462	0,9468	0,8892	0,8508	0,7720
G(1,5)	0,7184	0,7598	0,7710	0,7752	0,7862	0,6648	0,6206	0,5468
G(2,0)	0,6330	0,6796	0,6952	0,7008	0,7076	0,5682	0,5234	0,4594
LN(1,0)	0,2698	0,2858	0,2904	0,2916	0,2876	0,2376	0,2104	0,1792
LN(1,5)	0,5086	0,5076	0,4974	0,4884	0,4580	0,4780	0,4438	0,3662
LN(2,0)	0,7488	0,7288	0,7050	0,6860	0,6328	0,7298	0,7054	0,6162
P(4,0)	0,7776	0,8044	0,8100	0,8092	0,8020	0,7380	0,7032	0,6246
P(7,0)	0,8020	0,8258	0,8306	0,8334	0,8338	0,7558	0,7224	0,6506
HN	0,9522	0,9666	0,9690	0,9700	0,9700	0,9380	0,9168	0,8618
$t$ -BS(3)	0,7058	0,7126	0,7054	0,6972	0,6756	0,6742	0,6440	0,5686
$t$ -BS(5)	0,4168	0,4406	0,4430	0,4436	0,4398	0,3794	0,3460	0,2914
$t$ -BS(7)	0,3002	0,3254	0,3302	0,3316	0,3318	0,2676	0,2394	0,2000
$t$ -BS(10)	0,2196	0,2352	0,2416	0,2434	0,2464	0,1952	0,1776	0,1568
$t$ -BS(30)	0,1366	0,1428	0,1468	0,1488	0,1506	0,1220	0,1152	0,1104

Tabela 3.11: Poder do teste para amostras de tamanho  $n = 75$  com nível de significância de 0,05.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
BS(0,10)	0,0486	0,0476	0,0486	0,0492	0,0468	0,0466	0,0486	0,0498
BS(0,25)	0,0480	0,0452	0,0474	0,0488	0,0464	0,0518	0,0464	0,0542
BS(0,5)	0,0448	0,0448	0,0456	0,0442	0,0448	0,0458	0,0484	0,0494
BS(0,75)	0,0488	0,0474	0,0460	0,0448	0,0466	0,0472	0,0480	0,0516
BS(1,0)	0,0486	0,0476	0,0486	0,0492	0,0468	0,0466	0,0486	0,0498
W(1,0)	0,9116	0,9340	0,9406	0,9422	0,9430	0,8844	0,8502	0,7724
W(2,0)	0,8742	0,9012	0,9110	0,9124	0,9096	0,8268	0,7870	0,6926
W(3,0)	0,8456	0,8782	0,8900	0,8928	0,8904	0,8076	0,7568	0,6510
G(0,75)	0,9596	0,9730	0,9758	0,9760	0,9758	0,9474	0,9194	0,8548
G(1,5)	0,7836	0,8224	0,8334	0,8358	0,8412	0,7344	0,6906	0,5964
G(2,0)	0,6816	0,7232	0,7438	0,7490	0,7508	0,6292	0,5742	0,4836
LN(1,0)	0,2122	0,2260	0,2298	0,2226	0,2056	0,1914	0,1654	0,1340
LN(1,5)	0,5432	0,5328	0,5160	0,4986	0,4426	0,5096	0,4654	0,3546
LN(2,0)	0,8488	0,8250	0,7968	0,7704	0,6966	0,8404	0,8184	0,7220
P(4,0)	0,8562	0,8764	0,8790	0,8774	0,8668	0,8222	0,7898	0,7074
P(7,0)	0,8760	0,9000	0,9050	0,9050	0,9008	0,8450	0,8112	0,7400
HN	0,9844	0,9896	0,9908	0,9916	0,9910	0,9774	0,9646	0,9190
$t$ -BS(3)	0,7792	0,7730	0,7588	0,7452	0,7102	0,7530	0,7206	0,6214
$t$ -BS(5)	0,4156	0,4304	0,4326	0,4256	0,4014	0,3808	0,3454	0,2802
$t$ -BS(7)	0,2550	0,2752	0,2850	0,2818	0,2740	0,2200	0,1916	0,1460
$t$ -BS(10)	0,1522	0,1654	0,1782	0,1788	0,1790	0,1348	0,1158	0,0998
$t$ -BS(30)	0,0624	0,0664	0,0690	0,0710	0,0704	0,0588	0,0564	0,0542

Tabela 3.12: Poder do teste para amostras de tamanho  $n = 75$  com nível de significância de 0,10.

	$T_{0,5}$	$T_{1,0}$	$T_{1,5}$	$T_{2,0}$	$T_{4,0}$	AD	CM	KS
BS(0,10)	0,0994	0,0994	0,0986	0,0954	0,0964	0,0972	0,0934	0,1010
BS(0,25)	0,1028	0,1010	0,0984	0,0942	0,0950	0,0950	0,0954	0,1106
BS(0,75)	0,0984	0,1024	0,0992	0,0970	0,0956	0,0962	0,0964	0,0992
BS(1,0)	0,0994	0,0994	0,0986	0,0954	0,0964	0,0972	0,0934	0,1010
BS(0,5)	0,0962	0,0990	0,0996	0,0964	0,0982	0,0964	0,0948	0,1042
W(1,0)	0,9430	0,9582	0,9640	0,9664	0,9670	0,9230	0,8990	0,8480
W(2,0)	0,9214	0,9432	0,9470	0,9484	0,9474	0,8946	0,8566	0,7904
W(3,0)	0,9050	0,9322	0,9354	0,9350	0,9370	0,8728	0,8322	0,7590
G(0,75)	0,9766	0,9848	0,9864	0,9868	0,9864	0,9672	0,9496	0,9174
G(1,5)	0,8498	0,8830	0,8924	0,8924	0,8950	0,8042	0,7686	0,7086
G(2,0)	0,7586	0,8006	0,8136	0,8158	0,8212	0,7116	0,6716	0,6014
LN(1,0)	0,3194	0,3314	0,3276	0,3210	0,3102	0,2876	0,2532	0,2184
LN(1,5)	0,6492	0,6536	0,6346	0,6140	0,5654	0,6070	0,5694	0,4890
LN(2,0)	0,8984	0,8878	0,8698	0,8496	0,7920	0,8862	0,8726	0,8176
P(4,0)	0,9066	0,9184	0,9228	0,9194	0,9128	0,8800	0,8546	0,7966
P(7,0)	0,9188	0,9320	0,9370	0,9364	0,9336	0,8922	0,8714	0,8248
HN	0,9920	0,9956	0,9962	0,9970	0,9970	0,9868	0,9796	0,9574
$t$ -BS(3)	0,8392	0,8430	0,8338	0,8216	0,7906	0,8178	0,7914	0,7244
$t$ -BS(5)	0,5332	0,5470	0,5420	0,5296	0,5016	0,4814	0,4388	0,3816
$t$ -BS(7)	0,3624	0,3900	0,3900	0,3854	0,3718	0,3160	0,2874	0,2420
$t$ -BS(10)	0,2438	0,2666	0,2702	0,2658	0,2626	0,2120	0,1890	0,1760
$t$ -BS(30)	0,1274	0,1322	0,1352	0,1342	0,1344	0,1138	0,1098	0,1134



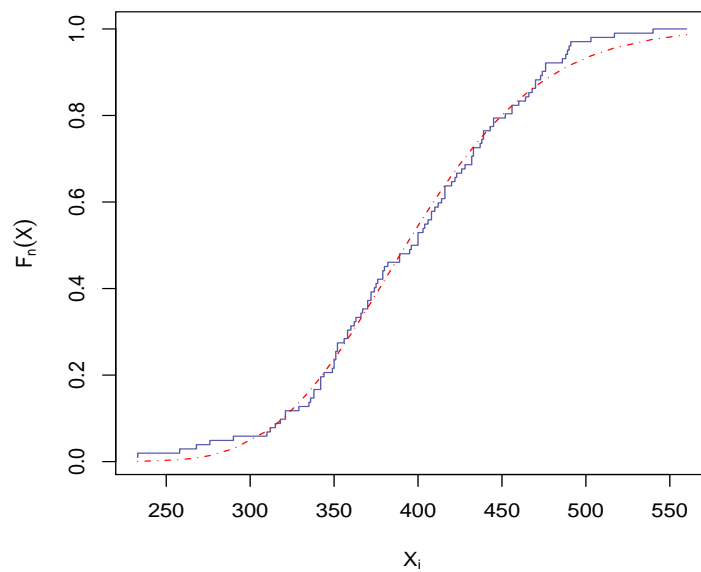


Figura 3.5: Gráfico da função de distribuição empírica da amostra aleatória dada no Exemplo 1 e curva da função de distribuição BS(0,1614;392,7623)

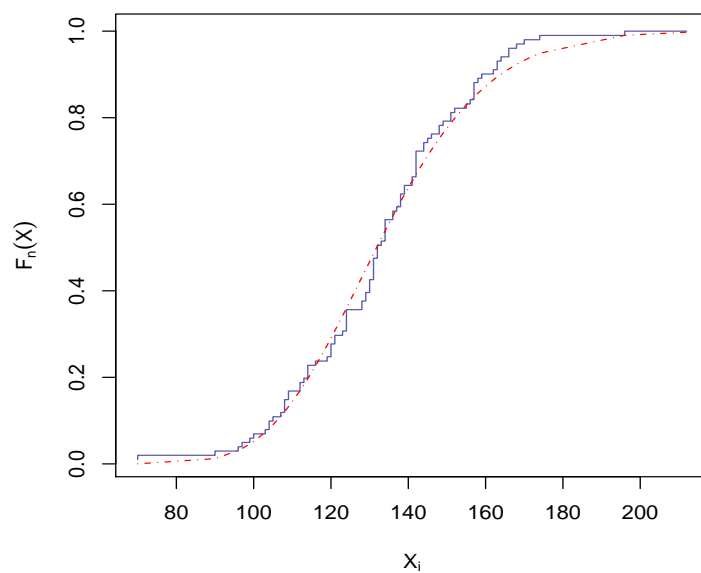


Figura 3.6: Gráfico da função de distribuição empírica da amostra aleatória dada no Exemplo 2 e curva da função de distribuição BS(0,1704;131,8188)

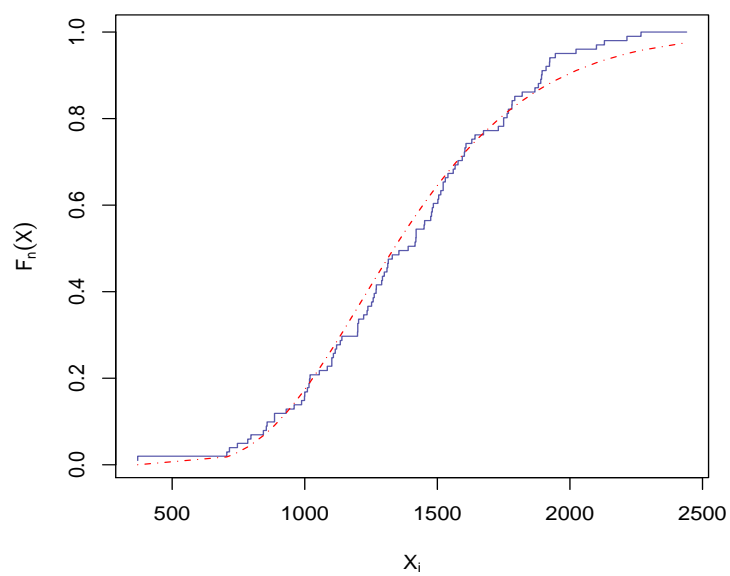


Figura 3.7: Gráfico da função de distribuição empírica da amostra aleatória dada no Exemplo 3 e curva da função de distribuição  $BS(0,3101;1336,377)$

# Capítulo 4

## Testes de bondade de ajuste para distribuição BS com censura

### 4.1 Introdução

Em Pettitt e Stephens (1976), as estatísticas de Anderson Darling e Cramér-von Mises foram modificadas com o intuito de serem utilizadas em testes de bondade de ajuste para amostras censuradas quando a distribuição é completamente conhecida. As estatísticas utilizadas neste estudo foram dadas por,

$$\begin{aligned} AD_{r,n} = & -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r (2i-1) [\log u_i - \log(1-u_i)] - 2 \sum_{i=1}^r \log(1-u_i) \\ & - \frac{1}{n} [(r-n)^2 \log(1-u_r) - r^2 \log u_r + n^2 u_r] \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$CM_{r,n} = \sum_{i=1}^r \left( u_i - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{r}{12n^2} + \frac{n}{3} \left( u_r - \frac{r}{n} \right)^2, \quad (4.2)$$

em que,  $u_i = F(X_{(i)}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ,  $n$  o tamanho da amostra,  $r$  o número de falhas ( $r = n - \psi n$ ) (sob controle do pesquisador) e  $u_r$  corresponde a censura (maior estatística de ordem).

Pettitt (1976) explorou testes de bondade de ajuste para testar a normalidade de amostras com dados censurados e média e variância desconhecidas. Pettitt (1977) considerou as modificações dadas em Pettitt e Stephens (1976) para testes de bondade

de ajuste com amostras censuradas e parâmetro desconhecido para a distribuição exponencial. Castro-Kuriss et al. (2009) propuseram testes de bondade de ajuste para a distribuição normal e lognormal com parâmetros desconhecidos e censura tipo II e em Castro-Kuriss (2011) foram estudados testes de bondade de ajuste para amostras com censura tipo II e parâmetros desconhecidos para distribuições de locação-escala.

Motivados pelos fatos que a principal característica dos dados em análise de sobrevivência é a presença de censura e na aplicabilidade da distribuição BS nesta área, vamos agora analisar testes de bondade de ajuste para a distribuição BS considerando dados censurados. Vale salientar que este tipo de estudo ainda não foi realizado.

Sabemos que a presença de censura traz problemas para a análise estatística, como por exemplo para fazer análise descritiva dos dados (veja mais em Colosimo e Giolo (2006)). Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X$  com distribuição BS, censura tipo II e porcentagem de censura  $\psi$ . Para averiguar se a amostra aleatória segue realmente distribuição BS devemos usar testes de bondade de ajuste que incorporem a censura. Vamos analisar, primeiramente, o que aconteceria se usássemos os testes de bondade de ajuste para distribuição BS trabalhados no Capítulo 3 em amostras com censura tipo II. Para isto vamos analisar dois casos: no caso I estimamos os parâmetros ignorando a presença de censura e no caso II incorporamos a censura no processo de estimação. Em seguida, vamos trabalhar testes de bondade de ajuste considerando estatísticas modificadas que incorporem a censura, a esta situação chamaremos de Caso III.

Em todos os casos precisamos simular amostras com distribuição BS, censura tipo II e porcentagem de censura  $\psi$ . Para isto, geramos  $n$  dados de uma distribuição BS com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  fixados. Os dados são ordenados,  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  e identifica-se a  $r$ -ésima observação, em que  $r = n - n\psi$  é o número de falhas. De modo que  $X_{(r)}$  passa a ser a censura e todos os valores acima desta observação terão o mesmo valor.

## 4.2 Caso I

Geramos 5000 amostras de tamanho  $n$  com distribuição BS, censura tipo II, porcentagem de censura  $\psi$ , parâmetro  $\alpha = 0,5$  e  $\beta = 1,0$ . Ajustamos os dados pela distribuição BS seguindo exatamente os mesmos passos trabalhados no Capítulo 3,

incluindo o mesmo processo para estimar os parâmetros, e obtemos as estatísticas de teste. Comparamos com os valores críticos encontrados na Seção (3.5.1) e calculamos a proporção de rejeição. Alternamos os valores de  $n = 25, 50$ ,  $\psi = 10\%, 20\%, 30\%$  e  $40\%$ ,  $\rho = 0,05; 0,10$  e obtemos os resultados da Tabela 4.1.

Observe que a medida que aumenta a porcentagem de censura aumenta a proporção de rejeição de que as amostras seguem distribuição BS, como o esperado. Note ainda que a estatística AD é a mais poderosa para rejeitar a suposição que amostras censuradas seguem distribuição BS.

Tabela 4.1: Resultados do estudo de simulação do caso I

	Estat. de teste	$n=25$					$n=50$				
		5%	10%	20%	30%	40%	5%	10%	20%	30%	40%
$\rho = 0,05$	$T_{0,5}$	0,0806	0,1400	0,3510	0,8186	0,9796	0,0960	0,2082	0,7352	0,9906	1,0000
	$T_{1,0}$	0,0734	0,1232	0,2920	0,7208	0,9422	0,0920	0,1878	0,6706	0,9748	1,0000
	$T_{1,5}$	0,0718	0,1220	0,2718	0,6640	0,8978	0,0918	0,1818	0,6238	0,9568	0,9998
	$T_{2,0}$	0,0750	0,1220	0,2632	0,6374	0,8672	0,0916	0,1756	0,5902	0,9360	0,9996
	$T_{4,0}$	0,0752	0,1268	0,2500	0,5902	0,8174	0,0880	0,1608	0,5086	0,8826	0,9960
	AD	0,1112	0,2188	0,6878	1,0000	1,0000	0,1140	0,3262	0,9972	1,0000	1,0000
	CM	0,0814	0,1460	0,4774	0,9984	1,0000	0,0750	0,1770	0,8618	1,0000	1,0000
	KS	0,0694	0,1020	0,2946	1,000	1,0000	0,0682	0,1214	0,8296	1,0000	1,0000
$\rho = 0,10$	$T_{0,5}$	0,1590	0,246	0,5358	0,9366	0,9966	0,1832	0,3398	0,8650	0,9986	1,0000
	$T_{1,0}$	0,1478	0,23	0,4694	0,8810	0,9896	0,1666	0,3120	0,8196	0,9950	1,0000
	$T_{1,5}$	0,1470	0,2222	0,4376	0,8414	0,9756	0,1640	0,2962	0,7766	0,9894	1,0000
	$T_{2,0}$	0,1484	0,2208	0,4252	0,8132	0,9634	0,1678	0,2886	0,7490	0,9792	0,9998
	$T_{4,0}$	0,1442	0,2106	0,3904	0,7460	0,9198	0,1666	0,2766	0,6864	0,9576	0,9996
	AD	0,2054	0,3746	0,8732	1,0000	1,0000	0,1140	0,3262	0,9972	1,0000	1,0000
	CM	0,1530	0,2524	0,6616	1,0000	1,0000	0,0750	0,1770	0,8618	1,0000	1,0000
	KS	0,1284	0,1874	0,4810	1,0000	1,0000	0,1276	0,2084	0,9672	1,0000	1,0000

### 4.3 Caso II

Geramos 5000 amostras de tamanho  $n$  com distribuição BS, censura tipo II e porcentagem de censura  $\psi$ . Ajustamos os dados pela distribuição BS seguindo os mesmos passos trabalhados no Capítulo 3, entretanto agora, quando formos estimar os parâmetros da distribuição vamos considerar a presença de censura e usaremos a função verossimilhança dada em (2.12). Ao obtermos as estatísticas de teste comparamos com os valores críticos encontrados na Seção (3.5.1) e calculamos a proporção de rejeição. Alternamos os valores de  $n = 25, 50$ ,  $\psi = 10\%, 20\%, 30\%$  e  $40\%$ ,  $\rho = 0,05; 0,10$  e obtemos os resultados da Tabela 4.2.

Assim como no Caso I a medida que aumentamos a porcentagem de censura a proporção de rejeição aumenta. Entretanto, quando utilizamos o processo de estimação que considera a presença de censura, a rejeição da hipótese dos dados possuírem distribuição BS diminui, o que era esperado, uma vez que assim os parâmetros foram estimados de forma mais adequada e haverá menos afastamentos em relação a distribuição que os dados estão sendo ajustados.

Tabela 4.2: Resultados do estudo de simulação do caso II

	Estat. de teste	$n=25$					$n=50$				
		5%	10%	20%	30%	40%	5%	10%	20%	30%	40%
$\rho = 0,05$	$T_{0,5}$	0,0530	0,0640	0,1208	0,5362	0,9274	0,099	0,1054	0,192	0,762	1,0000
	$T_{1,0}$	0,0410	0,0478	0,0888	0,4224	0,831	0,0846	0,0776	0,1236	0,6288	0,9996
	$T_{1,5}$	0,0378	0,0440	0,083	0,3806	0,7684	0,0776	0,0682	0,1078	0,5672	0,9960
	$T_{2,0}$	0,0366	0,0426	0,0822	0,3644	0,7342	0,072	0,0624	0,1042	0,5294	0,9874
	$T_{4,0}$	0,0354	0,0416	0,083	0,3396	0,6756	0,0598	0,0488	0,0966	0,4618	0,9536
	AD	0,0820	0,1264	0,4174	1,0000	1,0000	0,1174	0,2008	0,9514	1,0000	1,0000
	CM	0,0622	0,0758	0,2142	0,9886	1,0000	0,0828	0,1028	0,3878	1,0000	1,0000
	KS	0,0588	0,0606	0,1298	1,0000	1,0000	0,0696	0,0794	0,7288	1,0000	1,0000
$\rho = 0,10$	$T_{0,5}$	0,1150	0,1288	0,2380	0,7498	0,9864	0,1722	0,1878	0,3496	0,9054	1,0000
	$T_{1,0}$	0,0986	0,1060	0,1816	0,6280	0,9594	0,144	0,1394	0,2412	0,8226	1,0000
	$T_{1,5}$	0,0908	0,0938	0,1732	0,5722	0,9170	0,1336	0,1212	0,2046	0,7428	1,0000
	$T_{2,0}$	0,0896	0,0932	0,1690	0,5538	0,8894	0,1280	0,1148	0,191	0,6994	0,9992
	$T_{4,0}$	0,0796	0,0848	0,1556	0,4960	0,8302	0,1186	0,1024	0,1794	0,6366	0,9886
	AD	0,1572	0,2400	0,6832	1,0000	1,0000	0,208	0,3306	1,0000	1,0000	1,0000
	CM	0,1184	0,1592	0,3800	1,0000	1,0000	0,1456	0,1810	0,6518	1,0000	1,0000
	KS	0,1038	0,1098	0,2982	1,0000	1,0000	0,123	0,1344	0,9386	1,0000	1,0000



## 4.4 Caso III

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X$  com censura tipo II e porcentagem de censura  $\psi$ . Queremos testar a hipótese dada por,

$H_0$ :  $X$  segue distribuição Birnbaum-Saunders para algum  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ .

Contra,

$H_1$ :  $X$  não segue distribuição Birnbaum-Saunders.

Com este objetivo usaremos as estatísticas de teste obtidas em Pettitt e Stephens (1976) e dadas por (4.1) e (4.2).

Sejam  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(r)}$  as estatísticas de ordem de uma amostra aleatória censurada e que possui  $r$  falhas. Supomos verdadeira  $H_0$  e ajustamos os dados pela distribuição Birnbaum-Saunders, seguindo os seguintes passos,

- 1) obtemos as estimativas  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  utilizando o método de máxima verossimilhança que incorpora censura e é dado na Seção 2.1.5,
- 2) aplicamos a transformação integral de probabilidade  $u_i = F(X_{(i)}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ,
- 3) substituímos  $u_i$  em (4.1) e (4.2) e obtemos o valor das estatísticas de teste.

Rejeitamos a hipótese  $H_0$  a um nível de significância  $\rho$  se as estatísticas de teste ultrapassam os valores críticos determinados na Tabela 4.3.

## 4.5 Simulação

Nesta seção faremos estudos de simulação. Vamos determinar os valores críticos e o poder das estatísticas de teste em estudo.

### 4.5.1 Valores Críticos

Para determinar os valores críticos usamos método de Monte Carlo. Geramos 5000 amostras de tamanho  $n$  com distribuição BS, censura tipo II e porcentagem de censura  $\psi$ . Baseados em cada amostra é obtido um valor para cada estatística de teste em estudo. Depois disto foram ordenadas as estatísticas de teste calculadas. São determinados os quantis 95% e 90%, de modo que tem-se os valores críticos para nível de

significância iguais a  $\rho = 0,05$  e  $\rho = 0,10$ , respectivamente. Variamos,  $n = 10, 25, 50, 75$  e  $100$ ,  $\psi = 10\%, 20\%, 30\%$  e  $40\%$  e obtemos os resultados da Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Valores críticos das estatísticas de teste para amostras com tamanhos e porcentagens de censura indicadas.

Porcentagem de censura	$n$	$\rho=0,05$		$\rho=0,10$	
		$AD_{n,r}$	$CM_{n,r}$	$AD_{n,r}$	$CM_{n,r}$
10%	10	0,5980	0,1131	0,5022	0,0922
	25	0,6193	0,1158	0,5131	0,0953
	50	0,6454	0,1208	0,5324	0,0983
	75	0,6296	0,1183	0,5206	0,0976
	100	0,6413	0,1214	0,5319	0,0983
20%	10	0,5195	0,0974	0,4330	0,0804
	25	0,5483	0,1040	0,4491	0,0828
	50	0,5389	0,1034	0,4412	0,0835
	75	0,5384	0,1026	0,4487	0,0843
	100	0,5416	0,1035	0,4532	0,0844
30%	10	0,4288	0,0797	0,3644	0,0664
	25	0,4433	0,0801	0,3623	0,0652
	50	0,4604	0,0833	0,3735	0,0668
	75	0,4401	0,0818	0,3721	0,0671
	100	0,4501	0,0823	0,3751	0,0665
40%	10	0,3581	0,0617	0,3016	0,0517
	25	0,3710	0,0642	0,3109	0,0533
	50	0,3831	0,0650	0,3081	0,0517
	75	0,3727	0,0639	0,3097	0,0520
	100	0,3863	0,0662	0,3154	0,0526

## 4.5.2 Poder

Para avaliar o desempenho das estatísticas de teste aqui trabalhadas, vamos considerar as mesmas distribuições usadas no Capítulo 3 e a distribuição exponencial com função densidade,  $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ .

Para simular uma amostra com uma destas distribuições, censura tipo II e porcentagem de censura  $\psi$ , fazemos de forma análoga ao que foi feita para distribuição BS. Geramos  $n$  dados de cada distribuição com parâmetros fixados. Os dados são ordenados,  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  e identifica-se a  $r$ -ésima observação, em que  $r = n - n\psi$  é o número de falhas. De modo que  $X_{(r)}$  passa a ser a censura e os valores acima desta observação terão o mesmo valor.

Nas Tabelas 4.4 e 4.5 cada entrada é a proporção de rejeição da hipótese de nulidade baseada em 5000 amostras aleatórias simuladas com distribuição determinada pela linha, a estatística de teste é determinada em cada coluna e alternamos os valores de  $n = 25, 50$  e  $\psi = 10\%, 20\%, e 40\%$ ,  $\rho = 0, 05, 0, 10$ .

Baseados nas Tabelas 4.4 e 4.5 concluímos que conforme aumenta o tamanho da amostra maior o poder do teste (de modo que o teste não parece razoável para amostras pequenas), praticamente não há diferença de desempenho entre as duas estatísticas de teste, sendo a estatística  $CM_{r,n}$  levemente mais poderosa. Temos também que a porcentagem de censura na amostra praticamente não interfere no poder do teste. Concluimos que os testes baseados nas estatísticas modificadas são mais indicados para testar amostras censuradas.

Tabela 4.4: Poder estimado para testes baseados nas estatísticas, tamanho  $n$ , modelos e porcentagens de censura indicadas com  $\rho = 0,05$

Porc. de censura	Distribuição	$n = 10$		$n = 25$		$n = 50$		$n = 75$		$n = 100$	
		$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$	$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$	$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$	$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$	$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$
10%	BS(0.5)	0,0553	0,0534	0,0492	0,0496	0,0486	0,0486	0,0518	0,0532	0,0524	0,0504
	Exp(1)	0,3189	0,3396	0,6258	0,6420	0,8684	0,8730	0,9558	0,9576	0,9884	0,9884
	W(1)	0,3174	0,3375	0,6322	0,6462	0,8684	0,8796	0,9586	0,9594	0,9850	0,9852
	G(0.5)	0,2105	0,2252	0,4210	0,4342	0,6770	0,6860	0,8346	0,8390	0,9058	0,9068
	LN(1.0)	0,1048	0,1150	0,1252	0,1414	0,1742	0,1770	0,2014	0,2034	0,2508	0,2394
	HN	0,3537	0,3717	0,6874	0,7008	0,9186	0,9242	0,9864	0,9870	0,9934	0,9944
	P(4.0)	0,2989	0,3208	0,5910	0,6076	0,8180	0,8240	0,9230	0,9286	0,9710	0,9712
	BST(3)	0,1431	0,1447	0,2564	0,2514	0,4244	0,4042	0,5712	0,5374	0,6636	0,6234
	BST(5)	0,0927	0,0928	0,1402	0,1342	0,2086	0,1902	0,2766	0,2482	0,3398	0,3028
	BST(10)	0,0631	0,0627	0,0744	0,0756	0,0916	0,0858	0,1072	0,0952	0,1242	0,1078
BST(30)	0,0557	0,0534	0,0652	0,0632	0,0652	0,0632	0,0570	0,0564	0,0680	0,0662	
20%	BS(0.5)	0,0466	0,0494	0,042	0,042	0,0510	0,0498	0,0508	0,0496	0,0518	0,0496
	Exp(1)	0,3030	0,3234	0,6134	0,6220	0,8588	0,8576	0,9494	0,9478	0,9832	0,9828
	W(1)	0,3076	0,3290	0,6126	0,6244	0,8604	0,8598	0,9502	0,9510	0,9812	0,9816
	G(0.5)	0,1916	0,2090	0,4012	0,4090	0,6520	0,6436	0,8062	0,8024	0,8876	0,8840
	LN(1.0)	0,0996	0,1118	0,1268	0,1320	0,1824	0,1790	0,2166	0,2092	0,2630	0,2432
	HN	0,3118	0,3348	0,6542	0,6636	0,8974	0,8996	0,9730	0,9744	0,9892	0,9894
	P(4.0)	0,2978	0,3216	0,5898	0,6002	0,8244	0,8270	0,9286	0,9258	0,9744	0,9718
	BST(3)	0,1282	0,1342	0,2554	0,2410	0,4358	0,4040	0,5768	0,5418	0,6750	0,6334
	BST(5)	0,0770	0,0812	0,1364	0,1244	0,2138	0,1862	0,2842	0,2482	0,3500	0,3110
	BST(10)	0,0590	0,0644	0,0722	0,0672	0,095	0,083	0,1094	0,0910	0,1278	0,1076
BST(30)	0,0452	0,0472	0,0510	0,0512	0,0650	0,0582	0,0566	0,0500	0,0678	0,0636	
40%	BS(0.5)	0,0452	0,0436	0,0572	0,0526	0,0462	0,0516	0,0538	0,0554	0,0484	0,0482
	Exp(1)	0,2918	0,3162	0,5830	0,5940	0,8124	0,8212	0,9236	0,9246	0,9664	0,9678
	W(1)	0,2946	0,3214	0,5800	0,5935	0,8032	0,8124	0,9232	0,9252	0,9678	0,9680
	G(0.5)	0,1814	0,1980	0,3662	0,3738	0,5806	0,5850	0,738	0,738	0,8278	0,8270
	LN(1.0)	0,0908	0,1004	0,1446	0,1480	0,1870	0,1894	0,2330	0,2232	0,2692	0,2576
	HN	0,2780	0,3056	0,5922	0,6042	0,8338	0,8432	0,9378	0,9410	0,9698	0,9710
	P(4.0)	0,2862	0,3156	0,5820	0,5978	0,7942	0,8052	0,9046	0,9062	0,9582	0,9600
	BST(3)	0,1198	0,1278	0,2714	0,2520	0,4412	0,4176	0,5986	0,5638	0,6808	0,6472
	BST(5)	0,0814	0,0838	0,1534	0,1340	0,2202	0,2004	0,3000	0,2656	0,3568	0,3194
	BST(10)	0,0612	0,0636	0,0826	0,0724	0,0954	0,0890	0,1216	0,1062	0,1336	0,1156
BST(30)	0,0510	0,0488	0,0576	0,0566	0,0622	0,0628	0,0670	0,0582	0,0602	0,0564	

Tabela 4.5: Poder estimado para testes baseados nas estatísticas, tamanho  $n$ , modelos e porcentagens de censura indicadas com  $\rho = 0, 10$

Porc. de censura	Distribuição	$n = 10$		$n = 25$		$n = 50$		$n = 75$		$n = 100$	
		$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$	$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$	$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$	$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$	$AD_{r,n}$	$CM_{r,n}$
10%	BS(0,5)	0,1058	0,1070	0,0954	0,0962	0,0976	0,0984	0,1100	0,1048	0,1012	0,1044
	Exp(1)	0,3842	0,4106	0,6876	0,7022	0,9004	0,9034	0,9674	0,9670	0,9920	0,9922
	W(1,0)	0,3900	0,4172	0,6912	0,6996	0,9012	0,9042	0,9700	0,9692	0,9894	0,9894
	G(1,5)	0,2776	0,2970	0,4984	0,5086	0,7450	0,7506	0,8814	0,8766	0,9358	0,9388
	LN(1,0)	0,1752	0,1928	0,1934	0,2104	0,2466	0,2508	0,2884	0,2774	0,3426	0,3298
	HN	0,4136	0,4344	0,7442	0,7534	0,9384	0,9418	0,9904	0,9910	0,9958	0,9966
	P(4,0)	0,3696	0,3902	0,6468	0,6554	0,8558	0,8606	0,9450	0,9440	0,9818	0,9806
	BST(3)	0,2120	0,2204	0,3364	0,3266	0,5098	0,4916	0,6490	0,6184	0,7368	0,7014
	BST(5)	0,1516	0,1572	0,2072	0,1948	0,2856	0,2660	0,3632	0,3310	0,4268	0,3948
	BST(10)	0,1238	0,1280	0,1406	0,1352	0,1546	0,1448	0,1762	0,1586	0,1980	0,1828
	BST(30)	0,1058	0,1074	0,1034	0,1050	0,1250	0,1258	0,1130	0,1094	0,1150	0,1106
	20%	BS(0,5)	0,0942	0,1024	0,0974	0,1006	0,1012	0,0958	0,0970	0,0972	0,1004
Exp(1)		0,3712	0,3898	0,6746	0,6846	0,8894	0,8872	0,9598	0,9596	0,9878	0,9878
W(1)		0,3736	0,3964	0,6814	0,6912	0,8874	0,8924	0,9646	0,9644	0,9866	0,9864
G(0,5)		0,2656	0,2776	0,4886	0,4974	0,7232	0,7148	0,8548	0,8514	0,9146	0,9128
LN(1,0)		0,1652	0,1796	0,2028	0,2132	0,2644	0,2510	0,2972	0,2884	0,3422	0,3294
HN		0,3858	0,4046	0,7194	0,7304	0,9212	0,9228	0,9828	0,9822	0,9916	0,9924
P(4,0)		0,3688	0,3894	0,6496	0,6598	0,8624	0,8588	0,9430	0,9420	0,9806	0,9802
BST(3)		0,1960	0,1972	0,3336	0,3210	0,5234	0,4908	0,6460	0,6140	0,7386	0,7010
BST(5)		0,1396	0,1434	0,2104	0,1990	0,2982	0,2670	0,3634	0,3356	0,4304	0,3936
BST(10)		0,1166	0,1200	0,1348	0,1284	0,1618	0,1424	0,1698	0,1518	0,1942	0,1760
BST(30)		0,0970	0,0994	0,1008	0,1068	0,1210	0,1130	0,1112	0,1016	0,1106	0,1058
40%		BS(0,5)	0,0976	0,0924	0,1048	0,0984	0,1072	0,1014	0,1004	0,1046	0,1000
	Exp(1)	0,3574	0,3742	0,6338	0,6406	0,8528	0,8586	0,9402	0,9426	0,9776	0,9774
	W(1)	0,3570	0,3780	0,6360	0,6438	0,8470	0,8550	0,9414	0,9412	0,9762	0,9768
	G(0,5)	0,2532	0,2690	0,4372	0,4386	0,6556	0,6554	0,7946	0,7896	0,8666	0,8670
	LN(1,0)	0,1492	0,1634	0,2088	0,2108	0,2744	0,2690	0,3016	0,2980	0,3580	0,3454
	HN	0,3496	0,3692	0,6526	0,6588	0,8742	0,8774	0,9514	0,9542	0,9788	0,9802
	P(4,0)	0,3548	0,3776	0,6354	0,6446	0,8398	0,8442	0,9268	0,9284	0,9712	0,9714
	BST(3)	0,1886	0,1848	0,3378	0,3174	0,5278	0,5088	0,6608	0,6316	0,7450	0,7190
	BST(5)	0,1316	0,1320	0,2136	0,1982	0,3022	0,2788	0,3776	0,3442	0,4402	0,4114
	BST(10)	0,1184	0,1132	0,1392	0,1274	0,1734	0,1562	0,1894	0,1674	0,2108	0,1896
	BST(30)	0,1012	0,1002	0,1032	0,0982	0,1232	0,1188	0,1194	0,1142	0,1200	0,1168

## 4.6 Exemplos

Aplicaremos agora os testes estudados em dados reais. O banco de dados do Exemplo 1 foi obtido de Lemonte e Ferrari (2011), e os bancos de dados que serão empregados nos Exemplos 2 e 3 foram obtidos de Castro-Kuriss (2011).

### 4.6.1 Exemplo 1

Seguindo o exemplo apresentado em Lemonte e Ferrari (2011), vamos considerar o banco dados reportado por Birnbaum-Saunders (1969b) e já estudado no Exemplo 2 do Capítulo 3. (Os dados estão na Tabela E.2). Vamos testar a hipótese da amostra seguir distribuição Birnbaum-Saunders se considerarmos, assim como Lemonte e Ferrari (2011), o número de falhas  $r = 80$ . Sobrando assim 21 dados censurados. Os parâmetros foram estimados em  $\hat{\alpha} = 0,1750$  e  $\hat{\beta} = 132,2524$  pelo método de máxima verossimilhança que incorpora a presença de censura. De onde segue que,  $AD_{r,n} = 0,3543$  e  $CM_{r,n} = 0,0718$ . Para  $n = 101$  e considerando nível de significância  $\rho = 0,05$ , os valores críticos para as estatísticas de teste em estudo são dadas por,  $ad_{r,n} = 0,6079$  e  $cm_{r,n} = 0,1215$ . De modo que não rejeitamos a hipótese da amostra seguir distribuição Birnbaum-Saunders. No entanto, realizando os testes como indicado nos Casos I e II, rejeitamos, em todas as situações consideradas, a hipótese da amostra (com  $r = 80$ ) seguir distribuição Birnbaum-Saunders.

Vale salientar que Ng et al. (2006) também trabalham com esta amostra considerando presença de censura tipo II e diferentes valores para o número de falhas  $r$ .

### 4.6.2 Exemplo 2

Castro-Kuriss (2011) reportou 36 dados de um estudo conduzido pelo Dr. William Meeker em 1999. O conjunto de dados foi fornecido para o autor pelo Dr. Luis A. Escobar e está resumido na Tabela E.4, no apêndice D, onde os valores indicados com \* são as observações censuradas. Reproduzindo a descrição dada por Castro-Kuriss (2011), o estudo consistiu num experimento fatorial para comparar os tempos de vida de uma mola em função da temperatura de processamento e do deslocamento no teste de mola. A variável aleatória de interesse corresponde aos  $k$ -ciclos obtidos com o

golpe em um nível de temperatura com dois diferentes métodos, um deles era um novo método enquanto o outro o velho. Em cada nível de temperatura, o *status* para cada observação (falha ou censura) foi registrado. A amostra consiste de  $n = 36$  observações com 3 delas sendo censuras.

Queremos testar se a amostra censurada pode vir de uma distribuição BS. Os parâmetros foram estimados em  $\hat{\alpha} = 1,0491$  e  $\hat{\beta} = 1646,0927$  pelo método de máxima verossimilhança que incorpora a presença de censura. De onde segue que,  $AD_{r,n} = 0,6475$  e  $CM_{r,n} = 0,1305$ . Para  $n = 36$  e considerando nível de significância  $\rho = 0,05$ , os valores críticos para as estatísticas de teste em estudo são dadas por,  $ad_{r,n} = 0,6541$  e  $cm_{r,n} = 0,1231$ . De modo que, enquanto a estatística de teste  $CM_{r,n}$  rejeita a hipótese da amostra aleatória pertencer a distribuição BS, a estatística  $AD_{r,n}$  não rejeita.

Castro-Kuriss (2011) tinha como objetivo testar se a amostra censurada poderia vir de uma distribuição exponencial biparamétrica. Vale salientar que nenhum de seus estudos rejeitou esta possibilidade a um nível de significância de 0,05.

### 4.6.3 Exemplo 3

Em Castro-Kuriss (2011) encontramos 34 dados analisados por Lawless (2003) e apresentados em Wilk et al. (1962). Estes dados consistem em tempos de vidas de transistores obtidos a partir de um teste de vida acelerado. A amostra tem tamanho 34 é censurada e o esquema de censura é o tipo II, sendo 3 observações censuradas. Os tempos de vida (em semanas) são apresentados na Tabela E.5, no Apêndice D (os dados censurados são indicado por asteriscos). Castro-Kuriss (2011) chama atenção para o fato que os dados são fortemente arredondados. Queremos testar se a amostra censurada segue uma distribuição BS. Os parâmetros foram estimados em  $\hat{\alpha} = 0,8742$  e  $\hat{\beta} = 15,0799$  pelo método de máxima verossimilhança que incorpora a presença de censura. De onde segue que,  $AD_{r,n} = 0,6436$  e  $CM_{r,n} = 0,1413$ . Para  $n = 34$  e considerando nível de significância  $\rho = 0,05$ , os valores críticos para as estatísticas de teste em estudo são dadas por,  $ad_{r,n} = 0,6452$  e  $cm_{r,n} = 0,1202$ . De modo que, enquanto a estatística de teste  $CM_{r,n}$  rejeita a hipótese da amostra aleatória pertencer a distribuição BS, a estatística  $AD_{r,n}$  não rejeita.

Assim como no Exemplo 2, Castro-Kuriss (2011) tinha como objetivo testar se a amostra censurada poderia vir de uma distribuição exponencial biparamétrica. Neste

caso um de seus testes rejeita a hipótese disto acontecer enquanto a outra estatística de teste não rejeita. Castro-Kuriss (2011) relata ainda, a partir de uma análise gráfica, que os pontos seguem uma distribuição assimétrica e conclui que há indícios de uma má especificação da distribuição postulada, neste caso o modelo exponencial.



# Capítulo 5

## Trabalhos Futuros

Podemos citar como possíveis trabalhos futuros,

- Avaliar o desempenho de estatísticas de função característica empírica,  $T$ , considerando outras funções pesos, diferentes da proposta por Meintanis (2010).
- Considerar as estatísticas de teste estudadas em Castro-Kuriss et al. (2009) para testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders.
- Avaliar testes de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada proposta Díaz-Garcia e Leiva (2005).

# Apêndice A

## Cálculo das estatísticas de função de distribuição empírica a serem implementadas

Antes do cálculo das estatísticas função de distribuição empírica a serem implementadas apresentaremos alguns conceitos que serão utilizados.

### A.1 Preliminares

Inicialmente, faremos as seguintes considerações,

- Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória que tem função de distribuição  $F$ .
- $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  são as estatísticas de ordem da amostra  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .
- A função de distribuição empírica pode ser escrita em termos das estatísticas de ordem de modo que, se  $x \in [X_{(k)}, X_{(k+1)}]$  então,  $F_n(x) = \frac{k}{n}$ .
- Do fato de  $F$  ser não decrescente segue que,  $I(X_i \leq x) = 0 \Leftrightarrow X_i \geq x \Leftrightarrow F(X_i) \geq F(x) \Leftrightarrow I(F(X_i) \leq F(x)) = 0$ . Analogamente provamos que  $I(X_i \leq x) = 1 \Leftrightarrow I(F(X_i) \leq F(x)) = 1$ . Portanto,

$$I(X_i \leq x) = I(F(X_i) \leq F(x)) \tag{A.1}$$

- Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F$ . A transformação de  $X$  tal que  $Y = F(X)$  é denominada transformação integral de probabilidade.
- **Teorema A.1 (Teorema da transformação de probabilidade)** *Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com função de distribuição  $F$ . Então,  $U = F(X)$  terá distribuição Uniforme Contínua em  $[0, 1]$ . Vale a recíproca, sendo  $U \sim U_c[0, 1]$ , então  $X = F^{-1}(U)$  terá função de distribuição  $F$ .*
- Da definição de função de distribuição empírica e de (A.1) segue que,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(F(X_i) \leq F(x)) \quad (\text{A.2})$$

Do teorema da transformação de probabilidade e de (A.2) temos,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(U_i \leq F(x))$$

em que os  $U_i$ 's são variáveis aleatórias uniformes contínuas no intervalo  $(0, 1)$  e  $0 \leq F(x) \leq 1$ . Então,  $F_n(x) = U_n(F(x))$  em que  $U_n(t)$  é a função de distribuição empírica de uma amostra de variáveis aleatórias  $U(0,1)$ .

- Redefinindo  $F(x) = t$  temos que  $F_n(x) = U_n(t)$ . Assim no lugar de trabalhar com a versão original podemos trabalhar com a versão modificada usando transformação integral de probabilidade. Assim tomamos,  $F(X_i; \hat{\theta}) = U_i$ ,  $F(x; \hat{\theta}) = t$  e  $F_n(x; \hat{\theta}) = U_n(t)$ .

## A.2 Cálculo da estatística de Cramér-von Mises

A estatística de Cramér-von Mises foi dada em (3.7) por,

$$CM = n \int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x) - F(x; \hat{\theta})\}^2 dF(x; \hat{\theta}).$$

Como  $F$  é a distribuição referência especificada na hipótese nula podemos usar a versão modificada proposta acima e assim,

$$CM = n \int_0^1 (U_n(t) - t)^2 dt$$

onde,  $t = F(x, \hat{\theta})$ ,  $0 \leq t \leq 1$  e  $U_n(t)$  é a função de distribuição empírica de uma amostra de variáveis aleatórias  $U(0,1)$ .

Escrevendo em função das estatísticas de ordem e usando a função de distribuição empírica em sua forma escada temos,

$$CM = \sum_{j=0}^n \int_{u_j}^{u_{j+1}} \left( \frac{j}{n} - t \right)^2 dt \quad (\text{A.3})$$

em que  $u_j = U_{(j)}$ . Ou seja,  $0 = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+1} = 1$  são as estatísticas de ordem de uma variável aleatória  $U(0, 1)$ .

Note que,

$$\begin{aligned} \int_{u_j}^{u_{j+1}} \left( \frac{j}{n} - t \right)^2 dt &= \int_{u_j}^{u_{j+1}} \left( \frac{j^2}{n^2} - \frac{2jt}{n} + t^2 \right) dt \\ &= \left( \frac{j^2}{n^2} t - \frac{2j}{n} \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{u_j}^{u_{j+1}} \\ &= \frac{j^2}{n^2} (u_{j+1} - u_j) - \frac{2j}{n} \left( \frac{u_{j+1}^2}{2} - \frac{u_j^2}{2} \right) + \left( \frac{u_{j+1}^3}{3} - \frac{u_j^3}{3} \right) \\ &= \frac{j^2}{n^2} (u_{j+1} - u_j) - \frac{j}{n} (u_{j+1}^2 - u_j^2) + \frac{1}{3} (u_{j+1}^3 - u_j^3) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Logo, substituindo (A.4) em (A.3),

$$\begin{aligned} CM &= n \sum_{j=0}^n \left[ \frac{j^2}{n^2} (u_{j+1} - u_j) - \frac{j}{n} (u_{j+1}^2 - u_j^2) + \frac{1}{3} (u_{j+1}^3 - u_j^3) \right] \\ &= n \sum_{j=0}^n \frac{j^2}{n^2} (u_{j+1} - u_j) - n \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} (u_{j+1}^2 - u_j^2) + n \sum_{j=0}^n \frac{1}{3} (u_{j+1}^3 - u_j^3) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j^2 (u_{j+1} - u_j) - \sum_{j=0}^n j (u_{j+1}^2 - u_j^2) + \frac{n}{3} \sum_{j=0}^n (u_{j+1}^3 - u_j^3) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Tomando,  $A = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j^2 (u_{j+1} - u_j)$ ,  $B = \sum_{j=0}^n j (u_{j+1}^2 - u_j^2)$  e  $C = \frac{n}{3} \sum_{j=0}^n (u_{j+1}^3 - u_j^3)$ , temos,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j^2 (u_{j+1} - u_j) \\
&= \frac{1}{n} \{0(u_1 - u_0) + 1(u_2 - u_1) + 2^2(u_3 - u_2) + \cdots + (n-1)^2(u_n - u_{n-1}) \\
&\quad + n^2(u_{n+1} - u_n)\} \\
&= \frac{1}{n} \{-0u_0 + (0-1)u_1 + (1-2^2)u_2 + (2^2-3^2)u_3 + \cdots + ((n-1)^2 - n^2)u_n \\
&\quad + n^2u_{n+1}\} \\
&= \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n ((j-1)^2 - j^2)u_j + n^2u_{n+1} \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n ((j^2 - 2j + 1 - j^2)u_j + n^2) \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n (-2j + 1)u_j + n^2 \right] \\
&= -\frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n (2j-1)u_j \right] + n \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Do cálculo de  $B$ ,

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{j=0}^n j(u_{j+1}^2 - u_j^2) \\
&= 0(u_1^2 - u_0^2) + 1(u_2^2 - u_1^2) + 2(u_3^2 - u_2^2) + 3(u_4^2 - u_3^2) + \cdots + (n-1)(u_n^2 - u_{n-1}^2) \\
&\quad + n(u_{n+1}^2 - u_n^2) \\
&= -u_1^2 + (1-2)u_2^2 + (2-3)u_3^2 + (3-4)u_4^2 + \cdots + (n-1-n)u_n^2 + nu_{n+1}^2 \\
&= -\sum_{j=1}^n u_j^2 + n. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Finalmente de  $C$  é obtido,

$$\begin{aligned}
C &= \frac{n}{3} \sum_{j=0}^n j(u_{j+1}^3 - u_j^3) \\
&= \frac{n}{3} \sum_{j=0}^n j(u_{j+1}^3 - u_j^3) \\
&= \frac{n}{3} (u_1^3 - u_0^3 + u_2^3 - u_1^3 + u_3^3 - u_2^3 + u_4^3 - u_3^3 + \cdots + u_n^3 - u_{n-1}^3 + u_{n+1}^3 - u_n^3) \\
&= \frac{n}{3} (-u_0^3 + u_{n+1}^3) \\
&= \frac{n}{3} (-0 + 1) \\
&= \frac{n}{3} \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (A.6), (A.7) e (A.8) em (A.5) segue que,

$$\begin{aligned}
\text{CM} &= -\frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n (2j-1)u_j \right] + n - \left( -\sum_{j=1}^n u_j^2 + n \right) + \frac{n}{3} \\
&= -\frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n (2j-1)u_j \right] + n + \sum_{j=1}^n u_j^2 - n + \frac{n}{3} \\
&= -\frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n (2j-1)u_j \right] + \sum_{j=1}^n u_j^2 + \frac{n}{3} \\
&= \sum_{j=1}^n \left\{ -\frac{(2j-1)}{n} u_j + u_j^2 \right\} + \frac{n}{3}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Seja  $D = -\frac{(2j-1)}{n}u_j + u_j^2$  temos,

$$D = -\frac{(2j-1)}{n}u_j + u_j^2 = u_j^2 - 2\frac{(j-1/2)}{n}u_j$$

Completando quadrados,

$$\begin{aligned}
D &= \left( u_j^2 - 2\frac{(j-1/2)}{n}u_j + \frac{(j-1/2)^2}{n^2} \right) - \frac{(j-1/2)^2}{n^2} \\
&= \left( \frac{(j-1/2)}{n} - u_j \right)^2 - \frac{(j-1/2)^2}{n^2}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Substituindo (A.10) em (A.9),

$$\begin{aligned}
\text{CM} &= \sum_{j=1}^n \left[ \left( \frac{(j-1/2)}{n} - u_j \right)^2 - \frac{(j-1/2)^2}{n^2} \right] + \frac{n}{3} \\
&= \sum_{j=1}^n \left( \frac{(j-1/2)}{n} - u_j \right)^2 - \sum_{j=1}^n \left( \frac{(j-1/2)}{n} \right)^2 + \frac{n}{3}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Tomando,

$$\begin{aligned}
E &= -\sum_{j=1}^n \left( \frac{(j-1/2)}{n} \right)^2 + \frac{n}{3} \\
&= \frac{n}{3} - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{4} \\
&= \frac{n}{3} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} + \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{4n} \\
&= \frac{4n^2 - 2(n+1)(2n+1)2 + 6(n+1) - 3}{12n} \\
&= \frac{1}{12n}.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Portanto, usando (A.12) podemos reescrever (A.11) como,

$$\text{CM} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{(j-1/2)}{n} - u_j \right)^2 + \frac{1}{12n}.$$

### A.3 Cálculo da estatística Anderson-Darling

A estatística de Anderson-Darling foi definida em (3.8) por,

$$AD = \frac{n \int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x) - F(x; \hat{\theta})\}^2}{F(x, \hat{\theta})(1 - F(x, \hat{\theta}))} dF(x; \hat{\theta})$$

Analogamente ao que foi feito na estatística de Cramér-von Mises vamos considerar  $F(x, \theta) = t$ , e  $F_n(x) = U_n(t)$  e usar a definição de função de distribuição empírica em sua forma escada. De forma que,

$$\begin{aligned} AD &= n \int_0^1 \frac{\{U_n(t) - t\}^2}{\{t(1-t)\}} dt \\ &= n \sum_{j=0}^n \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{\{j/n - t\}^2}{t(1-t)} dt \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Tomemos  $\Delta_j = \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{\{j/n - t\}^2}{t(1-t)} dt$ . Temos,

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{\{j/n - t\}^2}{t(1-t)} dt = \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{(j^2/n^2) - 2(j/n)t + t^2}{t(1-t)} dt \\ &= \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{j^2}{n^2} \frac{1}{t(1-t)} dt - \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{2j}{n} \frac{1}{(1-t)} dt + \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{t}{(1-t)} dt \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Façamos,  $A_1 = \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{j^2}{n^2} \frac{1}{t(1-t)} dt$ ,  $B_1 = - \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{2j}{n} \frac{1}{(1-t)} dt$  e  $C_1 = \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{t}{(1-t)} dt$ .

Temos,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{j^2}{n^2} \frac{1}{t(1-t)} dt = \frac{j^2}{n^2} \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{1}{t(1-t)} dt = \frac{j^2}{n^2} \int_{u_j}^{u_{j+1}} \left[ \frac{1}{t} + \frac{1}{(1-t)} \right] dt \\ &= \frac{j^2}{n^2} (\log u_{j+1} - \log(1 - u_{j+1}) - \log u_j + \log(1 - u_j)). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$B_1$  é dado por,

$$\begin{aligned} B_1 &= - \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{2j}{n} \frac{1}{(1-t)} dt = \frac{2j}{n} \log(1 - u_{j+1}) - \frac{2j}{n} \log(1 - u_j) \\ &= \frac{2j}{n} (\log(1 - u_{j+1}) - \log(1 - u_j)). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

E  $C_1$ ,

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{t}{(1-t)} dt = -u_{j+1} - \log(1 - u_{j+1}) + u_j + \log(1 - u_j) \\ &= (u_j - u_{j+1}) + (\log(1 - u_j) - \log(1 - u_{j+1})). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo (A.15), (A.16) e (A.17) em (A.14) segue que,

$$\begin{aligned}\Delta_j &= \frac{j^2}{n^2}(\log(1 - u_j) - \log(1 - u_{j+1})) + \frac{j^2}{n^2}(\log(u_{j+1}) - \log u_j) \\ &\quad + \frac{2j}{n}(\log(1 - u_{j+1}) - \log(1 - u_j)) + (u_j - u_{j+1}) + (\log(1 - u_j) - \log(1 - u_{j+1})).\end{aligned}$$

De modo que, substituindo o resultado acima em (A.13) temos,

$$\begin{aligned}\text{AD} &= n \sum_{j=0}^n \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{\{j/n - t\}^2}{t(1-t)} dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j^2(\log(1 - u_j) - \log(1 - u_{j+1})) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j^2(\log(u_{j+1}) - \log u_j) \\ &\quad + \sum_{j=0}^n 2j(\log(1 - u_{j+1}) - \log(1 - u_j)) + n \sum_{j=0}^n (u_j - u_{j+1}) \\ &\quad + n \sum_{j=0}^n (\log(1 - u_j) - \log(1 - u_{j+1})).\end{aligned}\tag{A.18}$$

Façamos,  $D_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j^2(\log(1 - u_j) - \log(1 - u_{j+1}))$ ,  $E_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j^2(\log(u_{j+1}) - \log u_j)$ ,  $F_1 = \sum_{j=0}^n 2j(\log(1 - u_{j+1}) - \log(1 - u_j))$ ,  $G_1 = n \sum_{j=0}^n (u_j - u_{j+1})$ ,  $H_1 = n \sum_{j=0}^n (\log(1 - u_j) - \log(1 - u_{j+1}))$ .

Temos,

$$\begin{aligned}D_1 &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j^2(\log(1 - u_j) - \log(1 - u_{j+1})) \\ &= \frac{1}{n} \{0(\log(1 - u_0) - \log(1 - u_1)) + 1(\log(1 - u_1) - \log(1 - u_2)) \\ &\quad + 2^2(\log(1 - u_2) - \log(1 - u_3)) + 3^2(\log(1 - u_3) - \log(1 - u_4)) + \dots \\ &\quad + (n-1)^2(\log(1 - u_{n-1}) - \log(1 - u_n)) + n^2(\log(1 - u_n) - \log(1 - u_{n+1}))\} \\ &= \frac{1}{n} \{ \log(1 - u_1) + (2^2 - 1) \log(1 - u_2) + (3^2 - 2^2) \log(1 - u_3) + \dots \\ &\quad + (n^2 - (n-1)^2) \log(1 - u_n) - n^2 \log(1 - u_{n+1}) \} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^n (j^2 - (j-1)^2) \log(1 - u_j) \right] - n^2 \log(1 - u_{n+1}) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^n (2j-1) \log(1 - u_j) \right] - n^2 \log(1 - u_{n+1}) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) \log(1 - u_j) - n \log(1 - u_{n+1}).\end{aligned}\tag{A.19}$$



$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j^2 (\log(u_{j+1}) - \log u_j) \\
&= \frac{1}{n} \{0 \log u_1 - 0 \log u_0 + 1(\log u_2 - \log u_1) + 2^2(\log u_3 - \log u_2) + \cdots \\
&\quad + (n-1)^2(\log u_n - \log u_{n-1}) + n^2(\log u_{n+1} - \log u_n)\} \\
&= \frac{1}{n} \{-\log u_1 + (1-2^2)\log u_2 + (2^2-3^2)\log(u_3) + \cdots + ((n-1)^2 - n^2)\log u_n \\
&\quad + n^2 \log u_{n+1}\} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n ((j-1)^2 - j^2) \log u_j + n \log u_{n+1} \\
&= -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) \log u_j + n \log u_{n+1}. \tag{A.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \sum_{j=0}^n 2j(\log(1-u_{j+1}) - \log(1-u_j)) \\
&= 2[1(\log(1-u_2) - \log(1-u_1)) + 2(\log(1-u_3) - \log(1-u_2)) \\
&\quad + 3(\log(1-u_4) - \log(1-u_3)) + \cdots + (n-1)(\log(1-u_n) - \log(1-u_{n-1})) \\
&\quad + n(\log(1-u_{n+1}) - \log(1-u_n))] \\
&= -2 \sum_{j=1}^n \log(1-u_j) + 2n \log(1-u_{n+1}). \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= n \sum_{j=0}^n (u_j - u_{j+1}) = n[(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{n-1} - u_n) \\
&\quad + (u_n - u_{n+1})] \\
&= n(u_0 - u_{n+1}). \tag{A.22}
\end{aligned}$$

E  $H_1$  é dado por,

$$\begin{aligned}
H_1 &= n \sum_{j=0}^n (\log(1-u_j) - \log(1-u_{j+1})) \\
&= n\{[\log(1-u_0) - \log(1-u_1)] + [\log(1-u_1) - \log(1-u_2)] \\
&\quad + [\log(1-u_2) - \log(1-u_3)] + \cdots + [\log(1-u_{n-1}) - \log(1-u_n)] \\
&\quad + [\log(1-u_n) - \log(1-u_{n+1})]\} \\
&= n \log(1-u_0) - n \log(1-u_{n+1}). \tag{A.23}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (A.19), (A.20), (A.21), (A.22) e (A.23) em (A.18) podemos reescrever a estatística Anderson-Darling como,

$$\begin{aligned}
AD &= \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) \log(1-u_j) \right] - n \log(1-u_{n+1}) - \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) \log u_j \right] \\
&\quad + n \log u_{n+1} - 2 \sum_{j=1}^n \log(1-u_j) + 2n \log(1-u_{n+1}) + n(u_0 - u_{n+1}) \\
&\quad + n \log(1-u_0) - n \log(1-u_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n (2j-1) \log(1-u_j) - (2j-1) \log(u_j) - 2n \log(1-u_j) \right] + n(u_0 - u_n + 1) \\
&= -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [(2j-1) \log(u_j) + (2n+1-2j) \log(1-u_j)] \tag{A.24}
\end{aligned}$$

## Apêndice B

# Demonstração do procedimento proposto na Seção (3.3)

Vamos agora apresentar a prova heurística dada por Chen e Balakrishnan (1995) para o procedimento de testes de bondade de ajuste apresentado na Seção (3.3). Sejam  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  variáveis aleatórias normais padrão independentes e identicamente distribuídas. E seja  $s_Z^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$ .

Para testar a normalidade quando tanto a média quanto a variância são desconhecidas, o passo chave para a aproximação da função de distribuição empírica é estudar o limite do seguinte processo empírico:

$$A_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left\{ I \left[ \Phi \left( \frac{Z_i - \bar{Z}}{s_z} \right) \leq t \right] - t \right\}.$$

Agora sejam  $Y_i = \Phi^{-1}(F(X_i; \hat{\theta}))$  e  $S_y^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ . Para o procedimento proposto precisamos estudar a sequência,

$$B_n(t) = \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I \left[ \Phi \left( \frac{Y_i - \bar{Y}}{s_y} \right) \leq t \right] - t \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
A_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left\{ I \left[ \Phi \left( \frac{Z_i - \bar{Z}}{s_z} \right) \leq t \right] - t \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left\{ I \left[ \frac{Z_i - \bar{Z}}{s_z} \leq \Phi^{-1}(t) \right] - t \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left\{ I [Z_i - \bar{Z} \leq s_z \Phi^{-1}(t)] - t \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left\{ I [Z_i \leq \bar{Z} + s_z \Phi^{-1}(t)] - t \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left\{ I [\Phi(Z_i) \leq \Phi(\bar{Z} + s_z \Phi^{-1}(t))] - t \right\} \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Do teorema da transformação de probabilidade segue que  $U_i = \Phi(Z_i)$ , tem distribuição uniforme contínua em  $[0, 1]$ . Então,

$$A_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left\{ I [U_i \leq \Phi(\bar{Z} + s_z \Phi^{-1}(t))] - t \right\} \tag{B.3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
B_n(t) &= \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I \left[ \Phi \left( \frac{Y_i - \bar{Y}}{s_y} \right) \leq t \right] - t \right\} \\
&= \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I \left[ \frac{Y_i - \bar{Y}}{s_y} \leq \Phi^{-1}(t) \right] - t \right\} \\
&= \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I [Y_i - \bar{Y} \leq s_y \Phi^{-1}(t)] - t \right\} \\
&= \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I [Y_i \leq \bar{Y} + s_y \Phi^{-1}(t)] - t \right\} \\
&= \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I [\Phi(Y_i) \leq \Phi(\bar{Y} + s_y \Phi^{-1}(t))] - t \right\} \\
&= \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I [F(X_i; \hat{\theta}) \leq \Phi(\bar{Y} + s_y \Phi^{-1}(t))] - t \right\} \\
&= \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I [X_i \leq F^{-1}(\Phi(\bar{Y} + s_y \Phi^{-1}(t)); \hat{\theta})] - t \right\} \\
&= \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I [F(X_i; \theta) \leq F(F^{-1}(\Phi(\bar{Y} + s_y \Phi^{-1}(t)); \hat{\theta}); \theta)] - t \right\} \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Note que  $U_i = F(X_i, \theta)$  também tem distribuição uniforme contínua no intervalo

$[0, 1]$  e podemos reescrever (B.5) como,

$$B_n(t) = \sqrt{(n)} \sum_{i=1}^n \left\{ I \left[ U_i \leq F(F^{-1}(\Phi(\bar{Y} + s_y \Phi^{-1}(t))); \hat{\boldsymbol{\theta}}); \boldsymbol{\theta} \right] - t \right\} \quad (\text{B.5})$$

Do identidade  $F(F^{-1}(x; \boldsymbol{\theta})) = x$ , segue que, para  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  próximo de  $\boldsymbol{\theta}$ ,

$$F(F^{-1}(\Phi(\bar{Y} + s_y \Phi^{-1}(t))); \hat{\boldsymbol{\theta}}); \boldsymbol{\theta} \approx \Phi(\bar{Y} + s_y \Phi^{-1}(t)) \quad (\text{B.6})$$

Ainda considerando  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  próximo de  $\boldsymbol{\theta}$  segue que  $Y_i = \Phi^{-1}(F(X_i; \hat{\boldsymbol{\theta}})) \sim N(0, 1)$ .

Com efeito,

$$P(Y_i) = P(\Phi^{-1}(F(X_i; \hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq y) = P((F(X_i; \hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq \Phi(y)) = \Phi(y), \quad (\text{B.7})$$

em que  $\Phi$  é a função distribuição acumulada de uma  $N(0, 1)$ . Logo,  $Y_i = \Phi^{-1}(F(X_i; \hat{\boldsymbol{\theta}})) \sim N(0, 1)$ .

E assim, quando  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é próximo de  $\boldsymbol{\theta}$  temos,  $\bar{Y} \approx \bar{Z}$  e  $s_Y \approx s_Z$ . Portanto,  $B_n$  e  $A_n$  possuem comportamentos semelhantes. De modo que é de interesse saber as condições sob as quais  $B_n$  e  $A_n$  terão o mesmo limite quando  $n \rightarrow \infty$ .

## Apêndice C

# Justificativa que a estimação de $\alpha$ não interfere nas estatísticas de teste

Vamos justificar agora porque a estimação de  $\alpha$  não interfere nas estatísticas de teste.

Note que no processo de calcular a estatística de teste o primeiro passo é determinar  $\hat{U}_j = F(X_{(j)}; \hat{\theta})$ , onde  $F$  é a função de distribuição acumulada da Birnbaum-Saunders. De modo que,

$$\hat{U}_j = \Phi \left[ \frac{1}{\hat{\alpha}} \left\{ \left( \frac{x_{(j)}}{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{\hat{\beta}}{x_{(j)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]. \quad (\text{C.1})$$

O próximo passo é calcular,

$$\begin{aligned} Y_j &= \Phi^{-1}(\hat{U}_j) \\ &= \Phi^{-1} \left( \Phi \left[ \frac{1}{\hat{\alpha}} \left\{ \left( \frac{x_{(j)}}{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{\hat{\beta}}{x_{(j)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \right) \\ &= \left[ \frac{1}{\hat{\alpha}} \left\{ \left( \frac{x_{(j)}}{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{\hat{\beta}}{x_{(j)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Defina,  $g : (0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que,  $g(\hat{\beta}, x_{(j)}) = \left( \frac{x_{(j)}}{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{\hat{\beta}}{x_{(j)}} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Logo,

$$Y_j = \frac{1}{\hat{\alpha}} g(\hat{\beta}, x_{(j)}).$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\hat{\alpha}}g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right) \\ &= \frac{1}{\hat{\alpha}}\mathbb{E}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right), \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\alpha}}g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right) \\ &= \frac{1}{\hat{\alpha}^2}\text{Var}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right). \end{aligned}$$

Para determinar  $Z_j$  temos,

$$\begin{aligned} Z_j &= \frac{\frac{1}{\hat{\alpha}}g(\hat{\beta}, x_{(j)}) - \frac{1}{\hat{\alpha}}\mathbb{E}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right)}{\sqrt{\frac{1}{\hat{\alpha}^2}\text{Var}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right)}} \\ &= \frac{\frac{1}{\hat{\alpha}}\left\{g(\hat{\beta}, x_{(j)}) - \mathbb{E}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right)\right\}}{\frac{1}{\hat{\alpha}}\sqrt{\text{Var}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right)}} \\ &= \frac{g(\hat{\beta}, x_{(j)}) - \mathbb{E}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right)}{\sqrt{\text{Var}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right)}}. \end{aligned}$$

Então ao aplicarmos o quarto passo proposto por Meintanis (2010) obtemos,

$$\hat{u}_j = \Phi(Z_j) = \Phi\left(\frac{g(\hat{\beta}, x_{(j)}) - \mathbb{E}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right)}{\sqrt{\text{Var}\left(g(\hat{\beta}, x_{(j)})\right)}}\right).$$

Por fim, as estatísticas de teste dependem de  $\hat{u}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  que não dependem da estimativa  $\hat{\alpha}$ .

# Apêndice D

## Cálculo da estatística de função característica empírica a ser implementada

Antes do cálculo das estatísticas função característica empírica a serem implementadas apresentaremos alguns conceitos que serão utilizados.

### D.1 Preliminares

- Dado um número complexo  $z = u + iv$ , tais que,  $u, v \in \mathbb{R}$  e  $i$  é a unidade imaginária, chamamos de módulo de  $z$ , o número real positivo ou nulo dado por,

$$|z| = |u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2},$$

de onde segue que

$$|u + iv|^2 = u^2 + v^2. \tag{D.1}$$

- Podemos escrever a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos  $a$  e  $b$  como,

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

Logo,

$$\cos(a)\cos(b) = \cos(a - b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b). \tag{D.2}$$



## D.2 Cálculo da estatística de função característica empírica

A estatística de teste é dada por,

$$T = n \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t) - e^{-t^2/2}|^2 \omega(t) dt \quad (D.3)$$

Primeiramente defina,

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itZ_j} - e^{-t^2/2} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\cos(tZ_j) + i\text{sen}(tZ_j)] - e^{-t^2/2} \right|^2 \\ &= \left| \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\cos(tZ_j)) - e^{-t^2/2} \right] + i \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{sen}(tZ_j) \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (D.4)$$

Aplicando a definição (D.1) em (D.4) temos,

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) - e^{-t^2/2} \right]^2 + \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{sen}(tZ_j) \right]^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) \right]^2 - \frac{2}{n} e^{-t^2/2} \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) + e^{-t^2} + \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n \text{sen}(tZ_j) \right]^2 \end{aligned} \quad (D.5)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) \right]^2 &= [\cos^2(tZ_1) + \cos(tZ_1)\cos(tZ_2) + \cdots + \cos(tZ_1)\cos(tZ_n)] \\ &\quad [\cos(tZ_2)\cos(tZ_1) + \cos^2(tZ_2) + \cdots + \cos(tZ_2)\cos(tZ_n)] \\ &\quad + \cdots + [\cos(tZ_n)\cos(tZ_1) + \cos(tZ_n)\cos(tZ_2) + \cdots + \cos^2(tZ_n)] \\ &= \sum_{j=1}^n \cos^2(tZ_j) + \sum_{k \neq j}^n \cos(tZ_k)\cos(tZ_j). \end{aligned} \quad (D.6)$$

E analogamente,

$$\left[ \sum_{j=1}^n \text{sen}(tZ_j) \right]^2 = \sum_{j=1}^n \text{sen}^2(tZ_j) + \sum_{k \neq j}^n \text{sen}(tZ_k)\text{sen}(tZ_j). \quad (D.7)$$

Aplicando (D.6) e (D.7) em (D.5) temos,

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n \cos^2(tZ_j) + \sum_{k \neq j}^n \cos(tZ_k)\cos(tZ_j) \right] - \frac{2}{n} e^{-t^2/2} \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) + e^{-t^2} \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n \text{sen}^2(tZ_j) + \sum_{k \neq j}^n \text{sen}(tZ_k)\text{sen}(tZ_j) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n \cos^2(tZ_j) + \sum_{k \neq j}^n \cos(t(Z_k - Z_j)) - \sum_{k \neq j}^n \text{sen}(tZ_k)\text{sen}(tZ_j) \right] \\
&\quad - \frac{2}{n} e^{-t^2/2} \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) + e^{-t^2} \\
&\quad + \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n \text{sen}^2(tZ_j) + \sum_{k \neq j}^n \text{sen}(tZ_k)\text{sen}(tZ_j) \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n \cos^2(tZ_j) + \sum_{j=1}^n \text{sen}^2(tZ_j) \right] + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \cos(t(Z_k - Z_j)) \\
&\quad - \frac{2}{n} e^{-t^2/2} \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) + e^{-t^2} \\
&\quad - \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \text{sen}(tZ_k)\text{sen}(tZ_j) + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \text{sen}(tZ_k)\text{sen}(tZ_j) \\
&= \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n (\cos^2(tZ_j) + \text{sen}^2(tZ_j)) \right] + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \cos(t(Z_k - Z_j)) \\
&\quad - \frac{2}{n} e^{-t^2/2} \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) + e^{-t^2} \\
&= \frac{1}{n^2} (n) + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \cos(t(Z_k - Z_j)) - \frac{2}{n} e^{-t^2/2} \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) + e^{-t^2} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \cos(t(Z_k - Z_j)) - \frac{2}{n} e^{-t^2/2} \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) + e^{-t^2}. \tag{D.8}
\end{aligned}$$

Aplicando (D.8) em (D.3),

$$\begin{aligned}
T = n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\omega(t)dt &= n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \cos(t(Z_k - Z_j)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{n} e^{-t^2/2} \sum_{j=1}^n \cos(tZ_j) + e^{-t^2} \right] \omega(t)dt \right\} \\
&= n \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(t)}{n} dt + \sum_{k \neq j}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(t(Z_k - Z_j)) \omega(t) dt \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{n} e^{-t^2/2} \cos(tZ_j) \omega(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \omega(t) dt \right].
\end{aligned}$$

Tomando  $\omega(t) = e^{-\gamma t^2}$ ,

$$T_\gamma = n \left[ \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t^2} dt + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t(Z_k - Z_j)) e^{-\gamma t^2} dt - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \cos(tZ_j) e^{-\gamma t^2} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-\gamma t^2} dt \right]. \quad (\text{D.9})$$

Seja,  $A_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t^2} dt$  temos de Spiegel e Lui(2004),

$$A_3 = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}. \quad (\text{D.10})$$

Tomando,  $B_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t(Z_k - Z_j)) e^{-\gamma t^2} dt$  temos de Spiegel e Lui (2004),

$$B_3 = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-(Z_k - Z_j)^2/4\gamma}. \quad (\text{D.11})$$

Fazendo,  $C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \cos(tZ_j) e^{-\gamma t^2} dt$  temos de Spiegel e Lui (2004),

$$\begin{aligned} C_3 &= \sqrt{\frac{\pi}{\gamma + 1/2}} e^{-Z_j^2/4(\gamma+1/2)} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{2\gamma + 1}} e^{-Z_j^2/4\gamma+2}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Por fim, tomando  $D_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-\gamma t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2(1+\gamma)} dt$  segue também de Spiegel e Lui (2004), que

$$D_3 = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma + 1}} e^{-Z_j^2/4\gamma+2}. \quad (\text{D.13})$$

Aplicando (D.10), (D.11), (D.12) e (D.13) em (D.9) temos,

$$\begin{aligned} T_\gamma &= n \left[ \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-(Z_k - Z_j)^2/4\gamma} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{2\pi}{2\gamma + 1}} e^{-Z_j^2/(4\gamma+2)} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\pi}{\gamma + 1}} \right] dt. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-(Z_k - Z_j)^2/4\gamma} &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=j}^n \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-(Z_k - Z_j)^2/4\gamma} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-(Z_k - Z_j)^2/4\gamma} + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq j}^n \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-(Z_k - Z_j)^2/4\gamma} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k,j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-(Z_k - Z_j)^2/4\gamma} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Usando (D.15) para reescrever (D.14) obtemos finalmente,

$$\begin{aligned}
T_\gamma &= n \left[ \frac{1}{n^2} \sum_{k,j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-(Z_k - Z_j)^2 / 4\gamma} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{2\pi}{2\gamma + 1}} e^{-Z_j^2 / (4\gamma + 2)} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{\pi}{\gamma + 1}} \right] dt \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k,j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-(Z_k - Z_j)^2 / 4\gamma} - 2 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{2\pi}{2\gamma + 1}} e^{-Z_j^2 / (4\gamma + 2)} \\
&\quad + \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma + 1}} dt.
\end{aligned} \tag{D.16}$$

# Apêndice E

## Dados reais

Segue abaixo os dados reais utilizados neste trabalho.

Tabela E.1: Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 26.000 psi. (exemplo 1, Capítulo 3)

---

233	258	268	276	290	310	312	315	318	321	321	329	335	336	338
338	342	342	342	344	349	350	350	351	351	352	352	356	358	358
360	362	363	366	367	370	370	372	372	374	375	376	379	379	380
382	389	389	395	396	400	400	400	403	404	406	408	408	410	412
414	416	416	416	420	422	423	426	428	432	432	433	433	437	438
439	439	443	445	445	452	456	456	460	464	466	468	470	470	473
474	476	476	486	488	489	490	491	503	517	540	560			

---

Tabela E.2: Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 31.000 psi. (exemplo 2, Capítulo 3)

70	90	96	97	99	100	103	104	104	105	107	108	108	108	109
109	112	112	113	114	114	114	116	119	120	120	120	121	121	123
124	124	124	124	124	128	128	129	129	130	130	130	131	131	131
131	131	132	132	132	133	134	134	134	134	134	136	136	137	138
138	138	139	139	141	141	142	142	142	142	142	142	144	144	145
146	148	148	149	151	151	152	155	156	157	157	157	157	158	159
162	163	163	164	166	166	168	170	174	196	212				

Tabela E.3: Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 21.000 psi. (exemplo 3, Capítulo 3)

370	706	716	746	785	797	844	855	858	886	886	930	960
988	999	1000	1010	1016	1018	1020	1055	1085	1102	1102	1108	1115
1120	1134	1140	1199	1200	1200	1203	1222	1235	1238	1252	1258	1262
1269	1270	1290	1293	1300	1310	1313	1315	1330	1355	1390	1416	1419
1420	1420	1450	1452	1475	1478	1481	1485	1502	1505	1513	1522	1522
1530	1540	1560	1567	1578	1594	1602	1604	1608	1630	1642	1674	1730
1750	1750	1763	1768	1781	1782	1792	1820	1868	1881	1890	1893	1895
1910	1923	1924	1945	2023	2100	2130	2215	2268	2440			

Tabela E.4: Dados do exemplo 1 Capítulo 4

K-ciclos	Temp.	Método	K-ciclos	Temp.	Método	K-ciclos	Temp.	Método
211	500	Old	1065	500	Old	3199	500	New
218	500	Old	1563	500	Old	3464	500	New
319	500	Old	1756	500	Old	3644	500	Old
551	500	Old	1967	500	Old	3674	500	Old
638	500	Old	1995	500	Old	3904	500	Old
650	500	Old	2029	500	Old	4006	500	Old
707	500	Old	2193	500	Old	4196	500	New
712	500	Old	2287	500	New	4542	500	New
752	500	New	2592	500	New	5000	500	New
834	500	Old	2785	500	Old	5000*	500	New
997	500	Old	2843	500	New	5000*	500	New
1016	500	New	2853	500	New	5000*	500	Old

Tabela E.5: Dados do exemplo 2, Capítulo 4

3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	9	10	10	11	11	11	13
13	13	13	13	17	17	19	19	25	29	33	42	42	52	52*	52*	52*

# Bibliografia

- [1] Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure, 3rd ed.* John Wiley and Sons, New York, New York.
- [2] Birnbaum, Z. W. e Saunders, S. C. (1969a). A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*. **6**, 319-327.
- [3] Birnbaum, Z. W. e Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of Applied Probability*. **2**, 328-347.
- [4] Castro-Kuriss, C. (2011). On a goodness-of-fit test for censored data from a location-scale distribution with application. *Chilean Journal of Statistics*. **37**, 115-136.
- [5] Castro-Kuriss, C., Kelmansky, D., Leiva, V. e Martínez, E., (2009). On a goodness-of-fit test for normality with unknown parameters and type-II censored data. *Journal of Applied Statistics*. **37**, 1193-1211.
- [6] Chen, G. e Balakrishnan, N. (1995). A general purpose approximate goodness-of-fit test. *Journal of Quality Technology*. **27**, 154-161.
- [7] Choulakian, V. e Stephens, M. A., 2001, Goodness-of-fit tests for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*. **43**, 478-484.
- [8] Colosimo, E.A. e Giolo, S.R. (2006). *Análise de Sobrevivência Aplicada*. Edgard Blücher.
- [9] Cordeiro, G. M. (1992) *Introdução à Teoria da Verossimilhança*. Associação Brasileira de Estatística. Rio de Janeiro, X SINAPE.



- [10] Csörgö, S., (1981a) Limit behaviour of the empirical characteristic function. *Annals of Statistics*. **9**, 130-144.
- [11] Csörgö, S., (1981b) Multivariate empirical characteristics functions *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verwandte Geb.* **55**, 203-229.
- [12] D'Agostino, C. e Stephens, M.A., (1986). *Goodness of Fit Techniques*. Marcel Dekker, New York.
- [13] Díaz-García, J. A. e Leiva, V. (2005). A new family of life distributions based on the contoured elliptically distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*. **128**, 88-95.
- [14] Díaz-García, J. A. e Leiva, V. (2006). Erratum to a new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions [Journal of Statistical Planning and Inference **128**(2) (2005) 445-457]. To appear in *Journal of Statistical Planning and Inference*.
- [15] Epps, T. W. e Pulley, L.B., (1983). A test for normality based on the empirical characteristic function procedures. *Biometrika*. **70**, 723-726
- [16] Fan, Y., (1997). Goodness-of-fit tests for a multivariate distribution by the empirical characteristic function. *Journal of Multivariate Analysis*. **62**, 36-63
- [17] Feuerverger, A. e Mureika, R. A., (1977). The empirical characteristic function and its applications. *Annals of Statistics*. **5**, 88-97.
- [18] Jiménez-Gamero, M. D., Alba-Fernández, V., Muñoz-García e J., Chalco-Cano, Y. (2009) Goodness-of-fit tests based on empirical characteristic functions. *Computational Statistics and Data Analysis*. **53**, 3957-3971.
- [19] Kalbfleisch, J. D. e Prentice, R. L. (2002). *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. John Wiley and Sons, New York.
- [20] Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley and Sons, New York.
- [21] Lehmann, E. L. (1999), *Elements of Large-Sample Theory*. Springer.
- [22] Leiva, V.; Barros M. e Paula, G.A. (2009). *Generalized Birnbaum-Saunders Models using R*. Recife: XI Escola de Modelos de Regressão.

- [23] Leiva, V., Hernández, H. e Riquelme, M. (2006). A new package for the Birnbaum-Saunders distribution. *R News*, 6(4), 35-40.
- [24] Lemonte, A. J., Cribari-Neto, F. e Vasconcellos, K.L. (2007). Improved Statistical Inference for the Two-parameter Birnbaum Saunders Distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*. **51**, 4656-4681.
- [25] Lemonte, A. J. e Ferrari, S. L. P. (2011) Testing hypotheses in the Birnbaum-Saunders distribution under type-II censored samples. *Computational Statistics and Data Analysis*. **55**, 2388-2399.
- [26] Marshall, A. W. e Olkin, I. (2007). *Life Distributions—Structure of Nonparametric, Semiparametric, and Parametric Families*. Springer, New York.
- [27] Meeker W. Q. e Escobar L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. John Wiley e sons, New York.
- [28] Meintanis, S.G. (2009). Goodness-of-fit testing by transforming to normality: Comparison between classical and characteristic function based methods. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. **79**, 205-212.
- [29] Meintanis, S.G. (2010). Inference procedures for the Birnbaum-Saunders distribution and its generalizations. *Computational Statistics and Data Analysis*. **54**, 367-373. 205-212.
- [30] Ng H. K., Kundu D. e Balakrishnan N. (2003) Modified moment estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*. **43**, pp. 283-298.
- [31] Ng H. K., Kundu D., e Balakrishnan N. (2006). Point and interval estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution based on Type-II censored samples. *Journal Computational Statistics and Data Analysis*. **50**, 3222-3242.
- [32] Pettitt, A. N. (1976). Cramer-von Mises statistics for testing normality with censored samples. *Biometrika*. **63**, 475-81.
- [33] Pettitt, A. N. (1977). Tests for the exponential distribution with censored data using Cramer-von Mises statistics. *Biometrika*. **64**, 629-32.
- [34] Pettitt, A. N. e Stephens, M. A. (1976). Modified Cramer-von Mises statistics for censored data. *Biometrika*. **63**, 291-8.

- [35] Serfling, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Statistics*. John Wiley and Sons, New York, New York.
- [36] Spiegel, M. R. e Liu, J., (2004). *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. Bookman, Porto Alegre.
- [37] Stephens, M. A. (1970). Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramér-Von Mises and Related Statistics without Extensive Tables. *Journal of the Royal Statistical Society*. **32**, 115-122.
- [38] Wilk, M.B., Gnanadesikan, R. e Huyett, M.J., (1962). Estimation of parameters of the gamma distribution using order statistics. *Biometrika*, **49**, 525-545.