



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



# **CURVATURA DE CÔNICAS**

**Antonio Evandro de Macedo Costa**

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Denílson da Silva Pereira Costa

Campina Grande - PB  
Agosto / 2017

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG**

C837c Costa, Antonio Evandro de Macedo.  
Curvatura de cônicas / Antonio Evandro de Macedo Costa. –  
Campina Grande, 2017.  
76 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade  
Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Denílson da Silva Pereira Costa".

Referências.

1. Geometria Diferencial. 2. Curvatura de Cônicas. 3. Curvas Planas.  
I. Costa, Denílson da Silva Pereira. II. Título.

CDU 514.7(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



## **CURVATURA DE CÔNICAS**

**por**

**Antonio Evandro de Macedo Costa <sup>†</sup>**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

---

<sup>†</sup>Bolsista CAPES

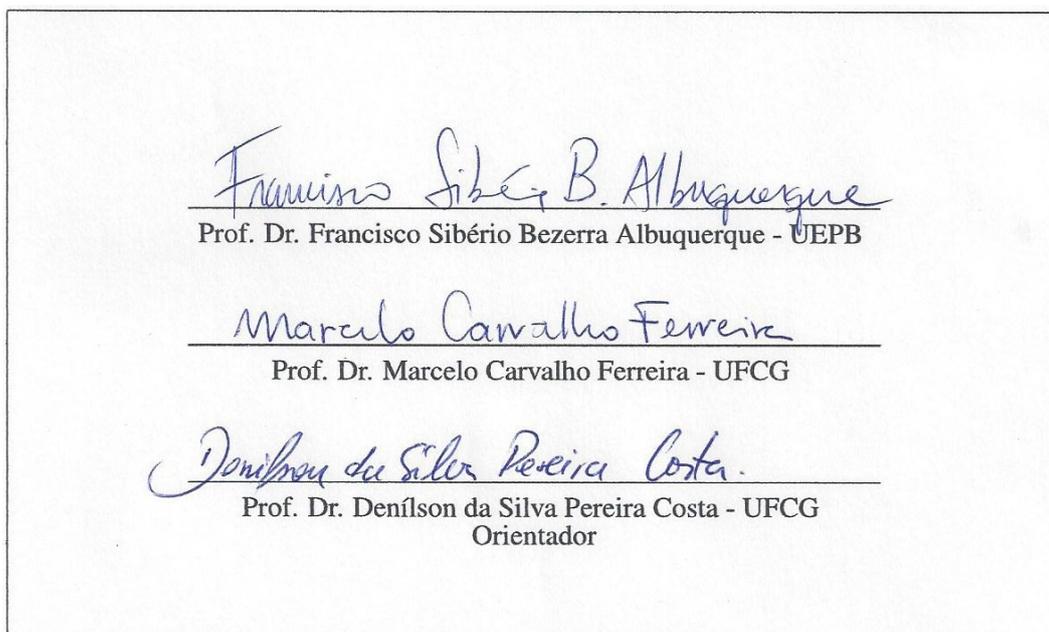
# CURVATURA DE CÔNICAS

por

**Antonio Evandro de Macedo Costa**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Ciências e Tecnologia**  
**Unidade Acadêmica de Matemática**  
**Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Agosto/2017**

# Dedicatória

A Daniele Kelly, minha noiva.

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem ele eu não estaria aqui.

Agradeço a minha noiva, Daniele Kelly, pois foi a pessoa que me apoiou em todas as etapas deste curso, desde a inscrição até à conclusão, sempre com muita paciência e compreensão. Obrigado meu Amor!

Agradeço a minha família como um todo, pois é meu alicerce, em especial agradeço aos meus pais, Edmilson e Sandra, aos meus irmãos André, Vanessa e Ailton, aos familiares da minha noiva, Dedé, Nildinha, Dorinha e Daniel.

Agradeço também a UFCG e a todos os meus professores do PROFMAT, Dr. Daniel, Dr. Bráulio, Dr. Alcônio, Dr. Jeferson, Dr. Luiz Antônio, Dr. Aparecido Jesuíno, Dr. Fernando e Dr. Arimatéia, todos foram essenciais para conclusão deste curso.

Em especial, agradeço ao meu orientador, Dr. Denílson, por seus valiosos ensinamentos (que foram essenciais, também lhe agradeço) pela disponibilidade e paciência que teve durante todas as etapas deste trabalho.

Agradeço aos professores que compuseram a minha banca de defesa, Dr. Francisco Sibério e Dr. Marcelo Carvalho, pelas valiosas orientações e sugestões, que enriqueceram muito este trabalho.

Agradeço aos meus colegas de curso, em especial a Gerivaldo, Wellington, Leonardo, Fred, Ricardo, Eduardo, Mireli e Elí, que enfrentaram junto comigo todas as adversidades existentes.

Agradeço também a todos os meus professores do Ensino Fundamental e Médio, em especial ao Professor Luís Carlos, no qual eu sempre me espelhei. Para mim é uma honra poder seguir seus passos e concluir o PROFMAT um ano após o mesmo. Agradeço também o apoio de Eudes, Gracimário, Sávio, Huan, Jaldir, Jebson, Elton e Chico.

Agradeço à Escola Estadual Professor Lordão e à Escola Estadual João Henriques Dantas pelo apoio e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT, assim como agradeço a Jeanne Medeiros, Valda Lúcia e aos Gestores Robson Rubenilson, Thiago Anderson e Inalva Dantas pelo apoio incondicional.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

# Resumo

Por meio deste trabalho, pretendemos apresentar o conceito de curvatura do ponto de vista algébrico e geométrico centrado no estudo das curvas cônicas (elipse, hipérbole e parábola). Para isso, apresentamos uma abordagem histórica e, em seguida, um estudo sobre curvas planas culminando na dedução das fórmulas de curvatura e em sua interpretação geométrica usando o círculo osculador. Dando ênfase às curvas cônicas, deduzimos as curvaturas da elipse, hipérbole e parábola, em adição, detalhamos um método para encontrar os centros de curvatura dessas cônicas utilizando apenas procedimentos geométricos. Por fim, abordamos também importantes aplicações físicas do conceito de curvatura.

**Palavras Chaves:** Curvatura. Curvas Planas. Cônicas.

# Abstract

Through this work, we intend to present the concept of curvature from the algebraic and geometric point of view focusing on the study of conical curves (ellipse, hyperbolas and parabola). To this end, we present a historical approach and then a study on plane curves, culminating in the deduction of the curvature formulas and in its geometrical interpretation using the osculating circle. By emphasizing the conical curves, we derive the ellipse, hyperbolas and parabola curvature, whereas we detail a method for finding the centers of curvatures of these conics using only geometrical procedures. We also address important physical applications of the concept of curvature.

**Keywords:** Curvature. Plane Curves. Conics.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
0.1 Objetivos . . . . .	3
0.2 Organização . . . . .	4
<b>1 Um Breve Histórico</b>	<b>5</b>
1.1 A História da Geometria Diferencial . . . . .	5
1.2 As Cônicas . . . . .	7
<b>2 Um Estudo Sobre as Curvas Planas</b>	<b>9</b>
2.1 Curvas Suaves . . . . .	10
2.2 Vetor Tangente a uma Curva e Reta Tangente . . . . .	12
2.3 Reparametrização de Curvas . . . . .	13
2.4 Comprimento de Arco de Curvas . . . . .	14
2.5 Campo de Vetores ao longo de Curvas . . . . .	16
2.6 Curvatura e Fórmulas de Frenet . . . . .	18
2.7 Interpretação Geométrica da Curvatura . . . . .	25
2.7.1 Sinal da Curvatura . . . . .	25
2.7.2 Valor da Curvatura . . . . .	27
2.8 Centro e Raio de Curvatura das Cônicas . . . . .	29
<b>3 Procedimentos Geométricos para Encontrar o Centro de Curvatura de uma Cô- nica</b>	<b>34</b>
3.1 Centro de Curvatura de uma Elipse . . . . .	40
3.2 Centro de Curvatura de uma Parábola . . . . .	42
3.3 Centro de Curvatura de uma Hipérbole . . . . .	45
3.4 Construção da Evoluta das Cônicas usando o Geo Gebra . . . . .	48
3.4.1 Evoluta da Elipse no Geo Gebra . . . . .	48
3.4.2 Evoluta da Parábola no Geo Gebra . . . . .	54
3.4.3 Evoluta da Hipérbole no Geo Gebra . . . . .	62

<b>4</b>	<b>Aplicações Físicas de Curvatura</b>	<b>68</b>
4.1	Velocidade e Aceleração . . . . .	68
4.1.1	Componentes Normal e Tangencial da Aceleração . . . . .	68
4.2	Espelhos Esféricos (côncavos e convexos) . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>74</b>
	<b>Referências</b>	<b>75</b>

# Introdução

A noção intuitiva de curvatura é muito difundida em nossa sociedade, desde a curvatura da nossa coluna vertebral até os trajetos sinuosos de rodovias, pistas automobilísticas e o formato de lentes ópticas. De maneira informal, podemos afirmar que a curvatura mede o quanto uma curva deixa de ser reta. Trataremos deste conceito com a formalidade matemática e assim poderemos quantificar a curvatura e analisar suas propriedades e características.

As curvas assumem diversos formatos diferentes e a curvatura é calculada em cada ponto dessa curva. Em especial trataremos das curvas cônicas (Elipse, Hipérbole e Parábola) com um estudo focado nas respectivas curvaturas dessas cônicas. Tais curvas foram objeto de estudo de muitos matemáticos famosos como Aristeu e Euclides e tem Apolônio de Perga como o principal responsável pela teoria sobre secções cônicas.

Geometricamente, é perceptível que a curvatura de uma cônica, assim como da maioria das curvas, varia de acordo com o ponto em que está sendo analisada, deste modo cada ponto de uma curva está associado a um círculo de mesma curvatura que a curva nesse ponto e esse círculo é denominado círculo osculador, sendo seu centro e raio denominados, respectivamente, de centro de curvatura e raio de curvatura.

Podemos deduzir expressões algébricas que nos permitem calcular a curvatura de uma curva em qualquer um de seus pontos, em especial encontraremos essas expressões para cada uma das cônicas assim como detalharemos um método totalmente geométrico para determinar o centro e o raio de curvatura de uma cônica.

Uma aplicação da curvatura é na aceleração: é bastante comum quando viajamos de carro que tenhamos que nos segurar quando percorremos uma curva acentuada (com curvatura grande) em alta velocidade e isso é explicado pelo fato de uma das componentes da aceleração ser justamente o produto entre a curvatura e o módulo da velocidade ao quadrado. Deste modo, quanto maior for a curvatura ou a velocidade maior será a aceleração.

## 0.1 Objetivos

O objetivo geral desse trabalho é fazer um estudo detalhado sobre a curvatura, enfatizando a curvatura das cônicas, para que os professores do Ensino Médio compreendam formalmente este conceito intuitivo usado em nosso cotidiano, e assim tenham propriedade para abordar este conceito de maneira mais aprofundada com seus alunos. Já os objetivos

específicos visam:

- Deduzir as fórmulas de curvatura;
- Interpretar geometricamente o conceito de curvatura;
- Encontrar os centros de curvatura das cônicas usando apenas procedimentos geométricos;
- Aplicar este conceito em situações práticas.

## 0.2 Organização

Este TCC está organizado da seguinte forma: Iniciando por esta introdução que nos fornece uma visão geral da nossa proposta; no Capítulo 1, encontra-se um breve histórico, em que falamos um pouco da história da Geometria Diferencial associando aos *Elementos* de Euclides e também abordamos a história das cônicas; o Capítulo 2 contém um estudo sobre as curvas planas no qual abordamos parametrizações, reparametrizações, fórmulas de Frenet e principalmente curvatura com ênfase no estudo das cônicas; o Capítulo 3 nos fornece um método para encontrar o centro de curvatura das cônicas por meio de procedimentos geométricos elementares. Nesse Capítulo, também descrevemos o passo a passo desse procedimento usando o *Geo Gebra*; no Capítulo 4, apresentamos importantes aplicações da curvatura, evidenciando a aplicabilidade deste conceito; o Capítulo 5 apresenta as considerações finais deste trabalho, seguidas das referências.

# Capítulo 1

## Um Breve Histórico

Nesse capítulo, faremos um breve levantamento histórico a cerca do surgimento e desenvolvimento da Geometria Diferencial, nossas principais fontes foram [2], [4] e [5].

### 1.1 A História da Geometria Diferencial

O estudo da Geometria Diferencial tem origem no século *XVII* quando foram introduzidos os métodos do Cálculo Diferencial na Geometria Euclidiana. A princípio sua grande aplicabilidade era na cartografia, posteriormente, com grande utilidade na astronomia e engenharia. As raízes da Geometria Diferencial estão atreladas às obras de Euclides de Alexandria (325*a.C.* – 265*a.C.*), Arquimedes de Siracusa (287*a.C.* – 212*a.C.*) e Apolônio de Perga (262*a.C.* – 190*a.C.*).

Figura 1.1: Euclides de Alexandria (FONTE: [15].)



Euclides de Alexandria (325*a.C.* – 265*a.C.*) foi um matemático grego que, em grande parte da sua vida, trabalhou em uma famosa biblioteca localizada na cidade de Alexandria, no Egito. Euclides compilou praticamente toda a Matemática desenvolvida até sua época, em sua grande obra, “Os Elementos”, composta de treze volumes, nessa mesma obra ele introduziu o método axiomático no desenvolvimento de uma teoria. Nos “Elementos” encontram-se

dez axiomas, dos quais cinco são “noções comuns”, que segundo Euclides deviam ser aceitas em qualquer ciência e os outros cinco axiomas são chamados de *postulados* que tratavam de proposições específicas da Geometria e que também deveriam ser aceitas sem contestações. Partindo desses axiomas, Euclides deduziu 465 proposições matemáticas, desde então os livros didáticos de Geometria, até os atuais, tem como base a obra “Elementos”, vale salientar que essa é a segunda mais editada no mundo, ficando atrás apenas da Bíblia. ([5] COIMBRA, 2008).

O quinto postulado da obra “Elementos”, enunciado a seguir: “*É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos*”,

Figura 1.2: Fragmento da obra “Elementos” (FONTE: [15].)



foi motivo de muita polêmica no estudo da Geometria. O famoso *Problema das Paralelas*, que consistia em provar que o quinto postulado de Euclides era independente dos demais, abria margem, e foi um dos pontos de partida, para a formulação de uma Geometria não-Euclidiana dentre essas destacamos a Geometria Diferencial. A obra de Euclides de fato foi o ponto de partida do surgimento da Geometria Diferencial, já as obras de *Arquimedes* e *Apolônio* contém estudos sobre diversas curvas, e suas respectivas propriedades, presentes no estudo dessa Geometria.

Os franceses, *René Descartes* (1596 – 1650) e *Pierre Fermat* (1601 – 1655), conseguiram relacionar a Geometria com a Álgebra através da Geometria Analítica. O alemão *Gottfried Leibniz* (1646 – 1716) e o inglês *Isaac Newton* (1649 – 1727), desenvolveram algoritmos do cálculo infinitesimal, permitindo o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais. Em 1736, Newton, na obra “*Geometria Analytica*”, deu uma importante contribuição ao aplicar, pela primeira vez, os métodos de Cálculo Diferencial na geometria.

O holandês *Christian Huygens* (1629 – 1695), em sua obra sobre as curvas planas, “*Horelegium Oscillatorium*”, originou os conceitos de evoluta e involuta de uma curva. O francês *Aléxis Clairant* (1713 – 1765) foi o primeiro a estudar a Geometria Diferencial no espaço em seu trabalho “*Recherche sur les Coubes à Double Curvature*” em 1731. Sua obra abordava curvas e superfícies. O também francês, *Gaspard Monge* (1746 – 1818), discutiu

os conceitos de curvatura e torção de uma curva espacial.

O suíço *Leonhard Euler* (1707 – 1783) obteve em 1728 a forma geral das equações das geodésicas numa superfície. Euler também consolidou a teoria das superfícies na obra “*Recherches sur la Courbe des Surfaces*”, em 1760, na qual introduziu as curvaturas principais de uma superfície num ponto. O francês *Louis Cauchy* (1789 – 1857) introduziu novos métodos aos estudos da geometria e aperfeiçoou o trabalho de Monge. O francês *Jean Meusnier* (1754 – 1793) publicou um teorema sobre curvaturas normais e trabalhou em propriedades de superfícies. ([5] COIMBRA, 2008).

No ano de 1827, *Friedrich Gauss* (1777 – 1855) publicou a obra “*Disquisitiones Circa Superfícies Curvas*” dedicada à Geometria Diferencial e desenvolvida num espaço euclidiano utilizando propriedades da trigonometria esférica, a qual era conhecida dos tempos das navegações e usa como referência a geometria de Euclides.

Gauss foi motivado por um problema de geodésica, quando foi encarregado de fazer um levantamento geodésico de uma região da Alemanha. Para isso, era necessário medir triângulos sobre a superfície da Terra, isso levara Gauss a refletir sobre a influência da forma da Terra em tais medidas. Sendo um excelente Matemático, Gauss generalizou esse problema para uma superfície qualquer e obteve, para triângulos geodésicos pequenos, o resultado conhecido como Teorema de Gauss-Bonet. ([2] CARMO 1999, apud BENETTI, 2009, p. 15).

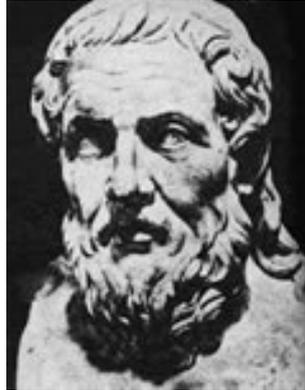
“*Disquisitiones Circa Superfícies Curvas*” contém todo desenvolvimento da teoria de Gauss para o estudo de uma superfície curva, o que serviu de base para o desenvolvimento da Geometria Diferencial não-euclidiana, influenciando mais tarde Bernhard Riemann (1826 – 1866) a desenvolver generalizações mais abstratas da ideia de geometria.

Dentre tantos outros matemáticos, que contribuíram com o desenvolvimento da Geometria Diferencial, destacamos os franceses Jean Frenet (1819 – 1900) e Joseph Serret (1819 – 1885) fizeram estudos sobre as curvas no espaço, e publicaram de maneira independente, as fórmulas da Geometria Diferencial, que atualmente são chamadas de “Fórmulas de Frenet-Serret”.

## 1.2 As Cônicas

Apolônio de Perga (262a.C. – 190a.C.) foi responsável por uma enorme produção científica, porém só dois de seus muitos tratados se preservaram em grande parte. Um deles é considerado a sua obra prima - As cônicas. Aristeu e Euclides já haviam escrito exposições gerais sobre as cônicas, mas o tratado sobre Cônicas de Apolônio foi bem mais completo e avançado, por isso é considerado a melhor obra sobre cônicas.

Figura 1.3: Apolônio de Perga (FONTE: [21])



“[...] mas assim como Os Elementos de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive As Cônicas de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, Os Elementos de Euclides e As cônicas de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos” ( [4] BOYER, 1996, p. 99).

Antes do tratado de Apolônio, as cônicas (elipse, parábola e hipérbole) eram obtidas a partir de secções de três cones circulares retos, sendo que esses cones tinham formatos distintos, respectivamente os ângulos dos vértices dos cones eram: agudo, reto e obtuso. Mas em sua obra Apolônio mostrou que um único tipo de cone era suficiente para obter qualquer uma das três cônicas, bastava variar a inclinação do plano que secciona o cone. Além disso ele mostrou que esse cone não precisa ser necessariamente um cone circular reto, podendo ser também oblíquo ou escaleno. Ele também foi o responsável por trabalhar com o cone de duas folhas.

As nomenclaturas “elipse”, “parábola” e “hipérbole” provavelmente foram adotadas do uso na resolução de equações quadráticas envolvendo áreas pelos pitagóricos. *Ellipsis* significa falta, *Parábola* indicava que não havia falta nem excesso e *Hyperbola* significa excesso.

Apolônio desenvolveu essa bela teoria que posteriormente foi fundamental para o estudo da dinâmica terrestre e mecânica celeste. Ele também fez estudos a respeito de tangentes e normais associados a secções cônicas que permitiram o estudo de trajetórias locais e também dos planetas. Essa matemática descoberta por Apolônio fora mais tarde usada por Newton e posteriormente pelos cientistas atuais para fazer viagens e estudos espaciais.

## Capítulo 2

# Um Estudo Sobre as Curvas Planas

A Geometria Diferencial é originada da junção do Cálculo com a Geometria. Estudaremos as propriedades geométricas das curvas planas tais como: vetor tangente, vetor normal e curvatura.

De maneira intuitiva, uma curva no plano pode ser interpretada como um subconjunto de dimensão 1. Matematicamente, uma curva é a deformação contínua de um intervalo, como também uma curva pode ser interpretada como a trajetória contínua de um deslocamento de uma partícula no plano. No ponto de vista da Geometria Analítica, uma curva em  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto dos pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que satisfazem uma equação do tipo

$$F(x, y) = 0.$$

Quando  $F(x, y)$  é um polinômio em duas variáveis, denominamos o conjunto  $F(x, y) = 0$  de curva algébrica. Assim, o estudo dessas curvas é a base da Geometria Algébrica.

Por outro lado, no ponto de vista da Geometria Diferencial, consideraremos a noção intuitiva de curva que é descrever a trajetória contínua do movimento de uma partícula no plano. Seja  $\alpha(t)$  a posição de uma partícula em movimento contínuo, onde  $t$  (tempo) varia num intervalo  $[a, b]$ , deste modo consideraremos o conjunto

$$C = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2; t \in [a, b]\}.$$

Neste contexto podemos extrair várias informações de como o ponto  $\alpha(t)$  percorre o conjunto  $C$ , tais como velocidade e aceleração dessa partícula.

**Definição 2.1** *Uma curva contínua no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . A aplicação  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é contínua se cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.*

Denominamos de *traço* de  $\alpha$  o conjunto imagem dessa aplicação:

$$C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2; t \in I\}$$

onde  $\alpha$  é uma parametrização de  $C$  e  $t$  é um parâmetro de  $\alpha$ .

Partindo da definição de curvas, vamos definir características especiais de algumas dessas curvas, tais como: curva fechada, periódica, simples, e curvas de Jordan.

### Definição 2.2

- Se  $\alpha$  estiver definida num intervalo fechado  $I = [a, b]$ , então os pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são denominados respectivamente de ponto inicial e ponto final de  $\alpha$ .
- Se  $\alpha$  estiver definida num intervalo fechado  $I = [a, b]$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , então a curva  $\alpha$  é dita curva fechada.
- Dizemos que uma curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é periódica se existe  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ , tal que

$$\alpha(t+k) = \alpha(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

O menor valor  $k_0$  que satisfaz a igualdade acima é chamado de período de  $\alpha$ . Observe que ao restringirmos a curva a um intervalo do tipo  $[t_0, t_0 + k_0]$ ,  $\alpha$  fica completamente determinada.

### Definição 2.3

- Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva simples se a aplicação  $\alpha$  for injetiva. Se  $\alpha$  não for injetiva então dizemos que  $\alpha$  possui um ponto duplo (ou múltiplo).
- Dizemos que uma curva fechada  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é fechada e simples se  $\forall t, s \in [a, b]$ ,  $t \neq s$ , tem-se  $\alpha(t) \neq \alpha(s)$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Isso equivale a dizer que o único ponto duplo de  $\alpha$  ocorre nos extremos do intervalo.
- Se  $\alpha$  é fechada e simples denominamos  $\alpha$  por curva de Jordan.

**Definição 2.4** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é dita de classe  $C^k$  se suas funções coordenadas  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  admitem derivadas contínuas até a  $k$ -ésima ordem.

## 2.1 Curvas Suaves

**Definição 2.5** Dizemos que  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é uma aplicação suave se, e somente se, cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que admite derivadas contínuas de qualquer ordem, ou seja, que elas sejam de classe  $C^\infty$ .

A seguir, vamos definir um conceito importantíssimo no estudo das curvas.

**Definição 2.6** Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação suave  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  que a cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ .

Vejam os alguns exemplos de curvas suaves. Os exemplos 1, 2, 3, 4 e 5 estão contidos no livro Geometria Analítica do PROFMAT. ([7], DOMINGUES, 2013.)

**Exemplo 1 (Parametrização de uma Reta no plano)** Seja  $r$  uma reta que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e tem a direção do vetor  $v = (v_1, v_2)$ , uma parametrização de  $r$  é  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\alpha(t) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2) = P_0 + tv.$$

**Exemplo 2 (Parametrização de um Círculo)**  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$  é uma parametrização do círculo de centro  $C(x_0, y_0)$  e raio  $R$ , pois:

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = (x_0 + R\cos(t) - x_0)^2 + (y_0 + R\sin(t) - y_0)^2 = R^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = R^2.$$

**Exemplo 3 (Parametrização de uma Elipse com centro na origem)**  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$  é uma parametrização da elipse de centro  $C(0, 0)$  e eixos  $2a$  e  $2b$ , pois:

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2(t)}{a^2} + \frac{b^2\sin^2(t)}{b^2} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

**Exemplo 4 (Parametrização de uma Hipérbole com centro na origem)**  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (\pm a\cosh(t), b\sinh(t))$  em que  $\begin{cases} \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$  é uma parametrização de uma hipérbole de centro  $C(0, 0)$  pois:

$$\frac{x(t)^2}{a^2} - \frac{y(t)^2}{b^2} = \frac{a^2\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{b^2\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2}{b^2}.$$

Desenvolvendo os quadrados, da soma e da diferença, e simplificando as frações temos

$$\frac{x(t)^2}{a^2} - \frac{y(t)^2}{b^2} = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t} - e^{2t} + 2e^t e^{-t} - e^{-2t}}{4} = \frac{2e^0 + 2e^0}{4} = \frac{2+2}{4} = 1.$$

**Exemplo 5 (Parametrização de uma Parábola)**  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t, kt^2)$  é uma parametrização da parábola  $y = kx^2$ , pois:

$$y(t) - kx^2(t) = kt^2 - kt^2 = 0.$$

**Exemplo 6 (Parametrização do Gráfico de uma Função)** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^k$ , então a parametrização  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (t, f(t))$$

é uma parametrização de classe  $C^k$  do gráfico de  $f$ .

## 2.2 Vetor Tangente a uma Curva e Reta Tangente

Faremos um estudo das curvas localmente, ou seja num  $t_0 \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  e analisaremos o comportamento da curva  $\alpha(t)$  para  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$ .

**Definição 2.7** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  uma curva parametrizada, então o vetor tangente (vetor velocidade) de  $\alpha$  no ponto  $t_0$  é dado por:

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

O vetor  $\alpha'(t_0)$  aponta na direção da reta tangente à curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t_0)$ . Por outro lado podemos calcular a *velocidade escalar* de  $\alpha$  no ponto  $t_0 \in I$  pelo módulo do vetor tangente:

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

**Exemplo 7** Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$  a parametrização de um círculo, então seu vetor tangente (vetor velocidade) no ponto  $t_0$  é dado por

$$\alpha'(t_0) = (-R\sin(t_0), R\cos(t_0))$$

e a velocidade escalar é

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{R^2\sin^2(t_0) + R^2\cos^2(t_0)} = \sqrt{R^2} = R.$$

**Definição 2.8** Uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita regular num ponto  $t_0 \in I$  se a velocidade escalar em  $t_0$  é não nula, ou seja, se  $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$  o que equivale a  $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ . Dizemos que  $\alpha$  é regular em  $I$  se for regular para todo  $t \in I$ .

No exemplo 7, tem-se

$$\|\alpha'(t_0)\| = R \neq 0 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R},$$

então neste caso  $\alpha$  é regular em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 2.9** A equação da reta tangente a curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t)$  tem a direção do vetor  $\alpha'(t)$  e é dada por:

$$R_t(u) = \alpha(t) + u\alpha'(t)$$

em que  $u \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 8** Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

uma curva regular, então a equação da reta tangente a  $\alpha$  num ponto  $t_0 \in [0, 2\pi]$  é dada por:

$$R_{t_0}(u) = (\cos(t_0), \sin(t_0)) + u(-\sin(t_0), \cos(t_0)) = (\cos(t_0) - u\sin(t_0), \sin(t_0) + u\cos(t_0)),$$

em que  $u \in \mathbb{R}$ .

De maneira intuitiva, podemos afirmar que o traço de uma curva regular é suave com exceção nos possíveis pontos de auto-interseção. A proposição a seguir mostra que localmente  $\alpha$  não possui auto-interseção.

**Proposição 2.1** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e regular em  $t_0 \in I$ . Então existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\alpha$  é injetiva no intervalo  $I_0 = \{t \in I \mid |t - t_0| < \varepsilon\}$ .*

**Demonstração.** Por hipótese  $\alpha$  é regular daí  $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$ , deste modo  $x'(t_0) \neq 0$  ou  $y'(t_0) \neq 0$ . Sem perda de generalidade suponhamos  $x'(t_0) \neq 0$ , como  $x'(t)$  é uma função contínua, existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I_0 = \{t \in I \mid |t - t_0| < \varepsilon\}$ . Logo,  $x$  é estritamente monótona em  $I_0$ , portanto  $x$  é injetiva em  $I_0$ , conseqüentemente  $\alpha$  é injetiva em  $I_0$ . De maneira análoga, se considerarmos  $y'(t_0) \neq 0$ , como  $y'(t)$  é uma função contínua, existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $y'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I_0 = \{t \in I \mid |t - t_0| < \varepsilon\}$ . Logo,  $y$  é estritamente monótona em  $I_0$ , portanto  $y$  é injetiva em  $I_0$ , conseqüentemente  $\alpha$  é injetiva em  $I_0$ . □

**Proposição 2.2** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e regular em  $t_0 \in I$ . Então, existe  $\delta > 0$  tal que restrito ao intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , o traço de  $\alpha$  coincide com o traço de uma curva  $\beta$  em que  $\beta(t) = (t, f(t))$  ou  $\beta(t) = (f(t), t)$ , para uma função diferenciável  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ .*

**Demonstração.** Sendo  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , como  $\alpha$  é regular em  $t_0$ , temos  $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ . Se  $x'(t_0) \neq 0$ , então pelo teorema da função inversa existe um intervalo  $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ , de modo que a função  $x(t)$  é diferenciável com inversa diferenciável, sobre  $J = x((t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1))$ , ou seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em que  $\beta(t) = \alpha(x^{-1}(t))$ . Portanto  $\beta$  é uma curva diferenciável e

$$\beta(t) = (x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t))) = (t, f(t))$$

em que  $f$ , dada por  $f(t) = y(x^{-1}(t))$  é uma função diferenciável.

Se  $y'(t_0) \neq 0$ , então, pelo teorema da função inversa, existe um intervalo  $(t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2)$ , de modo que a função  $y(t)$  é diferenciável com inversa diferenciável, sobre  $J = y((t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2))$ , ou seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em que  $\beta(t) = \alpha(y^{-1}(t))$ . Portanto  $\beta$  é uma curva diferenciável e

$$\beta(t) = (x(y^{-1}(t)), y(y^{-1}(t))) = (f(t), t)$$

em que  $f$ , dada por  $f(t) = x(y^{-1}(t))$  é uma função diferenciável. □

## 2.3 Reparametrização de Curvas

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  e seja  $h : J \rightarrow I$  uma função de classe  $C^\infty$ . Considere uma curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)).$$

Assim  $\beta$  é uma curva parametrizada de classe  $C^\infty$ . Dizemos então que  $\beta$  é uma *reparametrização* de  $\alpha$ . Aplicando a regra da cadeia temos:

$$\beta'(t) = [\alpha(h(t))]' = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t).$$

Nesse contexto a velocidade escalar de  $\beta$  é dada por

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| \cdot |h'(t)|.$$

Consideraremos apenas as reparametrizações em que  $h'(t) \neq 0$  (Ver [8] LIMA, corolário 6, pág. 274), ou seja, quando  $h$  é monótona. Deste modo, se  $\alpha$  é uma curva regular em  $I$  então sua reparametrização  $\beta = (\alpha \circ h)$  também será regular em  $J$ .

- Se  $h$  é crescente, dizemos que  $\beta = \alpha \circ h$  é uma *reparametrização positiva ou própria*.
- Se  $h$  é decrescente, dizemos que  $\beta = \alpha \circ h$  é uma *reparametrização negativa ou que reverte a orientação de  $\alpha$* .

## 2.4 Comprimento de Arco de Curvas

**Definição 2.10** Seja  $t_0 \in I$ , definimos o comprimento de arco de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  a partir do ponto  $t_0$  por:

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Temos que  $\|\alpha'(t)\|$  é uma função contínua, logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|,$$

daí a função  $L_\alpha$  é de classe  $C^1$

Note que se  $\alpha$  for regular no intervalo  $I$ , então a função  $L_\alpha$  é de classe  $C^\infty$ .

**Exemplo 9 (Comprimento do círculo)** - Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$$

uma parametrização de um círculo de centro  $C(x_0, y_0)$  e raio  $R$ , então

$$\alpha'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$$

e

$$\|\alpha'(t)\| = R.$$

Daí o comprimento de  $\alpha$  é

$$L_\alpha(t) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

**Definição 2.11** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se o parâmetro  $t$  difere de  $L_\alpha(t)$  apenas por uma constante:

$$L_\alpha(t) = t + C.$$

**Exemplo 10** A curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$  está parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1.$$

Consequentemente

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0.$$

**Proposição 2.3** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se  $\|\alpha'(t)\| = 1$ .

**Demonstração.** Se  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco então temos que  $L_\alpha(t) = t + C$  logo  $L'_\alpha(t) = 1$ , por outro lado  $L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$  portanto  $\|\alpha'(t)\| = 1$ . Note que se  $\|\alpha'(t)\| = 1$  para todo  $t \in I$  temos que:

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0.$$

Perceba que  $L_\alpha(t)$  difere apenas de uma constante do parâmetro  $t$ , logo  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

□

**Teorema 2.4** Toda curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. De forma mais precisa fixado  $t_0 \in I$  existe uma bijeção  $h : J \rightarrow I$  de classe  $C^\infty$  definida em um intervalo  $J$  sobre  $I$ , com  $0 \in J$  e  $h(0) = t_0$ , de modo que a curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$  satisfaz  $\|\beta'(s)\| = 1$ .

**Demonstração.** Como  $\alpha$  é regular temos que a função comprimento de arco satisfaz:

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| > 0.$$

Deste modo  $L_\alpha$  é estritamente crescente e portanto é injetiva. Por outro lado temos que  $L_\alpha$  é contínua, logo  $L_\alpha(I)$  é um intervalo  $J$ . Portanto  $L_\alpha$  possui inversa diferenciável (Ver [8] LIMA, corolário 6, pág. 274)

$$h : J \rightarrow I.$$

Temos que  $L_\alpha(t_0) = 0$ , além disso temos que  $0 \in J$  e  $h(0) = t_0$ , provaremos que  $\beta$  dada por  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Sabemos que  $h = L_\alpha^{-1}$ , daí:

$$h'(s) = \frac{1}{L'_\alpha(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}.$$

Por outro lado temos:

$$\beta'(s) = [(\alpha \circ h)(s)]' = \alpha'(h(s))h'(s).$$

Deste modo tem-se

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \|h'(s)\| = 1.$$

□

## 2.5 Campo de Vetores ao longo de Curvas

Um campo de vetores  $X(t)$  ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação que associa a cada  $t \in I$  um vetor com origem em  $\alpha(t)$ . Como a extremidade inicial do vetor  $X(t)$  é  $\alpha(t)$  então, para determiná-lo, basta conhecer a extremidade final.

**Definição 2.12** *Um campo de vetores de classe  $C^r$  ao longo de uma curva  $\alpha$  é uma aplicação  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$ . Geometricamente, o campo de vetores  $X$  é dado, em cada ponto  $\alpha(t)$ , pelo vetor de extremidades  $\alpha(t)$  e  $X(t)$ .*

**Definição 2.13** *Seja  $\alpha$  uma curva parametrizada e regular, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , então  $T(t) = (x'(t), y'(t))$  é um campo de classe  $C^\infty$  ao longo de  $\alpha$  e denominado campo Tangente.*

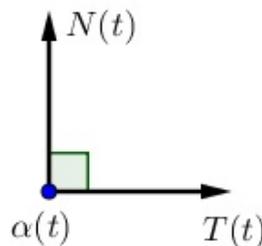
Quando  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se  $\|T(t)\| = 1$ , ou seja,  $T$  é um campo unitário.

**Definição 2.14** *O campo  $N$  dado por  $N(t) = (-y'(t), x'(t))$ , também é um campo de classe  $C^\infty$  ao longo de  $\alpha$  e denominado campo Normal.*

Note que, para todo  $t \in I$ , temos que  $N$  é perpendicular a  $T$ , pois:

$$\langle T(t), N(t) \rangle = -x'(t)y'(t) + y'(t)x'(t) = 0.$$

Figura 2.1: Posição relativa entre  $N$  e  $T$ .



Quando  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se que  $N$  é também um campo unitário.

**Exemplo 11** Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$  a parametrização de um círculo, então os campos de vetores tangente ( $T$ ) e normal ( $N$ ) são dados respectivamente por

$$T(t) = \left( -R\sin(t), R\cos(t) \right)$$

e

$$N(t) = \left( R\cos(t), R\sin(t) \right)$$

**Definição 2.15** Sejam  $X$  e  $Y$  dois campos de vetores de classe  $C^r$  ao longo de uma curva  $\alpha$  e uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^r$ , então podemos definir os campos  $X + Y$  e  $fX$  por

$$(X + Y)(t) = X(t) + Y(t), \quad (fX)(t) = f(t)X(t),$$

os quais também serão de classe  $C^r$ . Seja  $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$  é um campo de classe  $C^r$ , com  $r > 0$ , definimos a derivada de  $X$  por

$$X'(t) = (X'_1(t), X'_2(t)).$$

Deste modo,  $X'$  é um campo de vetores de classe  $C^{r-1}$ .

Os campos de vetores  $X$  e  $Y$  satisfazem as seguintes relações abaixo:

1.  $(X + Y)' = X' + Y'$ ;
2.  $(fX)' = f'X + fX'$ ;
3.  $\langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle$ .

**Proposição 2.5** Se  $\|X\| = C$  (em que  $C$  é constante), então  $X'(t)$  é perpendicular a  $X(t)$ , para todo  $t \in I$ , ou seja

$$\langle X, X' \rangle = 0.$$

Se  $X$  e  $Y$  são perpendiculares para todo  $t \in I$ , então

$$\langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle.$$

**Demonstração.** Derivando a equação  $\langle X, X \rangle = C$ , temos

$$\langle X, X \rangle' = \langle X', X \rangle + \langle X, X' \rangle = \langle X', X \rangle + \langle X', X \rangle = 2\langle X', X \rangle = 0$$

consequentemente

$$\langle X', X \rangle = 0.$$

Para demonstrar a segunda parte, temos que  $X$  e  $Y$  são perpendiculares, daí  $\langle X, Y \rangle = 0$ , derivando essa expressão obtemos:

$$\langle X, Y \rangle' = 0.$$

Usando 3., segue-se que

$$\langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle = 0$$

ou equivalentemente

$$\langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle$$

□

## 2.6 Curvatura e Fórmulas de Frenet

Nesta seção, vamos definir a Curvatura, deduzir as Fórmulas de Frenet e as expressões para calcular a curvatura de uma curva qualquer e também os casos específicos das Cônicas. Consideraremos as curvas  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , parametrizadas pelo comprimento de arco. Note que por hipótese  $\alpha'(s) \neq 0$ , deste modo pelas definições (2.13) e (2.14) os campos de vetores, tangentes e normais, unitários de classe  $C^\infty$  ao longo de  $\alpha$  estão bem definidos por

$$T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$$

e

$$N(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Note que  $\{T, N\}$  é uma base positiva do  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.16** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial  $\{T, N\}$  é chamado referencial de Frenet da curva  $\alpha$ .*

Sabemos que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, logo  $\|T\| = 1$ . Assim, pela proposição 3.5 o vetor  $T'(s)$  é perpendicular a  $T(s)$ . Por outro lado  $T$  e  $N$  geram o  $\mathbb{R}^2$ , daí para cada  $s \in I$ ,  $T'(s)$  é paralelo a  $N(s)$ . Deste modo, existe uma função  $k$ , tal que para cada  $s \in I$  tem-se:

$$T'(s) = k(s)N(s).$$

**Definição 2.17** *A função  $k$ , que foi definida na equação  $T'(s) = k(s)N(s)$ , é chamada de curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$ .*

Note que a curvatura  $k(s)$  pode ser dada por:

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle N'(s), T(s) \rangle.$$

Assim se  $\alpha$  for de classe  $C^\infty$ , então  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$ . Sabemos que  $\|N(s)\| = 1$ , daí  $|k(s)| = \|T'(s)\|$ . Geometricamente, tem-se  $\|T(s)\| = 1$  e  $|k(s)| = \|T'(s)\|$ , então a curvatura representa a variação da direção do vetor tangente e conseqüentemente a variação da mudança de direção da reta tangente a  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ . Em outras palavras, podemos

dizer que a curvatura é uma medida que quantifica o quanto a curva deixa de ser reta. Uma forma de medir como a curva  $\alpha(t)$  está se curvando é verificar como o vetor tangente unitário  $T$  varia ao longo do comprimento  $s$  da curva. Deste modo, a curvatura pode ser expressa como

$$|k(s)| = \left\| \frac{dT(s)}{ds} \right\|.$$

Por outro lado temos pela regra da cadeia que

$$\left\| \frac{dT(s)}{ds} \right\| = \left\| \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \frac{\left\| \frac{dT}{dt} \right\|}{\left\| \frac{ds}{dt} \right\|} = \frac{\|T'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Portanto,

$$|k(s)| = \frac{\|T'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (2.1)$$

**Proposição 2.6** *A curvatura de uma curva regular  $\alpha$  é identicamente nula se, e somente se, o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta.*

**Demonstração.** Considerando  $k(s) = 0$ , temos  $|k(s)| = 0$ . Por outro lado  $\|T'(s)\| = |k(s)| = 0$ , daí  $T'(s) = (0,0)$ . Sabemos que  $T$  está definido num intervalo  $I$  e como  $T'(s) = (0,0)$  temos que  $T(s)$  é um vetor constante  $V_0$ . Consequentemente:

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s T(u)du = \alpha(s_0) + V_0(s - s_0).$$

Logo o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta que passa por  $\alpha(s_0)$  e tem a direção do vetor  $V_0$ .

Consideremos agora que o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta, sendo  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco, assim temos

$$\alpha(s) = P_0 + sV_0.$$

Derivando essa igualdade temos  $\alpha'(s) = V_0$ , por outro lado  $\alpha'(s) = T(s)$ , daí  $V_0 = T(s)$ , mas  $V_0$  é um vetor constante, portanto  $V_0' = T'(s) = (0,0)$ . Consequentemente,  $k(s) = 0$ .

□

Sabemos que a norma do campo normal é constante, pois  $\|N(s)\| = 1$ , daí  $N'(s)$  é perpendicular a  $N(s)$ , consequentemente  $N'(s)$  é paralelo a  $T(s)$ . Por outro lado, temos

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

o que implica

$$(x''(s), y''(s)) = (-k(s)y'(s), k(s)x'(s)).$$

Portanto

$$N'(s) = (-y''(s), x''(s)) = (-k(s)x'(s), -k(s)y'(s)) = -k(s)T(s).$$

Logo os vetores  $N$  e  $T$  satisfazem as equações denominadas *Equações de Frenet*:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s), \\ N'(s) = -k(s)T(s). \end{cases}$$

Sabendo que toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco, veremos que podemos calcular a curvatura de uma curva regular que não está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Definição 2.18** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e regular, e seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização, da curva  $\alpha$ , pelo comprimento de arco. Definimos a curvatura em  $\alpha$  em  $t \in I$  pela curvatura de  $\beta$  no ponto  $s \in J$  correspondente ao ponto  $t \in I$ .*

Essa curvatura pode ser expressa em função das coordenadas da parametrização  $\alpha$ .

**Proposição 2.7** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então, a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  é dada por*

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^3}}.$$

**Demonstração.** Seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização positiva de  $\alpha$  pelo comprimento de arco. Escrevendo

$$\beta(s(t)) = \alpha(t) = (x(t), y(t)). \quad (2.2)$$

Pela definição de Curvatura temos

$$k(t) = k(s(t)) = \langle T'(s(t)), N(s(t)) \rangle = \langle \beta''(s(t)), N(s(t)) \rangle. \quad (2.3)$$

Derivando a equação (2.2) usando a regra da cadeia, obtemos

$$\beta'(s(t))s'(t) = \alpha'(t). \quad (2.4)$$

Calculando a norma em ambos os membros da equação

$$\|\beta'(s(t))s'(t)\| = \|\alpha'(t)\|.$$

Sabemos que  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco, logo  $\|\beta'(s(t))\| = 1$ , consequentemente:

$$|s'(t)| = \|\alpha'(t)\|.$$

Como  $\beta$  é uma reparametrização positiva temos  $s'(t) > 0$  daí

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|. \quad (2.5)$$

Derivando ambos os membros de (2.5) e usando a regra da cadeia, obtemos

$$s''(t) = \|\alpha'(t)\|' = \left( \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \left( \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{-\frac{1}{2}} \right) 2 \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$$

ou equivalentemente

$$s''(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) em (2.4), obtemos

$$\beta'(s(t))\|\alpha'(t)\| = \alpha'(t)$$

ou ainda

$$\beta'(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (2.7)$$

Por outro lado derivando a equação (2.4), temos

$$\alpha''(t) = \beta''(s(t))(s'(t))^2 + \beta'(s(t))s''(t). \quad (2.8)$$

Substituindo (2.5), (2.6) e (2.7) em (2.8), obtemos

$$\alpha''(t) = \beta''(s(t))\|\alpha'(t)\|^2 + \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2} \alpha'(t).$$

Logo

$$\beta''(s(t)) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} - \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^4} \alpha'(t). \quad (2.9)$$

Pela definição de campo normal, temos

$$N(s(t)) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Temos por (2.2) que a curvatura é dada por

$$k(t) = k(s(t)) = \left\langle \beta''(s(t)), N(s(t)) \right\rangle.$$

Note que  $N(s(t))$  é perpendicular ao vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ , deste modo temos que a curvatura é dada por

$$k(t) = k(s(t)) = \left\langle \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}, \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|} \right\rangle$$

ou equivalentemente

$$k(t) = k(s(t)) = \left\langle \frac{(x''(t), y''(t))}{\|\alpha'(t)\|^2}, \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|} \right\rangle$$

efetuando o produto interno, obtemos

$$k(t) = k(s(t)) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

portanto

$$k(t) = k(s(t)) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^3}}.$$

□

A seguir vamos deduzir as expressões que representam as **curvaturas das cônicas**:

**Exemplo 12 (Curvatura do Círculo)** Seja  $\alpha(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$  uma parametrização do círculo de centro  $C(x_0, y_0)$  e raio  $R$ , assim

$$\alpha'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$$

e

$$\alpha''(t) = (-R\cos(t), -R\sin(t)).$$

Logo

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)} = \sqrt{R^2} = R,$$

então, sua curvatura é dada por:

$$k(t) = \frac{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}{R^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

**Exemplo 13 (Curvatura da Elipse)** Dada uma Elipse  $\alpha(t) = (x_0 + a\cos(t), y_0 + b\sin(t))$ , daí temos

$$\alpha'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t))$$

$$\alpha''(t) = (-a\cos(t), -b\sin(t))$$

e

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}$$

então, sua curvatura é dada por:

$$k(t) = \frac{ab\sin^2(t) + ab\cos^2(t)}{\sqrt{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^3}} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^3}}.$$

**Observação 2.1** Quando  $a = b = R$ , então a curvatura é  $k(t) = \frac{1}{R}$ , uma vez que trata-se de um caso particular da Elipse que é o círculo.

**Exemplo 14 (Curvatura da Parábola)** Dada uma Parábola  $\alpha(t) = (t, kt^2)$ , temos

$$\alpha'(t) = (1, 2kt),$$

$$\alpha''(t) = (0, 2k)$$

e

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4k^2t^2}.$$

Então, sua curvatura é dada por:

$$k(t) = \frac{2k}{\sqrt{(1 + 4k^2t^2)^3}}.$$

**Exemplo 15 (Curvatura da Hipérbole)** *Seja um ramo da hipérbole*

$$\alpha(t) = (x_0 + a\text{Cosh}(t), y_0 + b\text{Senh}(t)),$$

temos

$$\alpha'(t) = (a\text{Senh}(t), b\text{Cosh}(t)),$$

$$\alpha''(t) = (a\text{Cosh}(t), b\text{Senh}(t))$$

e

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2\text{Senh}^2(t) + b^2\text{Cosh}^2(t)}.$$

Então, sua curvatura é dada por:

$$k(t) = \frac{ab\text{Senh}^2(t) - ab\text{Cosh}^2(t)}{\sqrt{(a^2\text{Senh}^2(t) + b^2\text{Cosh}^2(t))^3}} = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2\text{Senh}^2(t) + b^2\text{Cosh}^2(t))^3}}.$$

Para uma curva parametrizada na forma polar, também podemos calcular a curvatura, usando o resultado da proposição a seguir:

**Proposição 2.8** *Seja  $r = r(\theta)$  uma curva regular, definida por uma equação polar. Então sua curvatura  $k(\theta)$  é dada por*

$$k(\theta) = \frac{(r(\theta))^2 + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)}{((r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**Demonstração.** Seja  $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = r(\theta)(\text{Cos}(\theta), \text{Sen}(\theta))$  a equação paramétrica da curva dada por  $r = r(\theta)$ . Deste modo, temos:

$$\alpha'(\theta) = (x', y') = r'(\text{Cos}\theta, \text{Sen}\theta) + r(-\text{Sen}\theta, \text{Cos}\theta)$$

e

$$\alpha''(\theta) = (x'', y'') = r''(\text{Cos}\theta, \text{Sen}\theta) + r'(-\text{Sen}\theta, \text{Cos}\theta) + r'(-\text{Sen}\theta, \text{Cos}\theta) + r(-\text{Cos}\theta, -\text{Sen}\theta)$$

agrupando os termos semelhantes e reescrevendo-os em forma de produto

$$\alpha''(\theta) = (x'', y'') = (r'' - r)(\text{Cos}\theta, \text{Sen}\theta) + 2r'(-\text{Sen}\theta, \text{Cos}\theta).$$

Substituindo as expressões de  $x'$ ,  $x''$ ,  $y'$  e  $y''$  na proposição 3.7, temos:

$$k(\theta) = \frac{[r'\text{Cos}\theta - r\text{Sen}\theta][(r'' - r)\text{Sen}\theta + 2r'\text{Cos}\theta] - [(r'' - r)\text{Cos}\theta - 2r'\text{Sen}\theta][r'\text{Sen}\theta + r\text{Cos}\theta]}{\sqrt{([r'\text{Cos}\theta - r\text{Sen}\theta]^2 + [r'\text{Sen}\theta + r\text{Cos}\theta]^2)^3}}.$$

Agrupando os termos semelhantes e reescrevendo-os em forma de produto, obtemos

$$k(\theta) = \frac{[r'(r'' - r) - 2rr'] [\cos\theta \operatorname{Sen}\theta - \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sen}\theta] + [2r'^2 + r^2 - rr'] (\operatorname{Sen}^2\theta + \operatorname{Cos}^2\theta)}{\sqrt{\left[ r'^2 \operatorname{Cos}^2\theta - 2rr' \operatorname{Sen}\theta \operatorname{Cos}\theta + r^2 \operatorname{Sen}^2\theta + r'^2 \operatorname{Sen}^2\theta + 2rr' \operatorname{Sen}\theta \operatorname{Cos}\theta + r^2 \operatorname{Cos}^2\theta \right]^3}}$$

Cancelando os termos opostos (em relação a adição)

$$k(\theta) = \frac{2r'^2 + r^2 - rr'}{\sqrt{\left( r^2 [\operatorname{Sen}^2\theta + \operatorname{Cos}^2\theta] + r'^2 [\operatorname{Sen}^2\theta + \operatorname{Cos}^2\theta] \right)^3}}$$

Pela relação Fundamental da Trigonometria

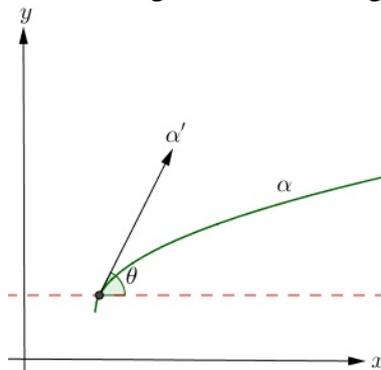
$$k(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r(\theta)r'(\theta) - r(\theta)r'(\theta)}{\sqrt{\left( r(\theta)^2 + r'(\theta)^2 \right)^3}}$$

□

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  um a curva regular. Seja  $\theta(s)$ , com  $0 < \theta(s) < 2\pi$ , o ângulo que o vetor tangente faz com o eixo  $x$  (Ver figura 2.2), ou seja  $x'(s) = \operatorname{Cos}(\theta)$ ,  $y'(s) = \operatorname{Sen}(\theta)$ . Logo

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right), \theta(s) \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Figura 2.2: Ângulo do vetor tangente.



A proposição seguinte mostra que a curvatura de uma curva é a variação do ângulo formado pelo seu vetor velocidade e o eixo  $x$ :

**Proposição 2.9** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $C^2$  parametrizada pelo comprimento de arco e definida por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . Seja  $\theta(s)$  o ângulo que o vetor  $\alpha'(s)$  faz com o eixo  $x$ . Então*

$$k(s) = \theta'(s),$$

em que  $k$  é a curvatura da curva  $\alpha$ .

**Demonstração.** Considerando  $x'(s) \neq 0$ , temos  $\theta(t) = \arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$ . Derivando essa expressão temos

$$\theta'(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2}$$

ou ainda

$$\theta'(t) = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}.$$

Como  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco temos  $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$ , logo

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = [(x'(s))^2 + (y'(s))^2]^{\frac{3}{2}}$$

o que implica

$$\theta'(t) = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{[(x'(s))^2 + (y'(s))^2]^{\frac{3}{2}}} = k(s).$$

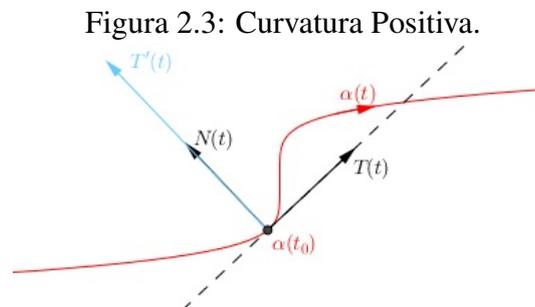
□

## 2.7 Interpretação Geométrica da Curvatura

Esta seção é dedicada à interpretação geométrica da curvatura por meio do círculo osculador. Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva e  $k(s)$  a curvatura de  $\alpha$  para cada  $s \in I$ . O sinal da curvatura nos fornece informações geométricas para curvas planas em  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.7.1 Sinal da Curvatura

Seja  $t_0 \in I$ , se  $k(t_0) > 0$ , então, para  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$ ,  $\alpha(t)$  está contida no semi-plano determinado pela reta tangente à  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t_0)$  e para o qual aponta o vetor  $N(t_0)$ , ou seja, o vetor  $T'$  possui o mesmo sentido do vetor  $N$ .



Para provar esse fato mostraremos que a projeção do vetor  $\alpha(t) - \alpha(t_0)$  sobre o vetor  $N(t_0)$  assume um valor positivo quando  $t$  se aproxima de  $t_0$ , ou seja, que a função

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle$$

é maior do que zero. Note que

$$f'(t) = \langle \alpha'(t) - (\alpha(t_0))', N(t_0) \rangle + \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), (N(t_0))' \rangle.$$

Como  $\alpha(t_0)$  e  $N(t_0)$  são vetores constantes, temos

$$f'(t) = \langle \alpha'(t), N(t_0) \rangle + \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), 0 \rangle.$$

Mas,  $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), 0 \rangle = 0$ , logo

$$f'(t) = \langle \alpha'(t), N(t_0) \rangle.$$

Por outro lado,  $\alpha'(t) = T(t)$ , conseqüentemente

$$f'(t_0) = \langle \alpha'(t_0), N(t_0) \rangle = \langle T(t_0), N(t_0) \rangle = 0.$$

Logo  $t_0$  é um ponto crítico de  $f$  e, por outro lado, temos

$$f''(t) = \langle \alpha''(t), N(t_0) \rangle + \langle \alpha'(t), (N(t_0))' \rangle.$$

Sabemos que a derivada de uma constante é zero, assim

$$f''(t) = \langle \alpha''(t), N(t_0) \rangle + \langle \alpha'(t), 0 \rangle$$

Mas,  $\langle \alpha'(t), 0 \rangle = 0$  e  $\alpha''(t) = T'(t)$ , logo

$$f''(t) = \langle \alpha''(t), N(t_0) \rangle = \langle T'(t), N(t_0) \rangle.$$

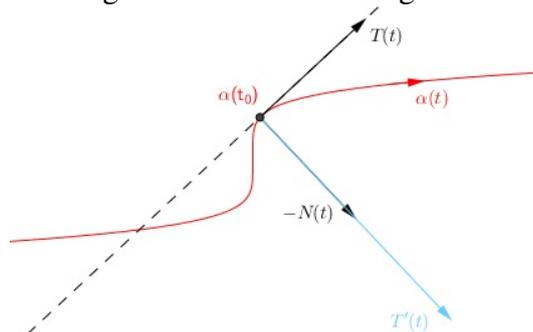
Deste modo,

$$f''(t_0) = \langle T'(t_0), N(t_0) \rangle = k(t_0) > 0.$$

Assim, tem-se que  $t_0$  é um ponto crítico da função  $f$  pois  $f'(t_0) = 0$ , além disso  $t_0$  é um mínimo relativo estrito de  $f$ , pois  $f''(t_0) > 0$ . Portanto,  $f(t) > f(t_0) = 0$ , para  $t \approx t_0$ , demonstrando o desejado.

Se  $k(t_0) < 0$ , então, para  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$ ,  $\alpha(t)$  está contida no semi-plano determinado pela reta tangente à  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t)$  e para o qual aponta o vetor  $-N(t_0)$ , nesse caso o vetor  $T'$  possui sentido oposto ao vetor  $N$ .

Figura 2.4: Curvatura Negativa.



Neste caso, temos

$$f'(t_0) = \langle \alpha'(t_0), N(t_0) \rangle = \langle T(t_0), N(t_0) \rangle = 0$$

e

$$f''(t_0) = \langle T'(t_0), N(t_0) \rangle = k(t_0) < 0,$$

ou seja, a função  $f$  possui um máximo relativo estrito em  $t_0$ , logo  $f(t) < f(t_0) = 0$ , para  $t \approx t_0$ , demonstrando o desejado.

## 2.7.2 Valor da Curvatura

O valor da curvatura tem um sentido geométrico o qual estudaremos agora. Considere  $k(t_0) > 0$ . Para cada  $\rho > 0$ , sejam  $P_\rho = \alpha(t_0) + \rho N(t_0)$  e  $C_{\rho_0}$  o círculo de centro  $P_\rho$  e raio  $\rho$ . Consideremos a função  $g$ , dada por:

$$g(t) = \|\alpha(t) - P_\rho\|^2 - \rho^2. \quad (2.10)$$

Note que  $g(t_0) = \rho^2 - \rho^2 = 0$ , portanto  $\alpha(t_0) \in C_{\rho_0}$ .

Por (2.10), temos

$$g(t) = \langle \alpha(t) - P_\rho, \alpha(t) - P_\rho \rangle - \rho^2.$$

Substituindo  $P_\rho$  por sua expressão correspondente:

$$g(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0) - \rho N(t_0), \alpha(t) - \alpha(t_0) - \rho N(t_0) \rangle - \rho^2.$$

Derivando ambos os membros, obtemos

$$g'(t) = 2 \langle \alpha(t) - \alpha(t_0) - \rho N(t_0), \alpha'(t) \rangle. \quad (2.11)$$

Logo

$$g'(t_0) = 2 \langle \alpha(t_0) - \alpha(t_0) - \rho N(t_0), \alpha'(t_0) \rangle$$

Portanto

$$g'(t_0) = 2 \langle -\rho N(t_0), \alpha'(t_0) \rangle.$$

Como  $N(t_0)$  e  $\alpha'(t_0)$  são perpendiculares, temos

$$g'(t_0) = 0.$$

Logo  $t_0$  é um ponto crítico de  $g$ . Por outro lado, derivando a equação (2.11):

$$g''(t) = 2 \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle + 2 \langle \alpha(t) - \alpha(t_0) - \rho N(t_0), \alpha''(t) \rangle.$$

Como  $\|\alpha'(t)\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$ , tem-se

$$g''(t) = 2\|\alpha'(t)\|^2 + 2 \langle \alpha(t) - \alpha(t_0) - \rho N(t_0), \alpha''(t) \rangle.$$

Mas  $\alpha'(t) = T(t)$  e  $\alpha''(t) = T'(t)$ , logo

$$g''(t) = 2\|T(t)\|^2 + 2\langle \alpha(t) - \alpha(t_0) - \rho N(t_0), T'(t) \rangle.$$

Assim,

$$g''(t_0) = 2\|T(t_0)\|^2 + 2\langle \alpha(t_0) - \alpha(t_0) - \rho N(t_0), T'(t_0) \rangle$$

Cancelando os termos opostos e usando o fato de  $\|T(t_0)\| = 1$ , obtemos

$$g''(t_0) = 2 + 2\langle -\rho N(t_0), T'(t_0) \rangle$$

ou equivalentemente

$$g''(t_0) = 2 - 2\rho \langle N(t_0), T'(t_0) \rangle.$$

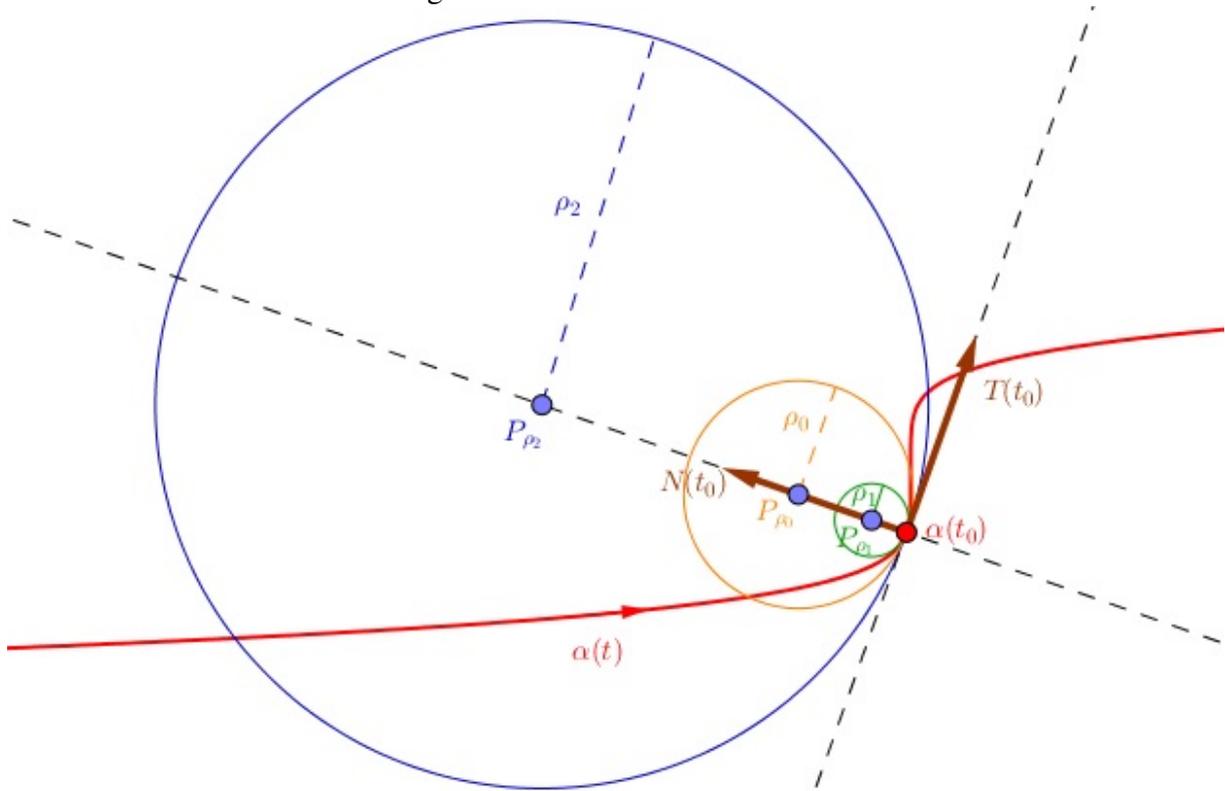
Mas  $k(t_0) = \langle N(t_0), T'(t_0) \rangle$ , logo

$$g''(t_0) = 2 - 2k(t_0)\rho$$

Portanto, pelo teste da segunda derivada:

- se  $\rho > \frac{1}{k(t_0)}$ , então  $g''(t_0) < 0$ , daí  $g$  possui um máximo estrito em  $t_0$ , logo para  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$  tem-se que  $\alpha(t)$  está contido no interior de  $C_\rho$ .
- se  $\rho < \frac{1}{k(t_0)}$ , então  $g''(t_0) > 0$ , daí  $g$  possui um mínimo estrito em  $t_0$ , logo para  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$  tem-se que  $\alpha(t)$  está contido no exterior de  $C_\rho$ .
- se  $\rho = \frac{1}{k(t_0)}$  temos  $g''(t_0) = 0$ , então nada se pode afirmar.

Figura 2.5: Círculo Osculador.



Definimos

$$\rho_0 = \frac{1}{k(t_0)}$$

como sendo o raio de curvatura de  $\alpha$  no ponto  $t_0$ , no caso em que  $k(t_0) < 0$ , definimos

$$\rho_0 = \frac{1}{|k(t_0)|}.$$

Definimos também o ponto

$$P_{\rho_0} = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}N(t_0)$$

como sendo o *centro de curvatura* ou ponto focal de  $\alpha$  em  $t_0$ , daí o círculo  $C_{\rho_0}$  de centro  $P_{\rho_0}$  e raio  $\rho_0$  é chamado círculo osculador de  $\alpha$  em  $t_0$ . Esse círculo possui a mesma curvatura que  $\alpha$  no ponto  $t_0$  (Ver figura 2.5). O lugar geométrico dos centros dos círculos osculadores de uma curva é chamado de *evoluta*.

## 2.8 Centro e Raio de Curvatura das Cônicas

A seguir, vamos deduzir as expressões do raio e do centro de curvatura das cônicas, fazendo uso das parametrizações apresentadas na seção 3.1 e das expressões de curvatura dessas cônicas apresentadas na seção 3.6.

**Exemplo 16 (Centro e Raio de Curvatura de uma Elipse)** Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$$

uma parametrização de uma elipse. Sabemos que a Curvatura de uma elipse é dada por

$$k(t) = \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^3}} \neq 0.$$

Logo o raio de curvatura é dado por

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^3}}{ab}$$

e temos que o centro de curvatura da elipse é dado pela expressão

$$P_\rho = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}N(t).$$

Substituindo  $\alpha(t)$ ,  $k(t)$  e  $N(t)$  pelas suas respectivas expressões obtemos

$$P_\rho = (a\cos t, b\sin t) + \frac{\sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}}{ab} \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} (-b\cos t, -a\sin t)$$

ou equivalentemente

$$P_\rho = (a\cos t, b\sin t) + \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} (-b\cos t, -a\sin t).$$

Efetuando o produto e a soma, temos

$$P_\rho = \left( \frac{a^2b\cos t - a^2b\sin^2 t\cos t - b^3\cos^3 t}{ab}, \frac{ab^2\sin t - a^3\sin^3 t - ab^2\cos^2 t\sin t}{ab} \right).$$

Simplificando as frações, obtemos

$$P_\rho = \left( \frac{a^2\cos t - a^2\sin^2 t\cos t - b^2\cos^3 t}{a}, \frac{b^2\sin t - a^2\sin^3 t - b^2\cos^2 t\sin t}{b} \right).$$

Pela relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) \quad e \quad \cos^2(t) = 1 - \sin^2(t),$$

consequentemente

$$P_\rho = \left( \frac{a^2(\cos t - \cos t + \cos^3 t) - b^2\cos^3 t}{a}, \frac{b^2(\sin t - \sin t + \sin^3 t) - a^2\sin^3 t}{b} \right)$$

o que implica

$$P_\rho = \left( \frac{a^2 \text{Cos}^3(t) - b^2 \text{Cos}^3(t)}{a}, \frac{b^2 \text{Sen}^3(t) - a^2 \text{Sen}^3(t)}{b} \right).$$

Colocando os termos comuns em evidência

$$P_\rho = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \text{Cos}^3(t), \frac{b^2 - a^2}{b} \text{Sen}^3(t) \right)$$

que é o centro de curvatura da Elipse.

**Observação 2.2** Quando  $a = b$ , temos  $P_\rho = (0,0)$ , pois trata-se de um círculo e o centro de um círculo coincide com o seu centro de curvatura.

**Exemplo 17 (Raio e Centro de Curvatura de uma Hipérbole)** Seja um ramo da hipérbole  $\alpha(t) = (a \text{Cosh}(t), b \text{Senh}(t))$

Sabemos que a Curvatura de uma hipérbole é dada por

$$k(t) = -\frac{ab}{\sqrt{\left(a^2 \text{Senh}^2(t) + b^2 \text{Cosh}^2(t)\right)^3}} \neq 0.$$

Logo o raio de curvatura é dado por

$$\rho(t) = -\frac{\sqrt{\left(a^2 \text{Senh}^2(t) + b^2 \text{Cosh}^2(t)\right)^3}}{ab}$$

e o centro de curvatura da hipérbole é dado pela expressão

$$P_\rho = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} N(t).$$

Substituindo  $\alpha(t)$ ,  $k(t)$  e  $N(t)$  pelas suas respectivas expressões, obtemos

$$P_\rho = (a \text{Cosh}(t), b \text{Senh}(t)) - \frac{\sqrt{\left(a^2 \text{Senh}^2(t) + b^2 \text{Cosh}^2(t)\right)^3}}{ab \sqrt{a^2 \text{Senh}^2(t) + b^2 \text{Cosh}^2(t)}} (-b \text{Cosh}(t), a \text{Senh}(t))$$

ou equivalentemente

$$P_\rho = (a \text{Cosh}(t), b \text{Senh}(t)) - \frac{\left(a^2 \text{Senh}^2(t) + b^2 \text{Cosh}^2(t)\right)}{ab} (-b \text{Cosh}(t), a \text{Senh}(t)).$$

Efetando o produto e a soma, temos

$$P_\rho = \left( \frac{a^2 b \text{Cosht} + a^2 b \text{Senh}^2 t \text{Cosht} + b^3 \text{Cosh}^3 t}{ab}, \frac{ab^2 \text{Senht} - a^3 \text{Senh}^3 t - ab^2 \text{SenhtCosh}^2 t}{ab} \right).$$

Simplificando as frações, obtemos

$$P_\rho = \left( \frac{a^2 \text{Cosht} + a^2 \text{Senh}^2 t \text{Cosht} + b^2 \text{Cosh}^3 t}{a}, \frac{b^2 \text{Senht} - a^2 \text{Senh}^3 t - b^2 \text{SenhtCosh}^2 t}{b} \right).$$

Por outro lado, temos pelas relações das funções hiperbólicas que

$$\text{Senh}^2(t) = \text{Cosh}^2(t) - 1 \quad e \quad \text{Cosh}^2(t) = 1 + \text{Senh}^2(t)$$

consequentemente

$$P_\rho = \left( \frac{a^2 (\text{Cosht} + \text{Cosh}^3 t - \text{Cosht}) + b^2 \text{Cosh}^3 t}{a}, \frac{b^2 (\text{Senht} - \text{Senht} + \text{Senh}^3 t) - a^2 \text{Senh}^3 t}{b} \right).$$

Logo,

$$P_\rho = \left( \frac{a^2 \text{Cosh}^3(t) + b^2 \text{Cosh}^3(t)}{a}, \frac{b^2 \text{Senh}^3(t) - a^2 \text{Senh}^3(t)}{b} \right).$$

Colocando os termos comuns em evidência

$$P_\rho = \left( \frac{a^2 + b^2}{a} \text{Cosh}^3(t), \frac{b^2 - a^2}{b} \text{Senh}^3(t) \right)$$

que é o centro de curvatura da Hipérbole.

**Exemplo 18 (Raio e Centro de Curvatura de uma Parábola)** Considere a Parábola  $\alpha(t) = (t, kt^2)$  do tipo  $(y = kx^2)$ . Sabemos que a Curvatura dessa parábola é dada por

$$k(t) = \frac{2k}{\sqrt{(1 + 4k^2 t^2)^3}} \neq 0.$$

Logo o raio de curvatura é

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{(1 + 4k^2 t^2)^3}}{2k}$$

e temos que o centro de curvatura da Parábola é dado por

$$P_\rho = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} N(t).$$

Substituindo  $\alpha(t)$ ,  $k(t)$  e  $N(t)$  pelas suas respectivas expressões, obtemos

$$P_\rho = (t, kt^2) + \frac{\sqrt{(1 + 4k^2 t^2)^3}}{2k} \frac{1}{\sqrt{1 + 4k^2 t^2}} (-2kt, 1)$$

ou equivalentemente

$$P_\rho = (t, kt^2) + \frac{1 + 4k^2 t^2}{2k} (-2kt, 1).$$

*Efetuando o produto e a soma, temos*

$$P_p = \left( \frac{2kt - 2kt - 8k^3t^3}{2k}, \frac{2k^2t^2 + 1 + 4k^2t^2}{2k} \right).$$

*Simplificando as frações, obtemos*

$$P_p = \left( -4k^2t^3, \frac{6k^2t^2 + 1}{2k} \right)$$

*que é o centro de curvatura da Parábola.*

## Capítulo 3

# Procedimentos Geométricos para Encontrar o Centro de Curvatura de uma Cônica

O conceito de curvatura é bastante utilizado no dia a dia de maneira intuitiva, tais como a curvatura da nossa coluna vertebral ou de curvas presentes em pistas automobilísticas ou rodovias. Formalmente, para calcularmos a curvatura de uma curva  $\alpha$  em um determinado ponto  $t_0$  associamos a um círculo que passa por  $t_0$  e possui a mesma curvatura que  $\alpha$  em  $t_0$ , o centro e o raio desse círculo são chamados respectivamente de centro de curvatura e raio de curvatura. Nosso objetivo nesse capítulo é encontrar o centro e o raio de curvatura de uma cônica usando apenas procedimentos geométricos. A determinação dos centros de curvatura e conseqüentemente das evolutas das curvas é algo que gera muita curiosidade. A seguir, detalharemos um método descrito por ([12] YATES, 1951), para encontrar geometricamente esses elementos: Centro de curvatura e Evolutas das Cônicas.

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (t, y(t))$  ou seja uma parametrização de um gráfico de uma função, temos

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, y'(t))$$

e

$$\alpha''(t) = (x''(t), y''(t)) = (0, y''(t))$$

Substituindo as expressões de  $x'$ ,  $y'$ ,  $x''$  e  $y''$  na expressão de curvatura da proposição 2.7, obtemos

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^3}} = \frac{1y'' - 0y'}{\sqrt{(1^2 + y'^2)^3}} = \frac{y''}{(1^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1)$$

Sendo  $R$  o raio de curvatura, temos

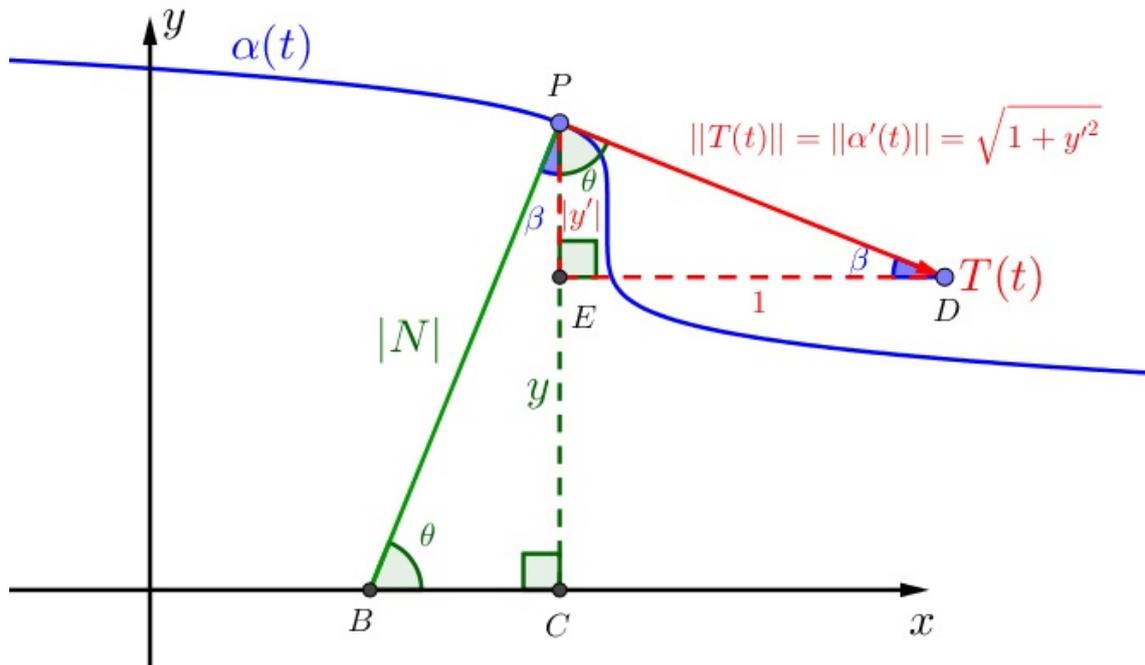
$$R = \left| \frac{1}{k} \right| \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) em (3.2)

$$R = \left| \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| \quad (3.3)$$

Seja  $|N|$  o comprimento do normal medido da curva para o eixo  $x$ , como mostra a figura 3.1, perceba que o segmento  $PC = y$ . Por outro lado, o vetor tangente a  $\alpha$  tem coordenadas  $\alpha'(t) = (1, y')$ .

Figura 3.1: Comprimento do normal medido da curva ao eixo  $x$ .



Note que os ângulos  $PBC$  e  $CPB$  do triângulo  $PBC$  são complementares daí

$$\theta + \beta = 90^\circ.$$

Como os vetores tangente e normal são perpendiculares, temos que o ângulo  $DPB$  é reto. Consequentemente temos  $DPE = PBC = \theta$ . Deste modo, os triângulos  $PBC$  e  $DPE$  são semelhantes, logo

$$\frac{PB}{CP} = \frac{DP}{ED},$$

ou equivalentemente

$$\frac{|N|}{y} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{1},$$

assim,

$$|N| = y\sqrt{1+y'^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$N^2 = y^2(1+y'^2), \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.3), obtemos que para qualquer curva plana que é parametrizada como um gráfico de uma função, temos:

$$|R| = \left| \frac{\left(\frac{N^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| = \left| \frac{\left(\frac{N^3}{y^3}\right)}{y''} \right| = \left| \frac{N^3}{y^3 y''} \right|. \quad (3.5)$$

**Observação 3.1** *As expressões 3.3, 3.4 e 3.5 contêm todos os termos em módulos ou em expressões quadráticas. Deste modo as mesmas também valem para as cônicas, pois conseguimos expressar a parametrização de uma cônica em parametrizações de duas funções que diferem apenas de um sinal.*

Considere que  $R$  é o raio de curvatura de uma cônica:

$$y^2 = 2Ax + Bx^2, \quad (3.6)$$

em que  $A$  é o semi-latus rectum. Definimos o *latus rectum* de uma cônica como sendo a corda focal (segmento de reta que passa por um do(s) foco(s) da cônica de extremidade pertencentes à mesma) cujo comprimento é mínimo. Em coordenadas cartesianas, dentro da convenção usual de representação canônica para elipses e hipérbolos o comprimento do latus rectum é dado por  $2A = \frac{2b^2}{a}$  e na parábola é  $2A = 4|p|$ .

([9] NUNES, 2014.)

Derivando a expressão (3.6), obtemos

$$2yy' = 2A + 2Bx$$

ou equivalentemente

$$yy' = A + Bx. \quad (3.7)$$

Derivando agora a expressão (3.7)

$$yy'' + (y')^2 = B. \quad (3.8)$$

Multiplicando (3.8) por  $y^2$

$$y^3 y'' + (yy')^2 = By^2. \quad (3.9)$$

Por (3.7) e (3.9), temos

$$y^3 y'' + (A + Bx)^2 = By^2.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$y^3 y'' + A^2 + 2ABx + B^2 x^2 = By^2$$

ou equivalentemente

$$y^3 y'' = By^2 - 2ABx - B^2 x^2 - A^2.$$

Consequentemente

$$y^3 y'' = B(y^2 - 2Ax - Bx^2) - A^2.$$

Por (3.7), temos  $y^2 - 2Ax - Bx^2 = 0$ , logo

$$y^3 y'' = -A^2. \quad (3.10)$$

Deste modo por (3.5) e (3.10), obtemos

$$R = \left| \frac{N^3}{-A^2} \right| = \left| \frac{N^3}{A^2} \right|, \quad (3.11)$$

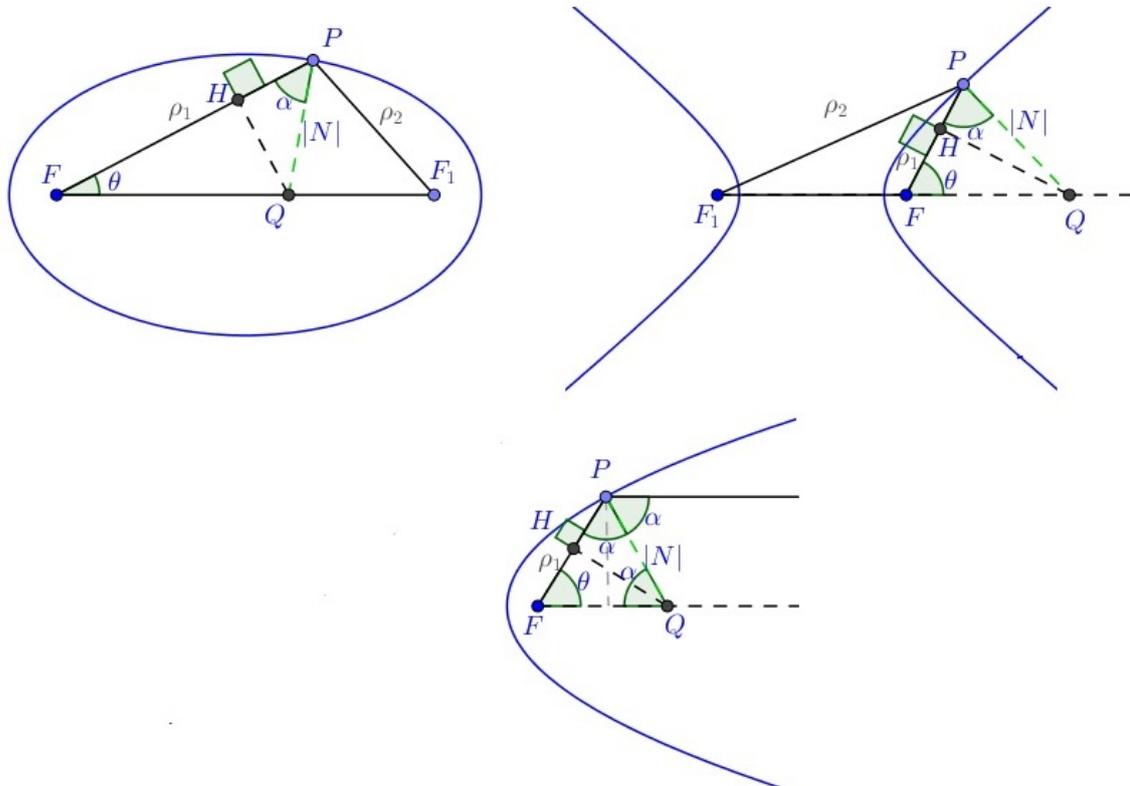
em que  $|N|$  é o comprimento do normal medido da curva para o diâmetro focal.

Em coordenadas polares com polo em foco, a forma canônica de uma cônica é

$$\rho_1 = \frac{A}{1 - e \cos(\theta)}, \quad (3.12)$$

em que  $e$  é a excentricidade da cônica. ([9] NUNES, 2014.)

Figura 3.2: Cônicas



Note que  $PQ$  é normal a qualquer ponto  $P(\rho_1, \theta)$ , daí  $PQ$  coincide com a bissetriz do entre os raios focais. Logo, pelo teorema da bissetriz interna (uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.)

$$\frac{F_1Q}{FQ} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (3.13)$$

Se a unidade for adicionada ou subtraída de cada membro (para elipse ou hipérbole, respectivamente):

$$\frac{F_1Q}{FQ} + \frac{FQ}{FQ} = \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_1}$$

ou equivalentemente

$$\frac{F_1Q + FQ}{FQ} = \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_1}$$

Mas,  $F_1Q + FQ = 2c$  e  $\rho_2 + \rho_1 = 2a$ , assim

$$\frac{2c}{FQ} = \frac{2a}{\rho_1}.$$

logo

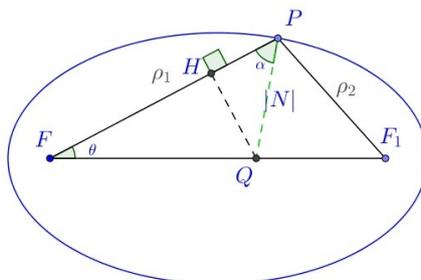
$$FQ = \frac{2c \cdot \rho_1}{2a}.$$

Por outro lado sabemos que  $e = \frac{c}{a}$ , conseqüentemente:

$$FQ = e\rho_1. \quad (3.14)$$

Agora, se  $H$  é o pé da perpendicular de  $Q$  em um raio focal e  $\alpha$  um ângulo que esse raio faz com o normal,

Figura 3.3: Elipse



temos,

$$\text{Cos}(\alpha) = \frac{PH}{|N|}$$

logo,

$$PH = |N| \cdot \text{Cos}(\alpha). \quad (3.15)$$

Por outro lado,

$$\text{Cos}(\theta) = \frac{FH}{FQ}$$

ou seja,

$$FH = FQ \cdot \text{Cos}(\theta).$$

Por (3.14), obtemos

$$FH = e\rho_1 \cdot \text{Cos}(\theta). \quad (3.16)$$

Note que

$$PH = \rho_1 - FH.$$

Por (3.16)

$$PH = \rho_1 - e\rho_1 \cdot \text{Cos}(\theta) = \rho_1(1 - e \cdot \text{Cos}(\theta)).$$

Por (3.12)

$$PH = A. \quad (3.17)$$

No caso da Parábola, usamos  $e = 1$  e  $\rho_1 = A + \rho_1 \cdot \text{Cos}(\theta) = FQ$ . Deste modo, usando (3.15) e (3.17), temos que os três tipos de cônicas obedecem à relação:

$$PH = |N| \cdot \text{Cos}(\alpha) = A \quad (3.18)$$

assim a projeção do comprimento normal em um raio focal é constante e igual ao comprimento do *semi-latus rectum*.

Substituindo (3.18) em (3.11)

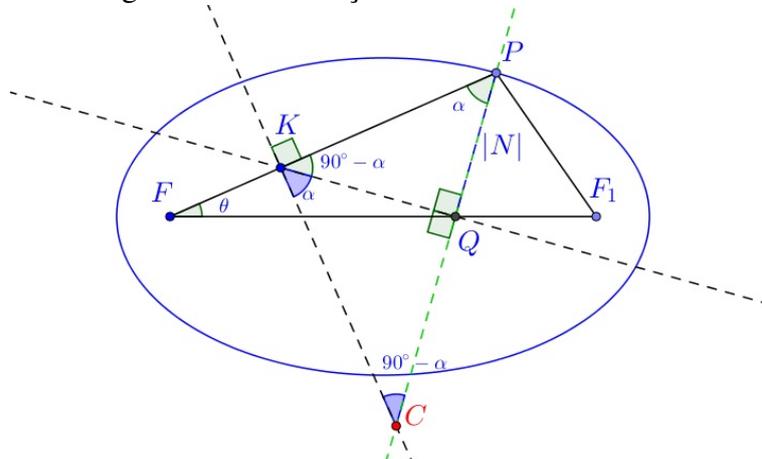
$$R = \left| \frac{|N|^3}{|N|^2 \cdot \text{Cos}^2(\alpha)} \right| = \left| \frac{|N|}{\text{Cos}^2(\alpha)} \right| = \left| |N| \cdot \text{Sec}^2(\alpha) \right|.$$

Portanto,

$$R = |N| \cdot \text{Sec}^2(\alpha). \quad (3.19)$$

**Assim, para localizar  $C$ , o centro de curvatura, desenhe a perpendicular ao normal em  $Q$  encontrando um raio focal em  $K$ . A perpendicular em  $K$  a este raio focal encontra o normal em  $C$ .**

Figura 3.4: Construção do centro de curvatura.



Para provar que de fato  $C$  é o centro de curvatura, mostraremos que o segmento  $PC$  tem comprimento  $R$ . Note que os triângulos  $PQK$  e  $PKC$  são retângulos em  $Q$  e  $K$ , respectivamente. Deste modo, usando trigonometria no triângulo retângulo temos no triângulo  $PQK$ :

$$\text{Sec}(\alpha) = \frac{PK}{PQ} = \frac{PK}{|N|} \quad (3.20)$$

consequentemente

$$PK = |N| \cdot \text{Sec}(\alpha) \quad (3.21)$$

e pelo triângulo  $PKC$ , obtemos

$$\text{Sec}(\alpha) = \frac{PC}{PK}. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.21) em (3.22), obtemos:

$$\text{Sec}(\alpha) = \frac{PC}{|N| \cdot \text{Sec}(\alpha)}.$$

Portanto,

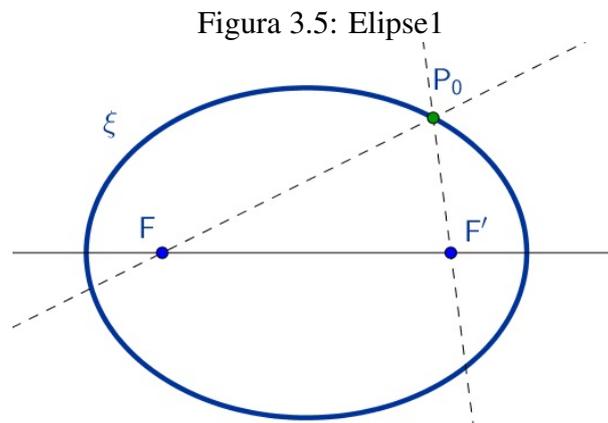
$$PC = |N| \cdot \text{Sec}^2(\alpha).$$

Usando (3.19), chegamos em

$$PC = R. \quad (3.23)$$

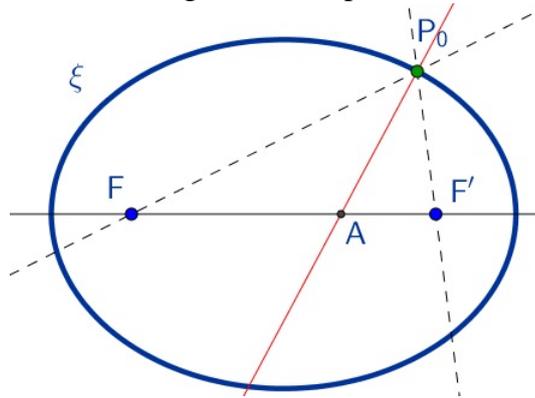
### 3.1 Centro de Curvatura de uma Elipse

Dada uma elipse  $\xi$  de focos  $F$  e  $F'$  e seja  $P_0$  um ponto pertencente a  $\xi$ . Tracemos as retas  $FF'$ ,  $FP_0$  e  $F'P_0$ ,



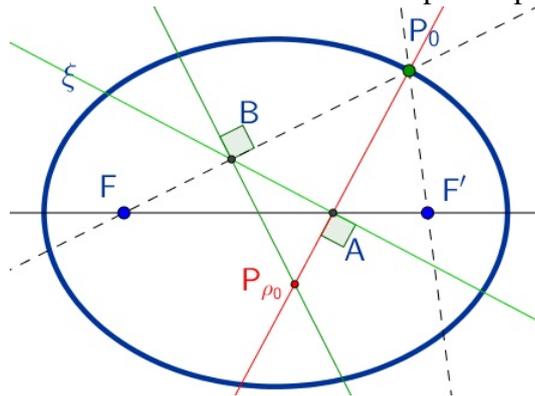
tracemos a bissetriz do ângulo  $FP_0F'$  e denotemos por  $A$  o ponto de intercessão dessa bissetriz com a reta focal  $FF'$ .

Figura 3.6: Elipse2



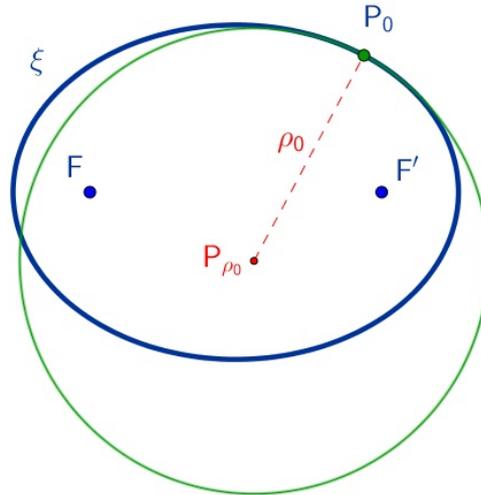
Tracemos a reta perpendicular a bissetriz  $P_0A$  no ponto  $A$ , e denotemos por  $B$  a interseção dessa reta com a reta  $P_0F$ . Em seguida, tracemos a reta perpendicular a  $P_0F$  no ponto  $B$  e denotemos por  $P_{\rho_0}$  a interseção dessa reta com a bissetriz  $P_0A$ .

Figura 3.7: Centro de Curvatura da Elipse no ponto  $P_0$ .



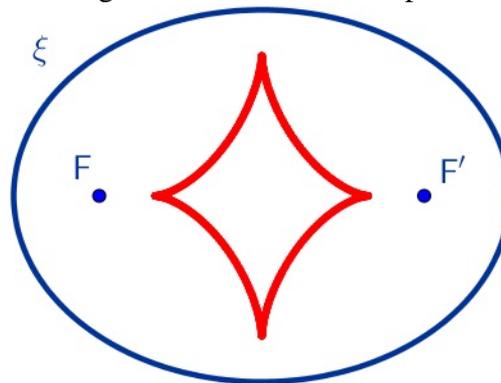
O ponto  $P_{\rho_0}$  é o centro de curvatura da Elipse  $\xi$  no ponto  $P_0$ . O raio de curvatura  $\rho_0$  é o comprimento do segmento  $P_0P_{\rho_0}$ .

Figura 3.8: Círculo Osculador da Elipse no ponto  $P_0$ .



Tomando o lugar geométrico dos centros de curvatura de todos os pontos da Elipse, temos o traço da Evoluta da Elipse:

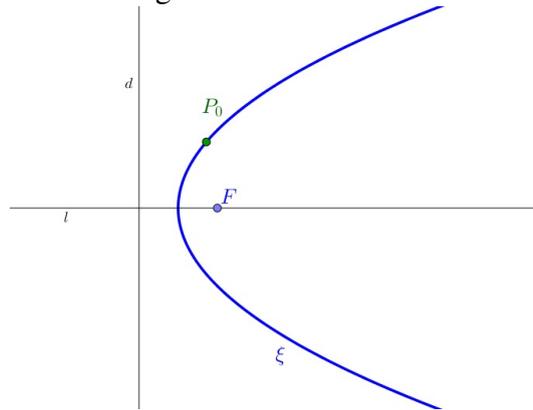
Figura 3.9: Evoluta da Elipse.



### 3.2 Centro de Curvatura de uma Parábola

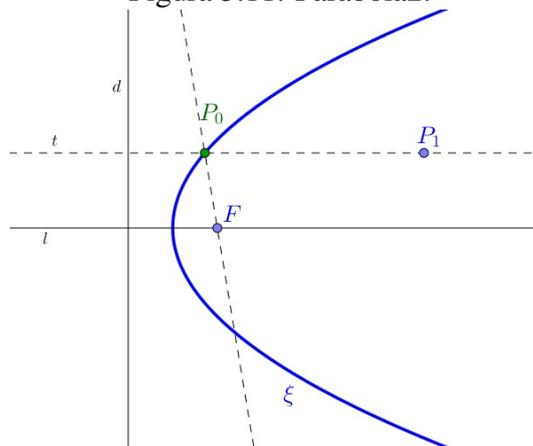
Dada uma parábola  $\xi$  de foco  $F$ , diretriz  $d$  e reta focal  $l$  e seja  $P_0$  um ponto pertencente a  $\xi$ .

Figura 3.10: Parabola1.



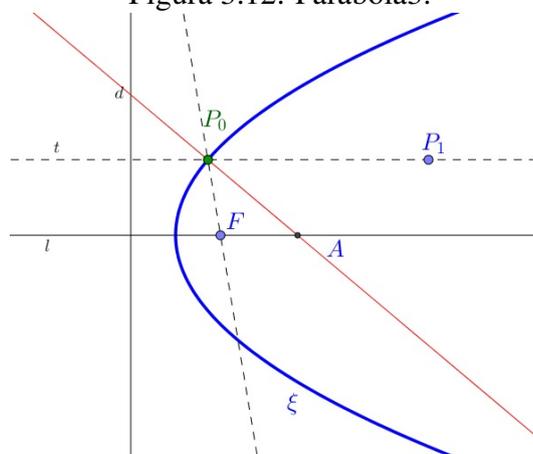
Tracemos a reta  $P_0F$  e também tracemos a reta  $t$  que é paralela a reta  $l$  e passa pelo ponto  $P_0$ . E seja  $P_1 \in t$ .

Figura 3.11: Parabola2.



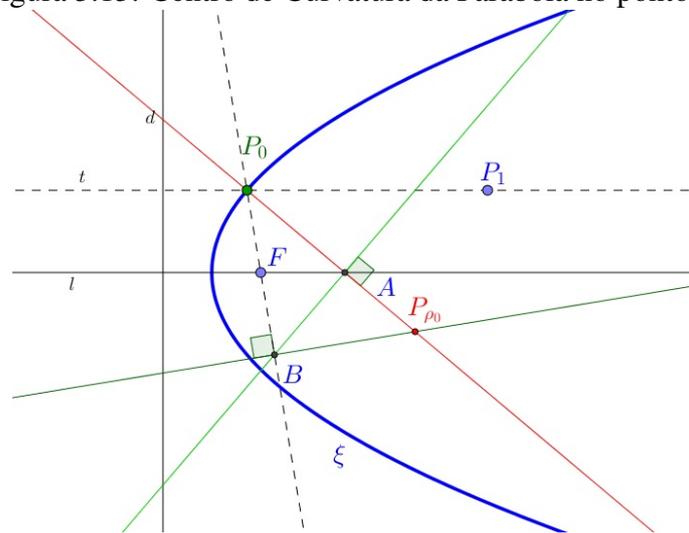
Tracemos a bissetriz do ângulo  $FP_0P_1$  e denotemos por  $A$  o ponto de intercessão dessa bissetriz com a reta focal  $l$ .

Figura 3.12: Parabola3.



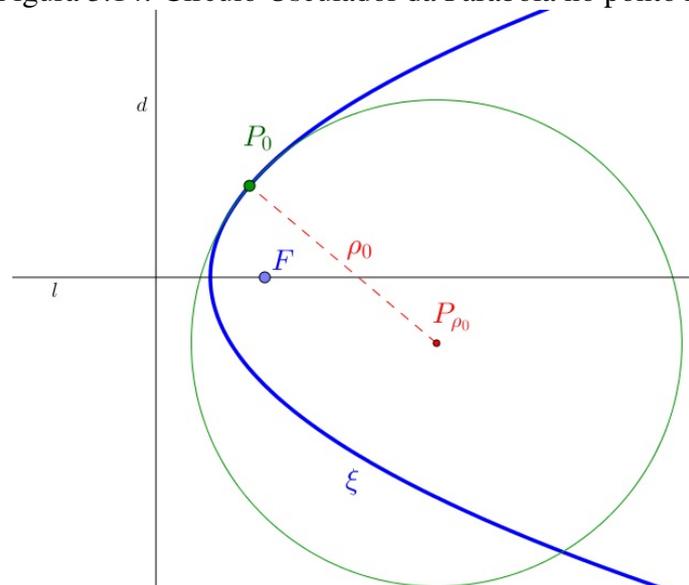
Tracemos a reta perpendicular a bissetriz  $P_0A$  no ponto  $A$ , e denotemos por  $B$  a interseção dessa reta com a reta  $P_0F$ . Em seguida, tracemos a reta perpendicular a  $P_0F$  no ponto  $B$  e denotemos por  $P_{\rho_0}$  a interseção dessa reta com a bissetriz  $P_0A$ .

Figura 3.13: Centro de Curvatura da Parábola no ponto  $P_0$ .



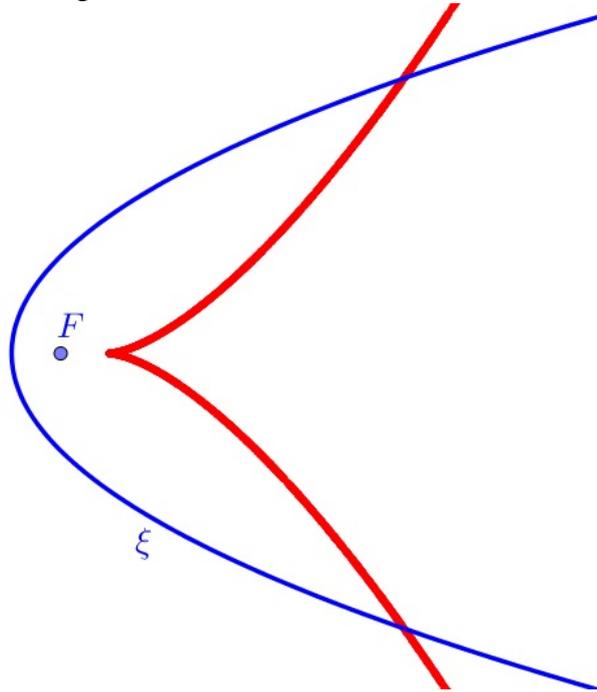
O ponto  $P_{\rho_0}$  é o centro de curvatura da Parábola  $\xi$  no ponto  $P_0$ . O raio de curvatura  $\rho_0$  é o comprimento do segmento  $P_0P_{\rho_0}$ .

Figura 3.14: Círculo Osculador da Parábola no ponto  $P_0$ .



Tomando o lugar geométrico dos centros de curvatura de todos os pontos da Parábola, temos o traço da Evoluta da Parábola:

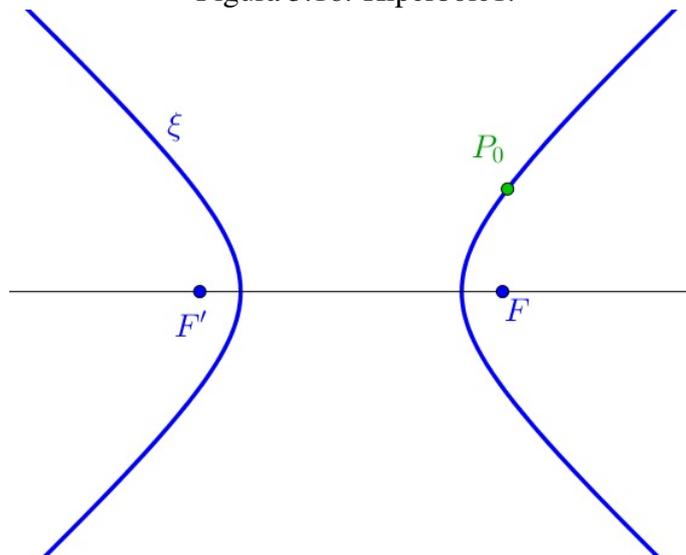
Figura 3.15: Evoluta da Parábola.



### 3.3 Centro de Curvatura de uma Hipérbole

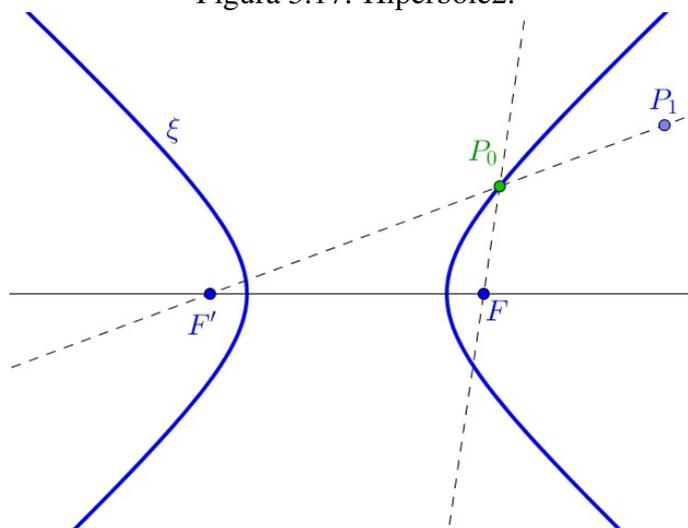
Dada uma Hipérbole,  $\xi$ , de focos  $F$  e  $F'$  e seja  $P_0$  um ponto pertencente a  $\xi$ .

Figura 3.16: Hipérbole1.



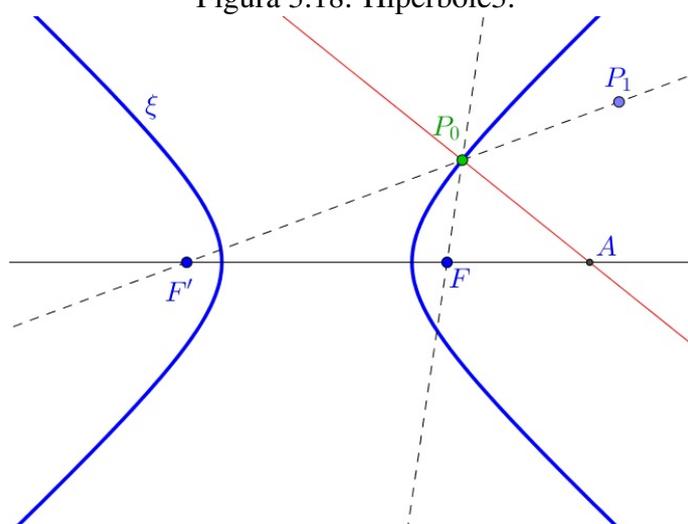
Encontraremos o centro de curvatura através de procedimentos geométricos no ramo da Hipérbole em que se encontra o ponto  $P_0$ . Tracemos as retas  $P_0F$  e  $P_0F'$ .

Figura 3.17: Hipérbole2.



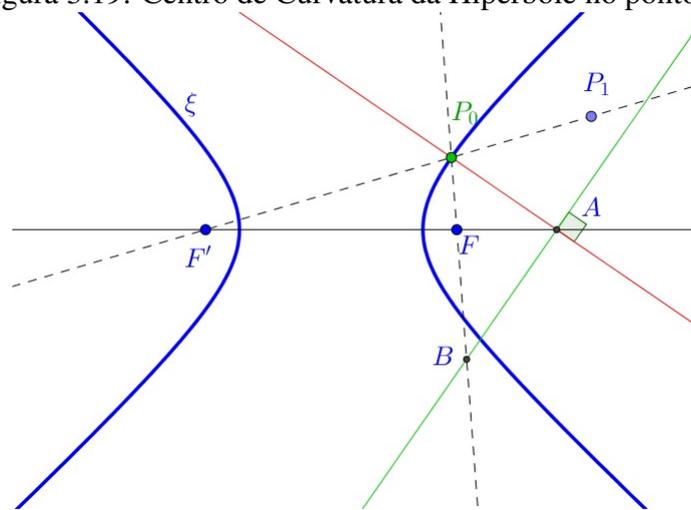
Tracemos a bissetriz do ângulo  $FP_0F_1$  e denotemos por  $A$  o ponto de intercessão dessa bissetriz com a reta focal.

Figura 3.18: Hipérbole3.



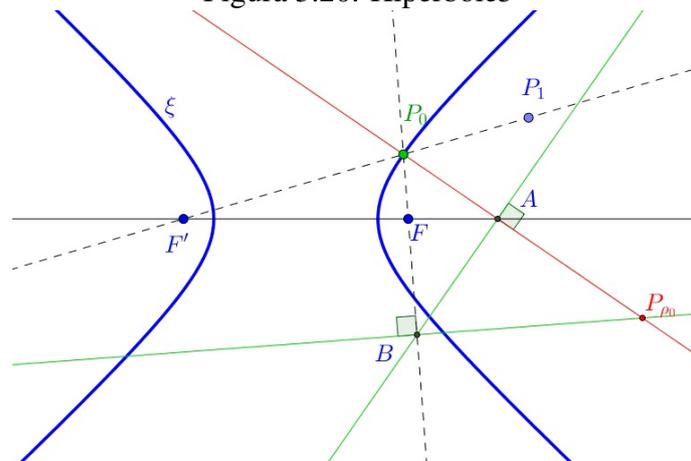
Tracemos a reta perpendicular a bissetriz  $P_0A$  no ponto  $A$ , e denotemos por  $B$  a intercessão dessa reta com a reta  $P_0F$ .

Figura 3.19: Centro de Curvatura da Hipérbole no ponto  $P_0$ .



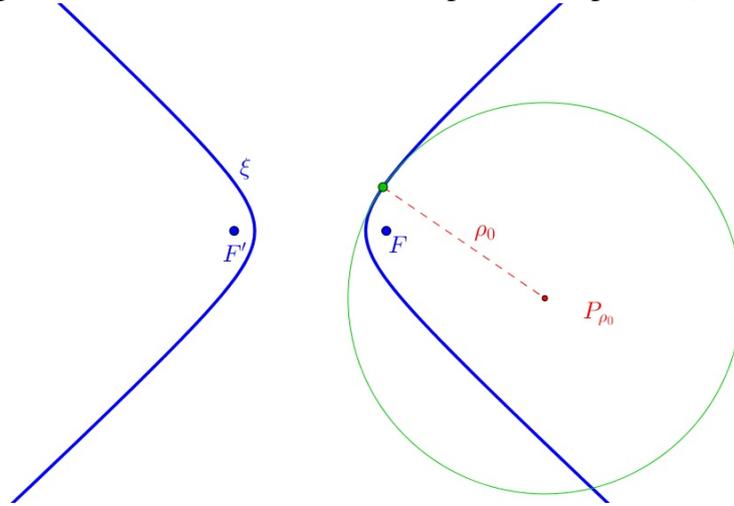
Em seguida, tracemos a reta perpendicular a  $P_0 F$  no ponto  $B$  e denotemos por  $P_{\rho_0}$  a interseção dessa reta com a bissetriz  $P_0 A$ .

Figura 3.20: Hipérbole5



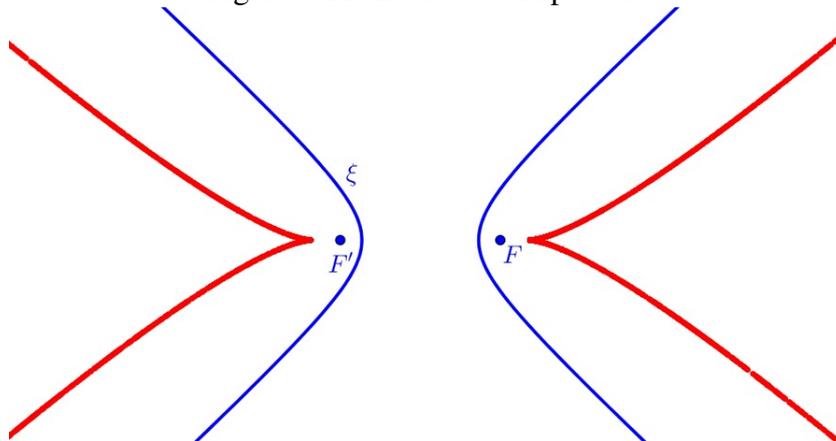
O ponto  $P_{\rho_0}$  é o centro de curvatura da Hipérbole  $\xi$  no ponto  $P_0$ . O raio de curvatura  $\rho_0$  é o comprimento do segmento  $P_0 P_{\rho_0}$ .

Figura 3.21: Círculo Osculador da Hipérbole no ponto  $P_0$



Tomando o lugar geométrico dos centros de curvatura de todos os pontos da Hipérbole, temos o traço da evoluta da Hipérbole:

Figura 3.22: Evoluta da Hipérbole.



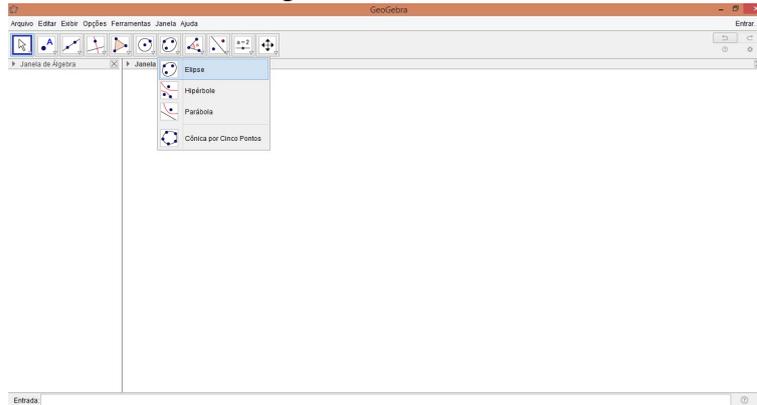
### 3.4 Construção da Evoluta das Cônicas usando o Geo Gebra

Nesta seção, vamos detalhar todos os passos, usando o *Geo Gebra*, da construção das evolutas das Cônicas, seguindo o método descrito nas seções 3.1, 3.2 e 3.3.

#### 3.4.1 Evoluta da Elipse no Geo Gebra

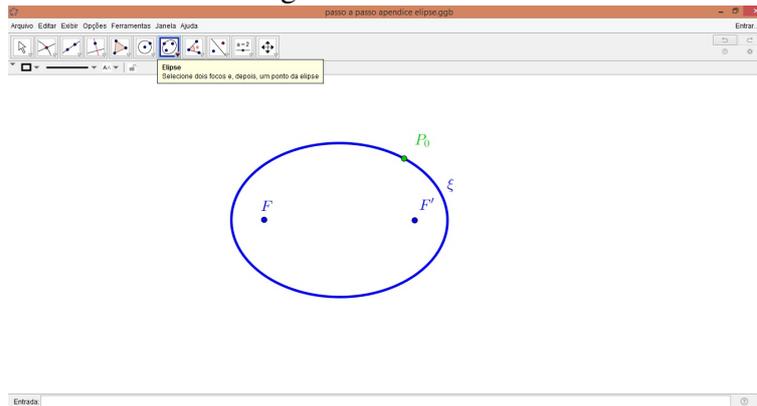
Após abrir o Geo Gebra, coloque o cursor do mouse sobre a opção “Cônicas” e selecione: “Elipse”.

Figura 3.23: Passo e1



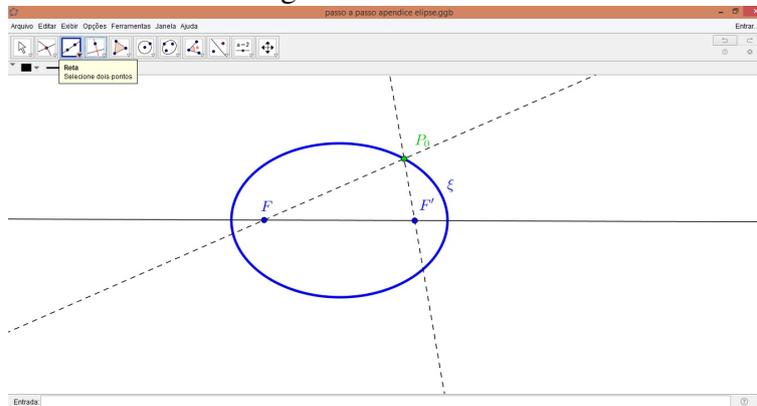
Coloque o cursor do mouse sobre a opção “Elipse” e siga as instruções do Geo Gebra: “Selecione dois focos e depois um ponto da Elipse”.

Figura 3.24: Passo e2



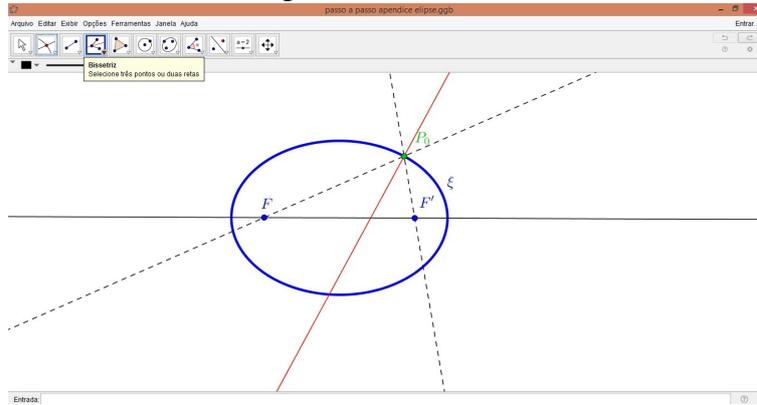
Selecione a opção “Reta definida por dois pontos” e trace a reta Focal,  $FF'$ , e as retas  $P_0F$  e  $P_0F'$ .

Figura 3.25: Passo e3



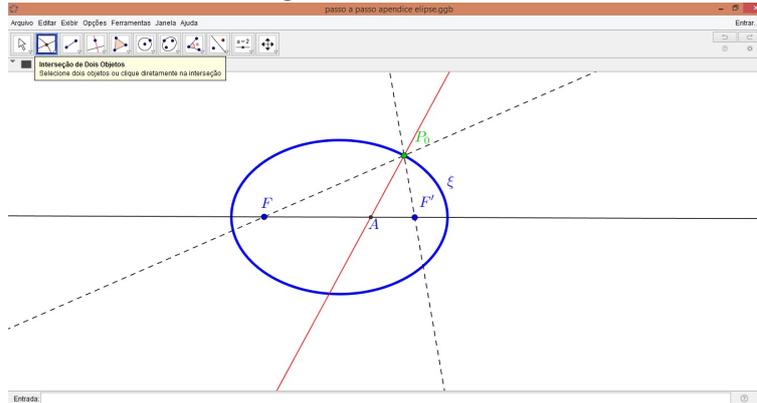
Selecione a opção “Bissetriz” e trace a bissetriz do ângulo  $FP_0F'$ .

Figura 3.26: Passo e4



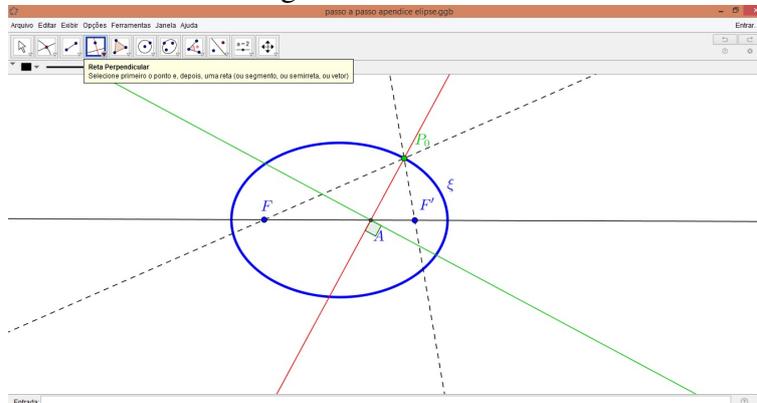
Usando a ferramenta “Interseção entre dois objetos” encontre o ponto de interseção, denotado por  $A$ , entre a bissetriz do ângulo  $FP_0F'$  e a reta focal  $FF'$  clicando nas duas retas.

Figura 3.27: Passo e5



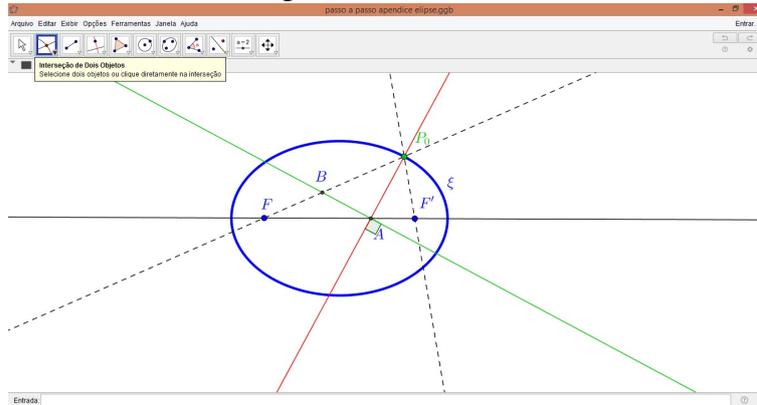
Selecione a ferramenta “Reta perpendicular” e, em seguida, selecione o ponto  $A$  e a bissetriz do ângulo  $FP_0F'$ .

Figura 3.28: Passo e6



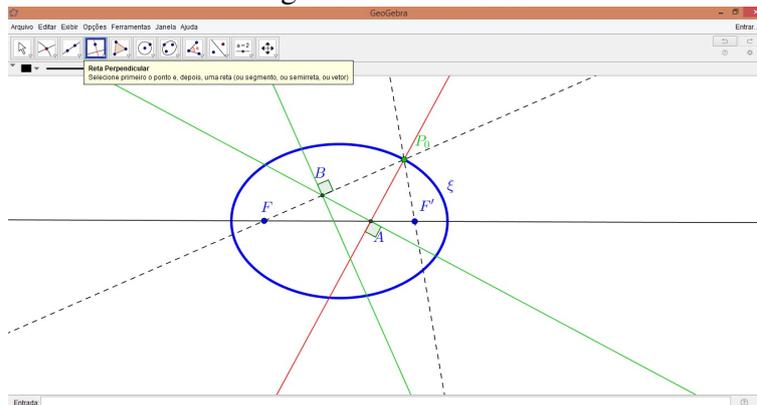
Usando a ferramenta “Interseção entre dois objetos”, encontre o ponto de interseção, denotado por  $B$ , entre esta reta e a reta  $P_0F$ .

Figura 3.29: Passo e7



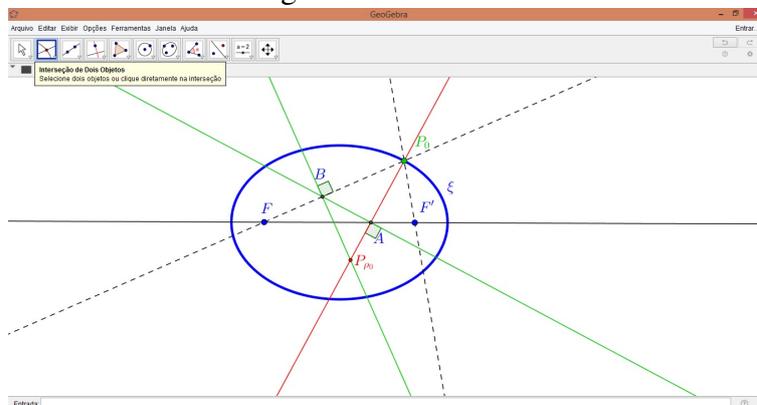
Novamente, usando a ferramenta “Reta perpendicular”, trace a reta que passa por  $B$  e é perpendicular a reta  $P_0F$ .

Figura 3.30: Passo e8



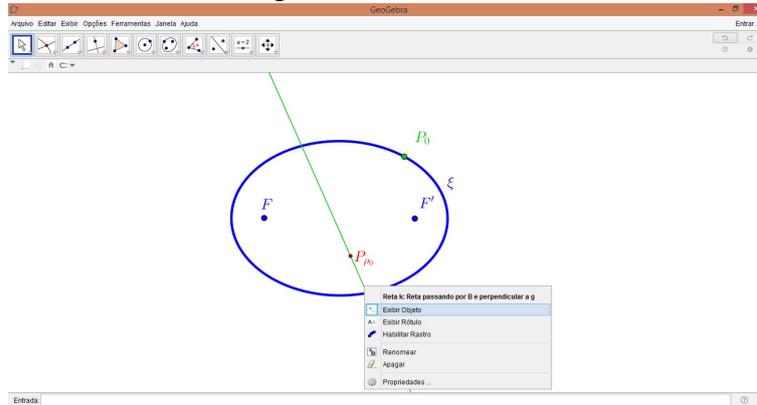
Usando a ferramenta “Interseção entre dois objetos”, encontre o ponto de interseção, denotado por  $P_{\rho_0}$ , entre esta reta e a reta bissetriz.

Figura 3.31: Passo e9



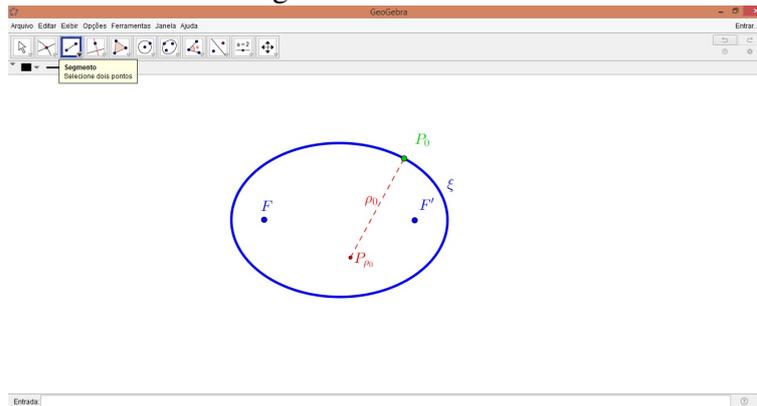
Este ponto  $P_{\rho_0}$  é o centro de curvatura da Elipse no ponto  $P_0$ . Deste modo, para facilitar a visualização, “esconda” todas as retas e os pontos A e B usando a opção “Exibir objeto”.

Figura 3.32: Passo e10



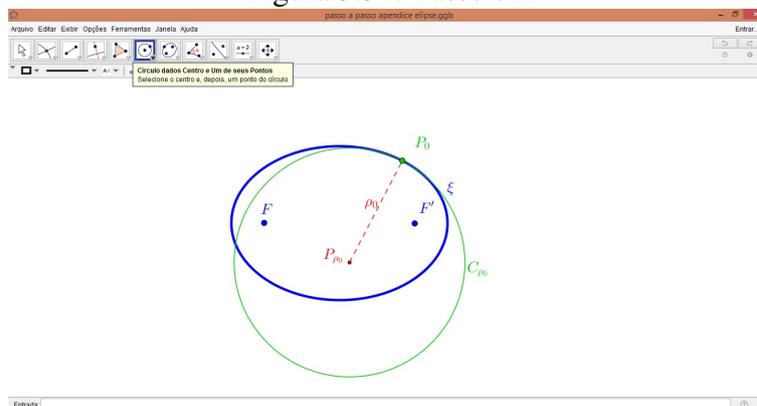
Usando a ferramenta “Segmento” trace o segmento  $P_0P_{\rho_0}$ , o qual é denotado por raio de curvatura e tem medida  $\rho_0$ .

Figura 3.33: Passo e11



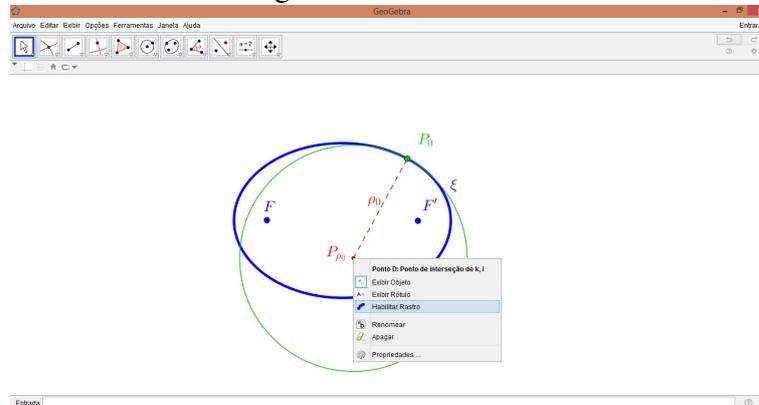
Usando a ferramenta “Círculo dados Centro e um de seus Pontos” trace o círculo  $C_{\rho_0}$  de centro  $P_{\rho_0}$  e que passa pelo ponto  $P_0$ , logo possui raio igual a  $\rho_0$ . Este círculo é chamado de Círculo Osculador e tem a mesma curvatura da Elipse no ponto  $P_0$ .

Figura 3.34: Passo e12



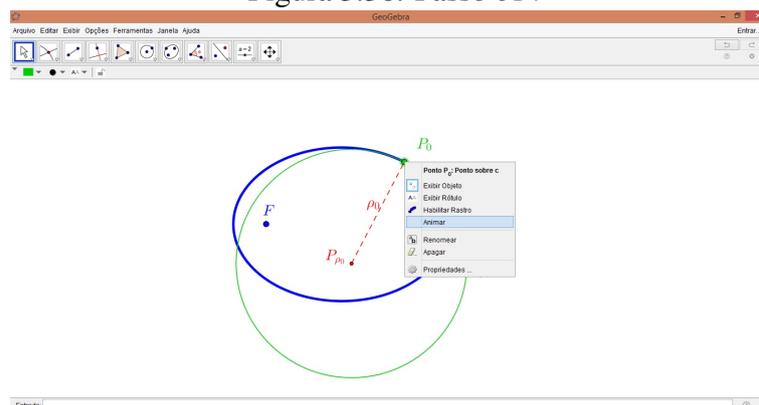
Clicando o botão direito do mouse sobre o ponto  $P_{\rho_0}$ , selecione a opção “Habilitar rastro”.

Figura 3.35: Passo e13



Clicando o botão direito do mouse sobre o ponto  $P_0$ , selecione a opção “Animar”.

Figura 3.36: Passo e14



Automaticamente, o Geo Gebra vai gerar a evoluta da Elipse, que corresponde ao lugar Geométrico dos centros de curvatura de todos os pontos da Elipse.

Figura 3.37: Passo e15

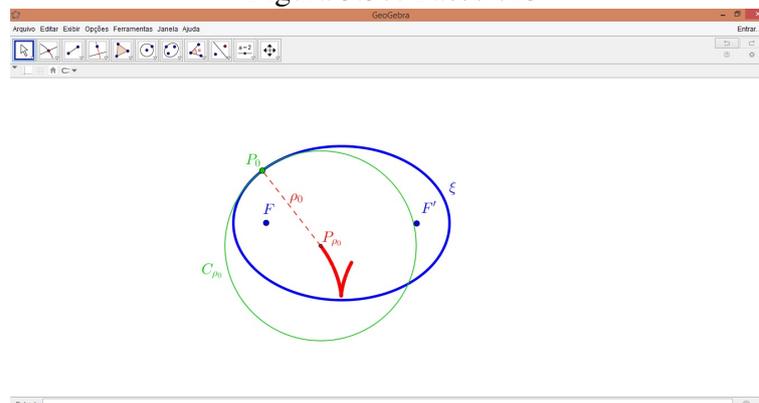


Figura 3.38: Passo e15.a

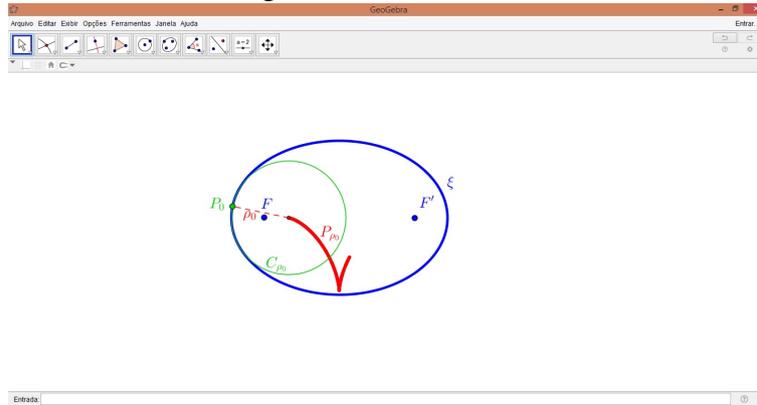
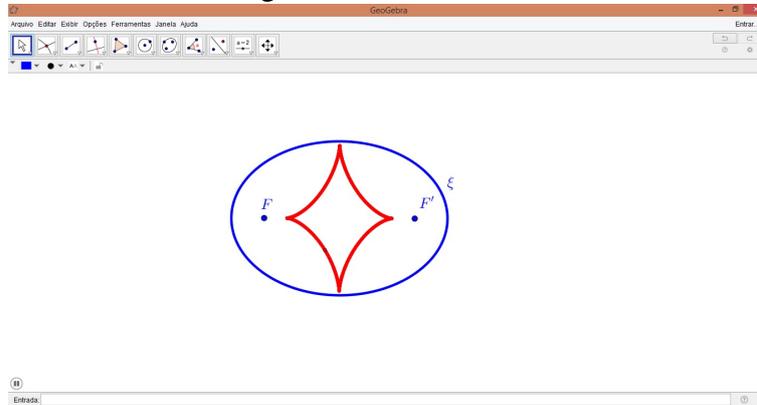


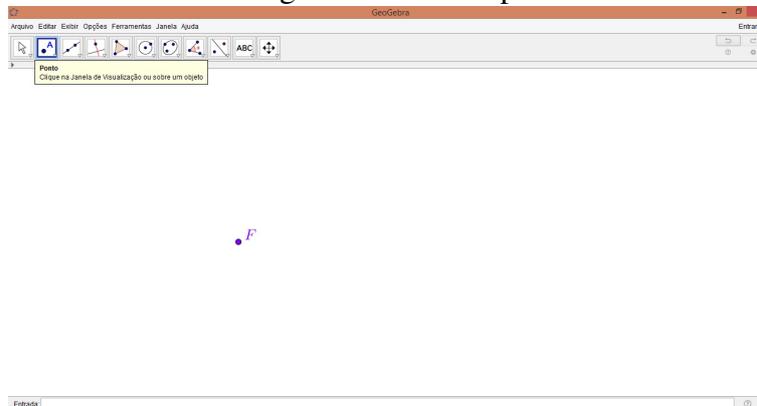
Figura 3.39: Passo e15.b



### 3.4.2 Evoluta da Parábola no Geo Gebra

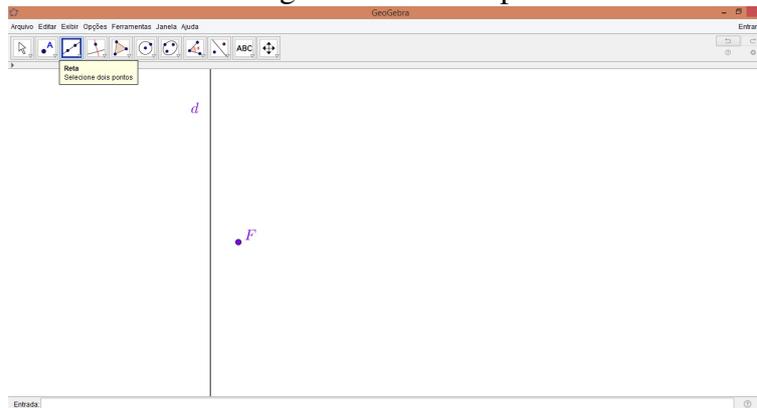
Usando a ferramenta “Ponto”, selecione um ponto para ser o foco da Parábola.

Figura 3.40: Passo p1



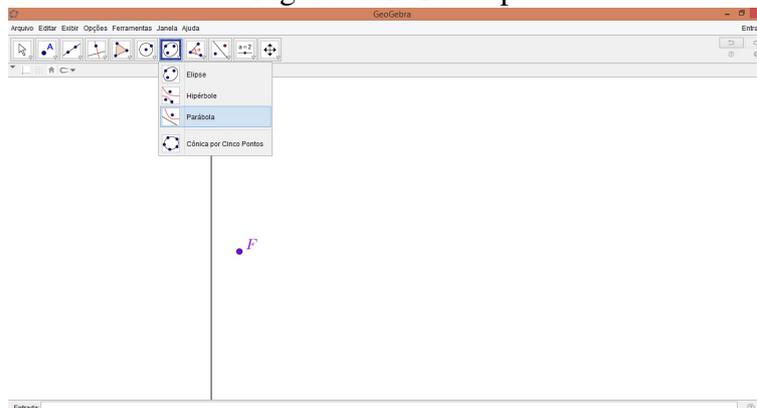
Usando a ferramenta “Reta”, construa uma reta para ser a diretriz ( $d$ ) da Parábola.

Figura 3.41: Passo p2



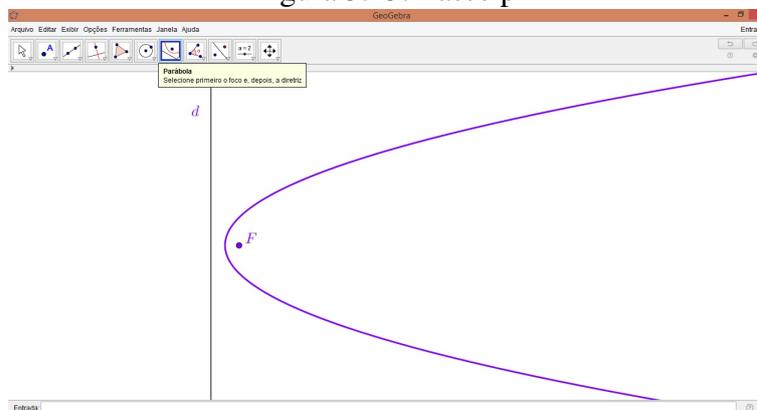
Coloque o cursor do mouse sobre a opção “Cônicas” e selecione: “Parábola.”

Figura 3.42: Passo p3



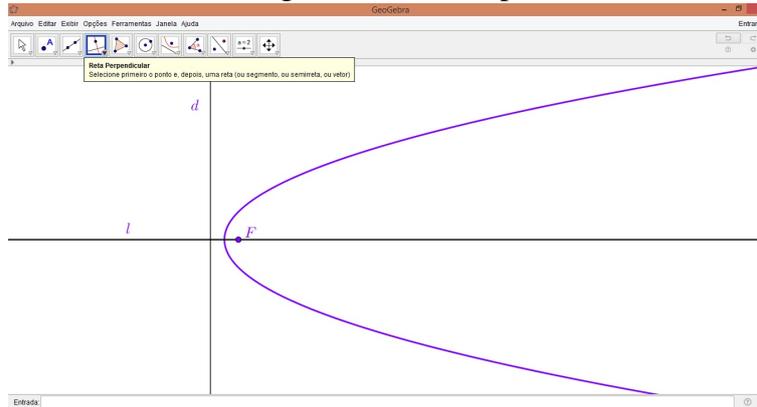
Coloque o cursor do mouse sobre a opção “Parábola” e siga as instruções do GeoGebra: “selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz”.

Figura 3.43: Passo p4



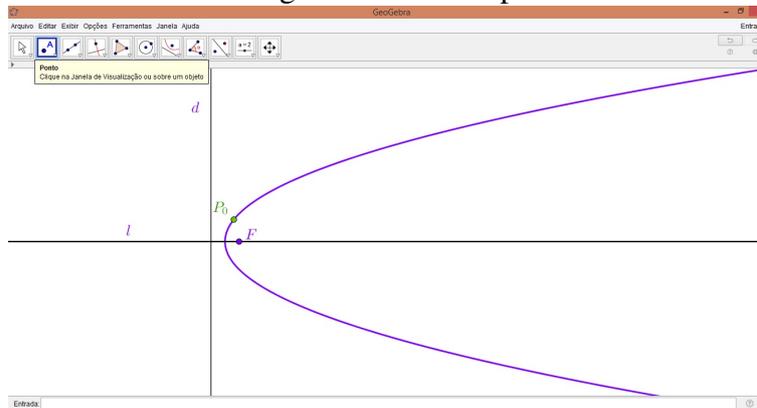
Usando a ferramenta “Reta perpendicular”, selecione o foco e a reta diretriz para traçar a reta focal ( $l$ ).

Figura 3.44: Passo p5



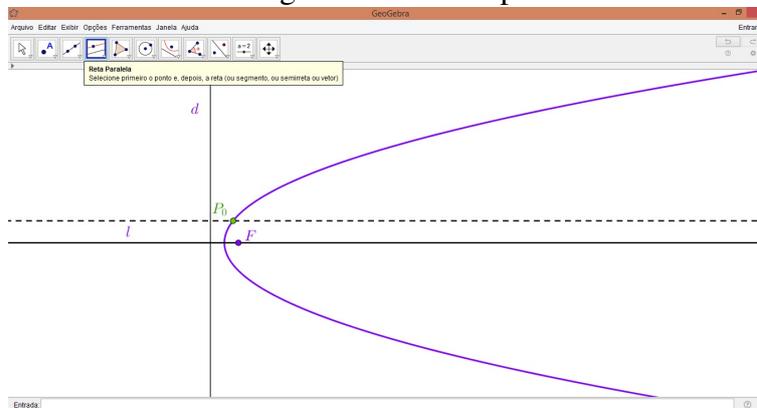
Utilizando a opção “Ponto”, selecione um ponto  $P_0$  da Parábola.

Figura 3.45: Passo p6



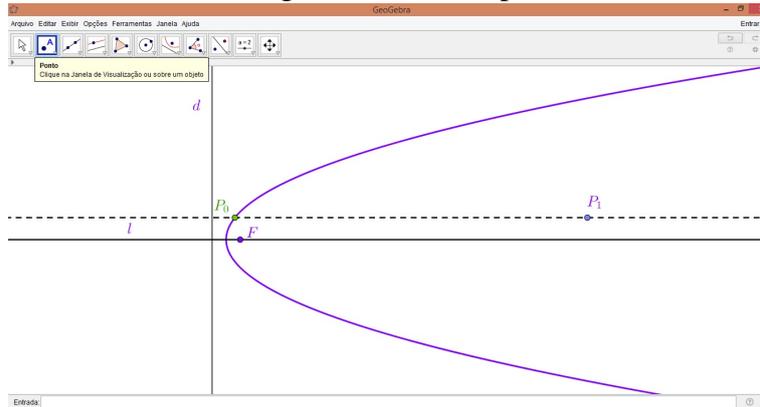
Usando a ferramenta “Reta Paralela”, selecione o ponto  $P_0$  e a reta Focal para traçar a paralela a  $l$  passando por  $P_0$ .

Figura 3.46: Passo p7



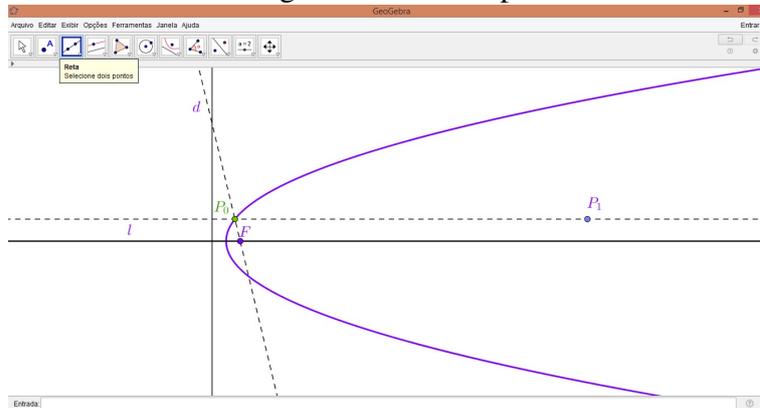
Utilizando a opção “Ponto”, selecione um ponto  $P_1$  na reta paralela a  $l$ , de modo que  $P_1$  seja interno a Parábola.

Figura 3.47: Passo p8



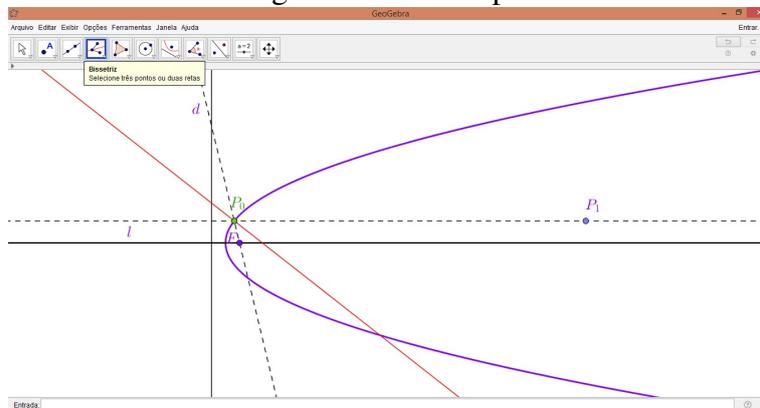
Utilizando a opção “Reta”, trace a reta  $P_0F$ .

Figura 3.48: Passo p9



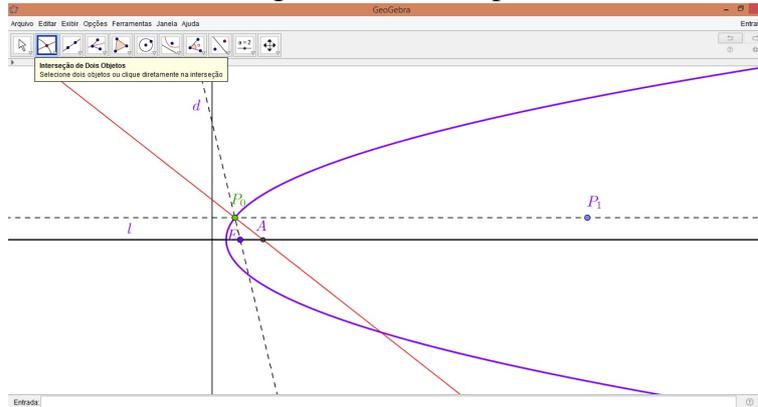
Use a ferramenta “Bissetriz” e trace a bissetriz do ângulo  $FP_0P_1$ .

Figura 3.49: Passo p10



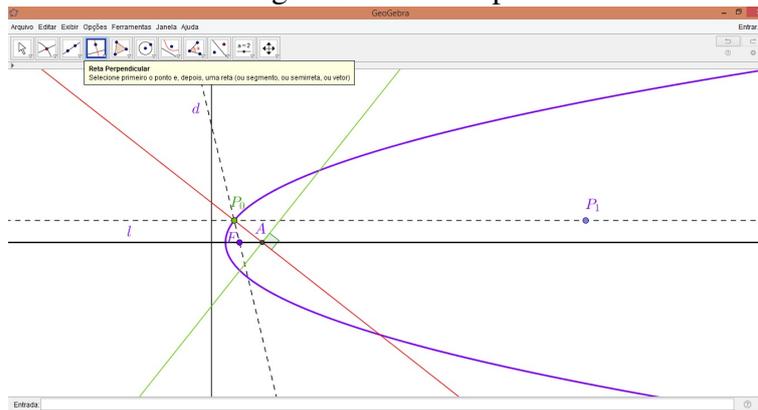
Usando a ferramenta “Interseção entre dois objetos”, encontre o ponto de interseção, denotado por  $A$ , entre a bissetriz do ângulo  $FP_0P_1$  e a reta focal  $l$ , clicando nas duas retas.

Figura 3.50: Passo p11



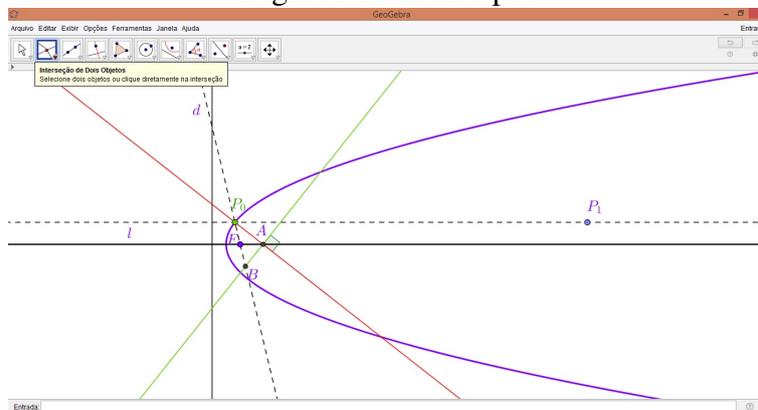
Selecione a ferramenta “Reta perpendicular” e, em seguida, selecione o ponto  $A$  e a bissetriz do ângulo  $FP_0P_1$ .

Figura 3.51: Passo p12



Usando a ferramenta “Interseção entre dois objetos”, encontre o ponto de interseção, denotado por  $B$ , entre esta reta e a reta  $P_0F$ .

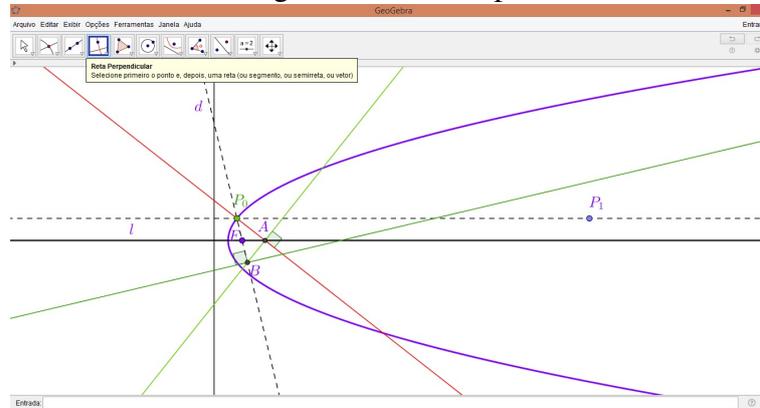
Figura 3.52: Passo p13



Novamente, usando a ferramenta “Reta perpendicular”, trace a reta que passa por  $B$  e

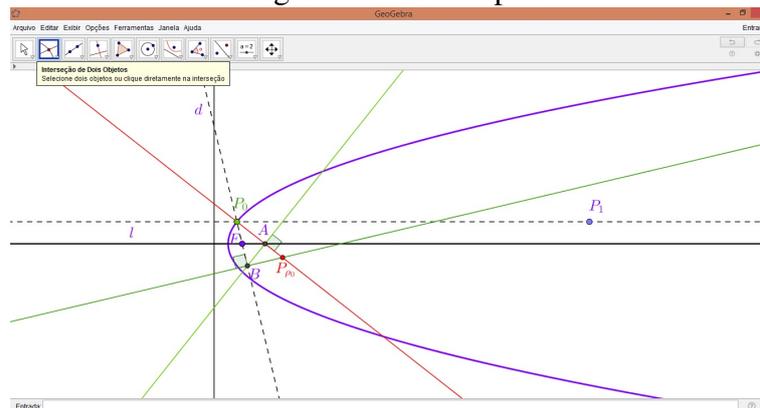
é perpendicular a reta  $P_0F$ .

Figura 3.53: Passo p14



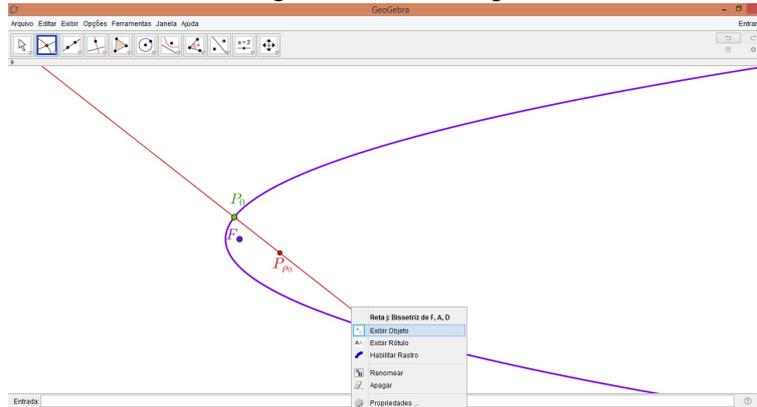
Usando a ferramenta “Interseção entre dois objetos”, encontre o ponto de interseção, denotado por  $P_{\rho_0}$ , entre esta reta e a reta bissetriz.

Figura 3.54: Passo p15



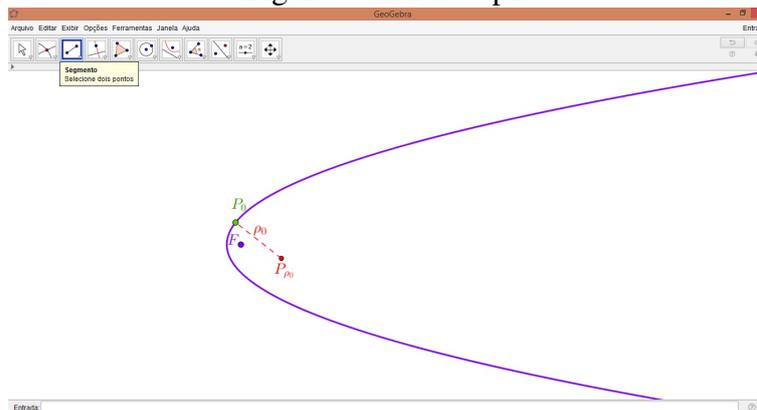
Este ponto  $P_{\rho_0}$  é o centro de curvatura da Parábola no ponto  $P_0$ . Deste modo, para facilitar a visualização, “esconda” todas as retas e os pontos  $A$ ,  $B$  e  $P_1$  usando a opção “Exibir objeto”.

Figura 3.55: Passo p16



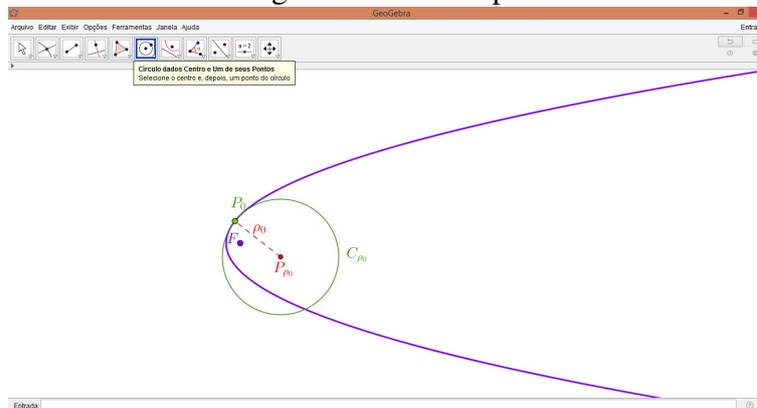
Usando a ferramenta “Segmento”, trace o segmento  $P_0P_{\rho_0}$ , o qual é denotado por raio de curvatura e tem medida  $\rho_0$ .

Figura 3.56: Passo p17



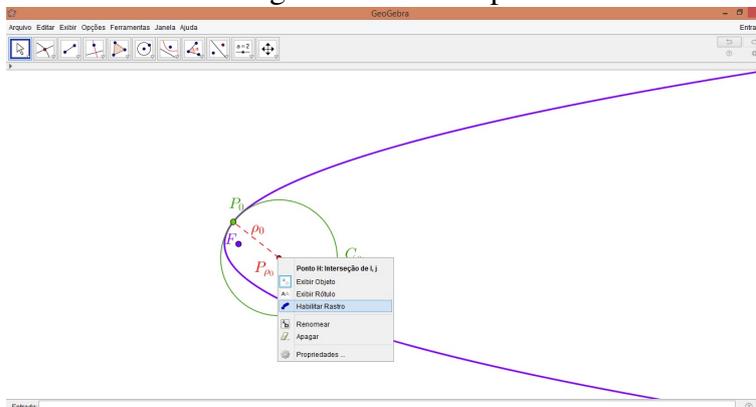
Usando a ferramenta “Círculo dados Centro e um de seus Pontos”, trace o círculo  $C_{\rho_0}$  de centro  $P_{\rho_0}$  e que passa pelo ponto  $P_0$ , logo possui raio igual a  $\rho_0$ . Este círculo é chamado de Círculo Osculador e tem a mesma curvatura da Parábola no ponto  $P_0$ .

Figura 3.57: Passo p18



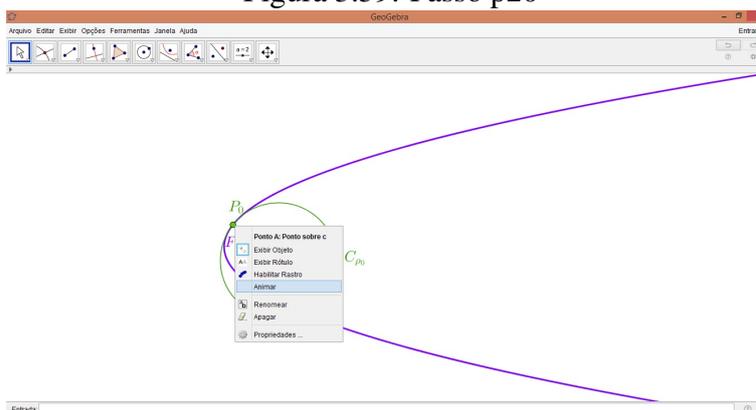
Clicando o botão direito do mouse sobre o ponto  $P_{\rho_0}$ , selecione a opção “Habilitar rastro”.

Figura 3.58: Passo p19



Clicando o botão direito do mouse sobre o ponto  $P_0$ , selecione a opção “Animar”.

Figura 3.59: Passo p20



Automaticamente, o Geo Gebra vai gerar a evoluta da Parábola, que corresponde ao lugar Geométrico dos centros de curvatura de todos os pontos da Parábola.

Figura 3.60: Passo p21

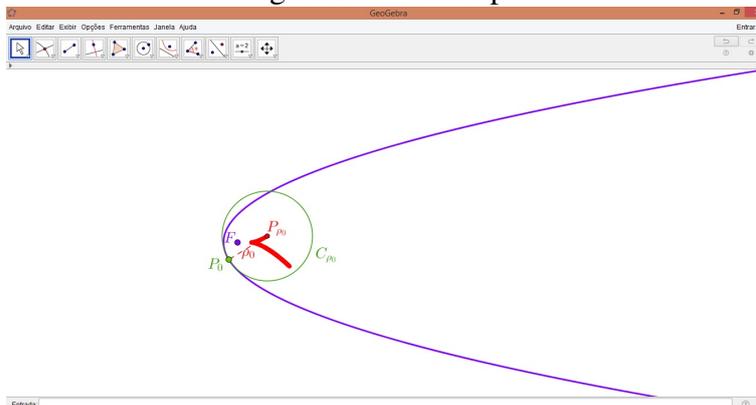
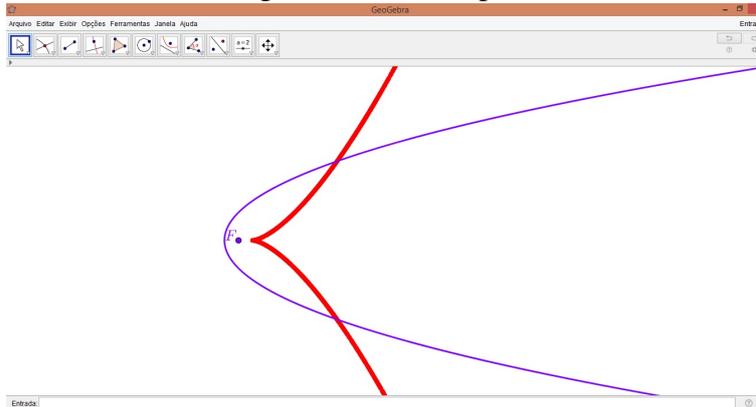


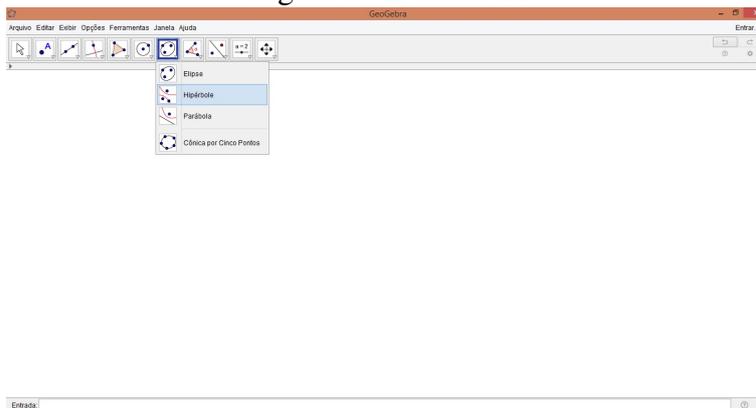
Figura 3.61: Passo p21.a



### 3.4.3 Evoluta da Hipérbole no Geo Gebra

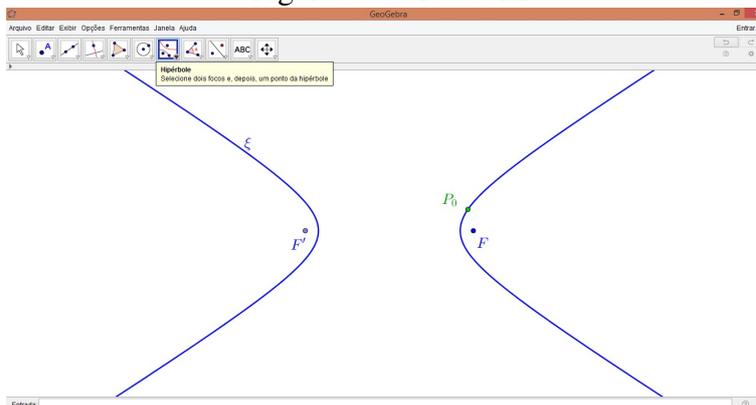
Após abrir o Geo Gebra, coloque o cursor do mouse sobre a opção “cônicas” e selecione: “Hipérbole”.

Figura 3.62: Passo h1



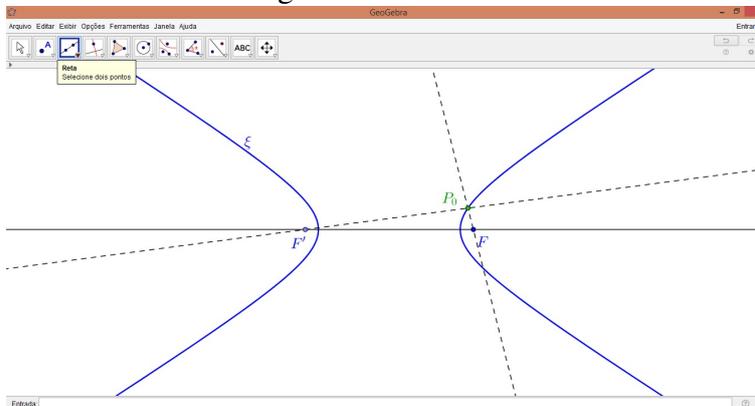
Coloque o cursor do mouse sobre a opção “Hipérbole” e siga as instruções do Geo Gebra: “Selecione dois focos e depois um ponto da Hipérbole”.

Figura 3.63: Passo h2



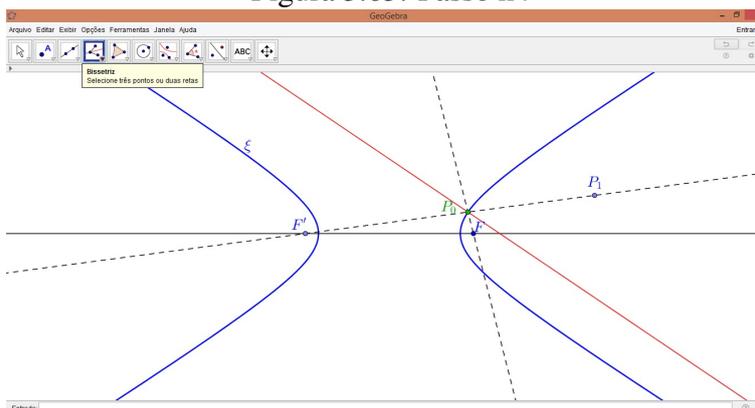
Selecione a opção “Reta,” definida por dois pontos, e trace a reta Focal,  $FF'$ , e as retas  $P_0F$  e  $P_0F'$ .

Figura 3.64: Passo h3



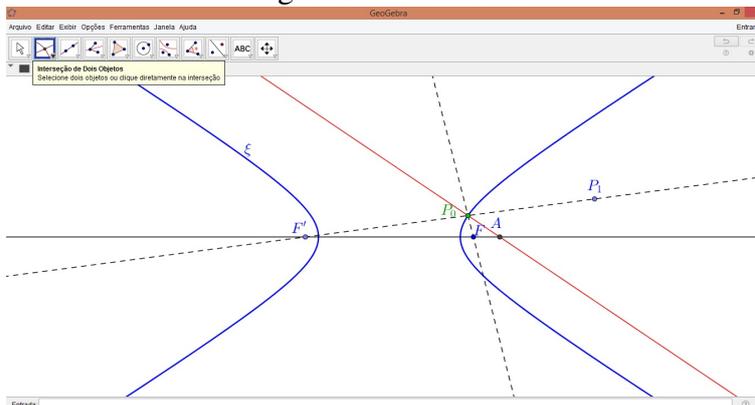
Selecione a opção “Bissetriz” e trace a bissetriz do ângulo  $FP_0P_1$ .

Figura 3.65: Passo h4



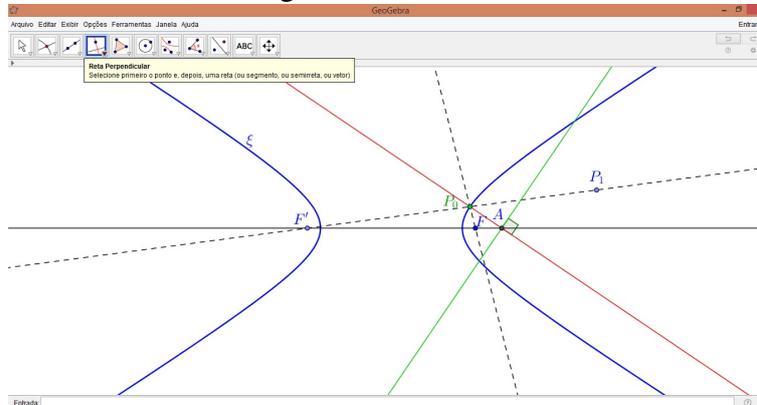
Usando a ferramenta “Interseção entre Dois Objetos” encontre o ponto de interseção, denotado por A, entre a bissetriz do ângulo  $FP_0P_1$  e a reta focal  $FF'$ , clicando nas duas retas.

Figura 3.66: Passo h5



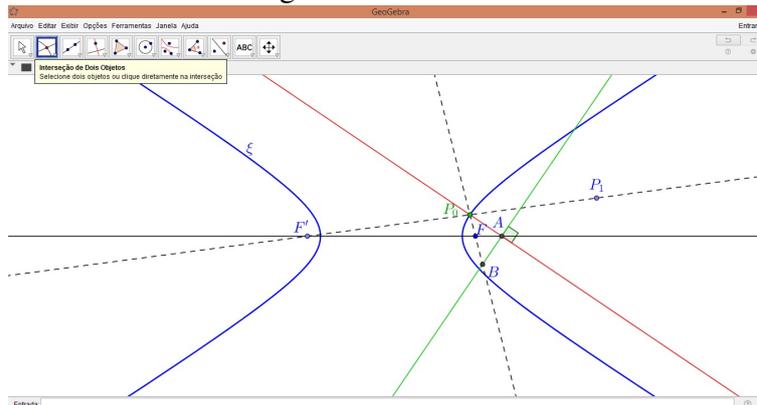
Selecione a ferramenta “Reta perpendicular” e, em seguida, selecione o ponto  $A$  e a bissetriz do ângulo  $FP_0P_1$ .

Figura 3.67: Passo h6



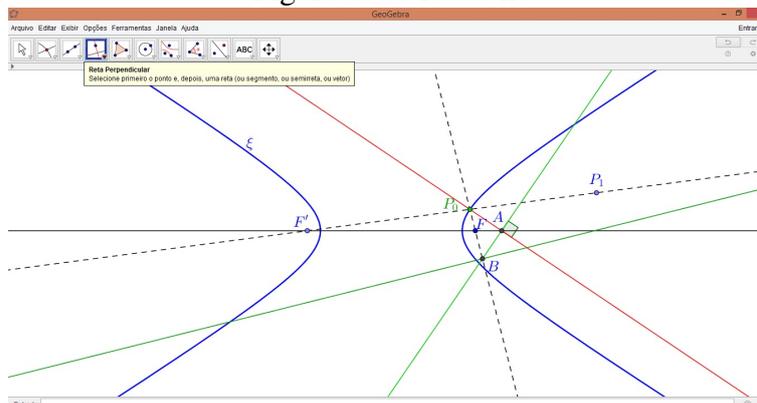
Usando a ferramenta “Interseção entre Dois Objetos”, encontre o ponto de interseção, denotado por  $B$ , entre esta reta e a reta  $P_0F$ .

Figura 3.68: Passo h7



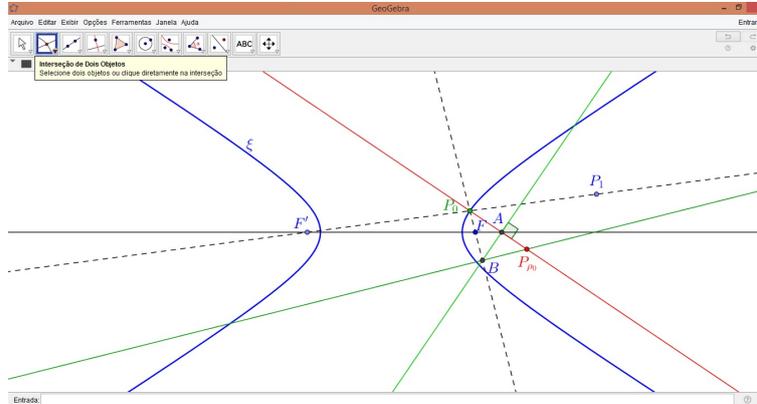
Novamente, usando a ferramenta “Reta perpendicular”, trace a reta que passa por  $B$  e é perpendicular a reta  $P_0F$ .

Figura 3.69: Passo h8



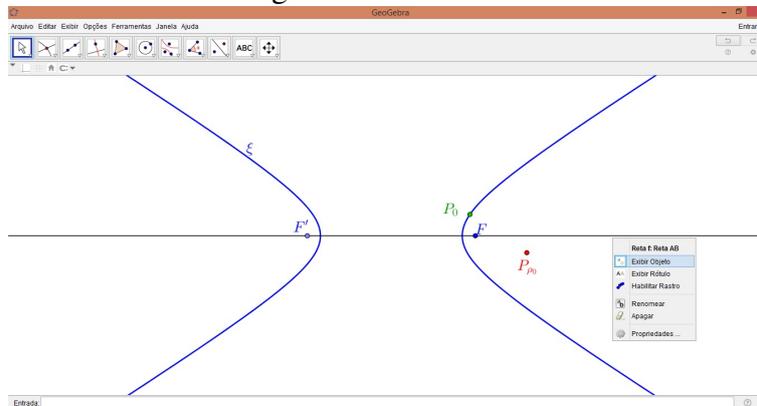
Usando a ferramenta “Interseção entre Dois Objetos”, encontre o ponto de interseção, denotado por  $P_{\rho_0}$ , entre esta reta e a reta bissetriz.

Figura 3.70: Passo h9



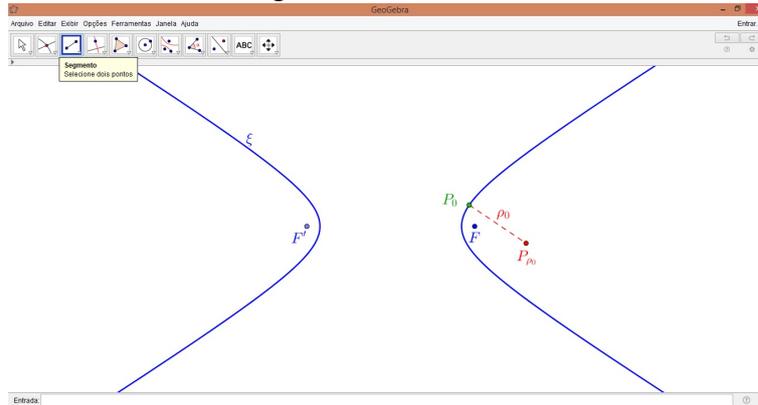
Este ponto  $P_{\rho_0}$  é o centro de curvatura da Hipérbole no ponto  $P_0$ . Deste modo para facilitar a visualização, “esconda” todas as retas e os pontos  $A$ ,  $B$  e  $P_1$ , usando a opção “Exibir objeto.”

Figura 3.71: Passo h10



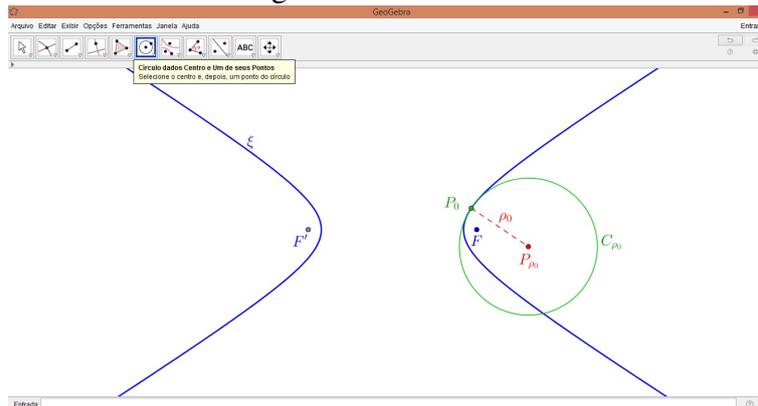
Usando a ferramenta “Segmento”, trace o segmento  $P_0P_{\rho_0}$ , o qual é denotado por raio de curvatura e tem medida  $\rho_0$ .

Figura 3.72: Passo h11



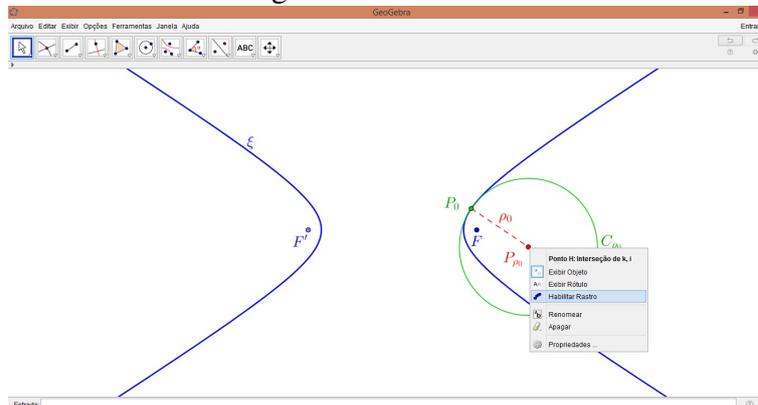
Usando a ferramenta “Círculo dados Centro e um de seus Pontos”, trace o círculo  $C_{\rho_0}$  de centro  $P_{\rho_0}$  e que passa pelo ponto  $P_0$ , logo possui raio igual a  $\rho_0$ . Este círculo é chamado de Círculo Osculador e tem a mesma curvatura da Hipérbole no ponto  $P_0$ .

Figura 3.73: Passo h12



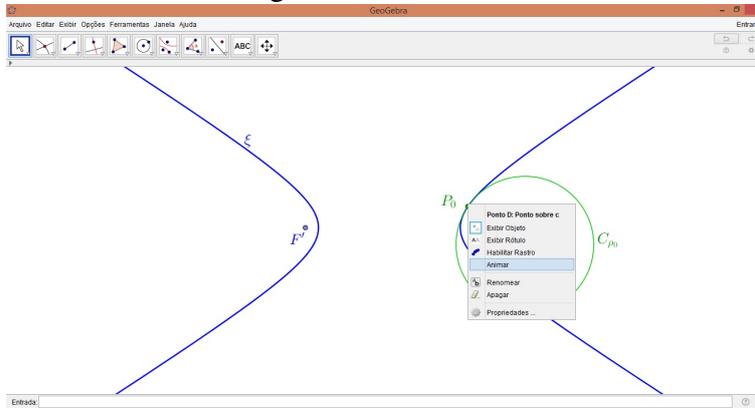
Clicando o botão direito do mouse sobre o ponto  $P_{\rho_0}$ , selecione a opção “Habilitar rastro.”

Figura 3.74: Passo h13



Clicando o botão direito do mouse sobre o ponto  $P_0$ , selecione a opção “Animar.”

Figura 3.75: Passo h14



Automaticamente, o Geo Gebra vai gerar a evoluta da Hipérbole, que corresponde ao lugar Geométrico dos centros de curvatura de todos os pontos da Hipérbole.

Figura 3.76: Passo h15

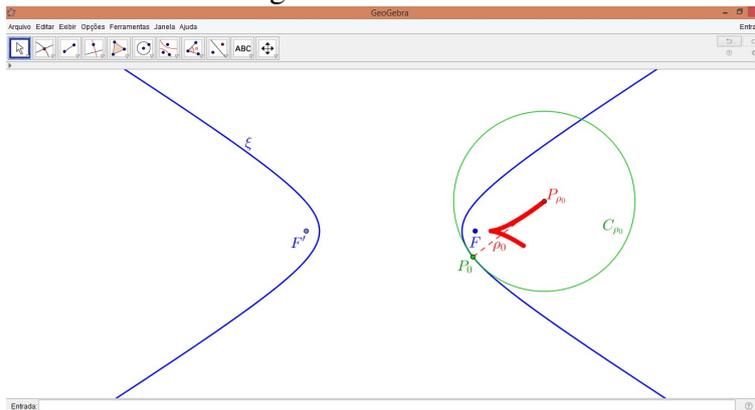
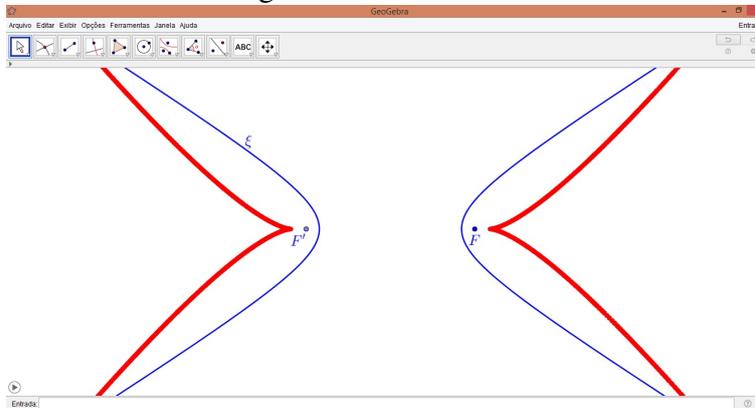


Figura 3.77: Passo h15.a



# Capítulo 4

## Aplicações Físicas de Curvatura

A ideia intuitiva de curvatura é bem difundida e utilizada em nossa sociedade. Formalmente, este conceito também tem muitas aplicações como, por exemplo, na aceleração normal de uma partícula ao longo de uma curva.

### 4.1 Velocidade e Aceleração

Considere que  $\alpha(t)$  determina a posição de uma partícula, no instante  $t$ , no plano. Definimos a velocidade média entre os instantes de tempo  $t$  e  $t+h$  como sendo o vetor:

$$V_m = \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}.$$

Definimos o *vetor velocidade*, ou *velocidade instantânea*, como:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \alpha'(t).$$

Observe que o vetor velocidade é tangente à curva  $\alpha$ . A norma do vetor velocidade é chamada de velocidade escalar, dada por:

$$\|v(t)\| = \|\alpha'(t)\| = \frac{ds}{dt}.$$

A aceleração é definida como a taxa de variação da velocidade, logo

$$a(t) = v'(t) = \alpha''(t).$$

#### 4.1.1 Componentes Normal e Tangencial da Aceleração

Sabemos que o vetor velocidade é tangente a curva  $\alpha(t)$ , daí podemos reescrevê-lo como

$$v(t) = \|\alpha'(t)\|T(t) = \frac{ds}{dt}T(t). \quad (4.1)$$

Derivando a equação (4.1), usando a regra da cadeia, obtemos

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}T(t) + \frac{ds}{dt}T'(t). \quad (4.2)$$

Por outro lado, temos por (2.1) e pela definição (2.17), respectivamente, que

$$\|T'(t)\| = k\|\alpha'(t)\| \quad (4.3)$$

e

$$T'(t) = \|T'(t)\|N(t). \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.2), temos

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}T(t) + \frac{ds}{dt}\|T'(t)\|N(t). \quad (4.5)$$

Substituindo (4.3) em (4.5)

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}T(t) + \frac{ds}{dt}k\|\alpha'(t)\|N(t).$$

Mas  $\|\alpha'(t)\| = \frac{ds}{dt}$ , logo

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}T(t) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 kN(t). \quad (4.6)$$

Perceba pela expressão (4.6) que o vetor aceleração pode ser decomposto em duas componentes, sendo uma componente tangencial e uma componente normal (ou centrípeta).

$$a(t) = a_T T(t) + a_N N(t)$$

em que,

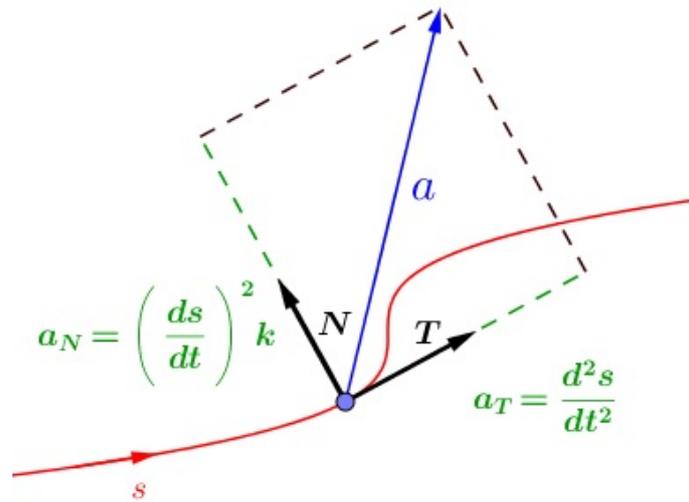
$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\|\alpha'(t)\| \quad (4.7)$$

e

$$a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k = \|\alpha'(t)\|^2 k. \quad (4.8)$$

A componente tangencial da aceleração  $a_T$  mede a taxa de variação do comprimento de  $v$ , ou seja, mede a variação do módulo da velocidade. Já a componente normal  $a_N$  mede a taxa de variação da direção do vetor  $v$ .

Figura 4.1: Componentes da aceleração.



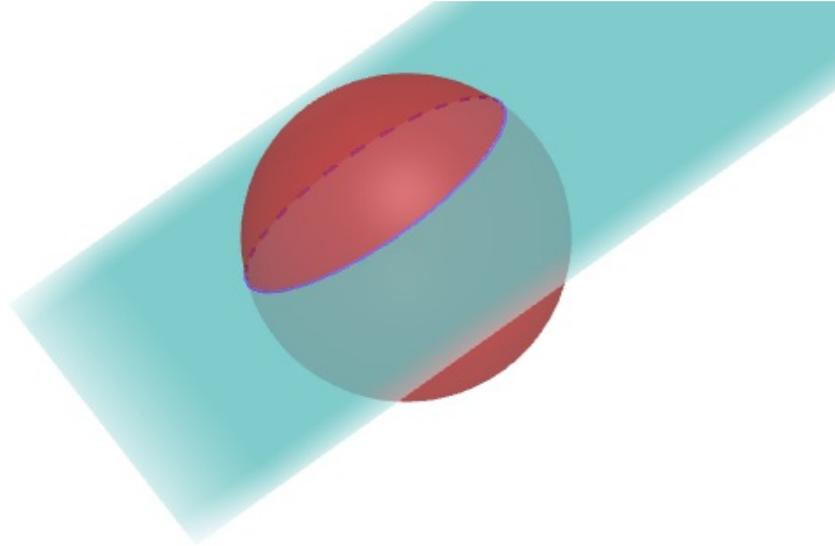
Perceba que a componente normal da aceleração,  $a_N = \|\alpha'(t)\|^2 k$ , é a curvatura multiplicada pelo quadrado do módulo do vetor velocidade. Isso justifica o fato de termos que nos segurar quando nosso carro faz uma curva acentuada (com curvatura grande) em alta velocidade ( $\|v\|$  grande). Se fizermos a mesma curva com o dobro da velocidade, sentiremos a componente normal da aceleração quadruplicar.

## 4.2 Espelhos Esféricos (côncavos e convexos)

Nesta seção, abordaremos o conceito de curvatura aplicado em um conteúdo que integra a grade curricular da 2ª série do ensino de Física: o estudo dos espelhos esféricos (côncavos e convexos).

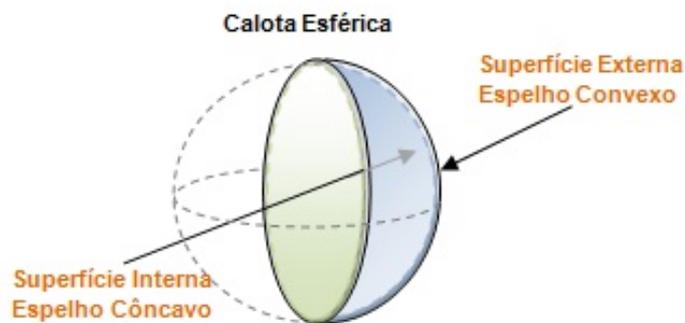
Uma superfície lisa, no formato de uma calota esférica, que reflete a luz de maneira regular (especular) é chamado de *espelho esférico*. Em uma calota esférica, temos a parte interna e a parte externa.

Figura 4.2: Calota Esférica.



Quando a superfície refletiva considerada for a interna, o espelho é chamado côncavo; já nos casos em que a face refletiva é a externa, o espelho é chamado convexo.

Figura 4.3: Espelho côncavo e convexo. (FONTE: [16])



Os elementos que compõem um espelho esférico são:

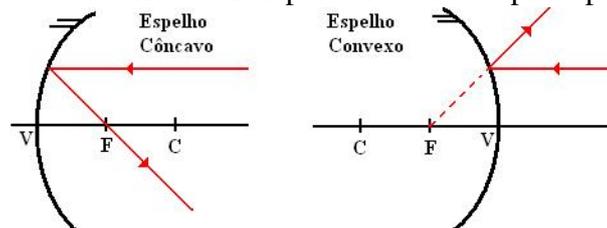
- Centro de Curvatura(C): que coincide com o centro da esfera da qual a calota faz parte;
- Raio de Curvatura(R): que coincide com o raio da esfera da qual a calota faz parte;
- Vértice do Espelho(V): é o ponto mais externo da calota;
- Eixo principal do espelho: a reta definida pelo centro de curvatura e pelo vértice;
- Eixo secundário do espelho: qualquer reta que passe pelo centro de curvatura, mas não pelo vértice;
- Abertura do espelho( $\alpha$ ): o ângulo plano determinado pelos eixos secundários que passam por pontos, A e B, diametralmente opostos, do contorno do espelho;

- Plano frontal: qualquer plano perpendicular ao eixo principal;
- Plano meridiano: qualquer plano que contenha o eixo principal;

Os raios de luz que incidem num espelho esférico obedecem a algumas propriedades listadas abaixo:

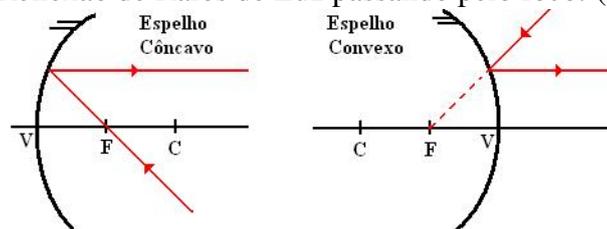
Todo raio de luz que incidir paralelamente ao eixo principal é refletido em uma direção que passa pelo foco.

Figura 4.4: Reflexão de Raios de Luz paralelos ao eixo principal. (FONTE: [14])



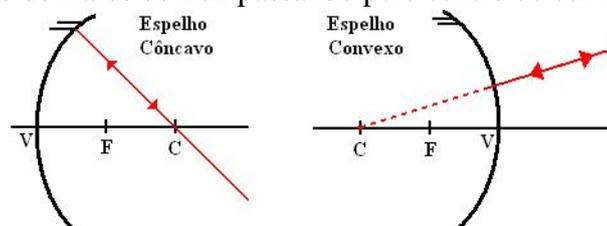
Se o raio de luz incidir no espelho em uma direção que passa pelo foco ele será refletido paralelamente ao eixo principal.

Figura 4.5: Reflexão de Raios de Luz passando pelo foco. (FONTE: [14])



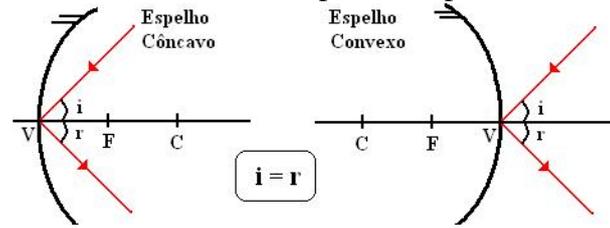
Todo raio de luz que incide sobre o espelho, numa direção que passa pelo centro de curvatura, reflete sobre si mesmo. Isso ocorre porque esses raios coincidem exatamente com os normais ao espelho pelos pontos de incidência.

Figura 4.6: Reflexão de Raios de Luz passando pelo centro de curvatura. (FONTE: [14])



E se o raio de luz incidir sobre o vértice, ele será refletido de maneira que o ângulo de reflexão seja igual ao ângulo de incidência.

Figura 4.7: Reflexão de Raios de Luz passando pelo vértice. (FONTE: [14])



# Capítulo 5

## Conclusões

Um dos grandes desafios do ensino da Matemática atualmente é conseguir associar a teoria com a prática, porém, como afirmou Lobachevsky, “Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa vir a ser aplicado mais cedo ou mais tarde aos fenômenos do mundo real.” A Geometria Diferencial é um desses ramos matemáticos considerados por muitos como abstrato, não obstante a mesma possui inúmeras aplicações que estudam e explicam situações e formas existentes em nosso cotidiano, como por exemplo a curvatura que é observada e facilmente interpretada em várias situações cotidianas. Esse conceito “geométrico” é estudado e quantificado algebricamente através da Geometria Diferencial.

Ao apresentar o contexto histórico da curvatura e das cônicas, procuramos situar o leitor da importância de tais ferramentas matemáticas. O estudo das curvas planas presente em nosso trabalho fornece as definições e resultados essenciais da Geometria Diferencial para definição do conceito de curvatura (em especial a curvatura das cônicas) e dedução de sua fórmula algébrica associada a sua interpretação geométrica.

Uma grande contribuição do nosso trabalho foi detalhar os procedimentos geométricos para encontrar o centro de curvatura de uma cônica, uma vez que é muito difundido o cálculo da curvatura por meio de fórmulas algébricas e essa parte do nosso trabalho evidencia uma faceta deste conceito que não é muito conhecida. Este procedimento abordado se credencia como um possível tópico a ser abordado na disciplina de desenho geométrico no cursos de graduação em Matemática e até para uma possível abordagem no ensino médio, pois utiliza apenas procedimentos geométricos elementares.

Por fim, abordamos uma das aplicações do conceito de curvatura, a componente normal da aceleração, que vem ao encontro com a noção intuitiva que temos de curvatura ao longo dos trajetos sinuosos das rodovias e pistas automobilísticas. Foi uma satisfação elaborar este trabalho e contribuir com mais uma fonte de pesquisa acerca do conceito de curvatura. Indicamos a leitura deste trabalho por parte dos professores de Matemática do ensino médio, a fim de que compreendam com propriedade a curvatura e também sugerimos uma abordagem com maior ênfase deste conceito nessa etapa de ensino.

## Referências Bibliográficas

- [1] ALENCAR, H., SANTOS, W.; *Geometria Diferencial das Curvas Planas.*, 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003, v. 1. 222p.
- [2] BENETTI, Djeison.; *Um estudo sobre a teoria local de curvas: Triedro de Frenet.* , Trabalho de Conclusão de Curso- UNEMAT, Sinop, 2009.
- [3] BIEZUNER, R. J.; *Notas de Aula Geometria Diferencial*, Belo Horizonte - MG: UFMG, 2016.
- [4] BOYER, Carl B.; *História da Matemática.*, Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide - 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [5] COIMBRA, José de Ribamar Viana.; *Uma introdução à geometria diferencial*, Campinas - SP: Dissertação de Mestrado- UNICAMP, 2008.
- [6] DELGADO, J., FRENSEL, K., CRISSAFF, L.; *Geometria Analítica*, coleção PROFMAT 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2013.
- [7] DOMINGUES, J. P. F.; *Geometria Diferencial das Curvas Planas*, Rio Claro - SP: Dissertação de Mestrado- PROFMAT- UNESP, 2013, 71p.
- [8] LIMA, Elon Lages; *Curso de análise.*, Volume 1. 12<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [9] NUNES, J. G. G.; *Cônicas unificadas em coordenadas polares para uma nova abordagem no ensino médio*, Fortaleza - CE: Dissertação de Mestrado- PROFMAT- UFC, 2014, 96p.
- [10] RAMALHO, F., G. F. NICOLAU, P.A. TOLEDO; *Os Fundamentos da Física 2*, 6<sup>a</sup> ed. São Paulo - SP: Editora Moderna, 1997.
- [11] SOUZA, L. D.; *Cônicas e Suas Propriedades Notáveis*, Florianópolis - SC: Dissertação de Mestrado- PROFMAT-UFSC, 2014, 64p.
- [12] YATES, ROBERT C.; *Centre of Curvature for the Conics*, The Mathematical Gazette, Vol. 35, N<sup>o</sup> 311, (Feb., 1951), pp. 19–22.

- [13] CATTAI, A. P.; *Matemática Básica (MA0002)*, UNEB, 2010. Disponível em <<http://cattai.mat.br/site/images/stories/UNEB/MatBasica/TransfCoordConicas.pdf>>. Acesso em 20 de junho de 2017.
- [14] *Espelho Esférico* Disponível em <<http://elimarcs.blogspot.com.br/2011/09/espelho-esferico.html>>. Acesso em 20 de Maio de 2017.
- [15] GUIMARÃES, A. E.; *Os postulados de Euclides - Ideias Geniais - 02*. Disponível em <<https://alguimaraes.wordpress.com/2013/08/13/os-postulados-de-euclides-ideias-geniais-02/>>. Acesso em 27 de junho de 2017.
- [16] INFOESCOLA.; *Espelho Convexo* Disponível em <<http://www.infoescola.com/optica/espelho-convexo/>>. Acesso em 20 de Maio de 2017.
- [17] MAFRA, Leonardo.; *Funções Vetoriais*, 2011. Disponível em <<https://www.passeidireto.com/arquivo/1834492/funcaovetorial>>. Acesso em 28 de Abril de 2017.
- [18] MONTESDEOCA, A.; *Una construcción del centro de curvatura en cónicas*, La Laguna, 2009. Disponível em <<https://amontes.webs.ull.es/pdf/elipsecu.pdf>>. Acesso em 15 jan 2017.
- [19] NAVEIRA, A. M.; *La curvatura de Riemann através de la historia*, 2ª ed. Valência - Espanha: Universidad de Valencia, 2005. Disponível em <<https://pt.scribd.com/document/131927776/La-curvatura-de-Riemann-a-traves-de-la-Historia-Naveira-A-M-pdf>>. Acesso em 03 jan 2017.
- [20] PELÁ, Ronaldo Rodrigues; *Mecânica I (FIS-14)*, 2012. Disponível em <<http://www.ief.ita.br/rrpela/downloads/fis14/FIS14-2012-aula06.pdf>>. Acesso em 12 de abril de 2017.
- [21] SOMATEMÁTICA.; *Apolônio de Perga* Disponível em <<http://www.somatematica.com.br/biograf/apolonio.php/>>. Acesso em 27 de junho de 2017.